

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מ ת ט י ק ה

4 יחידות לימוד — שאלון שני

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעה ושלושה רבעים.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים.

פרק ראשון — סדרות, טריגונומטריה במרחב — $33\frac{1}{3} \times 1$ — נקודות $33\frac{1}{3}$

פרק שני — גדילה ודעיכה, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

של פונקציות טריגונומטריות,

פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

ופונקציות חזקה — $33\frac{1}{3} \times 2$ — נקודות $66\frac{2}{3}$

סה"כ — 100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר

החשובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטייטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.

שימוש בטייטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

שאלה 1

$$\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_{n+1} = 4a_n + 9 \end{cases} \quad \text{נתונה סדרה המוגדרת לכל } n \text{ טבעי על ידי הכלל:}$$

$$b_n = a_n + 3 \quad \text{היא סדרה המוגדרת לכל } n \text{ טבעי על ידי הכלל:}$$

- א. הוכח שהסדרה b_n היא סדרה הנדסית.
 ב. מצא את סכום 4 האיברים הראשונים בסדרה b_n .
 ג. בסדרה b_n סכום 4 האיברים הראשונים קטן ב-43,350 מסכום k האיברים העוקבים שאחרי האיבר הרביעי.
 מצא את k .

תשובה לשאלה 1

א. $a_n + 3 > 0$ כי כל איברי הסדרה a_n ,

חוץ מהראשון, הם חיוביים, לכן מתקיים:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+1} + 3}{a_n + 3}$$

$\Downarrow$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{4a_n + 12}{a_n + 3}$$

נציב $a_{n+1} = 4a_n + 9$, ונקבל:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = 4$$

נצמצם ב- $a_n + 3$, ונקבל:

$\Downarrow$

b_n היא סדרה הנדסית כי המנה של שני איברים עוקבים היא קבועה

ב. בסדרה b_n מתקיים: $q = 4$, $b_1 = a_1 + 3 = -1 + 3 = 2$

סכום 4 האיברים הראשונים בסדרה b_n הוא: $S_4 = \frac{b_1(q^4 - 1)}{q - 1} = \frac{2(4^4 - 1)}{4 - 1} = 170$

ג. סכום k איברים אחרי האיבר הרביעי בסדרה b_n הוא: $S_k = \frac{b_5(4^k - 1)}{4 - 1}$

$$b_5 = b_1 q^4 = 2 \cdot 4^4 = 512$$

לפי הנתון: $S_k = S_4 + 43,350$

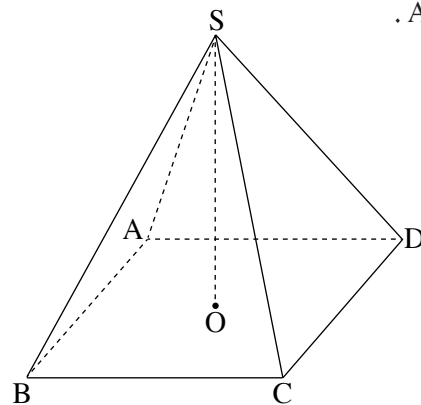
$\Downarrow$

$$\frac{512(4^k - 1)}{4 - 1} = 170 + 43,350$$

$\Downarrow$

$$4^k = 256 \Rightarrow k = 4$$

שאלה 2



נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה מלבן ABCD.

SO הוא גובה הפירמידה (ראה ציור).

SK הוא גובה למקצוע CD בפאה SCD.

נתון: $SK = 16$ ס"מ

הזווית בין SK למישור הבסיס היא 68°

א. חשב את אורך המקצוע BC.

