

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מ ת מ ט י ק ה

4 יחידות לימוד – שאלון שני

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעה ושלושה רבעים.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים:

פרק ראשון	—	סדרות, טריגונומטריה במרחב	—	$33\frac{1}{3} \times 1$	—	$33\frac{1}{3}$ נקודות
פרק שני	—	גדילה ודעיכה, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות	—	$33\frac{1}{3} \times 2$	—	$66\frac{2}{3}$ נקודות
ופונקציות חזקה				סה"כ	—	100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, ב כאשר

החשובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבר את ב פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטייטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.

שימוש בטייטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

שאלה 1

אדם קיבל שתי הצעות לקניית שואב אבק בתשלומים חודשיים, הצעה I והצעה II. בשתי ההצעות היה לשואב האבק אותו המחיר.

הצעה I: התשלום הראשון הוא 180 שקלים,

וכל תשלום נוסף גדול ב- 15 שקלים מהתשלום שקדם לו.

הצעה II: התשלום הראשון הוא 195 שקלים,

וכל תשלום נוסף קטן ב- 15 שקלים מהתשלום שקדם לו.

מספר התשלומים בהצעה II היה גדול ב- 2 ממספר התשלומים בהצעה I.

א. מצא את מספר התשלומים בהצעה II.

ב. מצא את המחיר של שואב האבק.

תשובה לשאלה 1

א. סדרת התשלומים בשתי ההצעות היא סדרה חשבונית.

בהצעה I התשלום הראשון בשקלים הוא: $a_1 = 180$

ההפרש הקבוע בשקלים הוא: $d_1 = 15$

נגדיר ב- n את מספר התשלומים החודשיים בהצעה I, לכן מתקיים:

$$S_n^I = \frac{[(2 \cdot 180 + (n-1) \cdot 15)]n}{2} = \frac{(345 + 15n)n}{2}$$

בהצעה II התשלום הראשון בשקלים הוא: $b_1 = 195$

ההפרש הקבוע בשקלים הוא: $d_2 = -15$

מספר התשלומים החודשיים בהצעה II הוא: $n + 2$

לכן מתקיים:

$$S_{n+2}^{II} = \frac{[(2 \cdot 195 + (n+1)(-15))(n+2)]}{2} = \frac{(375 - 15n)(n+2)}{2}$$

מחירו של שואב האבק זהה בשתי ההצעות,

לכן מתקיים: $S_n^I = S_{n+2}^{II}$

$$\Downarrow$$

$$\frac{(345 + 15n)n}{2} = \frac{(375 - 15n)(n+2)}{2}$$

$\Downarrow$

$$30n^2 = 750$$

$\Downarrow$

$$n = \pm 5$$

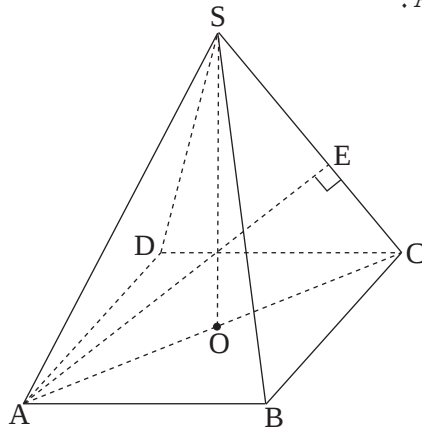
$n = 5$, לכן: $n > 0$

א. מספר התשלומים בהצעה II הוא: $n + 2 = 7$

ב. נציב בנוסחה: $S_5^I = \frac{(345 + 15 \cdot 5)}{2} \cdot 5 = 1050$

המחיר של שואב האבק הוא: 1050 שקלים

שאלה 2



נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה ריבוע ABCD. האורך של צלע הריבוע הוא a ס"מ.

גובה הפירמידה, SO, שווה לאלכסון הבסיס, AC (ראה ציור).

א. חשב את הזווית שבין SC

למישור הבסיס של הפירמידה.

ב. מקדקוד A העבירו אנך למקצוע SC. האנך חותך את המקצוע בנקודה E (ראה ציור).

