

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מתמטיקה

3 יחידות לימוד — שאלון שלישי

הוראות לנבחן

א. משר הבחינה: שעותיים.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שש שאלות בנושאים:

אלגברה, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי.

עליך לענות על ארבע שאלות — $100 = 25 \times 4$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר

החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.

שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

שאלה 1

מסעדה הציעה שני תפריטים של ארוחות עסקיות קבוצתיות.

תפריט צמחוני במחיר של 34 שקלים לסועד.

תפריט בשרי במחיר של 68 שקלים לסועד.

למסעדה הגיעו שתי קבוצות: קבוצה א' וקבוצה ב'.

קבוצה א' בחרה בתפריט צמחוני, וקבוצה ב' בחרה בתפריט בשרי.

מספר הסועדים בקבוצה ב' היה קטן ב-10 ממספר הסועדים בקבוצה א'.

המחיר הכולל ששילמה קבוצה ב' היה 75% מן המחיר הכולל ששילמה קבוצה א'.

א. מצא כמה סועדים היו בכל קבוצה.

ב. מצא את המחיר הכולל שהייתה קבוצה ב' משלמת, אילו מספר הסועדים בה היה

כמספר הסועדים בקבוצה א'.

תשובה לשאלה 1

א. נסמן: x — מספר הסועדים בקבוצה א'.

$$x - 10$$

לכן מספר הסועדים בקבוצה ב' הוא:

$$34x$$

המחיר הכולל ששילמה קבוצה א' הוא:

$$68(x - 10)$$

המחיר הכולל ששילמה קבוצה ב' הוא:

המחיר הכולל ששילמה קבוצה ב'

היה 75% מהמחיר הכולל ששילמה קבוצה א',

$$68(x - 10) = 0.75 \cdot 34x$$

לכן מתקיים:

⇓

$$68x - 680 = 25.5x$$

⇓

$$x = 16$$

16 סועדים

מספר הסועדים בקבוצה א' הוא:

6 סועדים

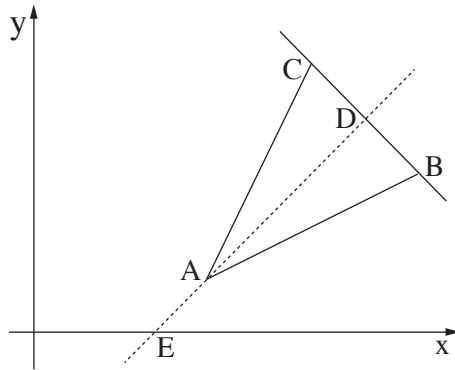
מספר הסועדים בקבוצה ב' הוא:

ב. המחיר הכולל שהיתה משלמת קבוצה ב'

$$16 \cdot 68 = 1088$$

אילו מספר הסועדים בה היה 16 הוא:

שאלה 2



הנקודות $A(4, 1)$ ו- $B(8, 3)$ הם שני קדקודים

במשולש שווה-שוקיים ABC ($AB = AC$).

הצלע BC מונחת על הישר $y = -x + 11$.

מנקודה A הורידו גובה לצלע BC .

הגובה חותך את BC בנקודה D

ואת ציר ה- x בנקודה E (ראה ציור).

א. (1) מצא את שיפוע הישר AD .

(2) מצא את משוואת הישר AD .

ב. מצא את שיעורי הנקודות D , E ו- C .

ג. הסבר מדוע המשולש CEB הוא שווה-שוקיים.

תשובה לשאלה 2

א. (1) הישר AD מאונך לצלע BC ,

הצלע BC מונחת על הישר שמשוואתו $y = -x + 11$,

לכן $m_{BC} = -1$.

מכפלת השיפועים של ישרים מאונכים היא -1 ,

לכן מתקיים: $m_{AD} \cdot m_{BC} = -1$

$\Downarrow$

$$m_{AD} = 1$$

השיפוע של הישר AD הוא:

(2) הישר AD עובר דרך הנקודה $A(4, 1)$

ושיפועו 1 , לכן משוואתו:

$$y - 1 = 1 \cdot (x - 4)$$

$\Downarrow$

$$y = x - 3$$

המשוואה של הישר AD היא:

המשך תשובה לשאלה 2.

ב. חיתוך הישר $y = x - 3$ עם ציר ה- x

הוא בנקודה שבה $y = 0$, לכן:

$$0 = x - 3$$

$$\Downarrow$$

$$x = 3$$

$$E(3, 0)$$

השיעורים של הנקודה E הם:

בנקודה D, הישר שמשוואתו $y = x - 3$

נחתך עם הישר שמשוואתו $y = -x + 11$.

לכן מתקיים:

$$x - 3 = -x + 11$$

$$\Downarrow$$

$$2x = 14$$

$$\Downarrow$$

$$x = 7$$

$$\Downarrow$$

$$y = 4$$

$$D(7, 4)$$

השיעורים של הנקודה D הם:

במשולש שווה-שוקיים ABC שבו $AB = AC$

הגובה AD הוא גם תיכון לצלע BC,

לכן הנקודה C היא אמצע הצלע BC ומתקיים:

$$\frac{x_C + x_B}{2} = x_D, \quad \frac{y_C + y_B}{2} = y_D$$

$$\Downarrow$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{x_C + 8}{2} = 7, \quad \frac{y_C + 3}{2} = 4$$

$$\Downarrow$$

$$\Downarrow$$

$$x_C = 6, \quad y_C = 5$$

$$\Downarrow$$

$$C(6, 5)$$

השיעורים של הנקודה C הם:

/המשך בעמוד 5/

המשך תשובה לשאלה 2.

ג. דרך I:

משולש CEB הוא שווה-שוקיים אם מתקיים $EB = EC$.

נמצא את האורכים של הקטעים EB ו-EC :

$$E(3, 0), B(8, 3), C(6, 5)$$

$$EB^2 = (3 - 8)^2 + (0 - 3)^2 = 34$$

$$EC^2 = (3 - 6)^2 + (0 - 5)^2 = 34$$

$\Downarrow$

$$EB^2 = EC^2$$

$\Downarrow$

$$EB = EC = \sqrt{34}$$

אם במשולש שתי צלעות שוות אז המשולש הוא שווה-שוקיים

דרך II:

ED מאונך ל-BC, כלומר הוא גובה במשולש CEB.

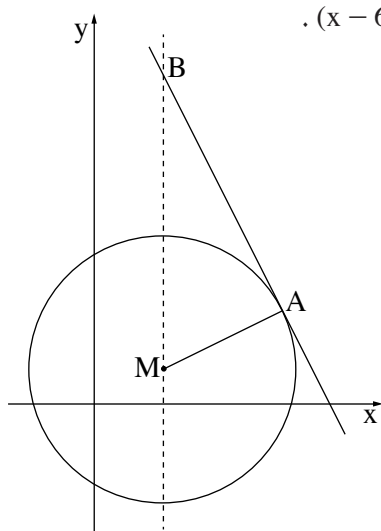
ED הוא גם תיכון לצלע BC במשולש CEB.

אם במשולש הגובה לצלע הוא גם התיכון לצלע אז המשולש הוא שווה-שוקיים.

לכן משולש CEB הוא שווה-שוקיים.

/המשך בעמוד 6/

שאלה 3



נתון מעגל שמרכזו M, ומשוואתו $(x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 125$.

בנקודה A שעל המעגל העבירו משיק ששיפועו -2 .

שיעור ה־x של הנקודה A הוא 16

(ראה ציור).

א. (1) מצא את שיעור ה־y של נקודה A.

(2) מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה A.

ב. הישר $x = 6$ חותך את המשיק שמצאת בסעיף א

בנקודה B, כמתואר בציור.

מצא את שיעורי הנקודה B.

ג. מצא את שטח המשולש AMB.

תשובה לשאלה 3

א. (1) דרך I:

הנקודה A נמצאת על המעגל.

לכן השיעורים של הנקודה A מקיימים את משוואת המעגל.

נציב את שיעור ה־x של הנקודה A במשוואת המעגל ונקבל:

$$(16 - 6)^2 + (y - 3)^2 = 125$$

$\Downarrow$

$$(y - 3)^2 = 25$$

$\Downarrow$

$$y = 8, y = -2$$

הנקודה A נמצאת ברביע הראשון לכן שיעור ה־y הוא חיובי.

השיעורים של הנקודה A הם:

$$A(16, 8)$$

דרך II:

משיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה.

לכן הקטע AM מאונך למשיק למעגל בנקודה A.

