מדינת ישראל

משרד החינוך

סוג הבחינה: א. בגרות לבתי"ס על־יסודיים
ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים

מועד הבחינה: קיץ תשע"ד

מספר השאלון: **317 ,035807**

תרגום לערבית (2)

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מתמטיקה

5 יחידות לימוד — שאלון שני

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעתיים.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

בשאלון זה שני פרקים.

פרק ראשון: גאומטריה אנליטית, וקטורים
טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

$33\frac{1}{3} \times 2$ – $66\frac{2}{3}$ נק'

פרק שני: גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה
פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

$33\frac{1}{3} \times 1$ – $33\frac{1}{3}$ נק'

סה"כ – 100 נק'

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
2. דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

1. אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
2. התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
3. לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ב ה צ ל ח ה!

دولة إسرائيل

وزارة التّربية والتّعليم

نوع الامتحان: أ. بجروت للمدارس الثّانويّة
ب. بجروت للممتحَنين الخارجيّين

موعد الامتحان: صيف 2014

رقم النّموذج: **317 ،035807**

ترجمة إلى العربيّة (2)

اقتراح إجابات لأسئلة امتحان بجروت

الرياضيّات

5 وحدات تعليميّة – النّموذج الثّاني

تعليمات للممتحَن

أ. مدّة الامتحان: ساعتان.

ب. مبنى النّموذج وتوزيع الدرجات:

في هذا النّموذج فصلان.

الفصل الأوّل: الهندسة التحليليّة، المتّجهات
حساب المثلّثات في الفراغ، الأعداد المركّبة

$33\frac{1}{3} \times 2$ – $66\frac{2}{3}$ درجة

الفصل الثاني: التزايد والتضاؤل، دوالّ القوى، الدوالّ الأسّيّة واللوغريثميّة

$33\frac{1}{3} \times 1$ – $33\frac{1}{3}$ درجة

المجموع – 100 درجة

جـ. موادّ مساعدة يُسمح استعمالها:

1. حاسبة غير بيانيّة. لا يُسمح استعمال إمكانيّات البرمجة في الحاسبة التي يمكن برمجتها. استعمال الحاسبة البيانيّة أو إمكانيّات البرمجة في الحاسبة قد يؤدّي إلى إلغاء الامتحان.
2. لوائح قوانين (مرفقة).

د. تعليمات خاصّة:

1. لا تنسخ السّؤال؛ اكتب رقمه فقط.
2. ابدأ كلّ سؤال في صفحة جديدة. اكتب في الدّفتر مراحل الحلّ، حتّى إذا أجريتَ حساباتك بواسطة حاسبة.
فسّر كلّ خطواتك، بما في ذلك الحسابات، بالتّفصيل وبوضوح وبترتيب.
عدم التّفصيل قد يؤدّي إلى خصم درجات أو إلى إلغاء الامتحان.
3. لكتابة مسوّدة يجب استعمال دفتر الامتحان أو الأوراق التي حصلتَ عليها من المراقبين.
استعمال مسوّدة أخرى قد يؤدّي إلى إلغاء الامتحان.

التّعليمات في هذا النّموذج مكتوبة بصيغة المذكّر وموجّهة للممتحَنات وللممتحَنين على حدّ سواء.

نتمنّى لك النّجاح!

السؤال 1

أ. جد معادلة المحلّ الهندسيّ للنقاط التي بُعد كلّ واحدة منها عن
المستقيم $-5x+12y+13=0$ ، هو 3 .

ب. ما هي معادلة المحلّ الهندسيّ لمراكز الدوائر التي تمسّ المحلّ الهندسيّ الذي وجدتَه في
البند "أ" في نقطتين؟

جـ. هل يمكن أن يمسّ المحور y إحدى الدوائر التي في البند "ب" في النقطة (0,0) ؟ علّل.

إجابة السؤال 1

أ. بُعد النقطة (x,y)
عن المستقيم $-5x+12y+13=0$ يحقّق: $\left|\frac{-5x+12y+13}{\sqrt{5^2+12^2}}\right|=3$

$$\Downarrow$$

$$\frac{-5x+12y+13}{13}=3 \quad \text{أو} \quad \frac{5x-12y-13}{13}=3$$

$$\Downarrow$$

المحلّ الهندسيّ هو مستقيمان متوازيان
معادلتاهما: $5x-12y-52=0$ وَ $5x-12y+26=0$

ب. الدوائر تمسّ المستقيمين

$$\Downarrow$$

بُعد مراكز الدوائر عن كلّ مستقيم هو 3

$$\Downarrow$$

مراكز الدوائر موضوعة على المستقيم المعطى في البند "أ"

$$\Downarrow$$

معادلة المحلّ الهندسيّ لمراكز الدوائر: $-5x+12y+13=0$

/ يتبع في صفحة 3 /

تكملة إجابة السؤال 1.

