מדינת ישראל

משרד החינוך

סוג הבחינה: א. בגרות לבתי"ס על־יסודיים
ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים

מועד הבחינה: תשע"ג, **מועד ב**

מספר השאלון: **035807, 317**

תרגום לערבית (2)

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מתמטיקה

5 יחידות לימוד — שאלון שני

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעתיים.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

בשאלון זה שני פרקים.

פרק ראשון: גאומטריה אנליטית, וקטורים טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים — $33\frac{1}{3} \times 2$ — $66\frac{2}{3}$ נק'

פרק שני: גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות — $33\frac{1}{3} \times 1$ — $33\frac{1}{3}$ נק'

סה"כ — 100 נק'

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
2. דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

1. אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
2. התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
   הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
   חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
3. לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
   שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ב ה צ ל ח ה!

دولة إسرائيل

وزارة التّربية والتّعليم

نوع الامتحان: أ. بجروت للمدارس الثّانويّة
ب. بجروت للممتحَنين الخارجيّين

موعد الامتحان: 2013، **الموعد "ب"**

رقم النّموذج: **035807، 317**

ترجمة إلى العربيّة (2)

اقتراح إجابات لأسئلة امتحان بجروت

الرياضيّات

5 وحدات تعليميّة – النّموذج الثّاني

تعليمات للممتحَن

أ. مدّة الامتحان: ساعتان.

ب. مبنى النّموذج وتوزيع الدرجات:

في هذا النّموذج فصلان.

الفصل الأوّل: الهندسة التحليليّة، المتّجهات حساب المثلّثات في الفراغ، الأعداد المركّبة — $33\frac{1}{3} \times 2$ — $66\frac{2}{3}$ درجة

الفصل الثاني: التزايد والتضاؤل، دوالّ القوى، الدوالّ الأسّيّة واللوغريثميّة — $33\frac{1}{3} \times 1$ — $33\frac{1}{3}$ درجة

المجموع — 100 درجة

ج. موادّ مساعدة يُسمح استعمالها:

1. حاسبة غير بيانيّة. لا يُسمح استعمال إمكانيّات البرمجة في الحاسبة التي يمكن برمجتها. استعمال الحاسبة البيانيّة أو إمكانيّات البرمجة في الحاسبة قد يؤدّي إلى إلغاء الامتحان.
2. لوائح قوانين (مرفقة).

د. تعليمات خاصّة:

1. لا تنسخ السّؤال؛ اكتب رقمه فقط.
2. ابدأ كلّ سؤال في صفحة جديدة. اكتب في الدّفتر مراحل الحلّ، حتّى إذا أجريتَ حساباتك بواسطة حاسبة.
   فسّر كلّ خطواتك، بما في ذلك الحسابات، بالتّفصيل وبوضوح وبترتيب.
   عدم التّفصيل قد يؤدّي إلى خصم درجات أو إلى إلغاء الامتحان.
3. لكتابة مسوّدة يجب استعمال دفتر الامتحان أو الأوراق التي حصلتَ عليها من المراقبين.
   استعمال مسوّدة أخرى قد يؤدّي إلى إلغاء الامتحان.

التّعليمات في هذا النّموذج مكتوبة بصيغة المذكّر وموجّهة للممتحَنات وللممتحَنين على حدّ سواء.

نتمنّى لك النّجاح!

السؤال 1

1. معطاة النقطتان $A(-a\,,0)$ وَ $B(a\,,0)$, $a>0$.

المحلّ الهندسيّ لجميع النقاط التي بُعدها عن النقطة A هو ضعف بُعدها عن النقطة B

مطابق للمحلّ الهندسيّ للأعداد المركّبة z التي تحقّق $|z+b|=4$.

a وَ b هما بارامتران حقيقيّان .

أ. جد قيمة a وقيمة b .

ب. المستطيل TNEF ، الذي أضلاعه موازية للمحورين، محصور في المحلّ الهندسيّ الموصوف في مقدّمة السؤال .

الإحداثيّان y للرأسين E وَ F أصغر من 0 .

العدد المركّب $z=2+iy$ يمثّل الرأس T للمستطيل .

النقطة C تقع على المحور x بحيث $\overline{CN}\cdot\overline{CF} = -16$.

جد إحداثيّات النقطة C .

إجابة السؤال 1

أ. نرمز بـ $P(x\,,y)$ إلى النقطة التي بُعدها عن $A(-a\,,0)$
هو ضعف بُعدها عن النقطة $B(a\,,0)$

ونكتب اعتمادًا على المعطى :

$$(PA)^2=4(PB)^2$$
$$\Downarrow$$
$$(x+a)^2+y^2=4(x-a)^2+4y^2$$
$$\Downarrow$$

معادلة المحلّ الهندسيّ
معبَّر عنها بدلالة a :

$$\text{I.}\quad (x-\frac{5}{3}a)^2+y^2=\frac{16a^2}{9}$$

نرمز $z=x+iy$ (x وَ y حقيقيّان) وحسب
المعادلة المعطاة للمحلّ الهندسيّ ينتج :

$$|x+iy+b|=4$$
$$\Downarrow$$
$$\text{II.}\quad (x+b)^2+y^2=4^2$$

بما أنّ المعادلة I يجب أن تكون
مطابقة للمعادلة II ، ينتج :

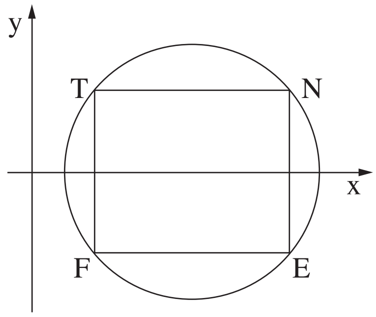
$$\frac{16a^2}{9}=4^2 \quad ، \quad b=-\frac{5}{3}a$$
$$\Downarrow$$
$$(a>0)\quad a=3 \qquad ، \quad b=-5$$

/ يتبع في صفحة 3 /

تكملة إجابة السؤال 1.

ب. حسب البند "أ" معادلة المحلّ الهندسيّ هي: $(x-5)+y^2=16$

بما أنّ الإحداثيّين y لِـ E وَ F هما سالبان،
الإحداثيّان y لِـ N وَ T هما موجبان،
كما هو موصوف في الرسم الذي أمامك:



$T(2,y)$ $(y>0)$ على محيط الدائرة، لذلك الإحداثيّ y لِـ T : $y=\sqrt{7}$

$\Downarrow$

إحداثيّات رؤوس المستطيل: $T(2,\sqrt{7})$, $N(8,\sqrt{7})$, $E(8,-\sqrt{7})$, $F(2,-\sqrt{7})$

$\Downarrow$

نرمز $C(x,0)$ وينتج: $\overrightarrow{CN}=(8-x\ ,\ \sqrt{7})$, $\overrightarrow{CF}=(2-x\ ,\ -\sqrt{7})$

$\Downarrow$

اعتمادًا على المعطى $\overrightarrow{CN}\cdot\overrightarrow{CF}=-16$ ينتج: $(8-x\ ,\sqrt{7})\cdot(2-x\ ,\ -\sqrt{7})=-16$

$\Downarrow$

$x^2-10x+25=0$

$\Downarrow$

$x=5$

$\Downarrow$

$C(5,0)$

/يتبع في صفحة 4/

السؤال 2

المستقيم ℓ يمرّ عبر النقطتين $A(0,0,1)$ وَ $B(1,1,0)$.

المستقيم يعامد المستوى π_1 ، ويقطع المستوى في النقطة D .

المستوى π_1 يمرّ عبر نقطة أصل المحاور O .

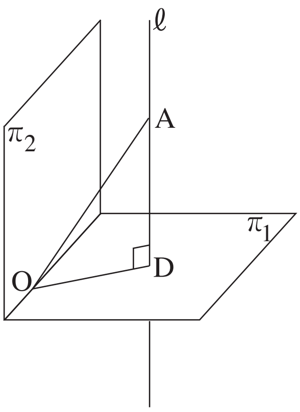
أ. جد مساحة المثلّث OAD .

ب. (1) المستوى π_2 يحوي المحور x ويوازي المستقيم ℓ .

جد الزاوية التي بين المستقيم ℓ من جهة ومستقيم التقاطع بين المستوى π_1 والمستوى π_2 من جهة أخرى.

(2) جد بُعد المستقيم ℓ عن مستقيم التقاطع بين المستوى π_1 والمستوى π_2 .

إجابة السؤال 2



أ. التمثيل الجبريّ للمستقيم ℓ الذي يمرّ عبر $A(0,0,1)$ وَ $B(1,1,0)$:

$$\ell: \quad \underline{x} = (0,0,1) + t(1,1,-1)$$

$$\Downarrow$$

لذلك معامد π_1 هو:

$$(1,1,-1)$$

$$\Downarrow$$

π_1 يمرّ عبر نقطة أصل المحاور، لذلك معادلة π_1 هي:

$$\pi_1: \quad x + y - z = 0$$

$$\Downarrow$$

النقطة D التي في المستوى π_1 تحقّق:

$$D(t, t, 1-t)$$

من تعويض $D(t, t, 1-t)$ في معادلة المستوى π_1 ينتج:

$$D(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3})$$

$$\Downarrow$$

$$|\overrightarrow{OD}| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

المتّجه $\overrightarrow{AD}$ يحقّق:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = (\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{3})$$

$$\Downarrow$$

$$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

مساحة المثلّث OAD (انظر الرسم):

$$S_{\triangle OAD} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{OD}|$$

$$\Downarrow$$

$$S_{\triangle OAD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

/ يتبع في صفحة 5 /

تكملة إجابة السؤال 2.

ب. (1) الطريقة I

المستقيم ℓ يعامد π_1 ، لذلك: المستقيم ℓ يعامد كلّ مستقيم يحويه π_1

$\Downarrow$

ℓ يعامد مستقيم التقاطع بين π_1 وَ π_2

الطريقة II

معادلة المستوى π_2 الذي
يحوي متّجه اتّجاه ℓ : $(1 , 1 , -1)$ ،
ومتّجه اتّجاه المحور x : $(1 , 0 , 0)$
ونقطة أصل المحاور، هي: $\pi_2: \; y + z = 0$

وجدنا أنّ معادلة المستوى π_1 هي: $\pi_1: \; x + y - z = 0$

لذلك مستقيم التقاطع مع المستوى π_1 هو: $u(2 , -1 , 1)$

الزاوية بين المستقيم ℓ ومستقيم التقاطع: $\cos\alpha = \dfrac{(2 , -1 , 1)\cdot(1 , 1 , -1)}{\sqrt{2^2+1+1}\cdot\sqrt{1+1+1}} = 0$

$\Downarrow$

$\alpha = 90^o$

(2) بما أنّ ℓ يوازي π_2 ، البُعد المطلوب هو بُعد نقطة على ℓ عن المستوى π_2 .

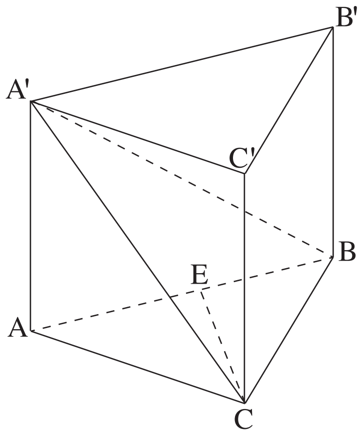
حسب "ب (1)" معادلة π_2 هي: $\pi_2: \; y + z = 0$

$\Downarrow$

بُعد $A(0 , 0 , 1)$ عن المستوى π_2 : $\dfrac{|(0 , 1 , 1)\cdot(0 , 0 , 1)|}{\sqrt{1+1}\cdot\sqrt{1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

/يتبع في صفحة 6/

السؤال 3



معطى المنشور القائم $ABCA'B'C'$ الذي قاعدته مثلّث متساوي الأضلاع .

النقطة E تقع على الضلع AB بحيث $AE = kAB$ $(0 < k < 1)$.

أ . معطى أنّ الزاوية التي بين المستوى $A'EC$ والمستوى ABC هي الزاوية $A'EA$.

جد قيمة k .

معطى أنّ : $AC = 2$ ، $\sphericalangle A'EA = 45^o$.

الزاوية التي بين المستوى $A'EC$ والمستوى ABC هي $\sphericalangle A'EA$.

ب . احسب الزاوية التي بين المستوى ABC والمستوى $A'BC$.

النقطة F تقع على المستوى $A'BC$ (ليس بالضرورة على BC) بحيث $\overrightarrow{AF}$ يعامد $\overrightarrow{BC}$ ،

ويتحقّق: $\overrightarrow{A'F} = t\overrightarrow{A'C} + m\overrightarrow{A'B}$.

جـ . ارمز: $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$ ، $\overrightarrow{AC} = \underline{u}$ ، $\overrightarrow{AB} = \underline{v}$ ، وبرهن أنّ $t = m$.

إجابة السؤال 3

أ . EC هو مستقيم التقاطع بين

المستوى $A'EC$ والمستوى ABC ،

لذلك يجب أن يتحقّق: $A'E \perp EC$, $AE \perp EC$

$$\Downarrow$$

EC ارتفاع في المثلّث المتساوي الأضلاع ABC

$$\Downarrow$$

EC مستقيم متوسّط في المثلّث المتساوي الأضلاع ABC

$$\Downarrow$$

E منتصف AB

$$\Downarrow$$

$$k = \frac{1}{2}$$

/ يتبع في صفحة 7 /

تكملة إجابة السؤال 3.

ب. إذا رمزنا بـ P إلى منتصف الضلع BC ، عندها الزاوية
بين المستوى ABC والمستوى A'BC هي : $\measuredangle A'PA$

في المثلّث A'PA يتحقّق : $\text{tg}\measuredangle A'PA = \dfrac{AA'}{AP}$

حسب المعطيات في المثلّث ABC ينتج : $AP = \sqrt{3}$

حسب المعطيات في المثلّث A'EA يتحقّق : $\measuredangle AA'E = \measuredangle A'EA = 45^{o}$

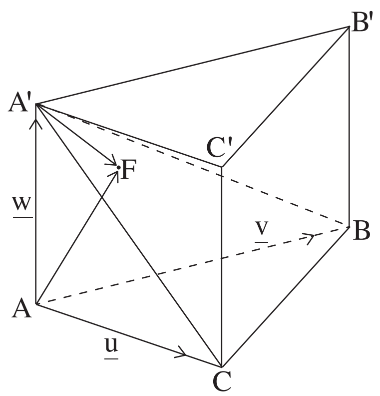
$$\Downarrow$$

$$AA' = AE = \frac{1}{2}AC = 1$$

من هنا : $\text{tg}\measuredangle A'PA = \dfrac{AA'}{AP} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$$\Downarrow$$

$$\measuredangle A'PA = 30^{o}$$



جـ. حسب المعطيات ينتج : $\overrightarrow{A'C} = \underline{u} - \underline{w} \quad , \quad \overrightarrow{A'B} = \underline{v} - \underline{w}$

$$\Downarrow$$

$$\overrightarrow{A'F} = t(\underline{u} - \underline{w}) + m(\underline{v} - \underline{w})$$

$$\Downarrow$$

$$\overrightarrow{AF} = \underline{w} + \overrightarrow{A'F} = t\underline{u} + m\underline{v} - (t + m - 1)\underline{w}$$

حسب المعطيات ينتج : $\overrightarrow{BC} = \underline{u} - \underline{v}$

$\overrightarrow{AF} \perp \overrightarrow{BC}$ ، لذلك :
$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BC} = t|\underline{u}|^2 - m|\underline{v}|^2 - t|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cos 60^{o} + m|\underline{v}|\cdot|\underline{u}|\cos 60^{o} = 0$$

$$\Downarrow$$

بما أنّ $|\underline{u}| = |\underline{v}| \neq 0$ ، ينتج :
$$t|\underline{u}|^2 - m|\underline{u}|^2 - \frac{1}{2}t|\underline{u}|^2 + \frac{1}{2}m|\underline{u}|^2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$t = m$$

/يتبع في صفحة 8/

السؤال 4

أ. معطاة الدالّتان: $f(x) = e^{-ax}$ ، $g(x) = e^{ax}$ ، $a > 0$.

(1) أَشِر في هيئة محاور إلى المساحة المحصورة بين الرسمين البيانيّين للدالّتين $f(x)$ وَ $g(x)$ والمستقيم $x = \frac{1}{a}$ ، وأَشِر إلى المساحة المحصورة بين الرسمين البيانيّين للدالّتين $f(x)$ وَ $g(x)$ والمستقيم $x = -\frac{1}{a}$.

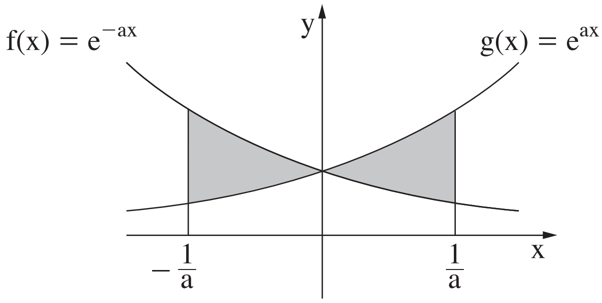
(2) المساحتان اللتان أشرتَ إليهما في البند الفرعيّ "أ (1)" تدوران حول المحور x .
عبّر كدالّة لِـ a عن الحجم الكلّيّ لجسم الدوران الذي ينتج، $V(a)$.

(3) ارسم رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدالّة $V(a)$

ب. في تاريخ 1/1/2005 تمّ إيداع مبلغ ماليّ معيّن في البنك "أ"، وفي نفس التاريخ تمّ إيداع نفس المبلغ الماليّ أيضًا في البنك "ب".
في كلّ واحد من البنكَيْن، المبلغ الماليّ الذي تمّ إيداعه ازداد كلّ سنة بنسبة مئويّة ثابتة.
بعد مرور 7 سنوات، كان في البنك "أ" 12,298 شيقل، وكان في البنك "ب" 13,162 شيقل.
بعد مرور كم سنة من التاريخ 1/1/2005 سيكون في البنك "ب" مبلغ ماليّ أكبر بِـ 25%
من المبلغ الماليّ الذي سيكون في البنك "أ"؟
ملاحظة: لا توجد علاقة بين البند "أ" والبند "ب".

إجابة السؤال 4

أ. (1)



(2) بما أنّ المساحة الرماديّة التي في الرسم متماثلة بالنسبة للمحور y ،
فإنّ الحجم $V(a)$ هو ضعف حجم جسم الدوران
الذي حدوده بين 0 وَ $\frac{1}{a}$:

$$V(a) = 2\pi\int_0^{\frac{1}{a}} e^{2ax}\,dx - 2\pi\int_0^{\frac{1}{a}} e^{-2ax}\,dx$$

$$\Downarrow$$

$$V(a) = 2\pi\Big[\frac{1}{2a}e^{2ax} + \frac{1}{2a}e^{-2ax}\Big]_0^{\frac{1}{a}}$$

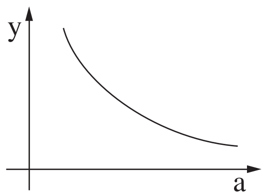
$$\Downarrow$$

$$V(a) = \frac{\pi(e^2 + e^{-2} - 2)}{a}$$

/يتبع في صفحة 9/

تكملة إجابة السؤال 4.

أ. (3) بالنسبة لِـ $a > 0$ الرسم البيانيّ هو:



ب. بعد مرور 7 سنوات المبلغ الماليّ في البنك "أ" : $\text{I.} \quad 12{,}298 = M_0 \cdot q^7$

بعد مرور 7 سنوات المبلغ الماليّ في البنك "ب" : $\text{II.} \quad 13{,}162 = M_0 \cdot a^7$

من I وَ II ينتج:

$$\frac{12{,}298}{13{,}162} = \left(\frac{q}{a}\right)^7$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{q}{a} = \left(\frac{12{,}298}{13{,}162}\right)^{\frac{1}{7}}$$

بعد مرور x سنوات، عندما يكون المبلغ الماليّ في البنك "ب"
أكبر بِـ 25% من المبلغ الماليّ في البنك "أ"، يتحقّق: $1.25 \cdot M_0 \cdot q^x = M_0 \cdot a^x$

$$\Downarrow$$
$$\text{III.} \quad \left(\frac{q}{a}\right)^x = \frac{1}{1.25}$$

من تعويض $\frac{q}{a}$ في المعادلة III ينتج:

$$\left(\frac{12{,}298}{13{,}162}\right)^{\frac{x}{7}} = \frac{1}{1.25}$$
$$\Downarrow$$
$$x = 7 \cdot \frac{\ell n \frac{1}{1.25}}{\ell n \frac{12{,}298}{13{,}162}} = 23.0 \text{ سنة}$$

/ يتبع في صفحة 10 /

السؤال 5

5. معطاة الدالّة $f(x) = \frac{kx}{\ell nx}$ ، k هو بارامتر لا يساوي 0 .

أ. جد مجال تعريف الدالّة $f(x)$.

ب. (1) جد بالنسبة لأيّة قيَم k توجد للدالّة $f(x)$ نهاية عظمى .

معطى أنّه في المجال $x > 1$ تحصل الدالّة $f(x)$ على جميع القيَم $y \le -2$ وعلى هذه القيَم فقط .

(2) جد قيمة k .

(3) معطى أيضًا أنّ المستقيم $x = 1$ هو خطّ التقارب الوحيد للدالّة $f(x)$.

ارسم رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدالّة $f(x)$ في كلّ مجال تعريفها .

جـ. من بين المماسّات للرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ في المجال $x > 1$ ، جد نقطة تماس المماسّ الذي ميله أصغر ما يمكن .

إجابة السؤال 5

أ. الدالّة معرّفة بالنسبة لـ: $x > 0 \quad , \quad \ell nx \neq 0$

$\Downarrow$

مجال التعريف: $0 < x < 1$ أو $x > 1$

ب. (1)

$$f(x) = \frac{kx}{\ell n\, x}$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x) = \frac{k\,\ell n\, x - kx \cdot \frac{1}{x}}{\ell n^2 x} = \frac{k(\ell nx - 1)}{\ell n^2 x}$$

إشارة $f''(x)$ في النقطة التي تساوي فيها $f'(x)$ صفرًا

تتحدّد حسب إشارة مشتقّة بسط $f'(x)$: مشتقّة البسط $= k \cdot \frac{1}{x}$

$\Downarrow$

بما أنّ $x > 0$ عندها ينتج: بالنسبة لـ $k < 0$ لـ $f(x)$ توجد نهاية عظمى

(2) حسب المعطى القيمة العظمى لـ$f(x)$ بالنسبة لـ $x > 1$ هي: I. $y = -2$

النهاية العظمى لـ $f(x)$ تنتج عندما: $f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; \ell nx = 1 \;\Rightarrow\; x = e$

قيمة $f(x)$ في $x = e$ هي: II. $f(e) = \frac{k \cdot e}{\ell ne}$

من I وَ II ينتج:

$$-2 = \frac{k \cdot e}{\ell n\, e}$$

$$\Downarrow$$

$$k = -\frac{2}{e}$$

/ يتبع في صفحة 11 /

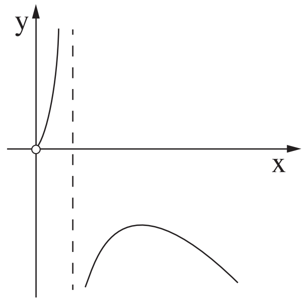
تكملة إجابة السؤال 5.

ب. (3) بالنسبة لِـ $x < 1$: $f'(x) > 0$

$\Downarrow$

$f(x)$ تصاعديّة بالنسبة لِـ $x < 1$

ووجدنا أنّه توجد نهاية عظمى في $(e\,,-2)$ ، لذلك الرسم البيانيّ هو :



جـ. ميل المماسّ هو :

$$f'(x) = \frac{2}{e} \cdot \frac{1 - \ell n\, x}{\ell n^2 x}$$

$$\Downarrow$$

$$f''(x) = \frac{2}{e} \cdot \frac{-\frac{1}{x} \cdot \ell n^2 x - (1 - \ell n x) \cdot 2 \ell n x \cdot \frac{1}{x}}{\ell n^4 x}$$

$$\Downarrow$$

$$f''(x) = \frac{2}{e} \cdot \frac{\ell n\, x\,(\ell n x - 2)}{x\, \ell n^4 x} = \frac{2}{e} \cdot \frac{\ell n x - 2}{x\, \ell n^3 x}$$

$$f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \ell n x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = e^2$$

$$\Downarrow$$

$$f(e^2) = -\frac{2}{e} \cdot \frac{e^2}{\ell n\, e^2} = -e$$

نفحص نوع النقطة القصوى بالنسبة لِـ $x > 1$:

x	e	e^2	e^3
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

حسب الجدول لِـ $f'(x)$ توجد نهاية صغرى في $x = e^2$ ،

لذلك نقطة تماسّ المماسّ الذي ميله أصغر ما يمكن هي : $(e^2\,,-e)$