

סוג הבחינה: א. בגרות לבתי ספר על-יסודיים
ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים
מועד הבחינה: קיץ תשע"ד, 2014
מספר השאלון: 313, 035803
נספח: דפי נוסחאות ל-3 יחידות לימוד

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מתמטיקה

3 יחידות לימוד — שאלון שלישי

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעותיים.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שש שאלות בנושאים:

אלגברה, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי.

עליך לענות על ארבע שאלות — $25 \times 4 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, ב כאשר

החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.

שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

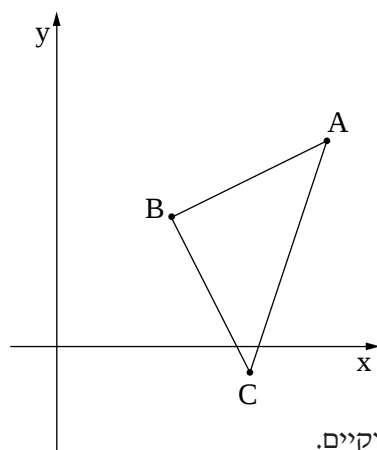
שאלה 1

- סוחר מציע למכירה שני סוגים של אותו צעצוע, סוג א' וסוג ב'.
 המחיר של צעצוע מסוג א' היה גדול ב־ 20 שקלים מהמחיר של צעצוע מסוג ב'.
 הסוחר העלה את המחיר של צעצוע מסוג א' ב־ 10 שקלים, ואת המחיר של צעצוע מסוג ב' ב־ 3 שקלים.
 אחרי עליית המחירים, המחיר של צעצוע מסוג ב' הוא 55% מן המחיר של צעצוע מסוג א'.
 א. מצא את המחיר של צעצוע מסוג א' ואת המחיר של צעצוע מסוג ב' לפני עליית המחירים.
 ב. בכמה אחוזים עלה המחיר של צעצוע מסוג ב'?

תשובה לשאלה 1

- נסמן ב־ x את המחיר של צעצוע מסוג ב'.
 המחיר של צעצוע מסוג א' הוא: $x + 20$ שקלים
 המחיר של צעצוע מסוג א' אחרי העלאת המחיר הוא: $x + 30$ שקלים
 המחיר של צעצוע מסוג ב' אחרי העלאת המחיר הוא: $x + 3$ שקלים
 אחרי העלאת המחירים המחיר של צעצוע מסוג ב' היה 55% מהמחיר של צעצוע מסוג א',
 לכן מתקיים: $x + 3 = 0.55(x + 30)$
 $\Downarrow$
 $0.45x = 13.5$
 $\Downarrow$
 $x = 30$ שקלים
 א. המחיר של צעצוע מסוג ב' הוא: 30 שקלים
 המחיר של צעצוע מסוג א' הוא: 50 שקלים
 ב. המחיר של צעצוע מסוג ב' עלה ב־ 10%
 $\frac{3}{30} \cdot 100 = 10\%$

שאלה 2



נתון משולש ABC.

צלעות המשולש AB ו-BC מונחות על הישרים

$$y = -2x + 17 \quad \text{ו-} \quad y = \frac{1}{2}x + 2$$

(ראה ציור).

א. מצא את שיעורי הנקודה B.

ב. שיעור ה- x של הנקודה A הוא 12.

מצא את שיעור ה- y של הנקודה A.

ג. נתון כי שיעורי הנקודה C הם $C(9, -1)$.

הוכח כי משולש ABC הוא משולש ישר-זווית ושווה-שוקיים.

ד. חשב את שטח המשולש ABC.

תשובה לשאלה 2

א. הנקודה B היא נקודת החיתוך

של שני הישרים AB ו-BC,

לכן שיעורי הנקודה B מתקבלים מפתרון

מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 2 \\ y = -2x + 17 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$x = 6, \quad y = 5$$

$$B(6, 5)$$

שיעורי הנקודה B הם:

ב. הנקודה A על הישר AB.

על-פי הציור, הישר AB הוא ישר עולה.

לכן משוואת הישר AB היא משוואת הישר

שהשיפוע שלו חיובי.

משוואת הישר AB היא:

$$y = \frac{1}{2}x + 2$$

נתון כי שיעור ה- x של הנקודה A הוא 12,

לכן מתקיים:

$$y = \frac{1}{2} \cdot 12 + 2$$

$\Downarrow$

$$y = 8$$

$$A(12, 8)$$

שיעור ה- y של הנקודה A הוא:

השיעורים של הנקודה A הם:

המשך תשובה לשאלה 2.