שיפועו של המשיק הוא -2 ,

לכן שיפוע הקטע AM הוא $\frac{1}{2}$, ומתקיים:

$$m_{AM} = \frac{y_A - y_M}{x_A - x_M} = \frac{1}{2}$$

$\Downarrow$

$$\frac{y_A - 3}{16 - 6} = \frac{1}{2}$$

$\Downarrow$

$$y_A = 8$$

$$A(16, 8)$$

השיעורים של הנקודה A הם:

$$y - 8 = -2(x - 16)$$

$\Downarrow$

$$y = -2x + 40$$

(2) משוואת המשיק למעגל בנקודה A היא:

המשך תשובה לשאלה 3.

ב. הנקודה B היא נקודת החיתוך של הישר $x = 6$ עם הישר המשיק $y = -2x + 40$, לכן מתקיים:

$$y = -2 \cdot 6 + 40$$

↓

$$y = 28$$

$$B(6, 28)$$

השיעורים של הנקודה B הם:

ג. דרך I:

משיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה. לכן $\angle MAB = 90^\circ$. שטח המשולש AMB שווה למחצית מכפלת הניצבים, ומתקיים:

$$S_{\triangle AMB} = \frac{AM \cdot AB}{2}$$

$$AM = R = \sqrt{125}$$

$$AB = \sqrt{(16-6)^2 + (28-8)^2} = \sqrt{500}$$

↓

$$S_{\triangle AMB} = \frac{\sqrt{125} \cdot \sqrt{500}}{2} = 125$$

שטח המשולש AMB הוא:

דרך II:

שטח המשולש AMB שווה למחצית מכפלת הצלע MB בגובה AD היורד אליה (ראה ציור). לכן מתקיים:

$$S_{\triangle AMB} = \frac{MB \cdot AD}{2}$$

$$AD = x_A - x_D$$

$$x_D = 6$$

↓

$$AD = 16 - 6 = 10$$

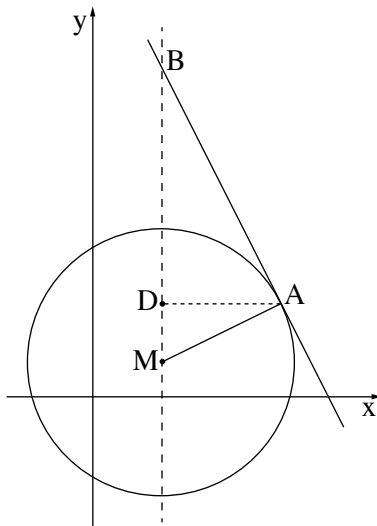
$$MB = y_B - y_M$$

↓

$$MB = 28 - 3 = 25$$

↓

$$S_{\triangle AMB} = \frac{25 \cdot 10}{2} = 125$$



שאלה 4

נתונה הפונקציה $f(x) = 2x - 8\sqrt{x}$.

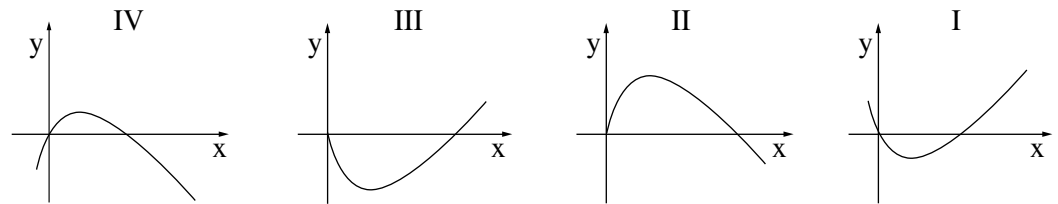
א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצא את נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה, וקבע את סוגה.

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה. נמק את תשובתך.

ד. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y .

ה. קבע איזה מן הגרפים IV-I שלפניך הוא גרף הפונקציה $f(x)$. נמק.



תשובה לשאלה 4

א. תחום ההגדרה הוא: $x \geq 0$ הביטוי בתוך השורש הריבועי חייב להיות אי-שלילי

ב. הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = 2 - \frac{8}{2\sqrt{x}}$

$$f'(x) = 0$$

$\Downarrow$

$$2 - \frac{4}{\sqrt{x}} = 0$$

$\Downarrow$

$$2 = \frac{4}{\sqrt{x}}$$

$\Downarrow$

$$x = 4$$

שיעור ה- x שעבורו $f'(x) = 0$ הוא:

בדיקת סימן הנגזרת $f'(x)$:

התחומים	$0 < x < 4$	$x = 4$	$x > 4$
x	$x = 1$	$x = 4$	$x = 9$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	נקודת מינימום	$\nearrow$

השיעורים של נקודת הקיצון הפנימית הם: $(4, -8)$ נקודת מינימום

המשך תשובה לשאלה 4.

ג. נקבע את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$

על פי סימן הנגזרת $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \quad \text{בתחום } x > 4$$

$$f'(x) < 0 \quad \text{בתחום } 0 < x < 4$$

$\Downarrow$

$$x > 4$$

הפונקציה $f(x)$ עולה בתחום:

$$0 < x < 4$$

הפונקציה $f(x)$ יורדת בתחום:

ד. בנקודת החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y

$$f(0) = 2 \cdot 0 - 8\sqrt{0} \quad \text{שיעור ה-} x \text{ הוא } x = 0, \text{ לכן מתקיים:}$$

$\Downarrow$

$$f(0) = 0$$

$\Downarrow$

$$(0, 0)$$

נקודת החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y היא:

ה. גרף III הוא גרף הפונקציה $f(x)$, כי מתקיים:

$$(1) \quad \text{תחום ההגדרה } x \geq 0.$$

$$(2) \quad \text{נקודת קיצון פנימית } (4, -8) \text{ שהיא נקודת מינימום.}$$

$$(3) \quad \text{הפונקציה עולה בתחום } x > 4 \text{ ויורדת בתחום } 0 < x < 4.$$

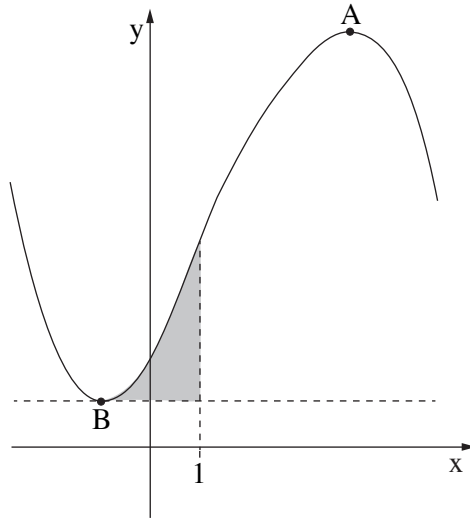
$$(4) \quad \text{נקודת חיתוך עם ציר ה-} y \text{ } (0, 0).$$

בגרף I הפונקציה מוגדרת לכל x , לכן הגרף אינו מתאים.

בגרף II לפונקציה יש נקודת קיצון מקסימום, לכן הגרף אינו מתאים.

בגרף IV הפונקציה מוגדרת לכל x ולפונקציה יש נקודת מקסימום, לכן הגרף אינו מתאים.

שאלה 5



בציור שלפניך מתוארת סקיצה של גרף הפונקציה

$$f(x) = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 5x + 6\frac{2}{3}$$

A ו-B הן נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$.

א. מצא את השיעורים של הנקודות A ו-B.

ב. בנקודה B העבירו משיק לגרף הפונקציה $f(x)$.

מצא את משוואת המשיק.

ג. חשב את השטח המוגבל

על ידי גרף הפונקציה $f(x)$,

על ידי הישר $x = 1$ ועל ידי המשיק

שאת משוואתו מצאת בסעיף ב

(השטח האפור בציור).

תשובה לשאלה 5

$$f'(x) = -x^2 + 4x + 5$$

א. הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא:

$$f'(x) = 0$$

$\Downarrow$

$$-x^2 + 4x + 5 = 0$$

$\Downarrow$

$$x = -1, x = 5$$

שיעור ה- x של הנקודות שעבורן $f'(x) = 0$ הוא:

השיעורים של הנקודה A הם: $A(5, 40)$ נקודת מקסימום

השיעורים של הנקודה B הם: $B(-1, 4)$ נקודת מינימום

ב. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודת המינימום הוא 0.

לכן משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה B היא: $y = 4$

ג. דרך I:

$$S_{\text{השטח האפור}} = \int_{-1}^1 (f(x) - 4) dx = \int_{-1}^1 \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 5x + 2\frac{2}{3}\right) dx$$

חישוב השטח האפור:

$$S_{\text{השטח האפור}} = -\frac{x^4}{12} + 2 \cdot \frac{x^3}{3} + 5 \cdot \frac{x^2}{2} + 2\frac{2}{3}x \Big|_{-1}^1$$

מציאת הפונקציה הקדומה:

$$S_{\text{השטח האפור}} = \left(-\frac{1}{12} + \frac{2}{3} + \frac{5}{2} + 2\frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{1}{12} - \frac{2}{3} + \frac{5}{2} - 2\frac{2}{3}\right) = 6\frac{2}{3}$$

הצבה של הגבולות:

$$S_{\text{השטח האפור}} = 6\frac{2}{3}$$

השטח המבוקש (השטח האפור) הוא:

דבר II:

מלבן S הוא השטח המוגבל על ידי

המשיק בנקודת המינימום ועל ידי ציר ה- x

בגבולות 1 - ו- 1. לכן:

$$S_{\text{מלבן}} - S_{\text{השטח האפור}} = \int_{-1}^1 f(x) dx$$

$$S_{\text{השטח האפור}} = \int_{-1}^1 \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 5x + 6\frac{2}{3}\right) dx - 4 \cdot 2$$

$$S_{\text{השטח האפור}} = -\frac{x^4}{12} + 2 \cdot \frac{x^3}{3} + 5 \cdot \frac{x^2}{2} + 6\frac{2}{3}x \Big|_{-1}^1 - 8$$

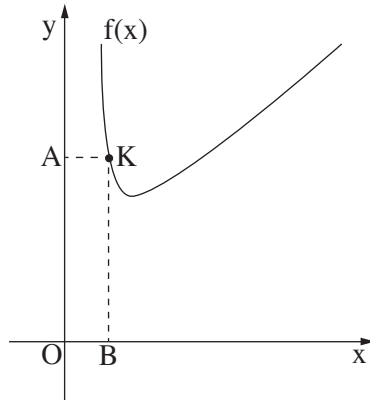
$$S_{\text{השטח האפור}} = \left(-\frac{1}{12} + \frac{2}{3} + \frac{5}{2} + 6\frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{1}{12} - \frac{2}{3} + \frac{5}{2} - 6\frac{2}{3}\right) - 8$$

$$S_{\text{השטח האפור}} = 6\frac{2}{3}$$

השטח המבוקש (השטח האפור) הוא:

/המשך בעמוד 12/

שאלה 6



בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה

$$f(x) = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + 5 \quad \text{בתחום } x > 0.$$

מנקודה K, הנמצאת על גרף הפונקציה,

מעבירים אנכים לצירים כך שנוצר מלבן AKBO

(O – ראשית הצירים).

א. הבע את האורכים של צלעות המלבן AK ו-KB

באמצעות שיעור ה־x של הנקודה K.

ב. מה צריך להיות שיעור ה־x של הנקודה K

כדי שהיקף המלבן AKBO יהיה מינימלי?

תשובה לשאלה 6

$$K(x, x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + 5)$$

א. השיעורים של הנקודה K הם:

אורך הקטע AK שווה לשיעור ה־x של הנקודה K,

לכן מתקיים:

$$x > 0, \quad AK = x$$

אורך הקטע KB שווה לשיעור ה־y של הנקודה K,

לכן מתקיים:

$$x > 0, \quad KB = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + 5$$

המשך תשובה לשאלה 6.

ב. היקף המלבן AKOB : $AKBO = 2AK + 2KB$ היקף

הפונקציה של היקף המלבן AKBO היא: $P(x) = 4x + \frac{1}{x} + 10$, $x > 0$ היקף

הנגזרת היא: $P'(x) = 4 - \frac{1}{x^2}$

$\Downarrow$

$$P'(x) = 0$$

$$4 - \frac{1}{x^2} = 0$$

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

$$x = \pm \frac{1}{2}, x > 0$$

$\Downarrow$

$$x = \frac{1}{2}$$

בדיקת הסוג של נקודת הקיצון
על פי הצבה בפונקציית הנגזרת:

תחומים	$0 < x < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$x > \frac{1}{2}$
x	$\frac{1}{4}$		1
P'(x)	-	0	+
P(x)	$\searrow$	נקודת מינימום	$\nearrow$

$\Downarrow$

$$x = \frac{1}{2} \text{ נקודת מינימום}$$

שיעור ה־ x, שעבורו היקף המלבן AKBO הוא מינימלי, הוא: $x = \frac{1}{2}$