جـ. إذا كان المحور y يمسّ الدائرة في النقطة $(0\ ,\ 0)$

فإنّ مركز الدائرة موضوع على المحور x على بُعد R عن المحور y ،

ولذلك إحداثيّات المركز تكون: $(\pm R\ ,\ 0)$

نصف قطر الدائرة هو $R = 3$ ، لذلك إحداثيّات المركز تكون: $(3\ ,\ 0)$ أو $(-3\ ,\ 0)$

لفحص إذا كان المركزان $(3\ ,\ 0)$ وَ $(-3\ ,\ 0)$

موجودَيْن على المحلّ الهندسيّ الذي وجدناه في البند "ب"،

نعوّض إحداثيّات المركزين في معادلة المحلّ الهندسيّ، وينتج: $-5\cdot 3+12\cdot 0+13\neq 0$, $-5\cdot(-3)+12\cdot 0+13\neq 0$

$\Downarrow$

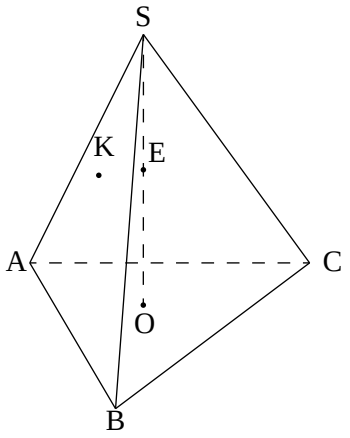
المحور y لا يمكن أن يمسّ

إحدى الدوائر في النقطة $(0\ ,\ 0)$

/ يتبع في صفحة 4 /

السؤال 2

معطى هرم قائم SABC ، قاعدته ABC
هي مثلّث متساوي الأضلاع.
ارتفاع الهرم هو SO .
النقطة E هي منتصف SO (انظر الرسم).
النقطة F تحقّق: $\overrightarrow{SF} = t\overrightarrow{SC}$.
نرمز: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{OS} = \underline{w}$.
النقطة K تحقّق: $\overrightarrow{SK} = \frac{1}{9}\underline{u} - \frac{2}{9}\underline{v} - \frac{2}{3}\underline{w}$.
جد قيمة t ، إذا عُلم أنّ النقاط F وَ K وَ E تقع على مستقيم واحد.



إجابة السؤال 2

F على الضلع SC ،

وحسب جمع المتّجهات ينتج: I. $\overrightarrow{KE} = -\overrightarrow{ES} - \overrightarrow{SK}$, II. $\overrightarrow{KF} = \overrightarrow{SF} - \overrightarrow{SK}$

حسب المعطى: $\overrightarrow{ES} = \frac{1}{2}\underline{w}$, $\overrightarrow{SK} = \frac{1}{9}\underline{u} - \frac{2}{9}\underline{v} - \frac{2}{3}\underline{w}$

نعوّض $\overrightarrow{ES}$ وَ $\overrightarrow{SK}$ في I ، وينتج: $\overrightarrow{KE} = -\frac{1}{9}\underline{u} + \frac{2}{9}\underline{v} + \frac{1}{6}\underline{w}$

حسب جمع المتّجهات: III. $\overrightarrow{SC} = -\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OS}$

$\overrightarrow{CO}$ موضوع على المستقيم المتوسّط CD في المثلّث المتساوي الأضلاع
بحيث O هي ملتقى المستقيمات المتوسّطة وَ D منتصف الضلع AB، لذلك: $\overrightarrow{CO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{CD}$ مستقيم متوسّط في المثلّث ABC ، لذلك: IV. $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

حسب جمع المتّجهات: $\overrightarrow{CB} = \underline{u} - \underline{v}$

نعوّض $\overrightarrow{CB}$ وَ $\overrightarrow{CA}$ في IV ، وينتج: $\overrightarrow{CD} = -\frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}(\underline{u} - \underline{v}) = \frac{1}{2}\underline{u} - \underline{v}$

$\Downarrow$

وجدنا أنّ $\overrightarrow{CO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$ ، لذلك: $\overrightarrow{CO} = \frac{1}{3}\underline{u} - \frac{2}{3}\underline{v}$

/ يتبع في صفحة 5 /

تكملة إجابة السؤال 2.

نعوّض $\overrightarrow{CO}$ وَ $\overrightarrow{OS}$ في III ، وينتج: $\overrightarrow{SC} = -\frac{1}{3}\underline{u} + \frac{2}{3}\underline{v} - \underline{w}$

$$\Downarrow$$

حسب المعطى $\overrightarrow{SF} = t\overrightarrow{SC}$ ، لذلك: $\overrightarrow{SF} = -\frac{t}{3}\underline{u} + \frac{2t}{3}\underline{v} - t\underline{w}$

نعوّض $\overrightarrow{SF}$ وَ $\overrightarrow{SK}$ في II ، وينتج: $\overrightarrow{KF} = -\left(\frac{t}{3} + \frac{1}{9}\right)\underline{u} + \left(\frac{2t}{3} + \frac{2}{9}\right)\underline{v} + \left(\frac{2}{3} - t\right)\underline{w}$

بما أنّ F وَ K وَ E على مستقيم واحد، عندها يجب أن يتحقّق: $\overrightarrow{KF} = s\overrightarrow{KE}$

$$\Downarrow$$

$$\overrightarrow{KF} = -\frac{s}{9}\underline{u} + \frac{2s}{9}\underline{v} + \frac{s}{6}\underline{w}$$

حسب وحدات تمثيل $\overrightarrow{KF}$ ينتج:

$$(1) \quad -\frac{s}{9} = -\left(\frac{t}{3} + \frac{1}{9}\right)$$

$$(2) \quad \frac{2}{9}s = \frac{2t}{3} + \frac{2}{9}$$

$$(3) \quad \frac{s}{6} = \frac{2}{3} - t$$

المعادلة (1) تكافئ المعادلة (2) ،

ومن المعادلتين (2) وَ (3) ينتج: $t = \frac{1}{3}$

/ يتبع في صفحة 6 /

السؤال 3

أ. ارسم في مستوى چاوس رسمًا تقريبيًّا للمحلّ الهندسيّ للأعداد المركّبة z
التي تحقّق: $|z+3-\sqrt{3}\,i|=\sqrt{3}$. علّل.

ب. المحلّ الهندسيّ الذي في البند "أ" يلتقي مع المحور x في النقطة z_1 .
معطاة النقطة $M(-3,\sqrt{3})$. نرمز بِـ O إلى نقطة أصل المحاور.
العدد المركّب z_2 يقع على المحلّ الهندسيّ الذي في البند "أ" بحيث يكون الشكل
الرباعيّ Oz_1Mz_2 دالتون.
جد الزاوية الحادّة للدالتون.

جـ. (1) جد زاوية z_2 (הארגומנט של z_2).

(2) من بين الأعداد المركّبة z التي في البند "أ"، ما هو العدد الذي لديه أكبر
زاوية (ארגומנט)؟
ما هي هذه الزاوية؟

إجابة السؤال 3

أ. نعوّض $z=x+i\,y$ في معادلة المحلّ الهندسيّ: $|x+i\,y+3-\sqrt{3}\,i|=\sqrt{3}$

$$\Downarrow$$

$$|x+3+(y-\sqrt{3})i|=\sqrt{3}$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{(x+3)^2+(y-\sqrt{3})^2}=\sqrt{3}$$

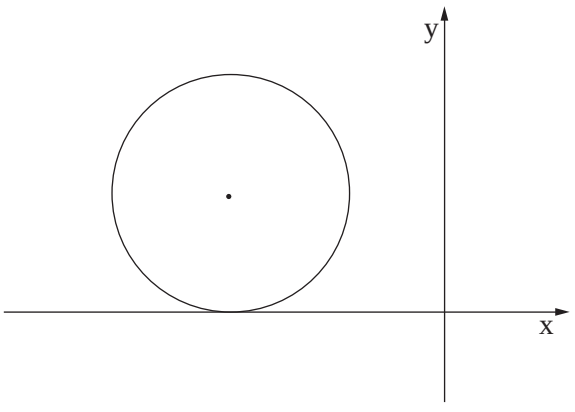
$$\Downarrow$$

$$(x+3)^2+(y-\sqrt{3})^2=3$$

$$\Downarrow$$

المحلّ الهندسيّ هو دائرة نصف قطرها $\sqrt{3}$ ومركزها $(-3,\sqrt{3})$

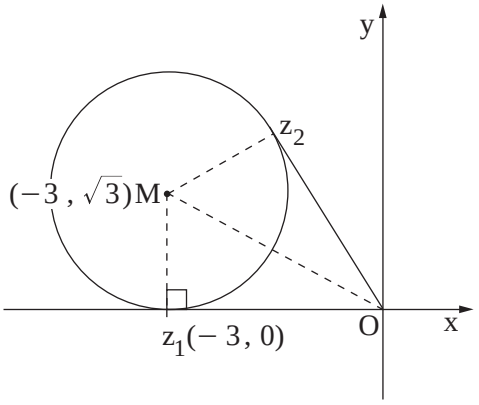
$$\Downarrow$$



/ يتبع في صفحة 7 /

تكملة إجابة السؤال 3.