ב. נתון גם: $CD = 10$ ס"מ

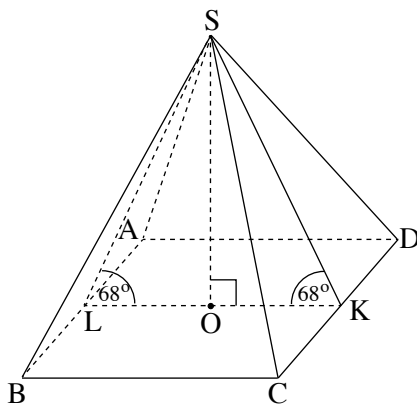
(1) חשב את הזווית CSD.

(2) ציין זווית אחרת בין שני מקצועות של הפירמידה, השווה בגודלה לזווית CSD.

ג. SL הוא גובה למקצוע AB בפאה SAB.

מצא את הזווית שבין SK ובין SL.

תשובה לשאלה 2



הזווית בין SK למישור הבסיס היא $\angle SKO$
כי היא הזווית בין SK להיטל שלו במישור הבסיס

א.

$\Downarrow$

$$\frac{OK}{SK} = \cos \angle SKO$$

במשולש SOK מתקיים:

$\Downarrow$

$$\frac{OK}{16} = \cos 68^\circ$$

$\Downarrow$

$$OK = 16 \cdot \cos 68^\circ$$

$$BC = 2 \cdot OK$$

$\Downarrow$

$$BC = 2 \cdot 16 \cdot \cos 68^\circ = 11.987 \text{ ס"מ}$$

המשך תשובה לשאלה 2.

ב. (1) במשולש שווה-שוקיים SCD

שבו $SC = SD$ מתקיים:

$$\frac{\frac{1}{2}CD}{SK} = \tan\left(\frac{1}{2} \angle CSD\right)$$

$\Downarrow$

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot 10}{16} = \tan\left(\frac{1}{2} \angle CSD\right)$$

$\Downarrow$

$$\frac{1}{2} \angle CSD = 17.35^\circ$$

$\Downarrow$

$$\angle CSD = 34.7^\circ$$

(2) בפירמידה ישרה כל המקצועות הצדדיים שווים,

$$\triangle SAB \cong \triangle SCD \quad \text{על פי צ.צ.צ.}$$

לכן מתקיים:

$\Downarrow$

$$\angle BSA = \angle CSD$$

$$SK = SL \quad \text{גבהים לצלעות מתאימות במשולשים חופפים}$$

ג.

$\Downarrow$

$$\angle SLK = \angle SKL = 68^\circ$$

על פי הנתון:

$\Downarrow$

$$\angle LSK = 180^\circ - 2 \cdot 68^\circ = 44^\circ$$

שאלה 3

נתונה הפונקציה $f(x) = e^x + \frac{e^2}{e^x} - 2e$.

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?
- ב. מצא את השיעורים של נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.
- ג. מצא את השיעורים של נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ה. נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.
על פי הגרף של $f(x)$ שסרטטת, מצא עבור אילו ערכים של x הפונקציה $g(x)$ חיובית.

תשובה לשאלה 3

א. $f(x)$ מוגדרת לכל x .

ב. $x = 0 \Rightarrow f(0) = 1 + e^2 - 2e = 2.95$

$\Downarrow$

נקודת החיתוך של $f(x)$ עם ציר ה- y : $(0, 2.95)$

$$f(x) = e^x + \frac{e^2}{e^x} - 2e = \frac{e^{2x} - 2e \cdot e^x + e^2}{e^x}$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow e^{2x} - 2e \cdot e^x + e^2 = (e^x - e)^2 = 0$$

$\Downarrow$

$$e^x = e$$

$\Downarrow$

$$x = 1$$

נקודת החיתוך של $f(x)$ עם ציר ה- x : $(1, 0)$

המשך תשובה לשאלה 3.

$$f(x) = e^x + \frac{e^2}{e^x} - 2e = e^x + e^{2-x} - 2e \quad .ג.$$

$\Downarrow$

$$f'(x) = e^x + e^{2-x} \cdot (-1) = e^x - e^{2-x}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^x = e^{2-x}$$

$\Downarrow$

$$x = 1$$

$$f(1) = e + \frac{e^2}{e} - 2e = 0$$

$$(1, 0)$$

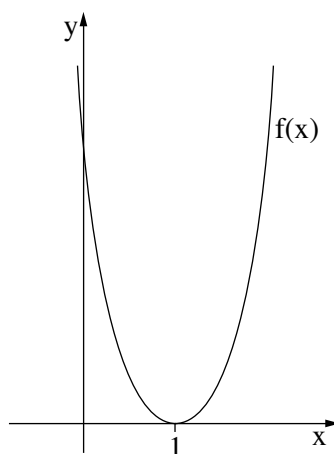
נקודה "חשודה" לקיצון:

x	0	1	2
f'(x)	$1 - e^2$	0	$e^2 - 1$
f(x)	$\searrow$		$\nearrow$

$\Downarrow$

ל- $f(x)$ מינימום ב- $(1, 0)$

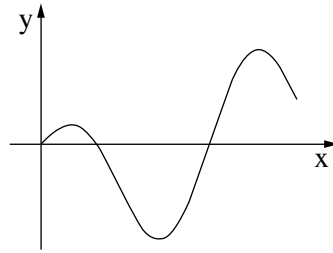
.ד.



ה. על פי הגרף שבסעיף ד: $f(x) > 0$ עבור $x \neq 1$

הסימן של $g(x)$ נקבע על פי $f(x)$, לכן: $g(x) > 0$ עבור $x \neq 1$

שאלה 4



בציור שלפניך מוצג הגרף של הפונקציה

$$f(x) = a \cdot \sin(2x) - \frac{1}{2} \sin x$$

בתחום $0 \leq x \leq 1.5\pi$. הוא פרמטר.

ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = \pi$,

$$y = 1.5x + 3$$

א. מצא את הערך של a .

הצב $a = \frac{1}{2}$, וענה על הסעיפים ב ו ג.

ב. בתחום $0 \leq x \leq 1.5\pi$, מצא את השיעורים של נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$

עם ציר ה- x .

ג. בתחום $0 \leq x \leq \pi$, מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה- x .

תשובה לשאלה 4

א. המשיק בנקודה $x = \pi$ מקביל לישר $y = 1.5x + 3$,

לכן שיפוע המשיק הוא:

$$f'(\pi) = 1.5$$

$$f'(x) = 2a \cos(2x) - \frac{1}{2} \cos x$$

$\Downarrow$

$$1.5 = 2a \cos(2\pi) - \frac{1}{2} \cos \pi$$

$\Downarrow$

$$1.5 = 2a + \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin(2x) - \frac{1}{2} \sin x$$

$\Downarrow$

$$f(x) = \sin x \left(\cos x - \frac{1}{2} \right)$$

נשתמש בזהות $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, ונקבל:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \sin x = 0, \cos x = \frac{1}{2}$$

$\Downarrow$

$$x = 0, x = \pi$$

$\Downarrow$

$$x = \frac{\pi}{3}$$

הפתרונות בתחום $0 \leq x \leq 1.5\pi$ הם:

נקודות החיתוך של $f(x)$ עם ציר ה- x

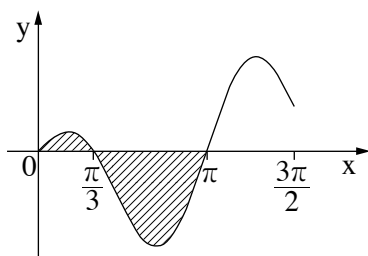
$$(0, 0) \quad \left(\frac{\pi}{3}, 0\right) \quad (\pi, 0)$$

בתחום $0 \leq x \leq 1.5\pi$:

המשך תשובה לשאלה 4.

ג. השטח המבוקש מורכב משני שטחים,

השטחים המקווקוים בציור שלפניך:



⇓

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{2} \sin(2x) - \frac{1}{2} \sin x \right) dx - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \left(\frac{1}{2} \sin(2x) - \frac{1}{2} \sin x \right) dx$$

⇓

$$S = \left[-\frac{1}{4} \cos(2x) + \frac{1}{2} \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \left[-\frac{1}{4} \cos(2x) + \frac{1}{2} \cos x \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$$

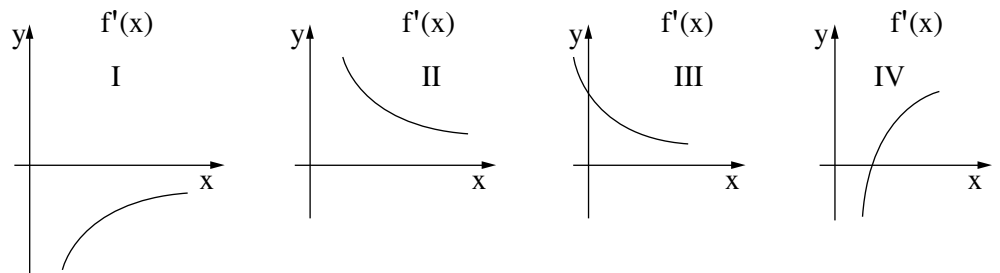
⇓

$$S = 1 \frac{1}{4}$$

שאלה 5

נתונה הפונקציה $f(x) = \log_2(x^2) + \frac{1}{3}\log_2 x$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
 ב. מצא את השיעורים של נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).
 ג. הראה כי הפונקציה $f(x)$ עולה לכל x בתחום ההגדרה שלה.
 ד. מבין הגרפים IV-I שלפניך, קבע איזה גרף הוא הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$. נמק.



- ה. מצא את השטח המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = 1$ ו- $x = 2$.

תשובה לשאלה 5

א. צריך להתקיים: $x^2 > 0$, $x > 0$

$\Downarrow$

$$x \neq 0$$

$\Downarrow$

תחום ההגדרה של $f(x)$: $x > 0$

ב. $f(x) = \log_2(x^2) + \frac{1}{3}\log_2 x$

$\Downarrow$

$$f(x) = 2\log_2 x + \frac{1}{3}\log_2 x = \frac{7}{3}\log_2 x \quad \text{לכן: } x > 0$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow \log_2 x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$f(1) = 0$$

נקודת החיתוך של $f(x)$ עם ציר ה- x : $(1, 0)$

הפונקציה $f(x)$ מוגדרת עבור $x > 0$

$\Downarrow$

אין חיתוך ל- $f(x)$ עם ציר ה- y

המשך תשובה לשאלה 5.

ג. מצאנו בסעיף ב:

$$f(x) = \frac{7}{3} \log_2 x$$

↓

הפונקציה $\log_2 x$ היא פונקציה לוגריתמית שבסיסה גדול מ-1

↓

$f(x)$ היא פונקציה עולה

דרך אחרת

$$f'(x) = \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln 2}$$

↓

$f'(x) > 0$ עבור $x > 0$

לכן, $\frac{7}{3 \ln 2} > 0$

↓

$f(x)$ עולה עבור $x > 0$

↓

תחום ההגדרה של $f(x)$ הוא $x > 0$, לכן: $f(x)$ עולה בתחום ההגדרה שלה

$$f'(x) = \frac{7}{x \cdot 3 \ln 2}$$

↓

$f'(x)$ אינה מוגדרת ב- $x = 0$

↓

גרף III אינו הגרף של $f'(x)$

$f'(x) > 0$ עבור $x > 0$

מצאנו:

↓

גרף II הוא הגרף של $f'(x)$

$$S = \int_1^2 f'(x) dx = [f(x)]_1^2$$

ה. השטח המבוקש הוא:

↓

$$S = f(2) - f(1) = \frac{7 \log_2 2}{3} - \frac{7 \log_2 1}{3} = \frac{7}{3}$$