מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה: א. בגרות לבתי"ס על־יסודיים
ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים

מועד הבחינה: קיץ תשע"ד

מספר השאלון: **035805, 315**

תרגום לערבית (2)

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מתמטיקה

4 יחידות לימוד — שאלון שני

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעה ושלושה רבעים.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:
בשאלון זה שני פרקים:
פרק ראשון — סדרות, טריגונומטריה במרחב
$33\frac{1}{3} \times 1$ — $33\frac{1}{3}$ נק'
פרק שני — גדילה ודעיכה, חשבון דיפרנציאלי
ואינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות,
פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ופונקציות חזקה
$33\frac{1}{3} \times 2$ — $66\frac{2}{3}$ נק'
סה"כ — 100 נק'

ג. חומר עזר מותר בשימוש:
1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
2. דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:
1. אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
2. התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
3. לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ב ה צ ל ח ה!

دولة إسرائيل
وزارة التّربية والتّعليم

نوع الامتحان: أ. بجروت للمدارس الثّانويّة
ب. بجروت للممتحَنين الخارجيّين

موعد الامتحان: صيف 2014

رقم النّموذج: **035805، 315**

ترجمة إلى العربيّة (2)

اقتراح إجابات لأسئلة امتحان بجروت

الرياضيّات

4 وحدات تعليميّة – النّموذج الثّاني

تعليمات للممتحَن

أ. مدّة الامتحان: ساعة وثلاثة أرباع.

ب. مبنى النموذج وتوزيع الدّرجات:
في هذا النموذج فصلان:
الفصل الأوّل – المتواليات، حساب المثلّثات في الفراغ
$33\frac{1}{3} \times 1$ — $33\frac{1}{3}$ درجة
الفصل الثّاني – التّزايد والتّضاؤل، حساب التّفاضل والتّكامل للدّوالّ المثلّثية والدّوالّ الأسّيّة واللّوغريثميّة ودوالّ القوى
$33\frac{1}{3} \times 2$ — $66\frac{2}{3}$ درجة
المجموع — 100 درجة

ج. موادّ مساعدة يُسمح استعمالها:
1. حاسبة غير بيانيّة. لا يُسمح استعمال إمكانيّات البرمجة في الحاسبة التي يمكن برمجتها. استعمال الحاسبة البيانيّة أو إمكانيّات البرمجة في الحاسبة قد يؤدّي إلى إلغاء الامتحان.
2. لوائح قوانين (مرفقة).

د. تعليمات خاصّة:
1. لا تنسخ السّؤال؛ اكتب رقمه فقط.
2. ابدأ كلّ سؤال في صفحة جديدة. اكتب في الدفتر مراحل الحلّ، حتّى إذا أجريتَ حساباتك بواسطة حاسبة.
فسّر كلّ خطواتك، بما في ذلك الحسابات، بالتّفصيل وبوضوح وبترتيب.
عدم التّفصيل قد يؤدّي إلى خصم درجات أو إلى إلغاء الامتحان.
3. لكتابة مسوّدة يجب استعمال دفتر الامتحان أو الأوراق التي حصلتَ عليها من المراقبين.
استعمال مسوّدة أخرى قد يؤدّي إلى إلغاء الامتحان.

التعليمات في هذا النموذج مكتوبة بصيغة المذكّر وموجّهة للممتحَنات وللممتحَنين على حدّ سواء.

نتمنّى لك النجاح!

السؤال 1

تلقّى شخص عرضَيْن لشراء مكنسة كهربائيّة بأقساط شهريّة، العرض I و العرض II.
كان سعر المكنسة الكهربائيّة في العرضَيْن متساويًا.
العرض I: القسط الأوّل هو 180 شيقل،
وكلّ قسط إضافيّ أكبر بـ15 شيقل من القسط الذي قبله.
العرض II : القسط الأوّل هو 195 شيقل،
وكلّ قسط إضافيّ أصغر بـ 15 شيقل من القسط الذي قبله.
عدد الأقساط في العرض II كان أكبر بـ2 من عدد الأقساط في العرض I .

أ. جد عدد الأقساط في العرض II .

ب. جد سعر المكنسة الكهربائيّة.

إجابة السؤال 1

أ. متوالية الأقساط في العرضين هي متوالية حسابيّة.

في العرض I القسط الأوّل هو: $a_1 = 180$ شيقل

الفرق الثابت هو: $d_1 = 15$ شيقل

نعرّف n كعدد الأقساط الشهريّة في العرض I، لذلك يتحقّق: $S_n^I = \frac{[(2\cdot 180 + (n-1)\cdot 15)]n}{2} = \frac{(345+15n)n}{2}$

في العرض II القسط الأوّل هو: $b_1 = 195$ شيقل

الفرق الثابت هو: $d_2 = -15$ شيقل

عدد الأقساط الشهريّة في العرض II هو: $n+2$

لذلك يتحقّق: $S_{n+2}^{II} = \frac{[(2\cdot 195 + (n+1)(-15))](n+2)}{2} = \frac{(375-15n)(n+2)}{2}$

سعر المكنسة الكهربائيّة متساوٍ في العرضين، لذلك يتحقّق:

$$S_n^I = S_{n+2}^{II}$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{(345+15n)n}{2} = \frac{(375-15n)(n+2)}{2}$$
$$\Downarrow$$
$$30n^2 = 750$$
$$\Downarrow$$
$$n = \pm 5$$

$n > 0$ ، لذلك: $n = 5$

أ. عدد الأقساط في العرض II هو: $n+2 = 7$ أقساط

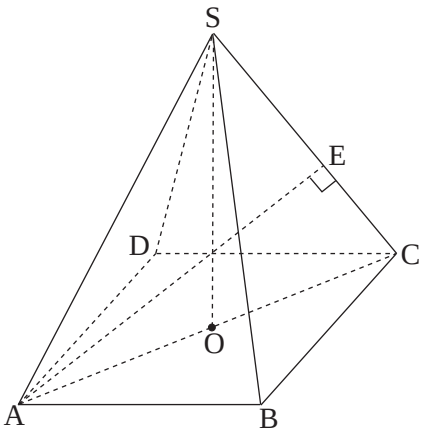
ب. نعوّض في القانون: $S_5^I = \frac{(345+15\cdot 5)}{2}\cdot 5 = 1050$

سعر المكنسة الكهربائيّة هو: 1050 شيقل

/ يتبع في صفحة 3 /

السؤال 2

معطى هرم قائم SABCD قاعدته مربّع ABCD .
طول ضلع المربّع هو a سم.
ارتفاع الهرم، SO ، يساوي قطر القاعدة، AC
(انظر الرسم) .



أ. احسب الزاوية التي بين SC
ومستوى قاعدة الهرم.

ب. مرّروا من الرأس A عمودًا على الضلع SC .
العمود يقطع الضلع في النقطة E (انظر الرسم) .
عبّر بدلالة a عن طول القطعة CE .

جـ. معطى أنّ مساحة المثلّث AEC هي 40 سم^2.
احسب a .

إجابة السؤال 2

أ. SABCD هو هرم قائم، لذلك كعب الارتفاع O
هو مركز الدائرة التي تحصر المربّع ABCD .
القطران في المربّع متساويان وينصّف أحدهما الآخر،
لذلك مركز الدائرة التي تحصر المربّع هو ملتقى القطرين.

قاعدة الهرم هي مربّع طول ضلعه a ،
لذلك طول القطر AC هو: $AC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$

القطران في المربّع ينصّف أحدهما الآخر، لذلك: $OC = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

ارتفاع الهرم SO يساوي قطر القاعدة AC ، لذلك: $SO = AC = a\sqrt{2}$

الهرم قائم، ولذلك الزاوية التي بين SC
ومستوى قاعدة الهرم هي: $\sphericalangle SCO$

في المثلّث القائم الزاوية SOC يتحقّق: $\tan \sphericalangle SCO = \frac{SO}{OC}$

$$\tan \sphericalangle SCO = \frac{a\sqrt{2}}{a\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2$$
$$\Downarrow$$

لذلك الزاوية التي بين SC ومستوى قاعدة الهرم هي: $\sphericalangle SCO = 63.43^o$

ب. في المثلّث القائم الزاوية AEC ($\sphericalangle AEC = 90^o$) يتحقّق: $\cos 63.43^o = \frac{CE}{AC}$

$$\cos 63.43^o = \frac{CE}{a\sqrt{2}}$$
$$\Downarrow$$
$$CE = a\sqrt{2}\cos 63.43^o = 0.632a$$

/ يتبع في صفحة 4 /

تكملة إجابة السؤال 2.

جـ. الطريقة I

حساب مساحة المثلّث AEC :

$$S_{\triangle AEC} = \frac{AC \cdot CE \cdot \sin \sphericalangle ACE}{2}$$

تعويض :

$$S_{\triangle AEC} = \frac{2a^2 \cdot \cos 63.43^o \cdot \sin 63.43^o}{2} = 40$$

$$\Downarrow$$

$$S_{\triangle AEC} = \frac{a^2 \sin 126.86^o}{2} = 40$$

$$\Downarrow$$

$$a = 10 \text{ سم}$$

الطريقة II

في المثلّث AEC يتحقّق :

$$\tan 63.43^o = \frac{AE}{CE}$$

$$\Downarrow$$

$$AE = \tan 63.43^o \cdot CE = 1.26a$$

$$S_{\triangle AEC} = \frac{AE \cdot EC}{2}$$

$$S_{\triangle AEC} = \frac{1.26a \cdot 0.63a}{2} = 40$$

$$\Downarrow$$

$$a = 10 \text{ سم}$$

طول ضلع المربّع a هو : 10 سم

/ يتبع في صفحة 5 /

السؤال 3

معطاة الدالّة $f(x) = \frac{x^2-2}{e^{2x}}$.

أ. جد مجال تعريف الدالّة.

ب. (1) جد إحداثيّات النقطتين القصويين للدالّة، وحدّد نوع هاتين النقطتين.

(2) جد نقاط تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة مع المحورين.

(3) ارسم رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدالّة.

جـ. مرّروا عبر النقطتين القصويين للدالّة عمودين على المحور x .

جد البُعد بين العمودين.

إجابة السؤال 3

أ. مجال تعريف الدالّة $f(x)$:

$e^{2x} > 0$ لكلّ x

لذلك الدالّة $f(x)$ معرَّفة لكلّ x

ب. (1) مشتقّة $f(x)$ هي:

$$f'(x) = \frac{2(-x^2+x+2)}{e^{2x}}$$

$$f'(x) = 0$$

$$-x^2+x+2=0$$

$$\Downarrow$$

النقاط "المحتملة" كنقاط قصوى هي: $x=-1 \quad , \quad x=2$

نفحص إشارة المشتقّة $f'(x)$:

تركيز النتائج في جدول:

x	-2	-1	0	2	3
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	نقطة نهاية صغرى	↗	نقطة نهاية عظمى	↘

نقطة النهاية الصغرى للدالّة $f(x)$ هي: $(-1, -e^2)$

نقطة النهاية العظمى للدالّة $f(x)$ هي: $(2, \frac{2}{e^4})$

/ يتبع في صفحة 6 /

تكملة إجابة السؤال 3.

(2) نقطة تقاطُع الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ مع المحور y :

$$f(0)=\frac{0-2}{e^0}=-2$$

نقطة التقاطع مع المحور y هي : $(0\,,-2)$

نقطتا تقاطُع الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ مع المحور x :

$$f(x)=0$$

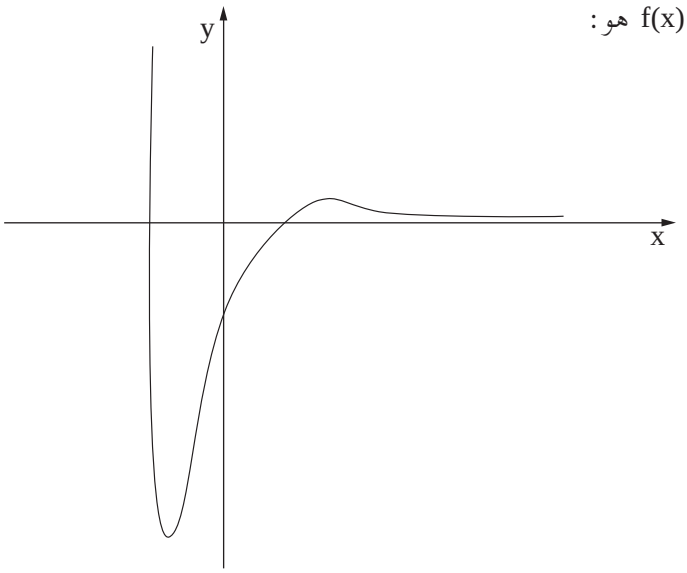
$$\frac{x^2-2}{e^{2x}}=0$$

$$\Downarrow$$

$$x=\pm\sqrt{2}$$

نقطتا التقاطع مع المحور x هما : $(-\sqrt{2}\,,0)\ ,\ (\sqrt{2}\,,0)$

(3) رسم بيانيّ تقريبيّ للدالّة $f(x)$ هو :



جـ. معادلة العمود النازل على المحور x الذي يمرّ عبر نقطة النهاية العظمى هي : $x=2$

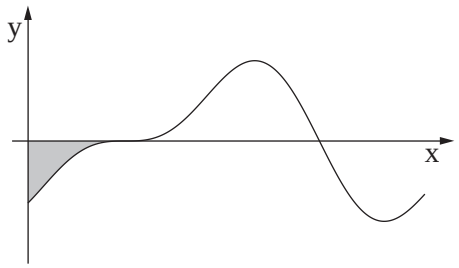
معادلة العمود النازل على المحور x الذي يمرّ عبر نقطة النهاية الصغرى هي : $x=-1$

البُعد بين العمودين هو : $2-(-1)=3$

/ يتبع في صفحة 7 /

السؤال 4

في الرسم الذي أمامك معطى الرسم البيانيّ للدالّة $f(x) = a\sin(2x) - \cos x$ ،
في المجال $0 \le x \le 2\pi$.
a هو بارامتر.
يوجد للدالّة نقطة قصوى فيها $x = \frac{7\pi}{6}$.



أ. جد قيمة a .
ب. عوِّض $a = 0.5$ في الدالّة،
وأجب عن البندين الفرعيّين (1)-(2).
(1) في المجال المعطى، جد نقاط تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ مع المحور x.
(2) جد المساحة المحصورة بين الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ والمحور x والمحور y
(المساحة الرماديّة في الرسم).

إجابة السؤال 4

أ. مشتقّة $f(x)$: $f'(x) = 2a\cos(2x) + \sin x$

في النقطة القصوى التي فيها $x = \frac{7\pi}{6}$
المشتقّة تساوي صفرًا، لذلك يتحقّق: $0 = 2a\cos(2\cdot\frac{7\pi}{6}) + \sin(\frac{7\pi}{6})$

$$\Downarrow$$

$$0 = 2a\cdot\frac{1}{2} + (-\frac{1}{2})$$

$$\Downarrow$$

قيمة a هي: $a = \frac{1}{2}$

ب. (1) نقطة تقاطُع الرسم البيانيّ للدالّة مع المحور x : $f(x) = 0$

$$\frac{1}{2}\sin(2x) - \cos x = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\sin x\cdot\cos x - \cos x = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\cos x(\sin x - 1) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\cos x = 0 \quad , \quad \sin x = 1$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

الحلّان العامّان هما: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k \qquad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ k صحيح

الحلّان في المجال $0 \le x \le 2\pi$ هما: $x = \frac{\pi}{2} \quad , \quad x = \frac{3}{2}\pi$

نقطتا تقاطُع الرسم البيانيّ للدالّة
مع المحور x في المجال هما: $(\frac{\pi}{2}, 0) \quad , \quad (\frac{3}{2}\pi, 0)$

/ يتبع في صفحة 8 /

تكملة إجابة السؤال 4.

(2) المساحة المحصورة بين الرسم البيانيّ لِـ f(x) ،
والمحور x والمحور y هي :

$$S_{\substack{\text{المساحة}\\ \text{الرماديّة}}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\frac{1}{2}\sin(2x) + \cos x)\,dx$$

$$\Downarrow$$

$$S_{\substack{\text{المساحة}\\ \text{الرماديّة}}} = \frac{\cos(2x)}{4} + \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Downarrow$$

$$S_{\substack{\text{المساحة}\\ \text{الرماديّة}}} = \left(\frac{\cos\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{\cos 0}{4} + \sin 0\right) = (-\frac{1}{4} + 1) - (\frac{1}{4} + 0)$$

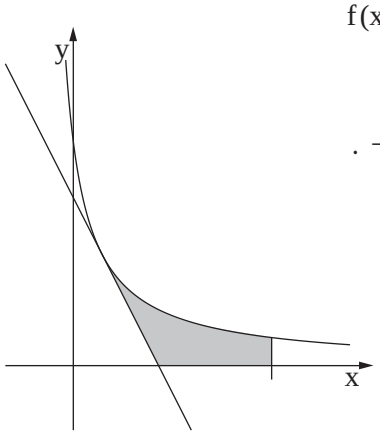
المساحة المطلوبة هي :

$$S_{\substack{\text{المساحة}\\ \text{الرماديّة}}} = \frac{1}{2}$$

/ يتبع في صفحة 9 /

السؤال 5

يعرض الرسم الذي أمامك الرسم البيانيّ للدالّة $f(x) = \frac{4}{2x+1}$ في المجال $x > -0.5$.



أ. مرّروا مماسًّا للرسم البيانيّ للدالّة. ميل المماسّ هو -2 .

(1) جد إحداثيّات نقطة التماسّ.

(2) جد معادلة المماسّ.

ب. احسب المساحة المحصورة بين الرسم البيانيّ للدالّة والمماسّ والمستقيم $x = 3.5$ والمحور x (المساحة الرماديّة في الرسم).

إجابة السؤال 5

أ. (1) مشتقّة الدالّة $f(x)$ هي: $f'(x) = \frac{-8}{(2x+1)^2}$

في نقطة التماسّ ميل المماسّ هو -2 ،

لذلك يتحقّق: $f'(x) = -2$

$$\frac{-8}{(2x+1)^2} = -2$$

$$\Downarrow$$

$$(2x+1)^2 = 4$$

$$\Downarrow$$

$$x = -1.5 \quad , \quad x = 0.5$$

$x > -0.5$ ، لذلك الإحداثيّ x لنقطة التماسّ هو: $x = 0.5$

إحداثيّات نقطة التماسّ هي: $(0.5 , 2)$

(2) معادلة المماسّ للرسم البيانيّ للدالّة في نقطة التماسّ $(0.5 , 2)$ هي: $y - 2 = -2(x - 0.5)$

$$\Downarrow$$

$$y = -2x + 3$$

/ يتبع في صفحة 10 /

تكملة إجابة السؤال 5.

ب. نقطة تقاطُع المماسّ $y = -2x + 3$
مع المحور x هي: $(1.5 , 0)$

المساحة المطلوبة (المساحة الرماديّة في الرسم)
هي مساحة مركَّبة.

نرمز بِـ S_1 إلى المساحة المحصورة بين
الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ والمحور x
والعمودين $x = 0.5$ وَ- $x = 3$:

$$S_1 = \int_{0.5}^{3.5} \frac{4}{2x+1}dx$$

$$S_1 = 2 \cdot \ell n\,(2x+1) \Big|_{0.5}^{3.5} = 2\ell n8 - 2\ell n2 = 2\ell n\left(\frac{8}{2}\right) = 2\ell n4$$

$$\Downarrow$$

$$S_1 = 2\ell n4 \approx 2.77$$

نرمز بِـ S_2 إلى مساحة المثلّث
المحصورة بين المماسّ
والمحور x والمستقيم $x = \frac{1}{2}$:

$$S_2 = \frac{(1.5 - 0.5) \cdot 2}{2} = 1$$

المساحة الرماديّة في الرسم هي: $S_{\substack{\text{المساحة}\\\text{الرماديّة}}} = S_1 - S_2 = 2\ell n4 - 1 \approx 1.77$

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל.
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך.
حقوق الطّبع محفوظة لدولة إسرائيل.
النّسخ أو النّشر ممنوعان إلّا بإذن من وزارة التّربية والتّعليم.