ب. وجدنا في البند "أ" أنّ $M(-3,\sqrt{3})$ هي مركز الدائرة. Oz_1 يمسّ الدائرة (انظر الرسم).



$$\Downarrow$$

$$\text{tg}\sphericalangle MOz_1 = \frac{Mz_1}{|z_1O|} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Downarrow$$

$$\sphericalangle MOz_1 = 30^o$$

في الدالتون z_1Mz_2O يتحقّق: $\sphericalangle z_1Oz_2 = 2\cdot 30^o = 60^o$

جـ. (1) وجدنا أنّ: $\sphericalangle z_1Oz_2 = 60^o$

$$\Downarrow$$

z_2 في الربع الثّاني، لذلك: $\arg(z_2) = 180^o - 60^o = 120^o$

(2) زاوية كلّ نقطة على محيط الدائرة

هي بين 120^o وَ 180^o، لذلك: للنقطة التي تمسّ فيها الدائرة المحور x

توجد أكبر زاوية، وهي 180^o

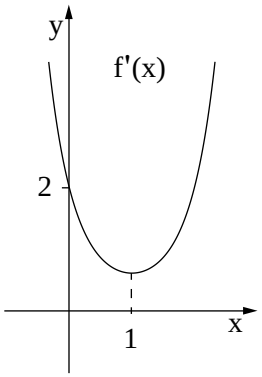
$$\Downarrow$$

للعدد $(-3,0)$ توجد أكبر زاوية

/ يتبع في صفحة 8 /

السؤال 4

يعرض الرسم الذي أمامك الرسم البيانيّ لدالّة المشتقّة $f'(x)$ ، المعرَّفة لكلّ x .



أ. حسب الرسم البيانيّ لِـ $f'(x)$

جد مجالات التقعّر باتّجاه الأعلى $\cup$ وباتّجاه الأسفل $\cap$ للدالّة $f(x)$ ، المعرَّفة لكلّ x . علّل.

معطى أنّ الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ يقطع المحور y في جزئه السالب.

ب. ارسم رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدالّة $f(x)$.

جـ. معطى أيضًا أنّ: $f(x)=(x-a)e^{0.5x^2-x}$ ، a هو بارامتر.

استعن بالمعطيات التي في الرسم البيانيّ لِـ $f'(x)$ ، واحسب المساحة المحصورة بين الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ والمحورين.

إجابة السؤال 4

أ. حسب الرسم البيانيّ ينتج:

x	$x<1$	1	$x>1$
$f'(x)$	↘		↗
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$		$\cup$

$f(x)$ مقعّرة باتّجاه الأسفل $\cap$ بالنسبة لِـ: $x<1$

$f(x)$ مقعّرة باتّجاه الأعلى $\cup$ بالنسبة لِـ: $x>1$

ب. حسب الرسم البيانيّ: $f'(x)>0$ لكلّ x

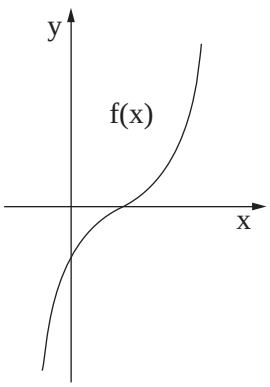
$\Downarrow$

$f(x)$ معرّفة لكلّ x ، لذلك: $f(x)$ تصاعديّة لكلّ x

$\Downarrow$

$f(x)$ تقطع المحور y في جزئه السالب،

وحسب مجالات التقعّر الرسم البيانيّ التقريبيّ الممكن لِـ $f(x)$ هو:



/ يتبع في صفحة 9 /

تكملة إجابة السؤال 4.

جـ. $f'(x) = e^{0.5x^2 - x} + (x - a)e^{0.5x^2 - x}(x - 1)$

حسب الرسم البيانيّ لِـ $f'(x)$: $f'(0) = 2$

$\Downarrow$

نعوّض $(0\ ,\ 2)$ في $f'(x)$ ، وينتج: $2 = e^0 + e^0(-a)(-1)$

$\Downarrow$

$a = 1$

نعوّض $a = 1$ في الدالّة $f(x)$

ونجد نقطة تقاطُع $f(x)$ مع المحور x : $f(x) = 0 \ \Rightarrow \ x - 1 = 0 \ \Rightarrow \ x = 1$

حسب الرسم البيانيّ التقريبيّ لِـ $f(x)$ ، المساحة المطلوبة هي تحت المحور x، لذلك: $S = -\int_0^1 \left[(x - 1)e^{0.5x^2 - x}\right]dx$

$\Downarrow$

مشتقّة $0.5x^2 - x$ هي $x - 1$ ، لذلك: $S = -\left[e^{0.5x^2 - x}\right]_0^1 = -e^{0.5 - 1} + e^0 = 1 - \frac{1}{\sqrt{e}}$

/ يتبع في صفحة 10 /

السؤال 5

معطاة الدالّة $f(x)=\log_4(x^2+4x+c)$ ، c هو بارامتر.

معطى أنّه يوجد للدالّة خطّ تقارب معادلته $x=-2$.

أ. (1) جد قيمة البارامتر c .

(2) جد مجال تعريف الدالّة.

(3) جد مجالات تصاعد وتنازل الدالّة.

(4) جد نقاط تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة مع المحورين.

(5) ارسم رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدالّة.

ب. (1) معطاة الدالّة $g(x)=-|f(x)|$.

ارسم رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدالّة $g(x)$.

(2) بالنسبة لأيّة قيَم k يوجد للمعادلة $g(x)=k$ حلّان فقط؟

إجابة السؤال 5

أ. (1) للدالّة خطّ تقارب $x=-2$

$\Downarrow$

عندما تقترب قيمة x من -2 فإنّ التعبير داخل اللوغريثم يقترب من 0

$\Downarrow$

$$(-2)^2-4\cdot 2+c=0$$

$\Downarrow$

$$c=4$$

(2) $f(x)$ معرّفة بالنسبة لِـ: $x^2+4x+4>0$

$\Downarrow$

$$x\neq -2$$

$\Downarrow$

$f(x)$ معرّفة لكلّ x لا يساوي -2

(3) $$f'(x)=\frac{2x+4}{x^2+4x+4}\cdot\frac{1}{\ell n4}$$

$$f'(x)=0 \quad\Rightarrow\quad x=-2$$

لكن $f(x)$ وَ $f'(x)$ غير معرّفتين في $x=-2$

نفحص إشارة $f'(x)$ في محيط النقطة $x=-2$:

x	-3	-2	-1
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

$f(x)$ تصاعديّة بالنسبة لِـ: $x>-2$ $\qquad$ $f(x)$ تنازليّة بالنسبة لِـ: $x<-2$

/ يتبع في صفحة 11 /

تكملة إجابة السؤال 5.

(4) $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 1$

$$\Downarrow$$

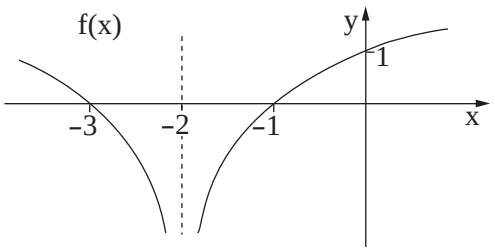
$$x = -1 \ , \ x = -3$$

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 1$$

من هنا نقاط

تقاطُع f(x) مع المحورين هي: $(0,1)$ $(-3,0)$ $(-1,0)$

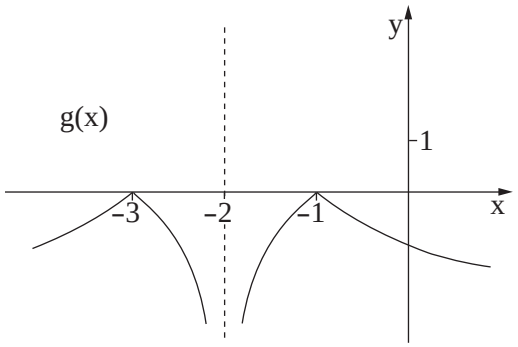
(5)



ب. (1) في المجالات التي f(x) سالبة فيها، القيمة المطلقة $|f(x)|$ موجبة، وَ g(x) سالبة وتتّحد مع f(x) .

في المجالات التي f(x) موجبة فيها، g(x) سالبة ومساوية بقيمتها المطلقة لِـ f(x) ،

أي مماثلة لِـ f(x) بالنسبة للمحور x ، لذلك الرسم البيانيّ لِـ g(x) هو:



(2) حسب الرسم البيانيّ، المستقيم $y = k$ يقطع g(x) في نقطتين فقط بالنسبة لِـ: $k = 0$.

حقوق الطّبع محفوظة لدولة إسرائيل.
النّسخ أو النّشر ممنوعان إلّا بإذن من وزارة التّربية والتّعليم.