מדינת ישראל

משרד החינוך

סוג הבחינה: א. בגרות לבתי"ס על־יסודיים
ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים

מועד הבחינה: חורף תשע"ד

מספר השאלון: **317 ,035807**

תרגום לערבית (2)

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מתמטיקה

5 יחידות לימוד — שאלון שני

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעתיים.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

בשאלון זה שני פרקים.

פרק ראשון: גאומטריה אנליטית, וקטורים

טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

$2 \times 33\frac{1}{3} - 66\frac{2}{3}$ נק'

פרק שני: גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה

פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

$1 \times 33\frac{1}{3} - 33\frac{1}{3}$ נק'

סה"כ — 100 נק'

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
2. דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

1. אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
2. התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
   הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
   חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
3. לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
   שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

בהצלחה!

دولة إسرائيل

وزارة التّربية والتّعليم

نوع الامتحان: أ. بجروت للمدارس الثّانويّة
ب. بجروت للممتحَنين الخارجيّين

موعد الامتحان: شتاء 2014

رقم النّموذج: **317 ،035807**

ترجمة إلى العربيّة (2)

اقتراح إجابات لأسئلة امتحان بجروت

الرياضيّات

5 وحدات تعليميّة – النّموذج الثّاني

تعليمات للممتحَن

أ. مدّة الامتحان: ساعتان.

ب. مبنى النّموذج وتوزيع الدرجات:

في هذا النّموذج فصلان.

الفصل الأوّل: الهندسة التحليليّة، المتّجهات

حساب المثلّثات في الفراغ، الأعداد المركّبة

$2 \times 33\frac{1}{3} - 66\frac{2}{3}$ درجة

الفصل الثاني: التزايد والتضاؤل، دوالّ القوى، الدوالّ الأسّيّة واللوغريثميّة

$1 \times 33\frac{1}{3} - 33\frac{1}{3}$ درجة

المجموع — 100 درجة

جـ. موادّ مساعدة يُسمح استعمالها:

1. حاسبة غير بيانيّة. لا يُسمح استعمال إمكانيّات البرمجة في الحاسبة التي يمكن برمجتها. استعمال الحاسبة البيانيّة أو إمكانيّات البرمجة في الحاسبة قد يؤدّي إلى إلغاء الامتحان.
2. لوائح قوانين (مرفقة).

د. تعليمات خاصّة:

1. لا تنسخ السّؤال؛ اكتب رقمه فقط.
2. ابدأ كلّ سؤال في صفحة جديدة. اكتب في الدّفتر مراحل الحلّ، حتّى إذا أجريتَ حساباتك بواسطة حاسبة.
   فسّر كلّ خطواتك، بما في ذلك الحسابات، بالتّفصيل وبوضوح وبترتيب.
   عدم التّفصيل قد يؤدّي إلى خصم درجات أو إلى إلغاء الامتحان.
3. لكتابة مسوّدة يجب استعمال دفتر الامتحان أو الأوراق التي حصلتَ عليها من المراقبين.
   استعمال مسوّدة أخرى قد يؤدّي إلى إلغاء الامتحان.

التّعليمات في هذا النّموذج مكتوبة بصيغة المذكّر وموجّهة للممتحَنات وللممتحَنين على حدّ سواء.

نتمنّى لك النّجاح!

السؤال 1

النقطتان $C(x_1 , y_1)$ وَ $D(x_2 , y_2)$ تقعان في الربع الأوّل على القطع المكافئ $y^2 = 4x$.

أ. (1) بيّن أنّ ميل الوتر CD هو $m = \frac{4}{y_2 + y_1}$.

(2) النقطة $(x , 3)$ هي منتصف الوتر CD.

جد m .

ب. معطى أنّ بُعد كلّ نقطة على القطع المكافئ المعطى عن المستقيم $x = a$ يساوي بُعدها عن النقطة $(0 , 1)$.

بُعد النقطة C عن المستقيم $x = 2a$ هو 6.

(1) ما هي قيمة a ؟ علّل.

(2) جد معادلة المستقيم CD.

إجابة السؤال 1

أ. (1) ميل المستقيم CD يحقّق: $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

الإحداثيّان x للنقطتين C وَ D يحقّقان: $x_1 = \frac{(y_1)^2}{4} \quad , \quad x_2 = \frac{(y_2)^2}{4}$

من تعويض الإحداثيّين x للنقطتين C وَ D في الميل ينتج: $m = \frac{4(y_1 - y_2)}{(y_1)^2 - (y_2)^2}$

$$\Downarrow$$

$$m = \frac{4}{y_1 + y_2}$$

(2) حسب المعطى منتصف القطعة CD هو في النقطة: $(x , 3)$

$$\Downarrow$$

الإحداثيّان y للنقطتين C وَ D يحقّقان: $3 = \frac{y_1 + y_2}{2}$

$$\Downarrow$$

$$y_1 + y_2 = 6$$

$$\Downarrow$$

من تعويض $y_1 + y_2 = 6$ في الميل CD ينتج: $m = \frac{2}{3}$

/ يتبع في صفحة 3 /

تكملة حلّ السؤال 1.

ب. (1) تعريف القطع المكافئ هو: المحلّ الهندسيّ للنقاط التي تقع على بُعد متساوٍ من نقطة ثابتة ومن مستقيم ثابت.

$\Downarrow$

النقطة $(0\ ,\ 1)$ هي بؤرة القطع المكافئ المعطى

والمستقيم $x = a$ هو دليل القطع المكافئ المعطى.

معادلة دليل القطع المكافئ المعطى، $y^2 = 2 \cdot 2x$ ، هي: $x = -\frac{2}{2} = -1$

$\Downarrow$

$a = -1$

(2) بُعد النقطة C عن المستقيم $x = 2a$: $6 = |x_1 - 2a|$

$\Downarrow$

$6 = x_1 + 2$ ، لذلك: $a = -1$ ووجدنا أنّ $x_1 > 0$

$\Downarrow$

$x_1 = 4$

$\Downarrow$

الإحداثيّ y للنقطة C التي تقع في الربع الأوّل: $y_1 = \sqrt{4 \cdot 4} = 4$

وجدنا أنّ $m = \frac{2}{3}$ وَ $C(4\ ,\ 4)$ ،

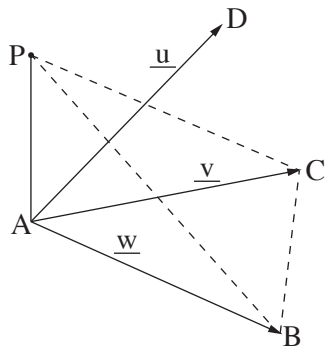
لذلك معادلة المستقيم CD : $y - 4 = \frac{2}{3}(x - 4)$

$\Downarrow$

$y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$

/ يتبع في صفحة 4 /

السؤال 2



معطاة المتّجهات: $\overrightarrow{AD} = \underline{u}$ ، $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$ ، $\overrightarrow{AB} = \underline{w}$ (انظر الرسم).

معطى أنّ: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DAC = 60^o$ ، $\sphericalangle DAB = 90^o$ ،

$|\underline{u}| = |\underline{v}| = |\underline{w}| = 2$.

أ. هل يمكن أن تتواجد ثلاثة المتّجهات $\underline{w}$ ، $\underline{v}$ ، $\underline{u}$ في مستوى واحد؟ علّل.

معطى أيضًا أنّ المتّجه $\overrightarrow{AP} = a\underline{u} + b\underline{v} + \underline{w}$ يعامد المستوى ABC ، a وَ b هما بارامتران (انظر الرسم).

ب. جد طول $\overrightarrow{AP}$ (قيمة عدديّة).

جـ. استعن بحسابات مثلّثيّة، وَجِد الزاوية التي بين المستوى PCB والمستوى ABC.

إجابة السؤال 2

أ. حسب المعطى: $\sphericalangle DAB = 90^o$

إذا كانت ثلاثة المتّجهات في مستوى واحد

عندها يجب أن يتحقّق: $\sphericalangle DAB = \sphericalangle BAC + \sphericalangle DAC = 120^o$ (أو: $60^o = \sphericalangle BAC = \sphericalangle DAB + \sphericalangle DAC$)

من هنا: ثلاثة المتّجهات ليست في مستوى واحد

ب. $\overrightarrow{AP}$ يعامد المستوى ABC ، لذلك يعامد كلّ متّجه في المستوى، ويتحقّق:

$$\overrightarrow{AP} \cdot \underline{w} = 0 \qquad \overrightarrow{AP} \cdot \underline{v} = 0$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$b|\underline{v}| \cdot |w| \cdot \frac{1}{2} + |\underline{w}|^2 = 0 \qquad a|\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \frac{1}{2} + b|\underline{v}|^2 + |\underline{w}| \cdot |\underline{v}| \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$2b + 4 = 0 \qquad 2a + 4b + 2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$b = -2 \quad ، \quad a = 3$$

طول $\overrightarrow{AP}$ يحقّق: $|\overrightarrow{AP}|^2 = (3\underline{u} - 2\underline{v} + \underline{w}) \cdot (3\underline{u} - 2\underline{v} + \underline{w})$

$$\Downarrow$$

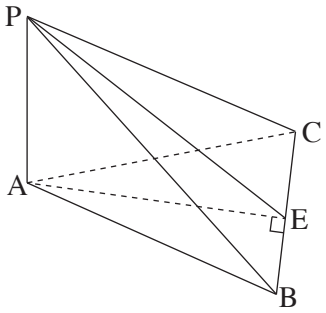
$$|\overrightarrow{AP}|^2 = 24$$

$$\Downarrow$$

طول $\overrightarrow{AP}$ هو: $|\overrightarrow{AP}| = 2\sqrt{6}$

/ يتبع في صفحة 5 /

تكملة حلّ السؤال 2.



جـ. الزاوية التي بين المستوى PCB والمستوى ABC
هي زاوية بين مستقيمين في هذين المستويين يعامدان مستقيم التقاطع.

$\triangle PCB$ هو متساوي الساقين، $PB = PC$ (ينبع من المعطيات) .

$\triangle ABC$ هو متساوي الأضلاع (حسب المعطى) .

لذلك إذا كانت E منتصف CB عندها $\sphericalangle PEA$ هي الزاوية المطلوبة.

في المثلّث القائم الزاوية PEA يتحقّق: $\operatorname{tg}\sphericalangle PEA = \frac{PA}{AE}$

في المثلّث القائم الزاوية AEB يتحقّق: $AE = AB\sin 60^o = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

من تعويض $PA = 2\sqrt{6}$ وَ $AE = \sqrt{3}$
في $\operatorname{tg}\sphericalangle PEA$ ينتج:

$$\operatorname{tg}\sphericalangle PEA = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$$
$$\Downarrow$$
$$\sphericalangle PEA = 70.53^o$$

/ يتبع في صفحة 6 /

السؤال 3

المحلّ الهندسيّ للأعداد المركّبة z يحقّق: $|z-12-5i|=7$.

المحلّ الهندسيّ للأعداد المركّبة $w=x+iy$ يحقّق: $\arg(w)=45^o$.

($\arg(w)$ هي الزاوية بالتمثيل القطبيّ لِـ w .)

المحلّ الهندسيّ للأعداد المركّبة w يقطع المحلّ الهندسيّ للأعداد المركّبة z في النقطتين B وَ C .

أ. ارسم في نفس هيئة المحاور رسمًا تقريبيًّا للمحلَّيْن الهندسيَّيْن.

ب. النقطتان B وَ C تمثّلان في مستوى چاوس العددين المركّبين z_1 وَ z_2 بالتلاؤم.

جد $\arg(z_2 \cdot z_1)$.

إجابة السؤال 3

أ. حسب المعطى المحلّ الهندسيّ

للأعداد $z=x+iy$ يحقّق: $|x-12+(y-5)i|=7$

$$\Downarrow$$

حسب تعريف القيمة المطلقة: $\sqrt{(x-12)^2+(y-5)^2}=7$

$$\Downarrow$$

$$(x-12)^2+(y-5)^2=49$$

$$\Downarrow$$

المحلّ الهندسيّ للأعداد z
هو دائرة مركزها (5 , 12) ونصف قطرها 7

حسب المعطى، الأعداد $w=x+iy$ تكوّن مع

الاتّجاه الموجب للمحور x زاوية مقدارها 45^o وتحقّق: $tg45^o=\frac{y}{x}$ $\quad y>0\ ,\ x>0$

$$\Downarrow$$

$$1=\frac{y}{x}$$

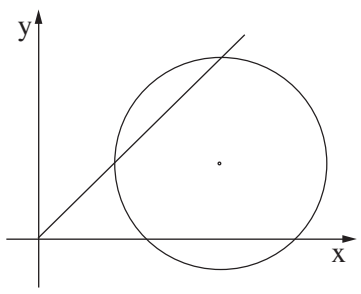
$$\Downarrow$$

$$y=x$$

$$\Downarrow$$

المحلّ الهندسيّ للأعداد w
هو مستقيم في الربع الأوّل

من هنا:



/ يتبع في صفحة 7 /

تكملة حلّ السؤال 3.

ب. زاوية B هي 45^o وزاوية C هي 45^o (تقعان على المحلّ الهندسيّ)

$$\Downarrow$$

$$z_1 = R_1 \operatorname{cis} 45^o \quad , \quad z_2 = R_2 \operatorname{cis} 45^o$$

$$\Downarrow$$

$$z_1 \cdot z_2 = R_1 \cdot R_2 \operatorname{cis}(45^o + 45^o)$$

$$\Downarrow$$

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = 45^o + 45^o$$

$$\Downarrow$$

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = 90^o$$

/ يتبع في صفحة 8 /

السؤال 4

معطاة الدالّة $f(x)=2e^{\sqrt{x}}$.

أ. جد:

(1) مجال تعريف الدالّة $f(x)$.

(2) مجالات تصاعد وتنازل دالّة المشتقّة $f'(x)$.

ب. جد إحداثيّات النقطة القصوى للدالّة $y=2\cdot f'(x)$ ،

وبيّن أنّ هذه النقطة تقع على الرسم البيانيّ للدالّة $y=f(x^2)$ ، $x>0$.

جـ. الدالّتان $y=2\cdot f'(x)$ وَ $y=f(x^2)$ تلتقيان في نقطة واحدة فقط (النقطة التي وجدتَها في البند "ب").

المساحة المحصورة بين الرسمين البيانيّين لهاتين الدالّتين والمستقيم $x=a$ ، $a>1$ ، تساوي $8e-2\cdot f(a)$.

جد قيمة a . بإمكانك إبقاء ℓn في إجابتك.

إجابة السؤال 4

أ. (1) مجال تعريف $f(x)$: $x\geq 0$

(2) $f'(x)=2e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ لكلّ $x>0$

$$\Downarrow$$

$$f''(x)=\frac{\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}-e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}{2x\sqrt{x}}$$

$f''(x)=0 \quad\Rightarrow\quad \sqrt{x}-1=0 \quad\Rightarrow\quad x=1: x>0$ بالنسبة لِـ

x	$0<x<1$	1	$x>1$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\searrow$	e	$\nearrow$

$f'(x)$ تصاعديّة بالنسبة لِـ: $x>1$

$f'(x)$ تنازليّة بالنسبة لِـ: $0<x<1$

/ يتبع في صفحة 9 /

تكملة حلّ السؤال 4.

ب. حسب الجدول الذي في البند الفرعيّ "أ(2)" للدالّة $f'(x)$ نقطة قصوى في النقطة: $(1 , e)$

لذلك، للدالّة $y = 2f'(x)$ نقطة قصوى في النقطة: $(1 , 2e)$

الدالّة $y = f(x^2)$ ، $x > 0$ ، هي: $y = 2e^{\sqrt{x^2}} = 2e^x$

$$\Downarrow$$

نعوّض $x = 1$ في الدالّة $y = f(x^2)$ وينتج: $y = 2e$

$$\Downarrow$$

النقطة $(1 , 2e)$ تقع أيضًا على الرسم البيانيّ للدالّة $y = f(x^2)$

جـ. حسب البند "ب" نقطة الالتقاء بين الدالّتين $y = 2f'(x)$ وَ $y = f(x^2)$ هي: $(1 , 2e)$

وجدنا أنّ: $y = f(x^2) = 2e^x \quad , \quad y = 2f'(x) = \dfrac{2e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

بالنسبة لِـ $x > 1$: $2e^x > \dfrac{2e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

$$\Downarrow$$

الرسم البيانيّ لِـ $f(x^2)$ فوق الرسم البيانيّ لِـ $2f'(x)$

$$\Downarrow$$

المساحة تحقّق: $S = \int_1^a \left[f(x^2) - 2f'(x)\right]dx$

$$\Downarrow$$

$$S = \int_1^a \left[2e^x - 2f'(x)\right]dx = \left[2e^x - 2 \cdot f(x)\right]_1^a = 2e^a - 2f(a) - 2e + 2f(1)$$

$$\Downarrow$$

حسب المعطى: $8e - 2f(a) = 2e^a - 2f(a) - 2e + 4e \quad \Rightarrow \quad e^a = 3e$

$$\Downarrow$$

$$a = \ell n(3e)$$

/ يتبع في صفحة 10 /

السؤال 5

أ. يعرض مقاول شققًا للبيع بأقساط شهريّة. في تاريخ 1/1/2012 كان القسط الشهريّ مقابل الشقّة 5900 شيقل، وفي كلّ شهر يزداد القسط بِـ 0.2% .

الراتب الشهريّ الذي تقاضاه ربيع في تاريخ 1/1/2012 كان 8000 شيقل، وفي كلّ شهر ازداد راتبه بِـ 1.2% .

يستطيع ربيع البدء بالدفع مقابل الشقّة فقط بعد التاريخ الذي سيكون فيه القسط الشهريّ مقابل الشقّة 60% من راتبه الشهريّ.

بعد مرور كم شهرًا كاملاً منذ التاريخ 1/1/2012 يستطيع ربيع البدء بالدفع مقابل الشقّة؟

ب. معطاة الدالّة $f(x) = x^n \cdot \ell n(x^n)$. البارامتر n هو عدد طبيعيّ وزوجيّ.

(1) جد مجال تعريف الدالّة f(x) .

(2) حدِّد إذا كانت الدالّة f(x) زوجيّة أم فرديّة. علّل.

(3) بيّن أنّ هناك مستقيمًا واحدًا فقط يمسّ الرسم البيانيّ للدالّة f(x) ويوازي المحور x ، وَجِد معادلته.

ملاحظة: لا توجد علاقة بين البند "أ" والبند "ب" .

إجابة السؤال 5

أ. بعد مرور x أشهر سيكون راتب ربيع: $M(x) = 8000 \cdot 1.012^x$

والقسط الشهريّ مقابل الشقّة سيكون: $N(x) = 5900 \cdot 1.002^x$

يجب أن يتحقّق: $0.6M(x) = N(x)$

$$\Downarrow$$

$$8000 \cdot 1.012^x \cdot 0.6 = 5900 \cdot 1.002^x$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{1.012}{1.002}\right)^x = \frac{5900}{8000 \cdot 0.6}$$

$$\Downarrow$$

بواسطة تفعيل ℓn على الطرفين ينتج: $x = 20.78$

$$\Downarrow$$

بعد مرور 21 شهرًا يستطيع ربيع البدء بالدفع

/ يتبع في صفحة 11 /

تكملة حلّ السؤال 5.

ب. (1) حسب المعطى: n زوجيّ

$\Downarrow$

$x^n > 0$ لكلّ $x \neq 0$

$\Downarrow$

$f(x)$ معرّفة لكلّ $x \neq 0$

(2)

$$f(x) = x^n \cdot \ell n(x^n)$$

$\Downarrow$

$$f(-x) = (-x)^n \cdot \ell n(-x)^n$$

$\Downarrow$

n زوجيّ، لذلك: $(-x)^n = x^n$

$\Downarrow$

$$f(-x) = x^n \ell n(x)^n$$

$\Downarrow$

$$f(-x) = f(x)$$

$\Downarrow$

$f(x)$ دالّة زوجيّة

(3)

$$f'(x) = nx^{n-1} \cdot \ell n(x)^n + x^n \cdot \frac{nx^{n-1}}{x^n} = nx^{n-1}(\ell n(x)^n + 1)$$

ميل المستقيم هو صفر: $x \neq 0 \ , \ f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \ell n(x)^n + 1 = 0$

$\Downarrow$

الإحداثيّات x لنقاط التماسّ تحقّق: $x^n = e^{-1}$

$\Downarrow$

n زوجيّ، لذلك الإحداثيّات x للنقاط،
التي يمسّ المستقيم فيها الرسم البيانيّ للدالّة، هي: $x = \pm e^{-\frac{1}{n}}$

وجدنا أنّ: $f(x) = f(-x)$

$\Downarrow$

$$f(e^{-\frac{1}{n}}) = f(-e^{-\frac{1}{n}})$$

$\Downarrow$

معادلة المماسّ: $y = -e^{-1}$

حقوق الطّبع محفوظة لدولة إسرائيل.
النّسخ أو النّشر ممنوعان إلّا بإذن من وزارة التّربية والتّعليم.