

סוג הבחינה: א. בגרות לבתי ספר על-יסודיים
ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים
מועד הבחינה: חורף תשע"ד, 2014
מספר השאלון: 313, 035803
נספח: דפי נוסחאות ל-3 יחידות לימוד

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מתמטיקה

3 יחידות לימוד — שאלון שלישי

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעותיים.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שש שאלות בנושאים:

אלגברה, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי.

עליך לענות על ארבע שאלות — $25 \times 4 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, ב כאשר

החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.

שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

שאלה 1

בעל חנות בגדים קנה x חולצות במחיר כולל של 2500 שקלים.

20 חולצות היו פגומות, ולכן לא נמכרו.

שאר החולצות נמכרו ברווח של 60%.

בעל החנות הרוויח בעסקה זו 860 שקלים.

א. חשב כמה חולצות קנה בעל החנות.

ב. חשב כמה שילם בעל החנות עבור חולצה אחת.

ג. בכמה שקלים מכר בעל החנות כל חולצה?

תשובה לשאלה 1

דרך I:

המחיר של כל חולצה הוא: $\frac{2500}{x}$ שקלים

מספר החולצות שנמכרו הוא: $(x - 20)$ חולצות

מחירה של כל חולצה שנמכרה ברווח של 60% הוא: $\frac{2500}{x} \cdot 1.6$

סכום הכסף שהרוויח בעל החנות בעבור

מכירה של $(x - 20)$ חולצות הוא: $(x - 20) \cdot \frac{2500}{x} \cdot 1.6$ שקלים

הרווח של בעל החנות: $(x - 20) \cdot \frac{2500}{x} \cdot 1.6 - 2500$

$\Downarrow$

לכן יש לפתור את המשוואה: $(x - 20) \cdot \frac{2500}{x} \cdot 1.6 - 2500 = 860$

$\Downarrow$

נכפול ב- x ונקבל: $(x - 20) \cdot 2500 \cdot 1.6 = 3360x$

$\Downarrow$

$(x - 20) \cdot 4000 = 3360x$

$\Downarrow$

א. מספר החולצות שקנה בעל החנות הוא: 125 חולצות $x =$

ב. הסכום ששילם בעל החנות בעבור חולצה אחת: 20 שקלים

ג. המחיר שבו מכר בעל החנות חולצה אחת הוא: 32 שקלים $20 \cdot 1.6 =$

המשך תשובה לשאלה 1**דרך II :**

נסמן את המחיר ששילם בעל החנות בעבור חולצה אחת ב־ y שקלים.

המשוואה המתאימה לסכום הקנייה של כל החולצות היא: $x \cdot y = 2500$

מחיר חולצה אחת שנמכרה ברווח של 60% הוא: $y \cdot 1.6$ שקלים

סכום הכסף שהרוויח בעל החנות בעבור מכירה של $(x - 20)$ חולצות הוא: $(x - 20) \cdot y \cdot 1.6$

לכן יש לפתור את מערכת המשוואות:
$$\begin{cases} x \cdot y = 2500 \\ (x - 20) \cdot 1.6y = 3360 \end{cases}$$

$\Downarrow$

הפתרונות של מערכת המשוואות הם: $x = 125$, $y = 20$

$\Downarrow$

א. מספר החולצות שקנה בעל החנות הוא: 125 חולצות $x =$

ב. הסכום ששילם בעל החנות בעבור חולצה אחת: 20 שקלים

ג. המחיר שבו מכר בעל החנות חולצה אחת הוא: 32 שקלים $20 \cdot 1.6 =$

דרך III :

לו כל החולצות שקנה בעל החנות היו נמכרות ברווח של 60% ,

הסכום שבעל החנות היה מקבל ממכירת החולצות שקנה היה: $2500 \cdot 1.6 = 4000$

בפועל הסכום שקיבל בעל החנות ממכירת $(x - 20)$ החולצות היה: $2500 + 860 = 3360$

ההפרש בסכומים נובע מכך ש־ 20 חולצות לא נמכרו.