ג. השיעורים של הנקודות A, B ו-C הם: $A(12, 8)$, $B(6, 5)$, $C(9, -1)$

חישוב אורכי צלעות המשולש:

$$AB = \sqrt{(12-6)^2 + (8-5)^2} = \sqrt{45} \quad \text{אורך הצלע AB הוא:}$$

$$AC = \sqrt{(12-9)^2 + (8-(-1))^2} = \sqrt{90} \quad \text{אורך הצלע AC הוא:}$$

$$BC = \sqrt{(6-9)^2 + (5-(-1))^2} = \sqrt{45} \quad \text{אורך הצלע BC הוא:}$$

$\Downarrow$

$$AB = BC = \sqrt{45}$$

$\Downarrow$

המשולש ABC הוא משולש שווה-שוקיים

נראה כי משולש ABC גם ישר-זווית.

דרך I

מכפלת השיפועים של הישרים AB ו-BC

היא -1

$$\frac{1}{2} \cdot (-2) = (-1)$$

$\Downarrow$

הישרים AB ו-AC מאונכים זה לזה,

המסקנה:

לכן המשולש ABC הוא משולש ישר-זווית.

דרך II

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

האורכים של צלעות המשולש מקיימים:

$$90 = 45 + 45$$

$\Downarrow$

האורכים של צלעות המשולש ABC מקיימים את

משפט פיתגורס, לכן המשולש ABC הוא משולש ישר-זווית.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC$$

ד. חישוב השטח של משולש ישר-זווית ABC:

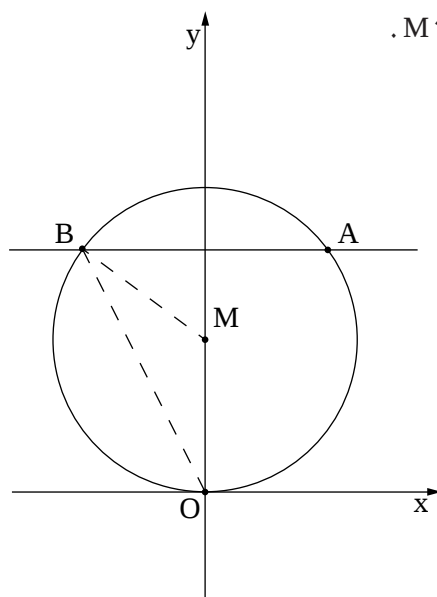
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{45} \cdot \sqrt{45} = 22.5$$

$\Downarrow$

$$S_{\Delta ABC} = 22.5$$

שטח המשולש ABC הוא:

שאלה 3



נתון מעגל שמשוואתו $x^2 + (y - 5)^2 = R^2$ ומרכזו M.

הנקודה $A(4, 8)$ נמצאת על המעגל.

א. מצא את R, ורשום את משוואת המעגל.

דרך הנקודה A העבירו ישר המקביל לציר ה-x.

הישר חותך את המעגל בנקודה נוספת B

(ראה ציור).

ב. (1) מצא את משוואת הישר המקביל לציר ה-x.

(2) מצא את שיעורי הנקודה B.

ג. (1) הראה בעזרת חישוב כי המעגל עובר

דרך ראשית הצירים - O.

(2) מצא את היקף המשולש BMO.

בתשובתך דייק עד שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

תשובה לשאלה 3

א. הנקודה $A(4, 8)$ נמצאת על המעגל, לכן מתקיים:

$$4^2 + (8 - 5)^2 = R^2$$

↓

$$R^2 = 25$$

↓

$$x^2 + (y - 5)^2 = 25$$

משוואת המעגל היא:

ב. (1) הישר העובר דרך הנקודה A

ומקביל לציר ה-x - שיפועו 0.

הישר גם חותך את ציר ה-y

בנקודה $(0, 8)$, לכן משוואתו:

$$y = 8$$

(2) הנקודה B נמצאת על המעגל

וגם על הישר $y = 8$, לכן

מתקיים:

$$\begin{cases} y = 8 \\ x^2 + (y - 5)^2 = 25 \end{cases}$$

↓

$$x^2 + (8 - 5)^2 = 25$$

↓

$$x^2 = 16$$

↓

$$x = 4, \quad x = -4$$

$$A(4, 8) \quad \text{ו} \quad (-4, 8)$$

שתי הנקודות המתקבלות

מפתרון מערכת המשוואות הן:

אחת הנקודות המתקבלות היא הנקודה A,

לכן הנקודה השנייה היא הנקודה B.

השיעורים של הנקודה B הם:

$$B(-4, 8)$$

המשך תשובה לשאלה 3.

ג. (1) כדי להראות שהמעגל עובר דרך

ראשית הצירים יש לבדוק אם

הנקודה $(0, 0)$ מקיימת את משוואת המעגל.

$$x^2 + (y - 5)^2 = 25$$

$\Downarrow$

$$0^2 + (0 - 5)^2 = 25$$

$$25 = 25$$

$\Downarrow$

השיעורים של ראשית הצירים $(0, 0)$ מקיימים את

משוואת המעגל, לכן המעגל עובר דרך

ראשית הצירים.

(2) היקף המשולש BMO הוא סכום

האורכים של שלוש הצלעות: MO, MB, BO.

$MB = MO = 5$ הם רדיוסים במעגל,

לכן נותר לחשב רק את אורך המיתר BO.

השיעורים של הנקודות B ו-O הם:

$$B(-4, 8), \quad O(0, 0)$$

$$BO = \sqrt{(-4 - 0)^2 + (8 - 0)^2} = \sqrt{80}$$

אורך המיתר BO הוא:

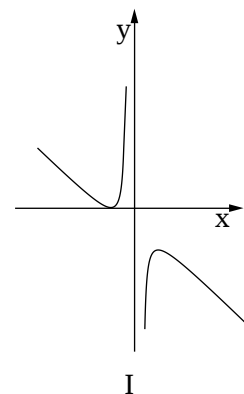
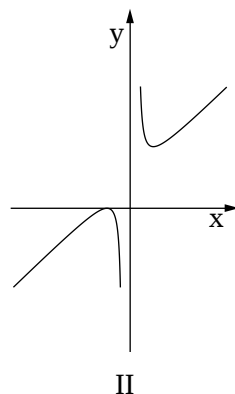
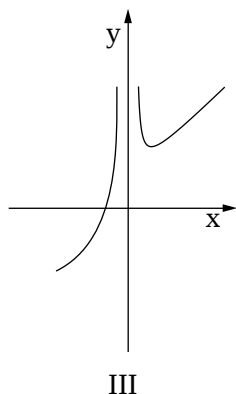
$$MO + MB + BO = 10 + \sqrt{80} \approx 18.94$$

היקף המשולש BMO הוא:

שאלה 4

נתונה הפונקציה $f(x) = x + 4 + \frac{4}{x}$.

- רשום את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.
- רשום את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- קבע איזה מבין הגרפים III-I שלפניך הוא גרף הפונקציה $f(x)$. נמק את קביעתך.



תשובה לשאלה 4

א. תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ הוא: $x \neq 0$

ב. הנגזרת של הפונקציה היא: $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$

$$f'(x) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 = 4$$

$$\Downarrow$$

$$x = \pm 2$$

הנקודות שבהן הנגזרת מתאפסת הן:

בדיקת סימן הנגזרת $f'(x)$ בין נקודות האפס:

x	-4	x = -2	-1	x = 0	1	x = 2	4
$f'(x)$	+	0	-		-	0	+
$f(x)$	↗ עלייה	נקודת מקסימום	↘ ירידה		↘ ירידה	נקודת מינימום	↗ עלייה

נקודת מקסימום: $(-2, 0)$

נקודת מינימום: $(2, 8)$

נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ הן:

/המשך בעמוד 8/

המשך תשובה לשאלה 4.

$$x < -2, \quad x > 2$$

$$-2 < x < 0, \quad 0 < x < 2$$

ג. תחומי העלייה של הפונקציה הם:

תחומי הירידה של הפונקציה הם:

ד. בנקודת החיתוך של הפונקציה

עם ציר ה־ x שיעור ה־ y של

הנקודה הוא 0.

לכן מתקיים:

$$f(x) = x + 4 + \frac{4}{x} = 0$$

$\Downarrow$

$$\frac{x^2 + 4x + 4}{x} = 0$$

$\Downarrow$

$$x = -2$$

נקודת החיתוך של הפונקציה עם

$$(-2, 0)$$

ציר ה־ x היא:

ה. גרף II הוא גרף הפונקציה $f(x)$.

לפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות קיצון, אחת מינימום ואחת מקסימום.

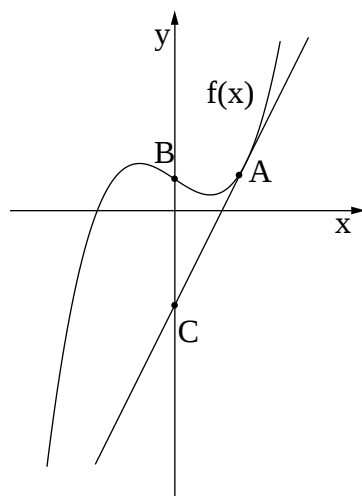
נקודת המינימום $(2, 8)$ נמצאת ברביע הראשון, ונקודת המקסימום היא $(-2, 0)$.

לכן גרף II הוא הגרף של $f(x)$.

שאלה 5

הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x) = 12x^2 - 3$.

א. מצא את שיעורי ה- x של הנקודות על גרף הפונקציה $f(x)$, שבהן שיפוע המשיק הוא 9.



בציור שלפניך מוצג גרף הפונקציה $f(x)$,

והישר $y = 9x - 6$ המשיק לגרף הפונקציה בנקודה A, שברביע הראשון.

ב. (1) מצא את שיעור ה- y של הנקודה A.

(2) מצא את הפונקציה $f(x)$.

ג. גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- y בנקודה B.

הישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה A

חותך את ציר ה- y בנקודה C.

מצא את אורך הקטע BC.

תשובה לשאלה 5

א. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$

הוא 9, לכן מתקיים:

$$f'(x) = 9$$

$$12x^2 - 3 = 9$$

$\Downarrow$

$$x^2 = 1$$

$\Downarrow$

$$x = \pm 1$$

שיעור ה- x של הנקודות שבהן שיפוע

המשיק הוא 9 הן:

ב. (1) נתון כי $y = 9x - 6$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)$.

בסעיף א מצאנו שתי נקודות שבהן שיפוע

המשיק הוא 9. על פי הציור, הנקודה A

נמצאת ברביע הראשון, לכן שיעור ה- x

שלה הוא חיובי.

נציב $x = 1$ במשוואת המשיק:

$$y = 9 \cdot 1 - 6 = 3$$

$\Downarrow$

$$y = 3$$

$$A(1, 3)$$

שיעור ה- y של הנקודה A הוא:

השיעורים של הנקודה A הם:

המשך תשובה לשאלה 5.

(2) הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה קדומהלפונקציית הנגזרת $f'(x)$,

לכן מתקיים:

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (12x^2 - 3) dx$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) = 4x^3 - 3x + C$$

$$f(1) = 3$$

נציב את שיעורי הנקודה A בפונקציה $f(x)$:

$$f(1) = 4 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1 + C = 3$$

$$\Downarrow$$

$$C = 2$$

$$f(x) = 4x^3 - 3x + 2$$

הפונקציה $f(x)$ היא:

ג. B היא נקודת החיתוך של גרף

הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y

$$f(0) = 2$$

$$\Downarrow$$

$$B(0, 2)$$

השיעורים של הנקודה B הם:

C היא נקודת החיתוך של המשיק

עם ציר ה- y , לכן מתקיים:

$$y = 9 \cdot 0 - 6$$

$$\Downarrow$$

$$C(0, -6)$$

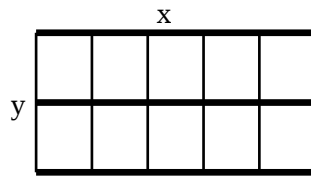
השיעורים של הנקודה C הם:

$$\Downarrow$$

$$BC = 2 - (-6) = 8$$

לכן אורך הקטע BC הוא:

שאלה 6



בציור שלפניך מוצגת רשת שצורתה מלבן.

הרשת עשויה מ-3 מוטות ארוכים שהאורך של

כל אחד מהם הוא x ,

ומ-6 מוטות קצרים שהאורך של כל אחד מהם הוא y .

נתון: $x \cdot y = 18$.

א. (1) הבע את y באמצעות x .

(2) הבע באמצעות x את סכום האורכים של כל המוטות שהרשת עשויה מהם.

ב. מה צריך להיות x , כדי שסכום האורכים של כל המוטות, שהרשת עשויה מהם, יהיה מינימלי?

תשובה לשאלה 6

$$x \cdot y = 18$$

$$\Downarrow$$

$$y = \frac{18}{x}$$

א. (1) נתון:

יש להביע את y באמצעות x :

$$3x + 6 \cdot \frac{18}{x}$$

$$\Downarrow$$

$$3x + \frac{108}{x}$$

(2) סכום האורכים של כל המוטות

שהרשת עשויה מהם הוא:

ב. נגדיר $f(x)$: הפונקציה של

סכום האורכים של כל המוטות

שהרשת עשויה מהם.

$f(x)$ היא:

$$x > 0, \quad f(x) = 3x + \frac{108}{x}$$

$$f'(x) = 3 - \frac{108}{x^2}$$

$$f'(x) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 = 36$$

$$\Downarrow$$

$$x = \pm 6$$

$$x > 0 \Rightarrow x = 6$$

הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא:

נקודת קיצון פנימית היא:

המשך תשובה לשאלה 6.

בדיקת סוג נקודת הקיצון

על-פי סימן הנגזרת הראשונה $f'(x)$:

x	3	6	10
$f'(x)$	—	0	+
	↘	נקודת מינימום	↗

↓

$x = 6$ מינימום

שיעור ה- x שעבורו סכום האורכים של

כל המוטות שהרשת עשויה מהם הוא

מינימלי הוא: