מדינת ישראל

משרד החינוך

סוג הבחינה: א. בגרות לבתי"ס על־יסודיים
ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים

מועד הבחינה: חורף תשע"ד

מספר השאלון: **035806, 316**

תרגום לערבית (2)

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מתמטיקה

5 יחידות לימוד — שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון: אלגברה והסתברות — $16\frac{2}{3}\times 2$ — $33\frac{1}{3}$ נק'

פרק שני: גאומטריה וטריגונומטריה במישור — $16\frac{2}{3}\times 2$ — $33\frac{1}{3}$ נק'

פרק שלישי: חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי — $16\frac{2}{3}\times 2$ — $33\frac{1}{3}$ נק'

סה"כ — 100 נק'

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
2. דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

1. אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
2. התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
3. לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

דولة إسرائيل

وزارة التّربية والتّعليم

نوع الامتحان : أ. بجروت للمدارس الثّانويّة
ب. بجروت للممتحَنين الخارجيّين

موعد الامتحان : شتاء 2014

رقم النّموذج : **035806 ، 316**

ترجمة إلى العربيّة (2)

اقتراح إجابات لأسئلة امتحان بجروت

الرياضيّات

5 وحدات تعليميّة – النّموذج الأوّل

تعليمات للممتحَن

أ. مدّة الامتحان: ثلاث ساعات ونصف.

ب. مبنى النّموذج وتوزيع الدرجات:

في هذا النّموذج ثلاثة فصول.

الفصل الأوّل: الجبر والاحتمال — $16\frac{2}{3}\times 2$ — $33\frac{1}{3}$ درجة

الفصل الثّاني: الهندسة وحساب المثلّثات في المستوى — $16\frac{2}{3}\times 2$ — $33\frac{1}{3}$ درجة

الفصل الثّالث: حساب التّفاضل والتّكامل — $16\frac{2}{3}\times 2$ — $33\frac{1}{3}$ درجة

المجموع — 100 درجة

جـ. موادّ مساعدة يُسمح استعمالها:

1. حاسبة غير بيانيّة. لا يُسمح استعمال إمكانيّات البرمجة في الحاسبة التي يمكن برمجتها. استعمال الحاسبة البيانيّة أو إمكانيّات البرمجة في الحاسبة قد يؤدّي إلى إلغاء الامتحان.
2. لوائح قوانين (مرفقة).

د. تعليمات خاصّة:

1. لا تنسخ السّؤال؛ اكتب رقمه فقط.
2. ابدأ كلّ سؤال في صفحة جديدة. اكتب في الدّفتر مراحل الحلّ، حتّى إذا أجريتَ حساباتك بواسطة حاسبة.
فسّر كلّ خطواتك، بما في ذلك الحسابات، بالتّفصيل وبوضوح وبترتيب.
عدم التّفصيل قد يؤدّي إلى خصم درجات أو إلى إلغاء الامتحان.
3. لكتابة مسوّدة يجب استعمال دفتر الامتحان أو الأوراق التي حصلتَ عليها من المراقبين.
استعمال مسوّدة أخرى قد يؤدّي إلى إلغاء الامتحان.

التّعليمات في هذا النّموذج مكتوبة بصيغة المذكّر وموجّهة للممتحَنات وللممتحَنين على حدّ سواء.

ב ה צ ל ח ה!

نتمنّى لك النّجاح!

السؤال 1

الميناء A والميناء B يقعان على ضفّة واحدة لنهر اتّجاه جريانه من A إلى B .

أبحرت عوّامة في الساعة 9:00 صباحًا من الميناء A إلى الميناء B ، وقد حملها تيّار النهر بحيث كانت سرعة العوّامة كسرعة التيّار.

أبحر في الساعة نفسها قارب من الميناء B (بعكس اتّجاه التيّار) باتّجاه الميناء A .

سرعة القارب في المياه الراكدة هي 15 كم/الساعة.

وصل القارب إلى الميناء A ، وفورًا عاد إلى الميناء B .

معلوم أنّ العوّامة والقارب سيصلان إلى الميناء B في الساعة نفسها.

معطى أنّ العوّامة والقارب التقيا لأوّل مرّة بعد مرور 5 ساعات منذ إبحارهما.

هل يصل القارب والعوّامة إلى الميناء B حتّى الساعة 9:00 مساءً في اليوم نفسه؟ علّل.

سرعة التيّار وسرعة القارب في المياه الراكدة هما ثابتتان.

ملاحظة: في حساباتك دقّق حتّى رقمين بعد الفاصلة العشريّة.

إجابة السؤال 1

	السرعة (كم/الساعة)	الزمن (ساعات)	المسافة (كم)
العوّامة	v	$\frac{S}{v}$	S
القارب بعكس اتّجاه التيّار	$15 - v$	$\frac{S}{15-v}$	S
القارب باتّجاه التيّار	$15 + v$	$\frac{S}{15+v}$	S

تصل العوّامة والقارب إلى B في الزمن نفسه، لذلك:

$$\frac{S}{v} = \frac{S}{15-v} + \frac{S}{15+v}$$

$$\Downarrow$$

$$v^2 + 30v - 15^2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$v \approx 6.21 \text{ كم/الساعة}$$

المسافة التي قطعتها العوّامة حتّى اللقاء: $5 \cdot v$

المسافة التي قطعها القارب حتّى اللقاء: $5(15 - v)$

لذلك المسافة من A إلى B هي: $S = 5v + 5(15 - v) = 75$ كم

الزمن الذي ستصل به العوّامة والقارب إلى B: $\frac{S}{v} = \frac{75}{6.21} = 12.08$ ساعة

$$\Downarrow$$

12ساعة $<$ 12.08 ساعة، لذلك لن يتمكّنا من الوصول حتّى 9:00 مساءً

/يتبع في صفحة 3/

السؤال 2

معطاة متوالية هندسيّة لا نهائيّة تنازليّة: $a_1 \ , \ a_2 \ , \ a_3 \ , \ a_4 \ , \ ...$

مجموع كلّ حدود المتوالية بدون الحدّ الأوّل هو 6 .

نبدّل إشارات جميع الحدود الموجودة في الأماكن الزوجيّة في المتوالية،

ونحصل على متوالية هندسيّة جديدة: $a_1 \ , \ -a_2 \ , \ a_3 \ , \ -a_4 \ , \ ...$

مجموع كلّ حدود المتوالية الجديدة بدون الحدّ الأوّل هو -3 .

من حدود المتوالية المعطاة بنوا متوالية ثالثة: $\frac{1}{a_2} \ , \ \frac{1}{a_3} \ , \ \frac{1}{a_4} \ , \ ...$

أ. برهن أنّ المتوالية الثالثة هي متوالية هندسيّة.

ب. معطى أنّ مجموع n الحدود الأولى في المتوالية الثالثة هو 273.25 .
جد n .

إجابة السؤال 2

أ. نرمز بـ q إلى أساس المتوالية المعطاة.

الحدّ الذي في المكان $n+1$ في المتوالية الثالثة هو: $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n q}$

$\Downarrow$

لذلك، أساس المتوالية الثالثة هو: $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{q}$

$\Downarrow$

أساس المتوالية الثالثة ثابت، لذلك: المتوالية هندسيّة

/ يتبع في صفحة 4 /

تكملة إجابة السؤال 2

ب. مجموع كلّ حدود المتوالية المعطاة، بدون الحدّ الأوّل، يحقّق: $\frac{a_2}{1-q} = 6$ I.

أساس المتوالية الجديدة هو $-q$ ،

لذلك مجموع كلّ حدود المتوالية الجديدة، بدون الحدّ الأوّل يحقّق: $\frac{-a_2}{1+q} = -3$ II.

من I وَ II ينتج:

$$3(1+q) = 6(1-q)$$
$$\Downarrow$$
$$q = \frac{1}{3}$$

من تعويض $q = \frac{1}{3}$ في I أو في II ينتج: $a_2 = 4$

وجدنا أنّ أساس المتوالية الثالثة هو: $\frac{1}{q}$

لذلك، مجموع n الحدود الأولى

في المتوالية الثالثة يحقّق:

$$\frac{\frac{1}{4}(3^n - 1)}{3-1} = 273.25$$
$$\Downarrow$$
$$3^n = 2187$$
$$\Downarrow$$
$$n = 7$$

/يتبع في صفحة 5/

السؤال 3

يوجد في مدينة معيّنة سكّان يشتركون في دورة للرقص الشعبيّ، وسكّان يشتركون في دورة للمسرح، وسكّان يشتركون في الدورتين.

وُجد أنّ الحدث "أحد سكّان المدينة يشترك في دورة للرقص الشعبيّ" والحدث "أحد سكّان المدينة يشترك في دورة للمسرح" هما حدثان مستقلّان (لا يتعلّق أحدهما بالآخر).

عدد السكّان الذين يشتركون في دورة الرقص الشعبيّ هو ضعف عدد السكّان الذين يشتركون في دورة المسرح.

من بين السكّان الذين يشتركون في دورة المسرح، 60% يشتركون في دورة الرقص الشعبيّ.

أ. ما هي النسبة المئويّة لسكّان المدينة الذين يشتركون في دورة الرقص الشعبيّ وفي دورة المسرح أيضًا؟

ب. أُجري في أحد الأيّام في المدينة مؤتمر حضره جميع السكّان الذين يشتركون في دورة الرقص الشعبيّ فقط، وليس سواهم.
أجرى أحد الصحفيّين مقابلة مع 6 من الحاضرين في المؤتمر تمّ اختيارهم عشوائيًّا.
ما هو الاحتمال بأن يكون على الأقلّ اثنان منهم مشتركَيْن في دورة المسرح؟

إجابة السؤال 3

نرمز بـ: A — مجموعة المشاركين في دورة الرقص الشعبيّ
B — مجموعة المشاركين في دورة المسرح

أ. حسب المعطى: $P(A / B) = 0.6$

$\Downarrow$

الحدثان $P(A)$ وَ $P(B)$ هما حدثان مستقلّان، لذلك: $P(A/B) = P(A) = 0.6$ I.

حسب المعطى: $P(A) = 2P(B)$ II.

من I وَ II ينتج: $P(B) = 0.3$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.6 \times 0.3 = 0.18$$

$\Downarrow$

النسبة المئويّة للسكّان المشاركين
في دورة الرقص الشعبيّ وفي دورة المسرح أيضًا هي: 18%

/يتبع في صفحة 6/

تكملة إجابة السؤال 3

ب. الحدثان مستقلّان، لذلك احتمال اختيار مشترك في دورة المسرح من بين المشاركين
في دورة الرقص الشعبيّ هو:

$$P = P(B / A) = P(B)$$

من تعويض نتيجة البند "أ" ينتج:

$$\Downarrow$$

$$P = 0.3$$

الاحتمال بأن يكون على الأقلّ 2 مشترِكَيْن في دورة المسرح:

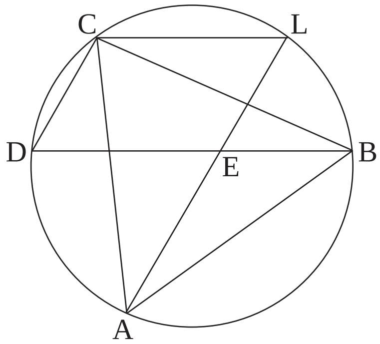
$$P\begin{pmatrix} \text{2 على الأقلّ في} \\ \text{دورة المسرح} \end{pmatrix} = 1 - P_6(1) - P_6(0)$$

$$\Downarrow$$

$$P\begin{pmatrix} \text{2 على الأقلّ في} \\ \text{دورة المسرح} \end{pmatrix} = 1 - \binom{6}{1} \cdot 0.3^1 \cdot 0.7^5 - 0.7^6 = 0.5798$$

/ يتبع في صفحة 7 /

السؤال 4



المثلّث المتساوي الأضلاع ABC محصور داخل دائرة.

النقطتان D وَ L تقعان على محيط الدائرة بحيث $BD \parallel LC$.

الوتران AL وَ BD يتقاطعان في النقطة E (انظر الرسم).

أ. برهن أنّ الشكل الرباعيّ LEDC هو متوازي أضلاع.

ب. (1) برهن أنّ $\triangle ADE$ هو مثلّث متساوي الأضلاع.

(2) برهن أنّ $LC + LB = LA$.

إجابة السؤال 4

أ. $\sphericalangle CAB = 60^o \ , \ \sphericalangle CBA = 60^o$ — زاويتان في مثلّث متساوي الأضلاع

$\sphericalangle CAB = \sphericalangle CDB \ , \ \sphericalangle CBA = \sphericalangle CLA$ — زوايا محيطيّة تستند إلى نفس القوس

لذلك: $\sphericalangle CDB = \sphericalangle CLA = 60^o$

$BD \parallel LC$ — حسب المعطى

$\Downarrow$

$\sphericalangle DEL = 180^o - \sphericalangle CLA = 120^o$ — مجموع زاويتين متكاملتين هو 180^o

لذلك: $\sphericalangle CDB + \sphericalangle DEL = 180^o$

$\Downarrow$

$CD \parallel LE$ — إذا كان مجموع الزاويتين المتكاملتين 180^o فإنّ المستقيمين متوازيان

$\Downarrow$

LEDC متوازي أضلاع — لأنّه في الشكل الرباعيّ LECD كلّ ضلعين متقابلين متوازيان

/ يتبع في صفحة 8 /

تكملة إجابة السؤال 4

ب. (1) $\sphericalangle ACB = 60^o$ — زاوية في مثلّث متساوي الأضلاع

$\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB = 60^o$ — زاويتان محيطيّتان تستندان إلى نفس القوس

برهنّا في البند "أ" أنّ $CD \parallel LE$

وَ $\sphericalangle CDB = 60^o$ ، لذلك: $\sphericalangle DEA = \sphericalangle CDB = 60^o$ — الزاويتان المتبادلتان متساويتان

في $\triangle ADE$ زاويتان تساويان 60^o ،

لذلك: $\triangle ADE$ هو متساوي الأضلاع

(2) $\sphericalangle LEB = \sphericalangle DEA = 60^o$ — زاويتان متقابلتان بالرأس

$\sphericalangle ALB = \sphericalangle ACB = 60^o$ — زاويتان محيطيّتان تستندان إلى نفس القوس

في $\triangle LEB$ زاويتان تساويان 60^o ،

لذلك: $\triangle LEB$ هو متساوي الأضلاع

I. $DE = AE$ ، II. $LE = LB$ — أضلاع في مثلّثين متساويَي الأضلاع

III. $DE = LC$ — ضلعان متقابلان في متوازي أضلاع

من I وَ III ينتج: IV. $AE = LC$

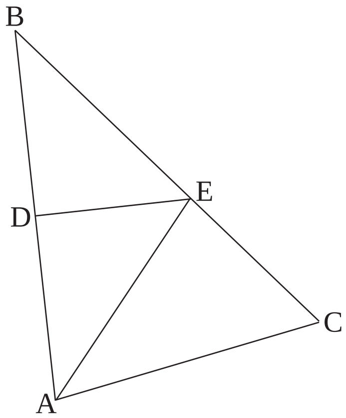
$$LA = LE + AE$$
$$\Downarrow$$

من II وَ IV ينتج: $LA = LB + LC$

/ يتبع في صفحة 9 /

السؤال 5

في المثلّث ABC العمود المتوسّط للضلع BA يقطع الضلعين BC وَ BA في النقطتين E وَ D بالتلاؤم (انظر الرسم).



معطى أنّ: $\sphericalangle BAC = \alpha$ ، $\sphericalangle ABC = \beta$.

أ. (1) عبّر بدلالة α وَ β عن $\sphericalangle EAC$.

(2) عبّر بدلالة α وَ β عن النسبة $\frac{CE}{EB}$.

معطى أيضًا أنّ: AE هو منصّف الزاوية BAC ،

$AC =$ 10 سم ، $\beta = 40^o$.

ب. احسب نصف قطر الدائرة المحصورة في المثلّث ABC .

إجابة السؤال 5

أ. (1) في المثلّث BEA : DE هو ارتفاع ومستقيم متوسّط — حسب المعطى

$\Downarrow$

$EB = EA$ — إذا كان الارتفاع في المثلّث مستقيمًا متوسّطًا، فإنّ المثلّث هو متساوي الساقين

$\Downarrow$

$\sphericalangle EBA = \sphericalangle EAB = \beta$

$\Downarrow$

$\sphericalangle EAC = \alpha - \beta$

(2) حسب نظريّة الجيب (السينوس)

في المثلّث EAC يتحقّق: $\frac{CE}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{EA}{\sin(180 - (\alpha + \beta))}$

$\Downarrow$

$\frac{CE}{EA} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$

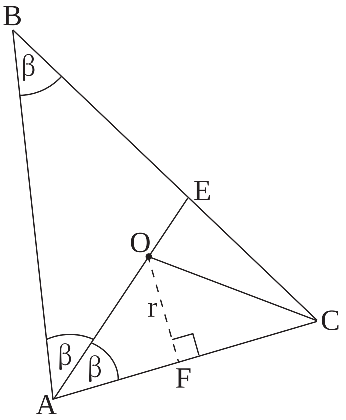
$\Downarrow$

وجدنا أنّ $EA = EB$ ، لذلك: $\frac{CE}{EB} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$

/ يتبع في صفحة 10 /

تكملة إجابة السؤال 5

ب.



حسب المعطى: AE هو منصّف الزاوية BAC

$\Downarrow$

مركز الدائرة المحصورة O يقع على AE ، $\sphericalangle BAE = \sphericalangle EAC = \beta$

$\Downarrow$

CO هو منصّف الزاوية BCA — مركز دائرة محصورة في المثلّث هو ملتقى منصّفات الزوايا

$\Downarrow$

$$\sphericalangle OCA = \frac{180^o - (2\beta + \beta)}{2}$$

$\Downarrow$

حسب المعطى $\beta = 40^o$ ،
لذلك:

$$\sphericalangle OCA = \frac{180^o - (80^o + 40^o)}{2} = 30^o$$

حسب نظريّة الجيب (السينوس)

في المثلّث AOC :

$$\frac{AO}{\sin 30^o} = \frac{10}{\sin(40^o + 30^o)}$$

$\Downarrow$

$$AO = 5.32$$

F هي نقطة تماسّ الدائرة المحصورة
مع الضلع AC ، لذلك:

$\sphericalangle AFO = 90^o$ — نصف قطر معامد للمماسّ

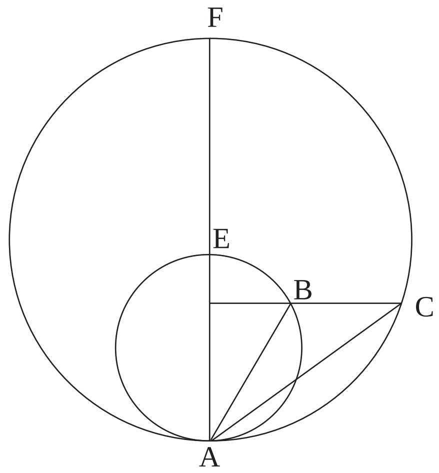
$\Downarrow$

في المثلّث القائم الزاوية AOF
يتحقّق:

$r = 5.32 \times \sin 40^o =$ 3.42 سم

/ يتبع في صفحة 11 /

السؤال 6



دائرتان، إحداهما كبيرة والأخرى صغيرة، تتماسّان من الداخل في النقطة A .

النقطة F تقع على محيط الدائرة الكبيرة بحيث تقع قطعة مركزَي الدائرتين على AF .

AF يقطع الدائرة الصغيرة في النقطة E .

عبر النقطة B التي على محيط الدائرة الصغيرة مرّروا مستقيمًا يوازي المماسّ المشترك للدائرتين.

المستقيم الموازي يقطع الدائرة الكبيرة في النقطة C (انظر الرسم).

نصف قطر الدائرة الكبيرة هو R ، ونصف قطر الدائرة الصغيرة هو r .

معطى أنّ: $\sphericalangle BAC = \alpha$ ، $\sphericalangle FAB = \beta$.

أ. (1) عبّر بدلالة α وَ β عن $\sphericalangle BCA$. علّل.

(2) عبّر بدلالة α وَ β فقط عن النسبة $\frac{AC}{AB}$.

ب. عبّر بدلالة α وَ β عن النسبة $\frac{R}{r}$.

إجابة السؤال 6

أ. (1) معطى أنّ: $CK \parallel AL$

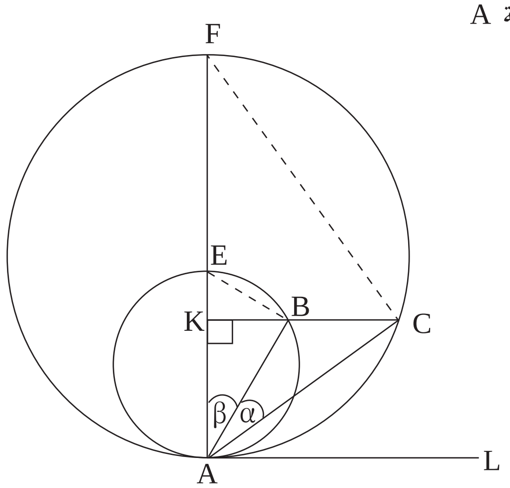
$\sphericalangle FAL = 90^o$ لأنّ القطر FA يعامد المماسّ في النقطة A

من هنا: $\sphericalangle CKA = 90^o$ زاويتان متكاملتان مجموعهما 180^o

$\Downarrow$

في المثلّث KCA

يتحقّق: $\sphericalangle KCA = 90^o - (\beta + \alpha)$



(2) حسب نظريّة الجيب (السينوس) في المثلّث ABC يتحقّق:

$$\frac{AB}{\sin[90^o - (\beta+\alpha)]} = \frac{AC}{\sin(90^o + \beta)}$$

$\Downarrow$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)}$$

/ يتبع في صفحة 12 /

تكملة إجابة السؤال 6

ب. $\sphericalangle FCA = 90^o \quad , \quad \sphericalangle EBA = 90^o$ زاويتان محيطيّتان تستندان إلى القطر

لذلك في المثلّث EBA يتحقّق: $AB = 2r\cos\beta$

وفي المثلّث FCA يتحقّق: $AC = 2R\cos(\alpha+\beta)$

من هنا: $\frac{AC}{AB} = \frac{R\cos(\alpha+\beta)}{r\cos\beta}$

في البند "أ" وجدنا أنّ: $\frac{AC}{AB} = \frac{\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)}$

$$\Downarrow$$

من هنا: $\frac{R\cos(\alpha+\beta)}{r\cos\beta} = \frac{\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)}$

$$\Downarrow$$

$$\frac{R}{r} = \frac{\cos^2\beta}{\cos^2(\alpha+\beta)}$$

/ يتبع في صفحة 13 /

السؤال 7

معطاة الدالّة $f(x) = \frac{x^2 + x - a}{x^2 - x + a}$. a هو بارامتر أكبر من 1 .

الدالّة f(x) معرَّفة لكلّ x .

أ. (1) جد خطوط تقارب f(x) ، الموازية للمحورين (إذا وُجدت مثل هذه الخطوط).

(2) جد إحداثيّات النقاط القصوى لِـ f(x) ، وحدّد نوع هذه النقاط.

(عبّر بدلالة a إذا دعت الحاجة.)

(3) معلوم أنّ الرسم البيانيّ للدالّة f(x) يقطع المحور x في نقطتين بالضبط.

ارسم رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدالّة f(x) .

ب. في المجال $x \le 0$ ، المساحة المحصورة بين الرسم البيانيّ لِـ f'(x) ، والمستقيم $x = -1$ والمحور x ، تساوي $\frac{1}{2}$.

احسب نقطتَي تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة f(x) مع المحور x (جد قِيَمًا عدديّة).

إجابة السؤال 7

أ. (1) لا توجد خطوط تقارب موازية للمحور y ، لأنّ الدالّة متتابعة لكلّ x .

خطّ تقارب موازٍ للمحور x : $y = 1$

(2)
$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x^2 - x + a) - (x^2 + x - a)(2x - 1)}{(x^2 - x + a)^2}$$
$$\Downarrow$$
$$f'(x) = \frac{-2x^2 + 4ax}{(x^2 - x + a)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2ax = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad , \quad x = 2a$$

مشتقّة البسط لِـ f'(x) في النقطة التي فيها $x = 0$ هي: $4a > 0 \quad (a > 0)$

مشتقّة البسط لِـ f'(x) في النقطة التي فيها $x = 2a$ هي: $-4a < 0 \quad (a > 0)$

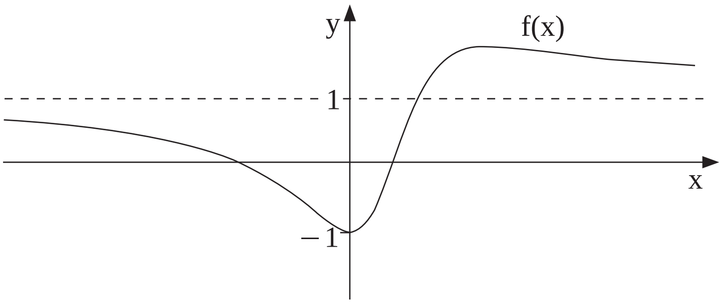
من هنا، النهاية الصغرى لِـ f(x) هي في النقطة: $(0 , -1)$

والنهاية العظمى لِـ f(x) هي في النقطة: $(2a , \frac{4a+1}{4a-1})$

/ يتبع في صفحة 14 /

تكملة إجابة السؤال 7

أ. (3)



ب. f(x) تنازليّة في المجال $-1 < x \le 0$ ، لذلك في هذا المجال: $f'(x) < 0$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2} = -\int_{-1}^{0} f'(x)\,dx$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2} = -\left[f(x)\right]_{-1}^{0} = -f(0) + f(-1)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2} = -\frac{-a}{a} + \frac{1-1-a}{1+1+a}$$

$$\Downarrow$$

$$a = 2$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x + 2}$$

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Downarrow$$

نقطتا تقاطع f(x) ، مع المحور x: $(-2, 0)$, $(1, 0)$

/ يتبع في صفحة 15 /

السؤال 8

في المثلّث المتساوي الساقين ABC $(AB = AC)$ طول الساق هو b .

BD هو الارتفاع على الساق AC . DE هو عمود على القاعدة BC .

ارمز $\sphericalangle BAC = 2x$ ، وَجِد ماذا يجب أن يكون مقدار $\sphericalangle BAC$ ، حتّى يكون طول العمود DE أكبر ما يمكن.

في إجابتك دقّق حتّى رقمين بعد الفاصلة العشريّة.

إجابة السؤال 8

حسب المعطيات نجد : $\sphericalangle DBC = x$

في المثلّث القائم الزاوية DBE يتحقّق: $\frac{DE}{BD} = \sin x$

في المثلّث القائم الزاوية ABD يتحقّق: $\frac{BD}{b} = \sin(2x)$

من هنا طول القطعة DE هو : $L(x) = b\sin(2x) \cdot \sin x$

$$\Downarrow$$

$$L'(x) = b \cdot 2\cos(2x) \cdot \sin x + b\sin(2x)\cos x$$

$$\Downarrow$$

$$L'(x) = 2b\sin x\,(\cos(2x) + \cos^2 x) = 2b\sin x\,(3\cos^2 x - 1)$$

بما أنّ $\sin x \neq 0$ لأنّ x زاوية في مثلّث، ينتج : $L'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3\cos^2 x - 1 = 0$

$$\Downarrow$$

$\cos x \neq -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ، لأنّ x زاوية

في المثلّث القائم الزاوية DBE ، لذلك : $\cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\Downarrow$$

$$x = 54.73^\circ \quad \Rightarrow \quad \sphericalangle BAC = 109.46^\circ$$

فحص نهاية عظمى :

x	50°	54.73°	58°
L(x)	0.75b ↗	0.77b	0.76b ↘

/ يتبع في صفحة 16 /

السؤال 9

يعرض الجدول الذي أمامك قِيَمًا معيّنة للدالّة $f(x)$ في القطعة $1 < x < 2$.

x	1.1	1.2	1.3	1.4
f(x)	1.19	1.28	1.36	1.43

الدالّة $f(x)$ موجبة في القطعة المعطاة، ولا توجد لها نقاط قصوى داخليّة في هذه القطعة.

معطى أنّ دالّة المشتقّة الثانية $f''(x)$ سالبة في القطعة المعطاة.

أ. حدِّد ما هي إشارة $f'(1.2)$. علّل.

ب. حدِّد إذا كان الادّعاء $f'(1.3) < f'(1.2) < f'(1.1)$ صحيحًا. علّل.

معطاة الدالّة $g(x) = \sqrt{f(x)}$ في القطعة $1 < x < 2$.

جـ. في القطعة المعطاة، جد مجالات تصاعد وتنازل الدالّة $g(x)$ (إذا وُجدت مثل هذه المجالات). علّل.

د. بيّن أنّه في المجال $1.1 \le x \le 1.3$ لا يوجد حلّ للمعادلة $g'(x) = f'(x)$.

إجابة السؤال 9

أ. حسب المعطيات، لا توجد نقاط قصوى داخليّة

وَ $f(1.3) > f(1.2)$ ، لذلك:

$f(x)$ تصاعديّة في القطعة

$\Downarrow$

$f'(x) > 0$ في القطعة

$\Downarrow$

$f'(1.2) > 0$

ب. حسب المعطى:

$f''(x) < 0$ في القطعة

$\Downarrow$

$f'(x)$ تنازليّة في القطعة

$\Downarrow$

$f'(x)$ تصغر عندما يكبر x ، لذلك يتحقّق: $f'(1.3) < f'(1.2) < f'(1.1)$

$\Downarrow$

الادّعاء صحيح

/ يتبع في صفحة 17 /

تكملة إجابة السؤال 9

جـ.

$$g(x) = \sqrt{f(x)}$$
$$\Downarrow$$
$$g'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

وجدنا أنّ: $f'(x) > 0$ في القطعة

$$\Downarrow$$

بما أنّ $\sqrt{f(x)} > 0$: $g'(x) > 0$ في القطعة

$$\Downarrow$$

$g(x)$ تصاعديّة في القطعة

د. إذا كانت $g'(x) = f'(x)$ عندها: $f'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

$$\Downarrow$$

$f'(x) \neq 0$ ، لذلك: $f(x) = \frac{1}{4}$

$$\Downarrow$$

حسب الجدول $1.19 \le f(x) \le 1.36$

في المجال $1.1 \le x \le 1.3$ ، لذلك: لا يوجد حلّ للمعادلة

طريقة أخرى

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

حسب الجدول $\sqrt{f(x)} > 1$,

$$\Downarrow$$

ووجدنا أنّ $f'(x) > 0$,

لذلك البسط $g'(x)$

أصغر من البسط $f'(x)$: $g'(x) < f'(x)$ لكلّ x في القطعة

$$\Downarrow$$

لا يوجد حلّ للمعادلة