מדינת ישראל

משרד החינוך

סוג הבחינה: א. בגרות לבתי"ס על־יסודיים
ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים

מועד הבחינה: תשע"ג, **מועד ב'**

מספר השאלון: **035805, 315**

תרגום לערבית (2)

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מתמטיקה

4 יחידות לימוד — שאלון שני

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעה ושלושה רבעים.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:
בשאלון זה שני פרקים:
פרק ראשון — סדרות, טריגונומטריה במרחב
$33\frac{1}{3} \times 1$ — $33\frac{1}{3}$ נק'
פרק שני — גדילה ודעיכה, חשבון דיפרנציאלי
ואינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות,
פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ופונקציות חזקה
$33\frac{1}{3} \times 2$ — $66\frac{2}{3}$ נק'
סה"כ — 100 נק'

ג. חומר עזר מותר בשימוש:
1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
2. דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:
1. אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
2. התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
3. לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

בהצלחה!

دولة إسرائيل

وزارة التّربية والتّعليم

نوع الامتحان: أ. بجروت للمدارس الثّانويّة
ب. بجروت للممتحَنين الخارجيّين

موعد الامتحان: 2013، **الموعد "ب"**

رقم النّموذج: **035805، 315**

ترجمة إلى العربيّة (2)

اقتراح إجابات لأسئلة امتحان بجروت

الرياضيّات

4 وحدات تعليميّة – النّموذج الثّاني

تعليمات للممتحَن

أ. مدّة الامتحان: ساعة وثلاثة أرباع.

ب. مبنى النّموذج وتوزيع الدّرجات:
في هذا النّموذج فصلان:
الفصل الأوّل – المتواليات، حساب المثلّثات في الفراغ
$33\frac{1}{3} \times 1$ — $33\frac{1}{3}$ درجة
الفصل الثّاني – التّزايد والتّضاؤل، حساب التّفاضل والتّكامل للدّوالّ المثلّثيّة والدّوالّ الأسّيّة واللّوغريثميّة ودوالّ القوى
$33\frac{1}{3} \times 2$ — $66\frac{2}{3}$ درجة
المجموع — 100 درجة

ج. موادّ مساعدة يُسمح استعمالها:
1. حاسبة غير بيانيّة. لا يُسمح استعمال إمكانيّات البرمجة في الحاسبة التي يمكن برمجتها. استعمال الحاسبة البيانيّة أو إمكانيّات البرمجة في الحاسبة قد يؤدّي إلى إلغاء الامتحان.
2. لوائح قوانين (مرفقة).

د. تعليمات خاصّة:
1. لا تنسخ السّؤال؛ اكتب رقمه فقط.
2. ابدأ كلّ سؤال في صفحة جديدة. اكتب في الدّفتر مراحل الحلّ، حتّى إذا أجريتَ حساباتك بواسطة حاسبة.
فسّر كلّ خطواتك، بما في ذلك الحسابات، بالتّفصيل وبوضوح وبترتيب.
عدم التّفصيل قد يؤدّي إلى خصم درجات أو إلى إلغاء الامتحان.
3. لكتابة مسوّدة يجب استعمال دفتر الامتحان أو الأوراق التي حصلتَ عليها من المراقبين.
استعمال مسوّدة أخرى قد يؤدّي إلى إلغاء الامتحان.

التّعليمات في هذا النّموذج مكتوبة بصيغة المذكّر وموجّهة للممتحَنات وللممتحَنين على حدّ سواء.

نتمنّى لك النّجاح!

السؤال 1

يلعب رائد بنانير مع أصدقائه. كلّ مشترك يُدخِل في دوره بنانير إلى اللعبة.
الفائز في دوره، يحصل على عدد بنانير هو 6 أضعاف عدد البنانير التي أدخلها في هذا الدور إلى اللعبة. الخاسر في دوره، يخسر جميع البنانير التي أدخلها في هذا الدور إلى اللعبة (ولا يحصل على أيّة بنّورة).
أدخل رائد في دوره الأوّل 3 بنانير، وخسر.
استمرّ رائد في اللعب، وفي كلّ دور أدخل بنّورتَيْن أكثر ممّا أدخل في الدور السابق.
لعب رائد ما مجموعه n أدوار. خسر رائد في كلّ دور، وفاز فقط في الدور الأخير.

أ. عبّر بدلالة n عن عدد البنانير التي حصل عليها رائد في الدور الأخير.
حصل رائد في الدور الأخير على عدد بنانير أكبر بِـ 6 من عدد جميع البنانير التي أدخلها إلى اللعبة في n الأدوار التي لعبها.

ب. (1) عبّر بدلالة n عن عدد جميع البنانير التي أدخلها رائد إلى اللعبة في n الأدوار التي لعبها.

(2) كم دورًا لعب رائد؟

إجابة السؤال 1

أ. عدد البنانير التي يُدخلها رائد في كلّ دور يشكّل
متوالية حسابيّة فيها: $a_1 = 3 \quad , \quad d = 2$

$$\Downarrow$$

عدد البنانير التي أدخلها رائد في الدور الأخير: $a_n = 3 + 2(n-1) = 2n + 1$

عدد البنانير التي حصل عليها رائد في الدور الأخير: $6 \cdot a_n = 6(2n+1)$

ب. (1) عدد جميع البنانير التي أدخلها رائد إلى
اللعبة هو مجموع المتوالية الحسابيّة: $S_n = \frac{n}{2}(2 \cdot 3 + 2(n-1))$

$$\Downarrow$$

$$S_n = n^2 + 2n$$

(2) في الدور الأخير حصل رائد على عدد بنانير هو
أكبر بِـ 6 من عدد جميع البنانير التي أدخلها إلى اللعبة: $S_n + 6 = 6 \cdot a_n$

$$\Downarrow$$

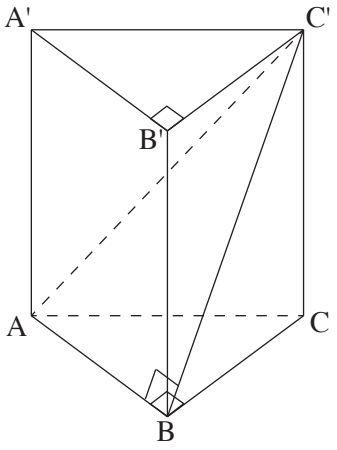
$$n^2 + 2n + 6 = 6(2n+1)$$

$$\Downarrow$$

عدد الأدوار التي لعبها رائد: $n \neq 0 \quad , \quad n = 10$

/ يتبع في صفحة 3 /

السؤال 2



قاعدة المنشور القائم ABCA'B'C'
هي مثلّث قائم الزاوية ومتساوي الساقين (انظر الرسم) .
معطى أنّ : $AB = BC = a$ سم ، $\sphericalangle ABC' = 90^o$ ،
الزاوية التي بين القطر AC' والوجه BCC'B' هي α .

أ. عبّر بدلالة a وَ α ، عن حجم المنشور .
معطى أيضًا أنّ ارتفاع المنشور هو 2a .

ب. جد α .

جـ. جد مقدار الزاوية التي بين القطر AC' والقاعدة ABC .

إجابة السؤال 2

أ. الزاوية التي بين القطر AC' والوجه BCC'B' هي : $\sphericalangle AC'B = \alpha$

في المثلّث القائم الزاوية ABC' يتحقّق :

$$\tan\alpha = \frac{a}{BC'}$$
$$\Downarrow$$
$$BC' = \frac{a}{tg\alpha}$$

في المثلّث القائم الزاوية BCC' يتحقّق :

$$CC' = \sqrt{(BC')^2 - a^2}$$
$$\Downarrow$$
$$CC' = \sqrt{\frac{a^2}{tg^2\alpha} - a^2} = \frac{a\sqrt{1-tg^2\alpha}}{tg\alpha}$$

حجم المنشور هو :

$$V = CC' \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC$$
$$\Downarrow$$
$$V = \frac{a\sqrt{1-tg^2\alpha}}{tg\alpha} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot a$$
$$\Downarrow$$
$$V = \frac{a^3\sqrt{1-tg^2\alpha}}{2tg\alpha}$$

/ يتبع في صفحة 4 /

تكملة إجابة السؤال 2.

ب. وجدنا أنّ ارتفاع المنشور هو: $CC' = \frac{a\sqrt{1-tg^2\alpha}}{tg\alpha}$

$$\Downarrow$$

معطى أنّ $CC' = 2a$ ، لذلك: $2a = \frac{a\sqrt{1-tg^2\alpha}}{tg\alpha}$

$$\Downarrow$$

$$4tg^2\alpha = 1 - tg^2\alpha$$

$$\Downarrow$$

$$tg\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad , \quad tg\alpha \neq -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha = 24.09^o$$

جـ. الزاوية التي بين القطر AC' والقاعدة ABC هي: $\sphericalangle C'AC$

حسب المعطى: $CC' = 2a$

حسب معطيات المثلّث ABC ، ينتج: $AC = \sqrt{2}\,a$

في المثلّث القائم الزاوية $C'AC$ يتحقّق: $tg(\sphericalangle C'AC) = \frac{CC'}{AC}$

$$\Downarrow$$

$$tg(\sphericalangle C'AC) = \frac{2a}{\sqrt{2}\,a}$$

$$\Downarrow$$

$$\sphericalangle C'AC = 54.7^o$$

/ يتبع في صفحة 5 /

السؤال 3

معطاة الدالّة $f(x) = a - b\sin(2x)$ في المجال $0 \le x \le \pi$.

a وَ b هما بارامتران موجبان.

أ. إحدى نقاط تقاطع الدالّة مع المحور x هي النقطة التي فيها $x = \frac{\pi}{12}$.

عبّر عن b بدلالة a .

عوِّض في الدالّة $b = 2a$ ، وأجب عن البنود "ب" – "د" التي أمامك.

ب. في المجال المعطى، عبّر بدلالة a ، إذا دعت الحاجة:

(1) عن إحداثيّات نقاط تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة مع المحورين.

(2) عن إحداثيّات النقاط القصوى المطلقة للدالّة، وحدِّد نوع هذه النقاط.

جـ. ارسم رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدالّة في المجال المعطى.

د. كم حلًّا يوجد للمعادلة $f(x) = 0.5a$ في المجال المعطى؟ علّل.

إجابة السؤال 3

أ. حسب المعطى نقطة تقاطع f(x) مع المحور x هي: $\left(\frac{\pi}{12}, 0\right)$

$$\Downarrow$$

من تعويض $\left(\frac{\pi}{12}, 0\right)$ ينتج: $0 = a - b\sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{12}\right)$

$$\Downarrow$$

$$b = 2a$$

ب. (1) $f(x) = a - 2a\sin(2x)$

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin 2x = \frac{1}{2} \qquad (a > 0)$$

$$\Downarrow$$

$$2x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \quad , \quad 2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$x = \frac{5\pi}{12} \quad , \quad x = \frac{\pi}{12}$$

نقطتا التقاطع مع المحور x : $\left(\frac{\pi}{12}, 0\right)$, $\left(\frac{5\pi}{12}, 0\right)$

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad f(0) = a$$

نقطة التقاطع مع المحور y : $(0, a)$

/ يتبع في صفحة 6 /

تكملة إجابة السؤال 3.

ب. (2) $f'(x) = -4a\cos 2x$

$$(a>0) \qquad f'(x)=0 \Rightarrow \cos 2x = 0$$
$$\Downarrow$$
$$2x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$
$$\Downarrow$$

النقاط "المحتملة" كنقاط قصوى

في المجال $0 \le x \le \pi$: $x = \frac{\pi}{4}\ ,\ x = \frac{3\pi}{4}$

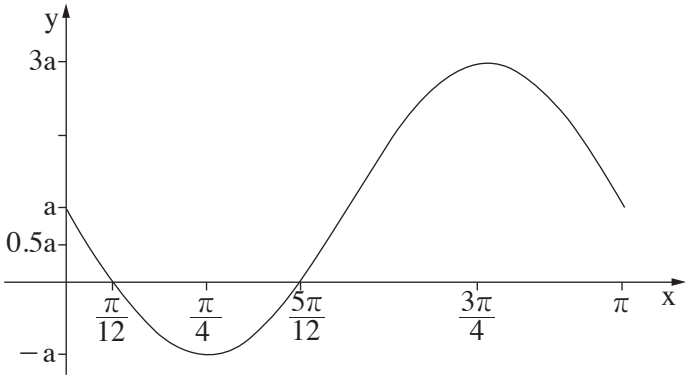
قِيَم $f(x)$ في النقاط "المحتملة" وفي طرَفَي المجال:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
f(x)	a	$-a$	$3a$	a

$a>0$ ، لذلك حسب الجدول النهاية العظمى المطلقة: $\left(\frac{3\pi}{4}, 3a\right)$

النهاية الصغرى المطلقة: $\left(\frac{\pi}{4}, -a\right)$

جـ.



د. حسب الرسم البيانيّ الذي في البند "جـ": المستقيم $y = 0.5a$ يقطع الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ في نقطتين

$$\Downarrow$$

يوجد حلّان للمعادلة $f(x) = 0.5a$

/ يتبع في صفحة 7 /

السؤال 4

معطاة الدالّة $f(x) = (3e^x - 3)^2$.

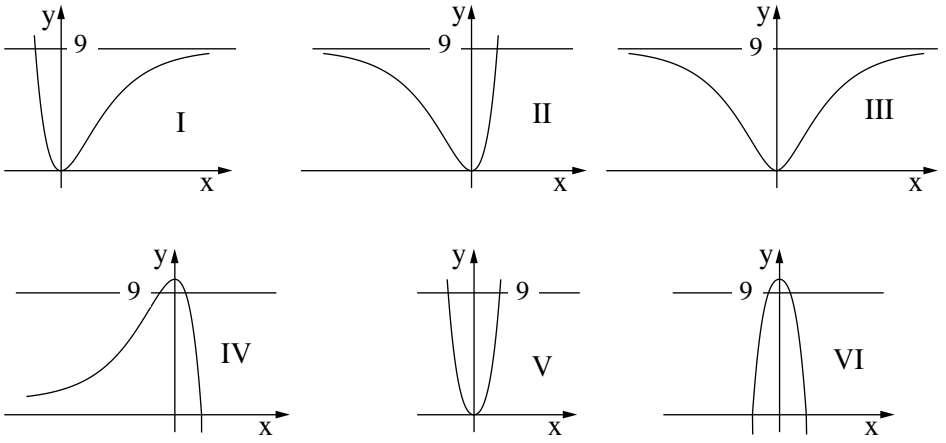
أ. (1) جد مجال تعريف الدالّة.

(2) جد نقاط تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة مع المحورين (إذا وُجدت مثل هذه النقاط).

(3) جد إحداثيّات النقاط القصوى للدالّة (إذا وُجدت مثل هذه النقاط)، وحدّد نوع هذه النقاط.

ب. جد إحداثيّات نقاط تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة مع المستقيم $y = 9$ (إذا وجُدت مثل هذه النقاط).

جـ. من بين الرسوم البيانيّة I-VI التي أمامك، أيّ رسم بيانيّ يعرض رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدالّة $f(x)$؟ علّل.



إجابة السؤال 4

أ. (1) الدالّة $f(x)$ معرّفة لكلّ x

(2)
$$f(x) = 0 \Rightarrow 3e^x - 3 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$e^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$$

نقطة تقاطع $f(x)$ مع المحورين: $(0\,,\,0)$

/ يتبع في صفحة 8 /

تكملة إجابة السؤال 4.

أ. (3)

$$f'(x) = 2(3e^x - 3)\cdot 3e^x$$
$$\Downarrow$$
$$f'(x) = 18e^{2x} - 18e^x = 18e^x(e^x - 1)$$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad e^x(e^x - 1) = 0$$
$$\Downarrow$$
لكلّ x، لذلك: $e^x \neq 0$ $\quad e^x - 1 = 0$
$$\Downarrow$$
$$x = 0$$

$$f''(x) = 18\cdot 2e^{2x} - 18e^x$$
$$\Downarrow$$
$$f''(0) > 0$$
$$\Downarrow$$
نهاية صغرى في $(0\ ,\ 0)$

ب. نقاط التقاطع

بين $f(x)$ وَ $y = 9$ تحقّق:
$$9 = (3e^x - 3)^2$$
$$\Updownarrow$$
$$e^x(e^x - 2) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$e^x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \ell n2 \qquad (e^x \neq 0)$$

إحداثيّات نقطة التقاطع

بين الرسم البيانيّ لِـ$f(x)$ والمستقيم $y = 9$: $(\ell n2\ ,\ 9)$

جـ. الرسم البيانيّ لِـ$f(x)$ هو الرسم البيانيّ II ، لأنّ:

- لِـ$f(x)$ نهاية صغرى في $(0\ ,\ 0)$.
- المستقيم $y = 9$ يقطع $f(x)$ في نقطة واحدة في الربع الأوّل.

/ يتبع في صفحة 9 /

السؤال 5

معطاة الدالّة $f(x) = \frac{-2}{2x-3}$.

أ. جد مجال تعريف الدالّة.

ب. جد مجالات تصاعد وتنازل الدالّة (إذا وُجدت مثل هذه المجالات).

جـ. جد خطوط تقارب الدالّة، الموازية للمحورين.

د. جد نقاط تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة مع المحورين (إذا وُجدت مثل هذه النقاط).

هـ. ارسم رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدالّة.

و. احسب المساحة المحصورة بين الرسم البيانيّ للدالّة والمحور x والمحور y والمستقيم $x = 1$.

إجابة السؤال 5

أ. يجب أن يتحقّق: $2x - 3 \neq 0$

$\Downarrow$

مجال التعريف: $x \neq \frac{3}{2}$

ب. $f'(x) = \frac{4}{(2x-3)^2}$

$\Downarrow$

$f'(x) > 0$ لكلّ x لا يساوي $\frac{3}{2}$

$\Downarrow$

f(x) تصاعديّة بالنسبة لِـ $x > \frac{3}{2}$ وبالنسبة لِـ $x < \frac{3}{2}$

جـ. خطّا التقارب: $x = \frac{3}{2}$, $y = 0$

/ يتبع في صفحة 10 /

تكملة إجابة السؤال 5.

د. $f(x) \neq 0$ لأنّ بسط $f(x)$ لا يساوي 0

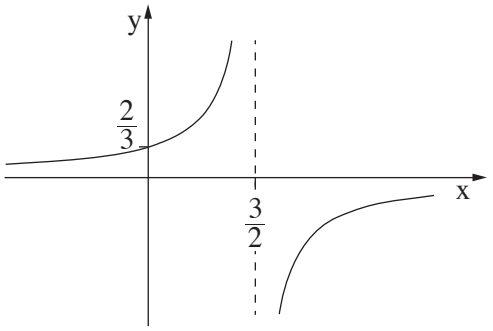
$\Downarrow$

لا توجد نقاط تقاطع مع المحور x

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{2}{3}$$

نقطة تقاطع $f(x)$ مع المحور y : $(0 , \frac{2}{3})$

هـ.



و. المساحة المطلوبة :

$$S = \int_0^1 \frac{-2}{2x-3}dx = \left[-\ell n|2x-3|\right]_0^1$$

$\Downarrow$

$$S = -\ell n|-1| + \ell n|-3| = \ell n3$$

حقوق الطّبع محفوظة لدولة إسرائيل.
النّسخ أو النّشر ممنوعان إلّا بإذن من وزارة التّربية والتّعليم.