הבע באמצעות a את אורך הקטע CE.

ג. נתון ששטח המשולש AEC הוא 40 סמ"ר.

חשב את a.

תשובה לשאלה 2

א. SABCD פירמידה ישרה, לכן עקב הגובה O

הוא מרכז המעגל החוסם את הריבוע ABCD.

בריבוע האלכסונים שווים זה לזה וחוצים זה את זה,

לכן מרכז המעגל החוסם את הריבוע הוא מפגש האלכסונים.

בסיס הפירמידה הוא ריבוע שאורך צלעו a,

לכן אורך האלכסון AC הוא:

$$AC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

$$OC = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

האלכסונים בריבוע חוצים זה את זה, לכן:

$$SO = AC = a\sqrt{2}$$

גובה הפירמידה SO שווה לאלכסון הבסיס AC, לכן:

הפירמידה ישרה, לכן הזווית שבין SC

למישור הבסיס של הפירמידה היא:

$$\angle SCO$$

במשולש ישר-זווית SOC מתקיים:

$$\tan \angle SCO = \frac{SO}{OC}$$

$$\tan \angle SCO = \frac{a\sqrt{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = 2$$

↓

$$\angle SCO = 63.43^\circ$$

לכן הזווית שבין SC למישור הבסיס של הפירמידה היא:

$$\cos 63.43^\circ = \frac{CE}{AC}$$

ב. במשולש ישר-זווית AEC ($\angle AEC = 90^\circ$) מתקיים:

$$\cos 63.43^\circ = \frac{CE}{a\sqrt{2}}$$

↓

$$CE = a\sqrt{2} \cos 63.43^\circ = 0.632a$$

המשך תשובה לשאלה 2.

ג. דרך I

$$S_{\triangle AEC} = \frac{AC \cdot CE \cdot \sin \angle ACE}{2} \quad \text{חישוב שטח משולש AEC :}$$

$$S_{\triangle AEC} = \frac{2a^2 \cdot \cos 63.43^\circ \cdot \sin 63.43^\circ}{2} = 40 \quad \text{הצבה:}$$

$\Downarrow$

$$S_{\triangle AEC} = \frac{a^2 \sin 126.86^\circ}{2} = 40$$

$\Downarrow$

$$a = 10 \text{ ס"מ}$$

דרך II

$$\tan 63.43^\circ = \frac{AE}{CE} \quad \text{במשולש AEC מתקיים:}$$

$\Downarrow$

$$AE = \tan 63.43^\circ \cdot CE = 1.26a$$

$$S_{\triangle AEC} = \frac{AE \cdot EC}{2}$$

$$S_{\triangle AEC} = \frac{1.26a \cdot 0.63a}{2} = 40$$

$\Downarrow$

$$a = 10 \text{ ס"מ}$$

האורך של צלע הריבוע a הוא: 10 ס"מ

שאלה 3

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 - 2}{e^{2x}}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. (1) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

(2) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. דרך נקודות הקיצון של הפונקציה העבירו אנכים לציר ה- x .

מצא את המרחק בין האנכים.

תשובה לשאלה 3

א. תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$: $e^{2x} > 0$ לכל x

לכן הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x

ב. (1) הנגזרת של $f(x)$ היא: $f'(x) = \frac{2(-x^2 + x + 2)}{e^{2x}}$

$$f'(x) = 0$$

$$-x^2 + x + 2 = 0$$

$\Downarrow$

$$x = -1, \quad x = 2$$

הנקודות ה"חשודות" לקיצון הן:

נבדוק את סימן הנגזרת $f'(x)$:

x	-2	-1	0	2	3
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	נקודת מינימום	$\nearrow$	נקודת מקסימום	$\searrow$

ריכוז התוצאות בטבלה:

נקודת המינימום של הפונקציה $f(x)$ היא: $(-1, -e^2)$

נקודת המקסימום של הפונקציה $f(x)$ היא: $(2, \frac{2}{e^4})$

המשך תשובה לשאלה 3.

(2) נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$

עם ציר ה- y :

$$f(0) = \frac{0-2}{e^0} = -2$$

$$(0, -2)$$

נקודת החיתוך עם ציר ה- y היא:

נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$

עם ציר ה- x :

$$f(x) = 0$$

$$\frac{x^2 - 2}{e^{2x}} = 0$$

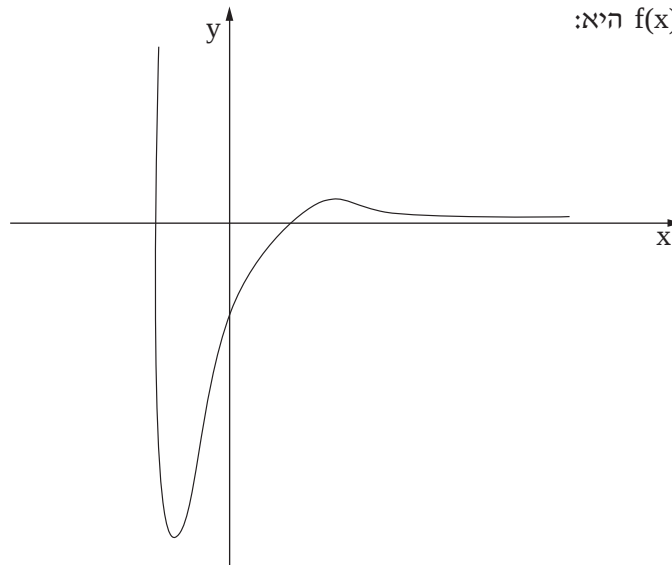
$\Downarrow$

$$x = \pm \sqrt{2}$$

$$(-\sqrt{2}, 0), (\sqrt{2}, 0)$$

נקודות החיתוך עם ציר ה- x הם:

(3) סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ היא:

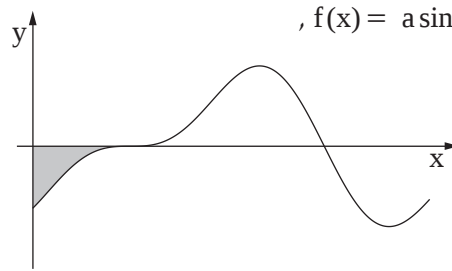


ג. משוואת האנג' לציר ה- x העובר דרך נקודת המקסימום היא: $x = 2$

משוואת האנג' לציר ה- x העובר דרך נקודת המינימום היא: $x = -1$

המרחק בין האנכים הוא: $2 - (-1) = 3$

שאלה 4



בציור שלפניך נתון הגרף של הפונקציה $f(x) = a \sin(2x) - \cos x$

בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

a הוא פרמטר.

לפונקציה יש נקודת קיצון שבה $x = \frac{7\pi}{6}$.

א. מצא את הערך של a .

ב. הצב בפונקציה $a = 0.5$,

וענה על התת-סעיפים (1)-(2).

(1) מצא בתחום הנתון את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .

(2) מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי ציר ה- y

(השטח האפור בציור).

תשובה לשאלה 4

א. הנגזרת של $f(x)$: $f'(x) = 2a \cos(2x) + \sin x$

בנקודת הקיצון שבה $x = \frac{7\pi}{6}$

הנגזרת מתאפסת, לכן מתקיים:

$$0 = 2a \cos\left(2 \cdot \frac{7\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$$

$\Downarrow$

$$0 = 2a \cdot \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$\Downarrow$

$$a = \frac{1}{2}$$

הערך של a הוא:

ב. (1) נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x : $f(x) = 0$

$$\frac{1}{2} \sin(2x) - \cos x = 0$$

$\Downarrow$

$$\sin x \cdot \cos x - \cos x = 0$$

$\Downarrow$

$$\cos x (\sin x - 1) = 0$$

$\Downarrow$

$$\cos x = 0, \quad \sin x = 1$$

$\Downarrow$

$\Downarrow$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

הפתרונות הכלליים הם:

$$x = \frac{\pi}{2}, \quad x = \frac{3}{2}\pi$$

הפתרונות בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$ הם:

נקודות החיתוך של גרף הפונקציה

$$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \quad \left(\frac{3}{2}\pi, 0\right)$$

עם ציר ה- x בתחום הן:

המשך תשובה לשאלה 4.

(2) השטח המוגבל על ידי הגרף של $f(x)$,על ידי ציר ה- x ועל ידי ציר ה- y הוא:

$$S_{\text{השטח האפור}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{2} \sin(2x) + \cos x\right) dx$$

$$\Downarrow$$

$$S_{\text{השטח האפור}} = \frac{\cos(2x)}{4} + \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

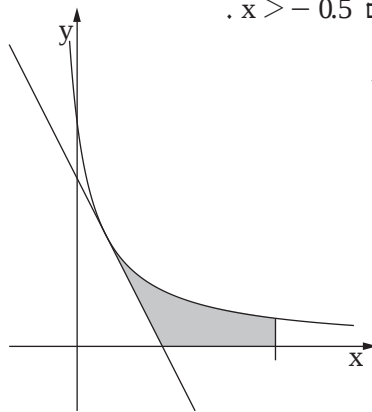
$$\Downarrow$$

$$S_{\text{השטח האפור}} = \left(\frac{\cos \pi}{4} + \sin \frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{\cos 0}{4} + \sin 0\right) = \left(-\frac{1}{4} + 1\right) - \left(\frac{1}{4} + 0\right)$$

$$S_{\text{השטח האפור}} = \frac{1}{2}$$

השטח המבוקש הוא:

שאלה 5



בציור שלפניך מוצג גרף הפונקציה $f(x) = \frac{4}{2x+1}$ בתחום $x > -0.5$.

א. העבירו משיק לגרף הפונקציה. שיפוע המשיק הוא -2 .

(1) מצא את השיעורים של נקודת ההשקה.

(2) מצא את משוואת המשיק.

ב. חשב את השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה,

על-ידי המשיק, על-ידי הישר $x = 3.5$

ועל-ידי ציר ה- x (השטח האפור בציור).

תשובה לשאלה 5

א. (1) הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = \frac{-8}{(2x+1)^2}$

בנקודת ההשקה שיפוע המשיק הוא -2 ,

לכן מתקיים: $f'(x) = -2$

$$\frac{-8}{(2x+1)^2} = -2$$

$\Downarrow$

$$(2x+1)^2 = 4$$

$\Downarrow$

$$x = -1.5, \quad x = 0.5$$

$x > -0.5$, לכן שיעור ה- x

של נקודת ההשקה הוא: $x = 0.5$

השיעורים של נקודת ההשקה הם: $(0.5, 2)$

(2) משוואת המשיק לגרף הפונקציה

בנקודת ההשקה $(0.5, 2)$ היא: $y - 2 = -2(x - 0.5)$

$\Downarrow$

$$y = -2x + 3$$

המשך תשובה לשאלה 5.

ב. נקודת החיתוך של המשיק $y = -2x + 3$

עם ציר ה- x היא:

$$(1.5, 0)$$

השטח המבוקש (השטח האפור בציור)

הוא שטח מורכב.

נסמן ב- S_1 את השטח המוגבל על ידי

גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה- x

ועל ידי האנכים $x = 0.5$ ו- $x = 3$:

$$S_1 = \int_{0.5}^{3.5} \frac{4}{2x+1} dx$$

$$S_1 = 2 \cdot \ln(2x+1) \Big|_{0.5}^{3.5} = 2\ln 8 - 2\ln 2 = 2\ln\left(\frac{8}{2}\right) = 2\ln 4$$

$\Downarrow$

$$S_1 = 2\ln 4 \approx 2.77$$

נסמן ב- S_2 את שטח המשולש

המוגבל על ידי המשיק,

על ידי ציר ה- x ועל ידי הישר $x = \frac{1}{2}$:

$$S_2 = \frac{(1.5 - 0.5) \cdot 2}{2} = 1$$

$$S_{\text{השטח האפור}} = S_1 - S_2 = 2\ln 4 - 1 \approx 1.77$$

השטח האפור בציור הוא: