

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מ ת מ ט י ק ה

4 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון – אלגברה, גאומטריה אנליטית,

הסתברות 20×2 – 40 נקודות

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה

במישור 20×1 – 20 נקודות

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 20×2 – 40 נקודות

סה"כ 100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר

החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטייטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשיגים.

שימוש בטייטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

שאלה 1

כל אחת משתי חברות תיירות, חברה א' וחברה ב', פרסמה באינטרנט הצעה לטיול בחו"ל. לכל הצעה יש אותו מחיר.

המחיר של כל אחת מההצעות כולל את מחיר הטיסה ואת מחיר האירוח במלון.

מחיר הטיסה בחברה א' קטן ב-10% ממחיר הטיסה בחברה ב'.

מחיר האירוח במלון בחברה א' גדול ב-20% ממחיר האירוח במלון בחברה ב'.

סמן ב- x את מחיר הטיסה בחברה ב', וב- y את מחיר האירוח במלון בחברה ב'.

א. הראה כי $x = 2y$.

ב. יוסי הזמין את הטיסה בחברה א' ואת האירוח במלון בחברה ב',

ושילם סך הכול 5040 שקלים.

מצא את מחיר הטיסה בחברה ב', ואת מחיר האירוח במלון בחברה ב'.

תשובה לשאלה 1

א. מחיר הטיסה בחברה א' הוא: $0.9x$

מחיר האירוח במלון בחברה א' הוא: $1.2y$

לכל הצעה יש אותו מחיר, לכן מתקיים: $x + y = 0.9x + 1.2y$

$\Downarrow$

$$0.1x = 0.2y$$

$\Downarrow$

$$x = 2y$$

ב. יוסי שילם 5040 שקלים עבור טיסה בחברה א'

ואירוח במלון בחברה ב', לכן מתקיים:

$$\begin{cases} 0.9x + y = 5040 \\ x = 2y \end{cases}$$

על פי סעיף א

$\Downarrow$

$$x = 3600, y = 1800$$

פתרון מערכת המשוואות הוא:

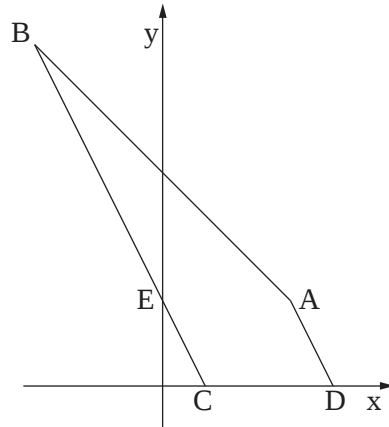
3600 שקלים

מחיר טיסה בחברה ב' הוא:

1800 שקלים

מחיר אירוח במלון בחברה ב' הוא:

שאלה 2



- ABCD הוא מרובע שבו $BC \parallel AD$.
 הצלע AB מונחת על הישר $x + y = 10$,
 והצלע CD מונחת על ציר ה- x .
 נתון: $D(8, 0)$, $C(2, 0)$,
 שיעור ה- x של הנקודה A הוא 6.
 א. מצא את שיעור ה- y של הנקודה A.
 ב. מצא את משוואת הישר AD.
 ג. מצא את שיעורי הנקודה B.
 ד. הישר BC חותך את ציר ה- y בנקודה E.
 (1) הראה כי הישר AE מקביל לציר ה- x .
 (2) מצא את שטח המשולש AEB.

תשובה לשאלה 2

$$x + y = 10$$

א. הנקודה A נמצאת על הישר שמשוואתו:

$$x = 6$$

שיעור ה- x של הנקודה A הוא:

$$\Downarrow$$

$$y = 4$$

$$A(6, 4)$$

לכן השיעורים של הנקודה A הם:

$$A(6, 4), D(8, 0)$$

ב. נתונות הנקודות:

$$m_{AD} = \frac{4-0}{6-8} = \frac{4}{-2} = -2$$

שיפוע הישר AD הוא:

$$y - 0 = -2(x - 8)$$

משוואת הישר AD על פי נקודה ושיפוע היא:

$$\Downarrow$$

$$y = -2x + 16$$

$$-2 \quad (\text{לישרים מקבילים אותו שיפוע})$$

ג. $AD \parallel BC$, לכן שיפוע הישר BC הוא:

$$y = -2x + 4$$

משוואת הישר BC
 על פי נקודה $C(2, 0)$ ושיפוע -2 היא:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ y = -2x + 4 \end{cases}$$

הנקודה B היא נקודת החיתוך
 של שני הישרים AB ו-BC, לכן מתקיים:

$$\Downarrow$$

$$x = -6, y = 16$$

לכן השיעורים של הנקודה B הם:

$$B(-6, 16)$$

המשך תשובה לשאלה 2.

ד. (1) הנקודה E נמצאת על הישר BC

ושיעור ה- x שלה הוא 0, לכן מתקיים: $y = -2 \cdot 0 + 4$

$\Downarrow$

$$y = 4$$

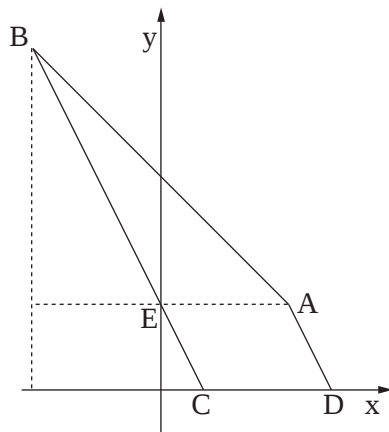
השיעורים של הנקודה E הם: $E(0, 4)$

השיעורים של הנקודה A הם: $A(6, 4)$

השיפוע של הישר AE הוא: $m_{AE} = \frac{4-4}{0-6} = 0$

$\Downarrow$

שיפוע הישר AE הוא 0, לכן הישר AE מקביל לציר ה- x



(2) אורך הקטע AE הוא: $AE = x_A - x_E = 6$

אורך הגובה לצלע AE

במשולש AEB הוא: $y_B - y_E = 16 - 4 = 12$

שטח המשולש AEB הוא: $S_{\triangle AEB} = \frac{AE \cdot (y_B - y_E)}{2}$

$\Downarrow$

$$S_{\triangle AEB} = \frac{6 \cdot 12}{2} = 36$$

שאלה 3

ערכו סקר בקרב מספר גדול של תלמידים. הסקר בדק כמה תלמידים רוצים להמשיך ללימודים אקדמיים.

על פי ממצאי הסקר, 60% מהמשתתפים בסקר (בנים/בנות) רוצים להמשיך ללימודים אקדמיים. מספר הבנים שהשתתפו בסקר קטן פי 3 ממספר הבנות שהשתתפו בסקר. ידוע כי 80% מן הבנים שהשתתפו בסקר רוצים להמשיך ללימודים אקדמיים. א. בוחרים באקראי תלמיד (בן / בת) שהשתתף בסקר.

- (1) מהי ההסתברות שנבחרה בת הרוצה להמשיך ללימודים אקדמיים?
(2) ידוע שנבחרה בת.

מהי ההסתברות שהיא רוצה להמשיך ללימודים אקדמיים?

ב. בוחרים באקראי 5 תלמידים (בנים/בנות) מבין המשתתפים בסקר. מהי ההסתברות שלפחות 4 מהם רוצים להמשיך ללימודים אקדמיים?

תשובה לשאלה 3

א. מספר הבנים בסקר קטן פי 3 ממספר הבנות,

$$3 \cdot P(\text{בן}) = P(\text{בת}) \quad \text{לכן מתקיים:}$$

$$P(\text{בן}) + P(\text{בת}) = 1 \quad \text{כל משתתף בסקר הוא בן או בת, לכן:}$$

$\Downarrow$

$$4 \cdot P(\text{בן}) = 1$$

$$P(\text{בן}) = \frac{1}{4} = 0.25, \quad P(\text{בת}) = \frac{3}{4} = 0.75$$

60% מהמשתתפים בסקר

$$P\left(\begin{array}{c} \text{רוצה להמשיך} \\ \text{ללימודים אקדמיים} \end{array}\right) = 0.6$$

רוצים להמשיך ללימודים אקדמיים,
לכן מתקיים:

$\Downarrow$

$$P\left(\begin{array}{c} \text{לא רוצה להמשיך} \\ \text{ללימודים אקדמיים} \end{array}\right) = 0.4$$

80% מהבנים שהשתתפו בסקר

$$P\left(\begin{array}{c} \text{רוצה להמשיך} \\ \text{ללימודים אקדמיים} \end{array} \middle/ \text{בן}\right) = 0.8$$

רוצים להמשיך ללימודים אקדמיים,
לכן מתקיים:

$\Downarrow$

$$P\left(\begin{array}{c} \text{רוצה להמשיך} \\ \text{ללימודים אקדמיים} \end{array} \cap \text{בן}\right) = 0.8 \cdot 0.25 = 0.2$$

המשך תשובה לשאלה 3.

ריכוז הנתונים בטבלה דו־ממדית וחישוב ההסתברויות בטבלה שלהלן:

	רוצה להמשיך ללימודים אקדמיים	לא רוצה להמשיך ללימודים אקדמיים	
בן	0.2	0.05	0.25
בת	0.4	0.35	0.75
	0.6	0.4	1

(1) ההסתברות שנבחרה בת

שרוצה להמשיך ללימודים אקדמיים היא:

$$P\left(\begin{array}{c} \text{רוצה להמשיך} \\ \text{ללימודים אקדמיים} \end{array} \cap \text{בת}\right) = 0.6 - 0.2 = 0.4$$

(2) ידוע שנבחרה בת.

ההסתברות שהיא רוצה להמשיך
ללימודים אקדמיים היא:

$$P\left(\begin{array}{c} \text{רוצה להמשיך} \\ \text{ללימודים אקדמיים} \end{array} \middle/ \text{בת}\right) = P\left(\begin{array}{c} \text{רוצה להמשיך} \\ \text{ללימודים אקדמיים} \end{array} \cap \text{בת}\right) \frac{1}{P(\text{בת})} = \frac{0.4}{0.75} = 0.53$$

ב. נבחרו 5 תלמידים מבין המשתתפים בסקר.

ההסתברות שלפחות 4 מהם רוצים להמשיך

ללימודים אקדמיים היא:

$$P\left(\begin{array}{c} \text{לפחות 4 רוצים להמשיך} \\ \text{ללימודים אקדמיים} \end{array}\right) = P\left(\begin{array}{c} \text{בדיוק 4 רוצים להמשיך} \\ \text{ללימודים אקדמיים} \end{array}\right) + P\left(\begin{array}{c} \text{בדיוק 5 רוצים להמשיך} \\ \text{ללימודים אקדמיים} \end{array}\right) =$$

$$= \binom{5}{4} 0.6^4 \cdot 0.4^1 + \binom{5}{5} 0.6^5 \cdot 0.4^0 = 0.33696$$

שאלה 4

F היא נקודת החיתוך של האלכסונים במרובע ABCD.

הנקודה E נמצאת על FC,

והנקודה G נמצאת על FB,

באופן שהמרובע BCEG הוא בר־חסימה במעגל

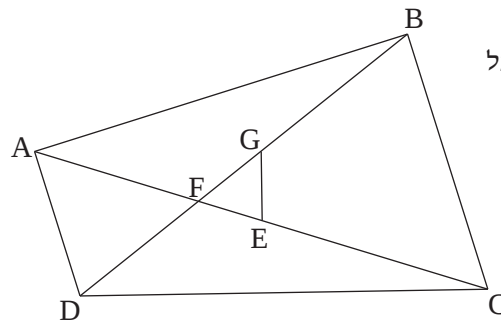
(ראה ציור).

א. הוכח: $\triangle FEG \sim \triangle FBC$.

ב. נתון: $\frac{AF}{FG} = \frac{DF}{FE}$.

הוכח: $\triangle FDA \sim \triangle FEG$.

ג. הוכח: $AD \parallel BC$.



תשובה לשאלה 4

א. סכום זוויות נגדיות במרובע בר־חסימה הוא 180° $\angle GEC + \angle GBC = 180^\circ$

סכום זוויות צמודות הוא 180° $\angle GEC + \angle GEF = 180^\circ$

$\Downarrow$

$\angle GEF = \angle GBC$ מכאן;

זווית משותפת לשני המשולשים $\angle BFC = \angle GFE$

$\Downarrow$

$\triangle FEG \sim \triangle FBC$ מכאן; (ז.ז.)

ב. נתון: $\frac{AF}{FG} = \frac{DF}{FE}$

זוויות קדקודיות שוות $\angle AFD = \angle GFE$

$\Downarrow$

$\triangle FDA \sim \triangle FEG$ (ז.ז.ז.)

ג. הוכח בסעיף ב $\triangle FDA \sim \triangle FEG$

$\Downarrow$

זוויות מתאימות במשולשים דומים $\angle GEF = \angle ADF$

הוכח בסעיף א $\angle GEF = \angle GBC$

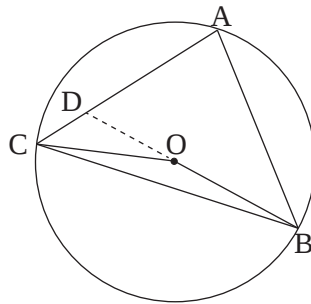
$\Downarrow$

$\angle ADF = \angle GBC = \angle DBC$

$\Downarrow$

אם זוויות מתחלפות הן שוות, הקווים מקבילים $AD \parallel BC$

שאלה 5



ABC הוא משולש שווה-שוקים ($AC = AB$),
החסום במעגל שמרכזו O ורדיוסו R (ראה ציור).

נתון: $\angle BAC = 80^\circ$.

א. הבע באמצעות R את אורך הצלע AB.

ב. מצא את $\angle COB$. נמק.

ג. המשך OB חותך את השוק AC בנקודה D (ראה ציור).

נתון: $BD = 5$ ס"מ.

(1) מצא את $\angle ABD$.

(2) מצא את R.

תשובה לשאלה 5

א. במשולש שווה-שוקיים ABC זוויות הבסיס שוות $\angle ACB = \angle ABC$

$$\angle CAB = 80^\circ$$

$\Downarrow$

$$\angle ACB = \frac{180^\circ - 80^\circ}{2} = 50^\circ$$

במשולש ABC

$$\frac{AB}{\sin \angle ACB} = 2R \quad \text{לפי משפט הסינוסים מתקיים:}$$

$$\frac{AB}{\sin 50^\circ} = 2R$$

$\Downarrow$

$$AB = 2R \sin 50^\circ$$

ב. במעגל הזווית המרכזית גדולה פי 2 מהזווית ההיקפית הנשענת על אותה הקשת $\angle COB = 2 \angle CAB = 160^\circ$

המשך תשובה לשאלה 5.

ג. (1) $\angle OBC = \angle OCB$ במשולש שווה-שוקיים BCO זוויות הבסיס שוות

$$\angle COB = 160^\circ$$

$\Downarrow$

$$\angle OBC = \frac{180^\circ - 160^\circ}{2} = 10^\circ$$

$\Downarrow$

$$\angle ABD = 50^\circ - 10^\circ = 40^\circ$$

סכום הזוויות במשולש הוא 180°

(2) במשולש ADB

על פי משפט הסינוסים
מתקיים:

$$\frac{AB}{\sin \angle ADB} = \frac{BD}{\sin \angle DAB}$$

$$\angle ADB = 180^\circ - 80^\circ - 40^\circ = 60^\circ$$

$\Downarrow$

$$\frac{2R \sin 50^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{5}{\sin 80^\circ}$$

$\Downarrow$

$$R = 2.87 \text{ ס"מ}$$

סכום הזוויות במשולש ADB

שאלה 6

נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.
- ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ה. האם הישר $y = x - 2$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$? נמק.

תשובה לשאלה 6

- א. הביטוי האלגברי בתוך השורש צריך להיות אי-שלילי, לכן:

$$x^2 - 4x + 3 \geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$x \leq 1, \quad x \geq 3$$
 תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ הוא:

- ב. שיעור ה- x של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y הוא 0, לכן מתקיים:

$$f(0) = \sqrt{0^2 - 4 \cdot 0 + 3}$$
 נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y היא: $(0, \sqrt{3})$
- שיעור ה- y של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x הוא 0, לכן מתקיים:

$$f(x) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(f(x))^2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x = 1, \quad x = 3$$
 נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x הן: $(1, 0)$, $(3, 0)$

המשך תשובה לשאלה 6.

ג. הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא:

$$f'(x) = \frac{2x - 4}{2\sqrt{x^2 - 4x + 3}}$$

$$f'(x) = 0$$

$$\Downarrow$$
 $x = 2$, לא בתחום

$$\Downarrow$$

הנגזרת לא מתאפסת בתחום.

נבדוק את סימן הנגזרת $f'(x)$ בתחומים

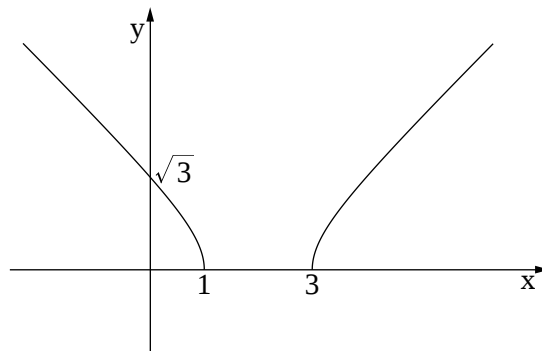
$$x < 1 \quad \text{ו} \quad x > 3$$

הסימנים של פונקציית הנגזרת מרוכזים בטבלה שלהלן:

x	$x < 1$		$x > 3$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

הפונקציה $f(x)$ יורדת בתחום $x < 1$, כי $f'(x) < 0$ עבור $x < 1$ הפונקציה $f(x)$ עולה בתחום $x > 3$, כי $f'(x) > 0$ עבור $x > 3$

ד. סקיצה של גרף הפונקציה:



ה. נבדוק אם לגרפים של שתי הפונקציות

יש נקודות חיתוך:

$$x - 2 = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$$

$$\Downarrow$$
 העלאה בריבוע

$$(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 3$$

$$x^2 - 4x + 4 = x^2 - 4x + 3$$

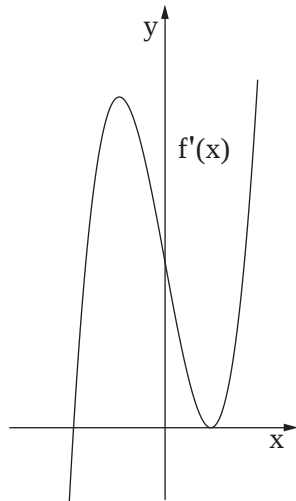
$$\Downarrow$$

$$4 = 3$$

פסוק שקר, לכן אין פתרון

$$\Downarrow$$
מכאן: הישר $y = x - 2$ אינו חותך את גרף הפונקציה $f(x)$.

שאלה 7



$f(x)$ היא פונקציה שמוגדרת לכל x .

בציור שלפניך מוצג הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עובר

דרך הנקודות: $(-2, 0)$, $(1, 0)$.

א. (1) על פי הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$

מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מהו שיעור ה- x של נקודת הקיצון

של הפונקציה $f(x)$, ומהו סוג הקיצון? נמק.

(3) נתון כי פונקציית הנגזרת היא

$$f'(x) = 4x^3 - 12x + 8$$

שיעור ה- y של נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ הוא -10 .

מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא את השיעורים של הנקודות שבהן שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ הוא 0 .

תשובה לשאלה 7

א. (1) על פי הגרף הנתון, פונקציית הנגזרת $f'(x)$

מתאפסת בנקודות ששיעור ה- x שלהן

הוא $x = 1$ ו- $x = -2$.

ריכוז הסימנים של $f'(x)$ בטבלה:

x	$x < -2$	-2	$-2 < x < 1$	1	$x > 1$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	נקודת מינימום	$\nearrow$		$\nearrow$

$$f'(x) \geq 0 \text{ בתחום } x > -2, f'(x) < 0 \text{ בתחום } x < -2$$

לכן

הפונקציה $f(x)$ יורדת בתחום $x < -2$, הפונקציה $f(x)$ עולה בתחום $x > -2$

זוהי נקודת מינימום,

$$x = -2$$

(2) שיעור ה- x של נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ הוא:

כי הפונקציה בירידה בתחום $x < -2$

ובעלייה בתחום $x > -2$

$$(-2, -10)$$

(3) השיעורים של נקודת הקיצון הם:

הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה קדומה של $f'(x)$

לכן מתקיים:

$$f(x) = \int (4x^3 - 12x + 8) dx$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x + C$$

גרף הפונקציה $f(x)$ עובר דרך

נקודת המינימום $(-2, -10)$

$$-10 = (-2)^4 - 6(-2)^2 + 8(-2) + C$$

לכן מתקיים:

$$\Downarrow$$

$$C = 14$$

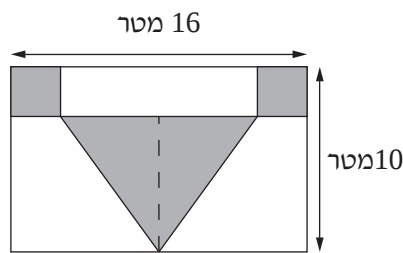
$$f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x + 14$$

הפונקציה $f(x)$ היא:

ב. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ הוא 0 עבור הנקודות שבהן פונקציית הנגזרת $f'(x)$ מתאפסת.

הנקודות הן: $(-2, -10)$, $(1, 17)$

שאלה 8



האורך של קיר בצורת מלבן הוא 16 מטר,

והגובה של הקיר הוא 10 מטר.

רוצים לצפות בקרמיקה חלק מהקיר.

החלק שרוצים לצפות כולל:

- שני ריבועים זהים בפינות המלבן
- משולש שווה-שוקיים שבסיסו מקביל לצלע המלבן (השטחים האפורים בציור).

סמן ב- x את האורך של צלע הריבוע, וענה על הסעיפים א-ג.

א. הבע באמצעות x את הגובה לבסיס במשולש שווה-השוקיים.

ב. מה צריך להיות x , כדי שסכום השטחים שרוצים לצפות בקרמיקה יהיה מינימלי?

ג. עבור ה- x שמצאת בסעיף ב, חשב כמה אחוזים משטח הקיר מהווה החלק שרוצים לצפות בקרמיקה.

תשובה לשאלה 8

א. הגובה לבסיס במשולש שווה-השוקיים הוא: $10 - x$, $0 < x < 10$

ב. שטח כל אחד מהריבועים הוא: $S_{\square} = x^2$

אורך הבסיס במשולש שווה-השוקיים הוא: $0 < x < 8$, $(16 - 2x)$

שטח המשולש שווה-השוקיים הוא: $S_{\triangle} = \frac{(16 - 2x) \cdot (10 - x)}{2}$

סכום השטחים שרוצים לצפות בקרמיקה הם

שני ריבועים זהים ומשולש,

לכן סכום השטחים הוא:

$$S(x) = 2x^2 + \frac{(16 - 2x)(10 - x)}{2}$$

$$0 < x < 8, \quad S(x) = 3x^2 - 18x + 80$$

הנגזרת של $S(x)$ היא: $S'(x) = 6x - 18$

סימן הנגזרת:

x	2	3	4
$S'(x)$	-	0	+
$S(x)$	↘	נקודת מינימום	↗

↓

סכום השטחים הוא מינימלי עבור: $x = 3$ מטר

המשך תשובה לשאלה 8.

ג. שטח כל הקיר הוא:

$$160 \text{ מ}^2 = 16 \cdot 10$$

עבור $x = 3$ סכום השטחים

$$S(3) = 3 \cdot 3^2 - 18 \cdot 3 + 80 = 53$$

שרוצים לצפות בקרמיקה הוא:

$$\frac{53}{160} \cdot 100 = 33.125\%$$

השטח שרוצים לצפות בקרמיקה

הוא 33.125% משטח הקיר