הסכום שהיה צריך לקבל לו נמכרו גם 20 החולצות הפגומות: $4000 - 3360 = 640$

640 שקלים הוא הסכום שהמוכר היה מקבל בעבור

מכירת 20 החולצות הפגומות לו נמכרו ברווח של 60%.

מכאן אפשר להסיק כי המחיר שנמכרה בו חולצה לא פגומה אחת הוא: $\frac{640}{20} = 32$ שקלים

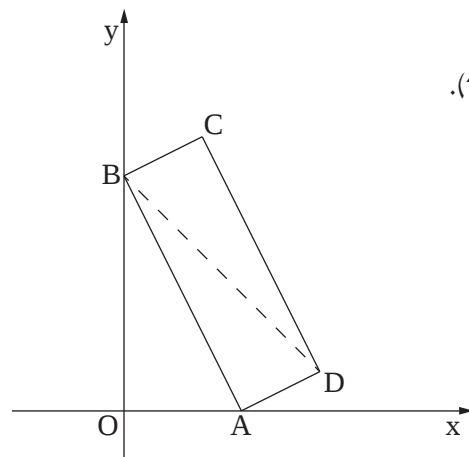
בעל החנות מכר חולצה אחת במחיר הגדול פי 1.6

מהמחיר שבו הוא קנה אותה.

לכן הסכום ששילם בעל החנות בעבור חולצה אחת הוא: $\frac{32}{1.6} = 20$ שקלים

מספר החולצות שקנה בעל החנות הוא: $\frac{2500}{20} = 125$ חולצות

שאלה 2



קדקוד A של מלבן ABCD מונח על ציר ה- x

וקדקוד B של המלבן מונח על ציר ה- y (ראה ציור).

משוואת הישר AD היא: $y = \frac{1}{2}x - 3$.

א. (1) מצא את שיעורי הנקודה A.

(2) מצא את השיפוע של הצלע AB.

(3) מצא את שיעורי הנקודה B.

ב. שיעור ה- x של הנקודה D הוא 10.

מצא את שיעור ה- y של הנקודה D.

ג. חשב את שטח המרובע OBDA.

(O – ראשית הצירים).

תשובה לשאלה 2

א. (1) חיתוך הישר $y = \frac{1}{2}x - 3$ עם ציר ה- x

הוא בנקודה שבה $y = 0$, לכן:

$$0 = \frac{1}{2}x - 3$$

↓

$$x = 6$$

$$A(6, 0)$$

שיעורי הנקודה A:

(2) הצלע AB במלבן מאונכת לצלע AD.

שיפוע הישר AD הוא:

$$m_{AD} = \frac{1}{2}$$

↓

$$m_{AB} = -2$$

שיפוע הישר AB הוא:

(3) הישר AB עובר דרך הנקודה A ושיפועו -2,

לכן משוואת הישר AB היא:

$$y - 0 = -2(x - 6)$$

↓

$$y = -2x + 12$$

חיתוך הישר $y = -2x + 12$ עם ציר ה- y

הוא בנקודה שבה $x = 0$, לכן:

$$y = -2 \cdot 0 + 12$$

↓

$$y = 12$$

$$B(0, 12)$$

שיעורי הנקודה B הם:

המשך תשובה לשאלה 2

ב. הנקודה D נמצאת על הישר $y = \frac{1}{2}x - 3$.

$$y = \frac{1}{2} \cdot 10 - 3 \quad \text{שיעור ה-} x \text{ שווה ל-} 10, \text{ לכן:}$$

$$\Downarrow$$

$$y = 2$$

$$D(10, 2)$$

שיעורי הנקודה D הם:

ג. המרובע OBDA מורכב משני משולשים ישרי זווית OAB ו-ABD,

לכן שטחו יהיה שווה לסכום שטחי המשולשים OAB ו-ABD.

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB \quad \text{שטח משולש ישר זווית OAB:}$$

$$\Downarrow$$

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 12 = 36$$

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD \quad \text{שטח משולש ישר זווית ABD:}$$

$$AB = \sqrt{(6-0)^2 + (0-12)^2} = \sqrt{180} \quad \text{אורך הקטע AB:}$$

$$AD = \sqrt{(6-10)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{20} \quad \text{אורך הקטע AD:}$$

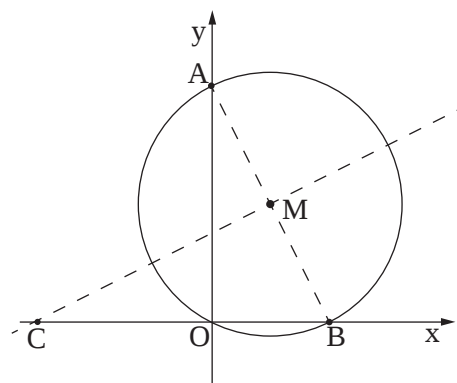
$$\Downarrow$$

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} \sqrt{20} \cdot \sqrt{180} = 30 \quad \text{שטח המשולש ABD:}$$

$$\Downarrow$$

$$S_{OBDA} = 36 + 30 = 66 \quad \text{שטח המרובע OBDA הוא:}$$

שאלה 3



- מעגל שמרכזו בנקודה $M(2, 4)$
 עובר דרך ראשית הצירים $O(0, 0)$,
 וחותר את הצירים גם בנקודות A ו- B (ראה ציור).
 א. מצא את משוואת המעגל.
 ב. מצא את שיעורי הנקודות A ו- B .
 ג. הראה כי AB הוא קוטר במעגל.
 ד. דרך מרכז המעגל העבירו ישר מאונך ל- AB ,
 החותך את ציר ה- x בנקודה C
 (ראה ציור).
 מצא את שיעורי הנקודה C .

תשובה לשאלה 3

א. MO הוא הרדיוס. לכן: $R^2 = (2 - 0)^2 + (4 - 0)^2$

$$R^2 = 20$$

$$\Downarrow$$

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 20 \quad \text{משוואת המעגל היא:}$$

ב. נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה- y

$$(0 - 2)^2 + (y + 4)^2 = 20 \quad \text{נמצאות בנקודות שבהן } x = 0, \text{ לכן:}$$

$$\Downarrow$$

$$y = 8, \quad y = 0$$

$$A(0, 8) \quad \text{שיעורי הנקודה } A \text{ הם:}$$

נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה- x

$$(x - 2)^2 + (0 - 4)^2 = 20 \quad \text{נמצאות בנקודות שבהן } y = 0, \text{ לכן:}$$

$$\Downarrow$$

$$x = 4, \quad x = 0$$

$$B(4, 0) \quad \text{שיעורי הנקודה } B \text{ הם:}$$

המשך תשובה לשאלה 3

ג. דרך I:

$$AB = \sqrt{(0-4)^2 + (8-0)^2} = \sqrt{80} = 2\sqrt{20}$$

$$\Downarrow$$

$$R = \sqrt{20}$$

על סמך סעיף (א)

$$\Downarrow$$

$$AB = 2R$$

ולכן:

$$\Downarrow$$

AB הוא קוטר במעגל כי הוא
מיתר השווה באורכו לפעמיים הרדיוס.

דרך II:

$$A(0, 8), B(4, 0)$$

שיעורי הנקודות A ו-B הם:

$$\Downarrow$$

$$\frac{0+4}{2} = 2, \quad \frac{8+0}{2} = 4$$

שיעורי נקודת האמצע של קטע AB הם:

$$M(2, 4)$$

שיעורי מרכז המעגל הם:

$$\Downarrow$$

AB הוא קוטר במעגל כי נקודת האמצע
של קטע AB מתלכדת עם M מרכז המעגל

דרך III:

$$A(0, 8), B(4, 0)$$

הנקודות A ו-B הן:

$$\Downarrow$$

$$\frac{8-0}{0-4} = -2$$

שיפוע הישר AB הוא:

$$y = -2x + 8$$

משוואת הישר AB היא:

$$M(2, 4)$$

הצבת שיעורי הנקודה M במשוואת הישר AB:

$$4 = -2 \cdot 2 + 8$$

$$\Downarrow$$

השוויון מתקיים, לכן AB הוא קוטר במעגל

$$\frac{8-0}{0-4} = -2$$

ד. שיפוע AB הוא:

$$\frac{1}{2}$$

שיפוע הישר המאונך ל-AB הוא:

$$y = \frac{1}{2}x + 3$$

משוואת הישר העובר דרך M ומאונך ל-AB היא:

$$\Downarrow$$

$$x = -6$$

הנקודה C נמצאת על ציר ה-x,
שיעור ה-y שלה הוא $y = 0$, לכן שיעור ה-x הוא:

$$C(-6, 0)$$

שיעורי הנקודה C הם:

שאלה 4

4. נתונה הפונקציה $f(x) = 4\sqrt{x} - 2x$.

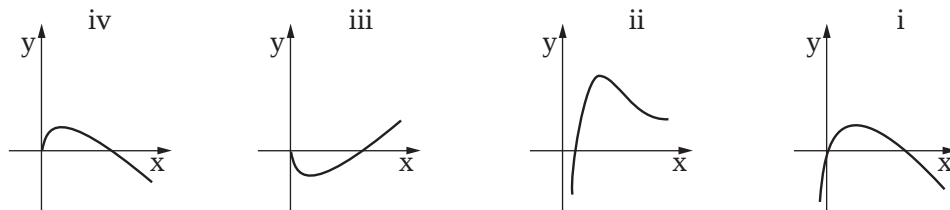
א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ג. מצא את x שעבורו $f'(x) = 0$.

ד. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה. נמק.

ה. איזה מהגרפים i-iv שלפניך הוא הגרף של הפונקציה $f(x)$? נמק את בחירתך.



תשובה לשאלה 4

א. תחום ההגדרה הוא:

$$x \geq 0$$

כי הביטוי בתוך השורש הריבועי

חייב להיות אי-שלילי

ב. בנקודות חיתוך עם ציר ה- y

שיעור ה- x הוא $x = 0$,

לכן נקודת החיתוך עם ציר ה- y היא:

$$f(0) = 4\sqrt{0} - 2 \cdot 0 = 0$$

$\Downarrow$

$$(0, 0)$$

בנקודות חיתוך עם ציר ה- x

שיעור ה- y הוא $y = 0$, לכן:

$$4\sqrt{x} - 2x = 0$$

$\Downarrow$

$$2\sqrt{x} = x$$

העברת אגף:

$\Downarrow$

$$4x = x^2$$

נעלה בריבוע את שני אגפי המשוואה:

$\Downarrow$

$$x = 0, \quad x = 4$$

נקודות החיתוך עם ציר ה- x הן:

$\Downarrow$

$$(0, 0), \quad (4, 0)$$

המשך תשובה לשאלה 4

ג. הנגזרת של הפונקציה היא:

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - 2$$

$$f'(x) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{2}{\sqrt{x}} - 2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{2}{\sqrt{x}} = 2$$

$$\Downarrow$$

$$x = 1$$

שיעור ה- x שעבורו $f'(x) = 0$ הוא:

התחומים	$0 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
x	$x = \frac{1}{4}$	$x = 1$	$x = 4$
$f'(x)$	2	0	-1
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

ד. בדיקת סימן הנגזרת:

נבחר נקודה אחת בכל תחום

ונבדוק את סימן הנגזרת.

