מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה: א. בגרות לבתי"ס על־יסודיים
ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים

מועד הבחינה: חורף תשע"ד

מספר השאלון: **315 ,035805**

תרגום לערבית (2)

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מתמטיקה

4 יחידות לימוד — שאלון שני

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעה ושלושה רבעים.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:
בשאלון זה שני פרקים:
פרק ראשון — סדרות, טריגונומטריה במרחב
$33\frac{1}{3} \times 1$ — $33\frac{1}{3}$ נק'
פרק שני — גדילה ודעיכה, חשבון דיפרנציאלי
ואינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות,
פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ופונקציות חזקה
$33\frac{1}{3} \times 2$ — $66\frac{2}{3}$ נק'
סה"כ — 100 נק'

ג. חומר עזר מותר בשימוש:
1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
2. דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:
1. אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
2. התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
3. לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ב ה צ ל ח ה!

دولة إسرائيل
وزارة التّربية والتّعليم

نوع الامتحان: أ. بجروت للمدارس الثّانويّة
ب. بجروت للممتحَنين الخارجيّين

موعد الامتحان: شتاء 2014

رقم النّموذج: **315 ،035805**

ترجمة إلى العربيّة (2)

اقتراح إجابات لأسئلة امتحان بجروت

الرياضيّات

4 وحدات تعليميّة – النّموذج الثّاني

تعليمات للممتحَن

أ. مدّة الامتحان: ساعة وثلاثة أرباع.

ب. مبنى النموذج وتوزيع الدّرجات:
في هذا النموذج فصلان:
الفصل الأوّل – المتواليات، حساب المثلّثات في الفراغ
$33\frac{1}{3} \times 1$ — $33\frac{1}{3}$ درجة
الفصل الثّاني – التّزايد والتّضاؤل، حساب التّفاضل والتّكامل للدّوالّ المثلّثية والدّوالّ الأسّيّة واللّوغريثميّة ودوالّ القوى
$33\frac{1}{3} \times 2$ — $66\frac{2}{3}$ درجة
المجموع — 100 درجة

ج. موادّ مساعدة يُسمح استعمالها:
1. حاسبة غير بيانيّة. لا يُسمح استعمال إمكانيّات البرمجة في الحاسبة التي يمكن برمجتها. استعمال الحاسبة البيانيّة أو إمكانيّات البرمجة في الحاسبة قد يؤدّي إلى إلغاء الامتحان.
2. لوائح قوانين (مرفقة).

د. تعليمات خاصّة:
1. لا تنسخ السّؤال؛ اكتب رقمه فقط.
2. ابدأ كلّ سؤال في صفحة جديدة. اكتب في الدفتر مراحل الحلّ، حتّى إذا أجريتَ حساباتك بواسطة حاسبة.
فسّر كلّ خطواتك، بما في ذلك الحسابات، بالتّفصيل وبوضوح وبترتيب.
عدم التّفصيل قد يؤدّي إلى خصم درجات أو إلى إلغاء الامتحان.
3. لكتابة مسوّدة يجب استعمال دفتر الامتحان أو الأوراق التي حصلتَ عليها من المراقبين.
استعمال مسوّدة أخرى قد يؤدّي إلى إلغاء الامتحان.

التعليمات في هذا النموذج مكتوبة بصيغة المذكّر وموجّهة للممتحَنات وللممتحَنين على حدّ سواء.

نتمنّى لك النجاح!

السؤال 1

معطاة متوالية حسابيّة تصاعديّة: $a_1 , a_2 , a_3 , \ldots , a_n , \ldots$

معطى أنّ: $a_1 \cdot a_4 = (a_2)^2$.

أ. بيّن أنّ الحدّ الأوّل في المتوالية الحسابيّة يساوي فرق المتوالية.

ب. (1) ثلاثة الحدود a_4 , a_6 , a_9 في المتوالية الحسابيّة المعطاة تشكّل متوالية هندسيّة.
(a_4 هو الحدّ الأوّل في المتوالية الهندسيّة.)
جد أساس المتوالية الهندسيّة.

(2) مجموع ثلاثة الحدود التي في البند الفرعيّ ب(1) هو 133 .
جد فرق المتوالية الحسابيّة المعطاة.

(3) مجموع n الحدود الأولى في المتوالية المعطاة يحقّق $S_n > 11,977$.
جد أصغر n ممكن يحقّق هذه المتباينة.

إجابة السؤال 1

أ. الحدّ الرابع في المتوالية الحسابيّة هو: $a_4 = a_1 + 3d$

الحدّ الثاني في المتوالية الحسابيّة هو: $a_2 = a_1 + d$

نعوّض في المعادلة المعطاة وينتج: $a_1 \cdot (a_1 + 3d) = (a_1 + d)^2$

$$\Downarrow$$

$$a_1^2 + 3a_1 d = a_1^2 + 2a_1 d + d^2$$

$$\Downarrow$$

$$d(a_1 - d) = 0$$

$$\Downarrow$$

المتوالية هي متوالية حسابيّة تصاعديّة، لذلك $d \neq 0$: $a_1 - d = 0$

$$\Downarrow$$

$$a_1 = d$$

/ يتبع في صفحة 3 /

تكملة إجابة السؤال 1.

ب. (1) أساس المتوالية الهندسيّة هو:

$$q = \frac{a_6}{a_4}$$

$$\Downarrow$$

$$q = \frac{a_1 + 5d}{a_1 + 3d}$$

$$\Downarrow$$

نعوّض $d = a_1$ وينتج: $q = 1.5$

(2) حسب المعطى: $a_4 + a_6 + a_9 = 133$

$$\Downarrow$$

$$4d + 6d + 9d = 133$$

$$\Downarrow$$

$$d = 7$$

(3) مجموع n الحدود الأولى

في المتوالية الحسابيّة هو: $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + d(n-1))$

$$\Downarrow$$

نعوّض $a_1 = d = 7$ ، وينتج: $S_n = \frac{7n}{2}(1+n)$

$$\Downarrow$$

$$\frac{7n}{2}(1+n) > 11{,}977$$

$$\Downarrow$$

$$n^2 + n - 3422 > 0 \quad , \quad n > 0$$

$$\Downarrow$$

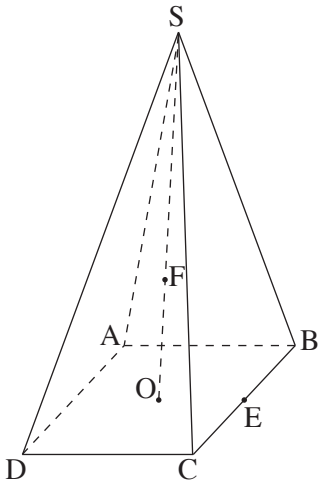
من حلّ المتباينة ينتج: $n > 58$

من هنا أصغر n

يحقّق المتباينة هو: $n = 59$

/ يتبع في صفحة 4 /

السؤال 2



معطى هرم قائم SABCD قاعدته مربّع وارتفاعه SO .
النقطة E هي منتصف الضلع BC (انظر الرسم) .
مقدار الزاوية التي بين SE وقاعدة الهرم هو 75^o .
طول ضلع القاعدة هو a .

أ. (1) عبّر بدلالة a عن طول SE .

(2) عبّر بدلالة a عن مساحة الغلاف الخارجيّ للهرم SABCD .

ب. النقطة F تقع على الارتفاع SO بحيث $FO = \frac{1}{3}SO$.
في الهرم القائم FABCD ، احسب الزاوية التي بين الضلع الجانبيّ والقاعدة.

إجابة السؤال 2

أ. (1) حسب تعريف الزاوية التي بين مستقيم ومستوى ينتج: $\sphericalangle SEO = 75^o$

في المثلّث القائم الزاوية SOE يتحقّق: $\cos(\sphericalangle SEO) = \frac{OE}{SE}$

$$\Downarrow$$

$$\cos 75^o = \frac{\frac{a}{2}}{SE}$$

$$\Downarrow$$

$$SE = 1.93a$$

(2) مساحة الغلاف الخارجيّ هي: $\text{مساحة الغلاف الخارجيّ} = 4 \cdot S_{\triangle SBC}$

$$S_{\triangle SBC} = \frac{1}{2} \cdot SE \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 1.93a \cdot a$$

$$\Downarrow$$

$$\text{مساحة الغلاف الخارجيّ} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1.93a \cdot a$$

$$\Downarrow$$

$$\text{مساحة الغلاف الخارجيّ} = 3.86a^2$$

/ يتبع في صفحة 5 /

تكملة إجابة السؤال 2.

ب. حسب تعريف الزاوية التي بين مستقيم ومستوى

ينتج أنّ الزاوية المطلوبة هي مثلاً: $\sphericalangle FBO$

في المثلّث القائم الزاوية FOB يتحقّق: $\operatorname{tg}\sphericalangle FBO = \frac{FO}{BO}$

في المثلّث SOE يتحقّق: $\frac{SO}{EO} = \operatorname{tg}(\sphericalangle SEO)$

$$\Downarrow$$

$$SO = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg}75^o$$

حسب المعطى: $FO = \frac{1}{3}SO$

$$\Downarrow$$

$$FO = \frac{a\ \operatorname{tg}75^o}{6}$$

BO هو $\frac{1}{2}$ قطر القاعدة، لذلك: $BO = \frac{\sqrt{2}\,a}{2}$

من تعويض FO وَ BO ينتج: $\operatorname{tg}(\sphericalangle FBO) = \frac{\frac{a\ \operatorname{tg}75^o}{6}}{\frac{\sqrt{2}\,a}{2}}$

$$\Downarrow$$

$$\operatorname{tg}(\sphericalangle FBO) = \frac{\sqrt{2}\ \operatorname{tg}75^o}{6}$$

$$\Downarrow$$

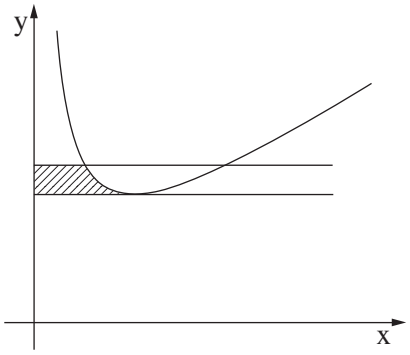
$$\sphericalangle FBO = 41.3^o$$

/ يتبع في صفحة 6 /

السؤال 3

أ. فتح يوسف حسابًا جديدًا في البنك وأودع فيه 10,000 شيقل.
المبلغ الذي أودعه يوسف يزداد بنسبة 2% كلّ شهر.
بعد مرور سنة من الإيداع سحب يوسف 5000 شيقل من حسابه.
(المبلغ المتبقّي يستمرّ في الازدياد بنسبة 2% كلّ شهر.)
بعد مرور كم شهرًا من السحب، سيكون مرّة ثانية 10,000 شيقل في حساب يوسف؟

ب. معطاة الدالّة $f(x)=\frac{3}{2x}+\frac{2x}{3}$
في المجال $x>0$.
مرّروا مستقيمًا يمسّ الرسم البيانيّ للدالّة
في نقطتها القصوى، ومرّروا المستقيم $y=2\frac{1}{6}$
الذي يقطع الرسم البيانيّ للدالّة في نقطتين
إحداهما في النقطة التي فيها $x=1$
(النقطة القريبة من المحور y).



جد المساحة المحصورة بين المستقيمين والرسم البيانيّ للدالّة f(x) والمحور y، المساحة المخطّطة في الرسم.

ملاحظة: لا توجد علاقة بين البند "أ" والبند "ب".

إجابة السؤال 3

أ. المبلغ الماليّ في البنك بعد مرور 12 شهرًا: $10,000\times1.02^{12}$

$$\Downarrow$$

المبلغ الماليّ في البنك بعد السحب: $10,000\times1.02^{12}-5000$

بعد x أشهر حتّى يكون في البنك 10,000 شيقل
مرّة أخرى يجب أن يتحقّق: $(10,000\times1.02^{12}-5000)1.02^{x}=10,000$

$$\Downarrow$$

بواسطة تفعيل ℓn
على طرفَي المعادلة ينتج: $x=\frac{\ell n\left(\frac{10,000}{10,000\cdot1.02^{12}-5000}\right)}{\ell n1.02}$

$$\Downarrow$$

$x=$ 13.3 شهرًا

/ يتبع في صفحة 7 /

تكملة إجابة السؤال 3.

ب. مشتقّة f(x) :

$$f'(x) = -\frac{3}{2x^2} + \frac{2}{3}$$

$$x > 0 \quad , \quad f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{2} \quad \left(x = -\frac{3}{2} \text{ ليس في المجال}\right)$$

الإحداثيّ y للنقطة القصوى:

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 2$$

$$\Downarrow$$

معادلة المستقيم الذي يمسّ في النقطة القصوى:

$$y = 2$$

المساحة المطلوبة مكوّنة من مساحتين:

مساحة المستطيل الذي يتكوّن بواسطة المماسّ والمستقيم $y = 2\frac{1}{6}$ ،
والعمود $x = 1$ والمحور y:

$$S_I = (2\frac{1}{6} - 2) \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

المساحة المحصورة بين الرسم البيانيّ لِـ f(x) ،
والمماسّ والعمود $x = 1$:

$$S_{II} = \int_1^{\frac{3}{2}} [f(x) - 2]\,dx$$

$$\Downarrow$$

$$S_{II} = \left[\frac{3}{2}\ell nx + \frac{x^2}{3} - 2x\right]_1^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\ell n\frac{3}{2} - \frac{7}{12} = 0.02486$$

المساحة المطلوبة هي:

$$S_I + S_{II} = \frac{3}{2}\ell n\frac{3}{2} - \frac{5}{12} = 0.1915$$

/ يتبع في صفحة 8 /

السؤال 4

معطاة الدالّة $f(x) = -2\cos(2x) + a$ في المجال $0 \le x \le \frac{5\pi}{6}$.

a هو بارامتر يحقّق $0 < a < 2$.

أ. جد إحداثيّات نقاط النهاية العظمى المطلقة والنهاية الصغرى المطلقة للدالّة $f(x)$ (عبّر بدلالة a إذا دعت الحاجة).

ب. معطى أنّ المستقيم $y = 3$ يمسّ الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ في المجال المعطى. جد قيمة a .

عوِّض $a = 1$ ، وأجب عن البندين "جـ" وَ "د" .

جـ. في المجال المعطى، ارسم رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدالّة $f(x)$.

د. في المجال المعطى، جد المساحة المحصورة بين الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ والمماسّ $y = 3$ والمحور y .

إجابة السؤال 4

أ. مشتقّة $f(x)$: $f'(x) = 4\sin(2x)$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(2x) = 0$$

$$\Downarrow$$

في المجال $0 \le x \le \frac{5\pi}{6}$: $x = 0 \quad , \quad x = \frac{\pi}{2}$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$
f(x)	$a-2$	$a+2$	$a-1$
	↗		↘

$$a - 2 < a - 1 < a + 2$$

$$\Downarrow$$

للدالّة $f(x)$ نهاية عظمى مطلقة في النقطة: $\left(\frac{\pi}{2}, a+2\right)$

للدالّة $f(x)$ نهاية صغرى مطلقة في النقطة: $(0, a-2)$

/ يتبع في صفحة 9 /

تكملة إجابة السؤال 4.

ب. ميل المستقيم $y = 3$ هو 0،

أي أنّه يمسّ الدالّة في النقطة التي فيها: $f'(x) = 0$

$\Downarrow$

$y = 3$ في النقطة التي فيها: $x = \frac{\pi}{2}$

$\Downarrow$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$

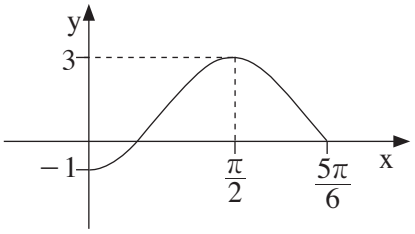
$\Downarrow$

وجدنا أنّ $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = a + 2$، لذلك: $a + 2 = 3$

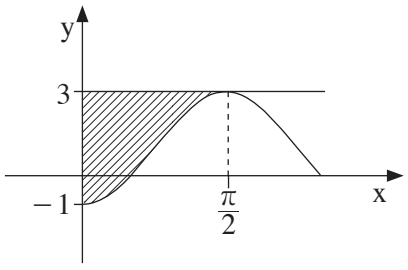
$\Downarrow$

$a = 1$

جـ.



د. المساحة المطلوبة هي المساحة المخطّطة في الرسم:



$\Downarrow$

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 - f(x))\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 + 2\cos(2x))\,dx$$

$\Downarrow$

$$S = [2x + \sin(2x)]_0^{\frac{\pi}{2}} \quad \Rightarrow \quad S = \pi$$

/ يتبع في صفحة 10 /

السؤال 5

معطاة الدالّة $f(x)=(a-3x)e^{3x}$ ، a هو بارامتر.

أ. ما هو مجال تعريف الدالّة؟

ب. معلوم أنّ الإحداثيّ x للنقطة القصوى للدالّة f(x) هو 1 .

جد قيمة a .

عوِّض $a=4$ ، وأجب عن البندين "جـ" وَ "د".

جـ. (1) جد مجالات تصاعد وتنازل الدالّة f(x) .

(2) جد نقاط تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة f(x) مع المحورين.

(3) ارسم رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدالّة f(x) .

د. معطى المستقيم $y=k$ ، $k\le 0$.

كم نقطة تقاطع توجد لهذا المستقيم مع الرسم البيانيّ للدالّة f(x) ؟ علّل.

إجابة السؤال 5

أ. الدالّة معرَّفة لكلّ x

ب. مشتقّة الدالّة f(x) :

$$f'(x)=-3e^{3x}+(a-3x)e^{3x}\cdot 3$$
$$\Downarrow$$
$$f'(x)=3e^{3x}(a-3x-1)$$
$$\Downarrow$$
$$f'(1)=3e^{3}(a-3-1)$$

توجد نقطة قصوى في $x=1$ ، لذلك: $f'(1)=0$

$$\Downarrow$$
$$a-3-1=0\quad,\quad 3e^{3}>0$$
$$\Downarrow$$
$$a=4$$

/ يتبع في صفحة 11 /

تكملة إجابة السؤال 5.

جـ. (1) نتج أنّ: $f'(x) = 3e^{3x}(3-3x)$

$\Downarrow$

x	$x<1$	1	$x>1$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗		↘

الدالّة $f(x)$ تصاعديّة بالنسبة لِـ: $x<1$

الدالّة $f(x)$ تنازليّة بالنسبة لِـ: $x>1$

(2) نتج أنّ: $f(x) = (4-3x)e^{3x}$

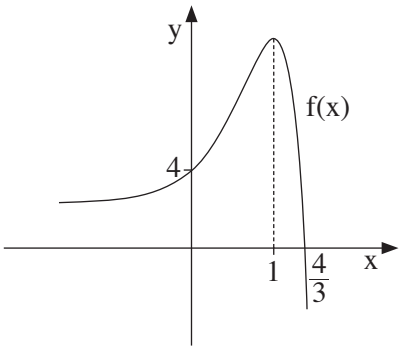
$x = 0 \quad \Rightarrow \quad f(0) = 4$

$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4}{3}$

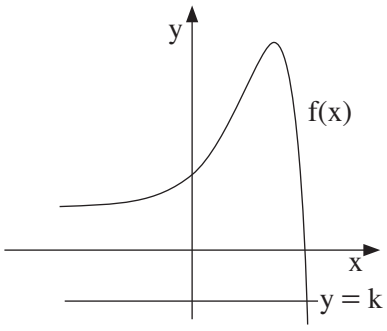
التقاطع مع المحور x : $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$

التقاطع مع المحور y : $(0, 4)$

(3)



د.



حسب الرسم: المستقيم يقطع الرسم البيانيّ لِـ $f(x)$ في نقطة واحدة بالنسبة لِـ $k \le 0$

حقوق الطّبع محفوظة لدولة إسرائيل.
النّسخ أو النّشر ممنوعان إلّا بإذن من وزارة التّربية والتّعليم.