$$0 < x < 1 \quad f'(x) > 0$$

$$x > 1 \quad f'(x) < 0$$

$$\Downarrow$$

לכן

$$0 < x < 1$$

הפונקציה עולה בתחום:

$$x > 1$$

הפונקציה יורדת בתחום:

ה. גרף iv הוא גרף הפונקציה, כי היא מקיימת את התנאים האלה:

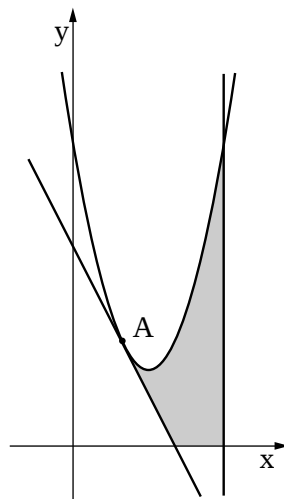
$$(1) \text{ הפונקציה מוגדרת בתחום } x \geq 0.$$

$$(2) \text{ לפונקציה שתי נקודות חיתוך עם ציר ה-} x.$$

$$(3) \text{ לפונקציה נקודת קיצון פנימית אחת, והיא נקודת מקסימום.}$$

$$(4) \text{ הפונקציה עולה בתחום } 0 < x < 1 \text{ ויורדת בתחום } x > 1.$$

שאלה 5



נתונה הפונקציה $y = 2x^2 - 6x + 6$,

ונתון ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה A שבה $x = 1$.

- מצא את משוואת המשיק.
- מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .
- חשב את השטח המוגבל על ידי:
גרף הפונקציה, המשיק, הישר $x = 3$, וציר ה- x
(השטח האפור בצירור).

תשובה לשאלה 5

$$y' = 4x - 6$$

א. פונקציית הנגזרת היא:

⇓

לכן שיפוע המשיק בנקודה A

$$y'(1) = 4 - 6 = -2$$

שבה $x = 1$ הוא:

$$y(1) = 2 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 6 = 2$$

שיעור ה- y של נקודת ההשקה A הוא:

⇓

$$y = -2x + 4$$

לכן משוואת המשיק בנקודה A היא:

ב. חיתוך הישר $y = -2x + 4$ עם ציר ה- x

$$0 = -2x + 4$$

הוא בנקודה שבה $y = 0$

⇓

$$x = 2$$

לכן:

$$(2, 0)$$

נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x היא:

המשך תשובה לשאלה 5

ג. חישוב השטח האפור:

דרך I:

השטח S_1 — השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, הישרים $x = 1$, $x = 3$ וציר ה- x .השטח S_Δ — השטח המוגבל על ידי המשיק, הישר $x = 1$ וציר ה- x .הפרש בין שני השטחים: $S = S_1 - S_\Delta$

$$S = \int_1^3 (2x^2 - 6x + 6) dx - S_\Delta$$

$$S_1 = \int_1^3 (2x^2 - 6x + 6) dx = 2 \cdot \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 6x \Big|_1^3$$

מציאת הפונקציה הקדומה:

$$\Downarrow$$

$$S_1 = (2 \cdot \frac{3^3}{3} - 3 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3) - (2 \cdot \frac{1^3}{3} - 3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1) = 5\frac{1}{3}$$

הצבה של הגבולות

וחישוב S_1 :

$$S_\Delta = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$$

שטח המשולש S_Δ הוא:
$$\Downarrow$$

$$S = 5\frac{1}{3} - 1 = 4\frac{1}{3}$$

לכן השטח המבוקש (השטח האפור) הוא:

דרך II:

השטח S_2 — השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, המשיק והישרים $x = 1$ ו- $x = 2$.השטח S_3 — השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, הישרים $x = 2$, $x = 3$ וציר ה- x .הסכום של שני השטחים: $S = S_2 + S_3$

$$S = \int_1^2 [(2x^2 - 6x + 6) - (-2x + 4)] dx + \int_2^3 (2x^2 - 6x + 6) dx$$

$$S_2 = \int_1^2 (2x^2 - 4x + 2) dx = 2 \cdot \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 2x$$

$$\Downarrow$$

$$S_2 = (2 \cdot \frac{2^3}{3} - 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2) - (2 \cdot \frac{1^3}{3} - 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1) = \frac{2}{3}$$

מציאת הפונקציה הקדומה,

הצבה של הגבולות

וחישוב השטח S_2 :

המשך תשובה לשאלה 5

מציאת הפונקציה הקדומה,

הצבת גבולות

וחישוב השטח S3 :

$$S3 = \int_2^3 (2x^2 - 6x + 6) dx = 2 \cdot \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 6x \Big|_2^3$$

$$\Downarrow$$

$$S3 = (2 \cdot \frac{3^3}{3} - 3 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3) - (2 \cdot \frac{2^3}{3} - 3 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2) = 3\frac{2}{3}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{2}{3} + 3\frac{2}{3} = 4\frac{1}{3}$$

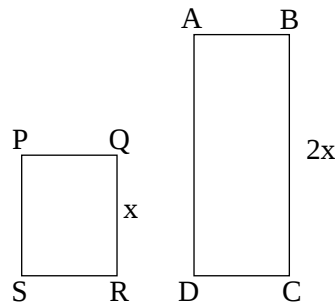
לכן השטח המבוקש (השטח האפור) הוא:

/המשך בעמוד 13/

שאלה 6

נתונים שני מלבנים ABCD ו- PQRS (ראה ציור).

נתון: 30 ס"מ $AB + BC =$ (סכום אורכי הצלעות AB ו- BC הוא 30 ס"מ).



$$AB = PQ$$

$$QR = x$$

$$BC = 2x$$

א. (1) הבע באמצעות x את אורך הצלע AB.

(2) הבע באמצעות x את סכום שטחי המלבנים.

ב. מה צריך להיות x כדי שסכום שטחי המלבנים

יהיה מקסימלי?

תשובה לשאלה 6

א. (1) נתון: $BC = 2x$ ו- $AB + BC = 30$, לכן: $AB + 2x = 30$

$\Downarrow$

$$AB = 30 - 2x$$

אורך הצלע AB הוא:

$$S_{ABCD} + S_{PQRS}$$

(2) סכום שטחי המלבנים:

$$S_{ABCD} = AB \cdot BC$$

שטח המלבן ABCD :

$\Downarrow$

$$S_{ABCD} = (30 - 2x) \cdot 2x$$

$\Downarrow$

$$S_{ABCD} = 60x - 4x^2$$

$$S_{PQRS} = PQ \cdot QR$$

שטח המלבן PQRS הוא:

$\Downarrow$

$$S_{PQRS} = (30 - 2x) \cdot x$$

$\Downarrow$

$$S_{PQRS} = 30x - 2x^2$$

$\Downarrow$

$$S_{ABCD} + S_{PQRS} = 90x - 6x^2$$

לכן סכום שטחי המלבנים הוא:

המשך תשובה לשאלה 6

$$f(x) = 90x - 6x^2$$

הפונקציה של סכום שטחי המלבנים היא:

$$f'(x) = 90 - 12x$$

הנגזרת היא:

$$f'(x) = 0$$

השוואת הנגזרת לאפס:

$$\Downarrow$$

$$90 - 12x = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x = 7.5$$

נקודות קיצון פנימית:

תחומים	$0 < x < 7.5$	$x = 7.5$	$x > 7.5$
x	$x = 7$	$x = 7.5$	$x = 8$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$

בדיקת הסוג של נקודת הקיצון על פי הצבה בנגזרת:

$$\Downarrow$$

מקסימום $x = 7.5$

$x = 7.5$ ס"מ

ב. שיעור ה־ x , שעבורו סכום שטחי המלבנים הוא מקסימלי, הוא: