מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה: א. בגרות לבתי"ס על־יסודיים
ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים
מועד הבחינה: תשע"ג, **מועד ב**
מספר השאלון: **313 ,035803**
תרגום לערבית (2)

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מתמטיקה

3 יחידות לימוד — שאלון שלישי

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שתיים.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:
בשאלון זה שש שאלות בנושאים:
אלגברה, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי.
עליך לענות על ארבע שאלות —
4 X 25 = 100 נק'

ג. חומר עזר מותר בשימוש:
1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
2. דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:
1. **כתוב את כל החישובים והתשובות בגוף השאלון.**
2. לטיוטה יש להשתמש בדפים שבגוף השאלון (כולל הדפים שבסופו) או בדפים שקיבלת מהמשגיחים. שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.
3. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

בהצלחה!

دولة إسرائيل
وزارة التّربية والتّعليم

نوع الامتحان: أ. بجروت للمدارس الثّانويّة
ب. بجروت للممتحَنين الخارجيّين
موعد الامتحان: 2013، **الموعد "ب"**
رقم النّموذج: **035803، 313**
ترجمة إلى العربيّة (2)

اقتراح إجابات لأسئلة امتحان بجروت

الرياضيّات

3 وحدات تعليميّة – النّموذج الثّالث

تعليمات للممتحَن

أ. مدّة الامتحان: ساعتان.

ب. مبنى النّموذج وتوزيع الدرجات:
في هذا النّموذج ستّة أسئلة في الموضوعين:
الجبر، حساب التفاضل والتكامل.
عليك الإجابة عن أربعة أسئلة –
4 X 25 = 100 درجة

جـ. موادّ مساعدة يُسمح استعمالها:
1. حاسبة غير بيانيّة. لا يُسمح استعمال إمكانيّات البرمجة في الحاسبة التي يمكن برمجتها. استعمال الحاسبة البيانيّة أو إمكانيّات البرمجة في الحاسبة قد يؤدّي إلى إلغاء الامتحان.
2. لوائح قوانين (مرفقة).

د. تعليمات خاصّة:
1. **اكتب جميع الحسابات والإجابات في نموذج الامتحان.**
2. لكتابة مسوّدة يجب استعمال الصفحات التي في نموذج الامتحان (بما في ذلك الصفحات التي في نهايته) أو الأوراق التي حصلتَ عليها من المراقبين. استعمال مسوّدة أخرى قد يؤدّي إلى إلغاء الامتحان.
3. فسّر كلّ خطواتك، بما في ذلك الحسابات، بالتفصيل وبوضوح وبترتيب. عدم التفصيل قد يؤدّي إلى خصم درجات أو إلى إلغاء الامتحان.

التّعليمات في هذا النّموذج مكتوبة بصيغة المذكّر وموجّهة للممتحَنات وللممتحَنين على حدّ سواء.

نتمنّى لك النّجاح!

السؤال 1

يتقاضى أحد العمّال في الشهر أجرًا أساسيًّا ثابتًا، وعلاوات ثابتة أخرى.
أجره الكلّيّ في الشهر هو 6600 شيقل.
في شهر معيّن، رفع صاحب المصنع الأجر الشهريّ الأساسيّ للعامل بِـ 15% ، وخفّض العلاوات الثابتة بِـ 10% .
بعد هذه التغييرات، كان الأجر الكلّيّ للعامل في الشهر 7440 شيقل.
جد كم كان الأجر الأساسيّ للعامل قبل التغييرات.

إجابة السؤال 1

نرمز: x — الأجر الأساسيّ ، y — العلاوات

مجمل الأجر الشهريّ: $6600 = x + y$ I.

بعد رفع الأجر الأساسيّ بِـ15%، الأجر الأساسيّ هو: $x \cdot 1.15$

بعد تخفيض العلاوات بِـ 10%، العلاوات هي: $y \cdot 0.9$

مجمل الأجر الشهريّ بعد التغييرات: $7440 = x \cdot 1.15 + y \cdot 0.9$ II.

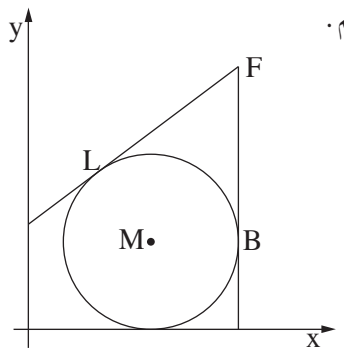
من حلّ هيئة المعادلتين I وَ II ينتج: $x =$ 6000 شيقل

/ يتبع في صفحة 3 /

السؤال 2

معطاة دائرة معادلتها $(x-7)^2+(y-5)^2=25$ ومركزها M .

مرّروا مستقيمًا يمسّ الدائرة في النقطة L التي فيها $x=4$ ، كما هو موصوف في الرسم.



أ. (1) جد ميل ML .

(الإحداثيّ y لِـ L أكبر من 1.)

(2) جد معادلة المماسّ في النقطة L .

المستقيم $x=12$ يمسّ الدائرة في النقطة B .

يلتقي المماسّان في النقطة F ، كما هو موصوف في الرسم.

ب. (1) جد إحداثيّات النقطة F .

(2) جد مساحة المثلّث FMB .

إجابة السؤال 2

أ. (1) من تعويض $x=4$ في معادلة الدائرة

ينتج الإحداثيّ y لِـ L :

$$(4-7)^2+(y-5)^2=25$$

$$\Downarrow$$

$$y=9 \quad , \quad y=1$$

حسب المعطى، الإحداثيّ y لِـL أكبر من 1، لذلك إحداثيّات L : $L(4,9)$

إحداثيّات مركز الدائرة هي : $M(7,5)$

حسب النقطتين L وَ M ميل ML هو : $\frac{9-5}{4-7}=-\frac{4}{3}$

(2) المماسّ في النقطة L يعامد نصف القطر ML ،

لذلك ميل ML هو : $\frac{3}{4}$

حسب $L(4,9)$ والميل $\frac{3}{4}$ معادلة المماسّ هي : $y-9=\frac{3}{4}(x-4)$

$$\Downarrow$$

$$y=\frac{3}{4}x+6$$

/ يتبع في صفحة 4 /

تكملة إجابة السؤال 2.

ب. (1) الإحداثيّ x لِـF هو: $x = 12$

من تعويض الإحداثيّ x لِـ F في معادلة المماسّ
ينتج الإحداثيّ y لِـ F: $y = \frac{3}{4} \cdot 12 + 6 = 15$

إحداثيّات النقطة F: $F(12 , 15)$

(2) نصف القطر MB يعامد المماسّ FB،
لذلك مساحة المثلّث FMB هي: $S_{\Delta FMB} = \frac{1}{2} \cdot MB \cdot FB$

MB هو نصف قطر، لذلك: $MB = \sqrt{25} = 5$

MB يوازي المحور x ، لذلك
الإحداثيّ y لِـB يساوي الإحداثيّ y لِـM ،
ولذلك الإحداثيّ y لِـB هو: $y = 5$

طول القطعة FB هو الفرق بين الإحداثيّ y
لِـ F والإحداثيّ y لِـB: $FB = 15 - 5 = 10$

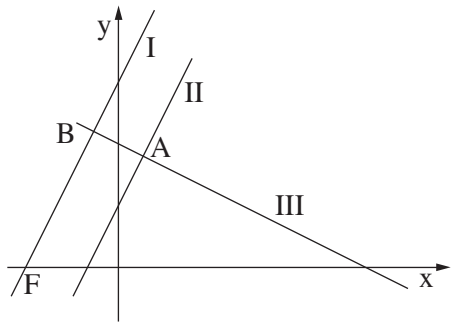
من هنا، مساحة المثلّث FMB هي: $S_{\Delta FMB} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10 = 25$

/ يتبع في صفحة 5 /

السؤال 3

معادلتا المستقيمين I وَ II اللذين في الرسم هما:

$y = 2x + 10$, $y = 2x + 30$.



أ. أيّة معادلة هي للمستقيم I ، وأيّة معادلة هي للمستقيم II ؟ علّل.

ب. المستقيم III يعامد المستقيم II ويقطعه في النقطة A التي فيها $x = 4$.
جد معادلة المستقيم III .

جـ. (1) بيّن أنّ المستقيم III يعامد المستقيم I.

(2) المستقيم III يقطع المستقيم I في النقطة B .
المستقيم I يقطع المحور x في النقطة F (انظر الرسم).
جد مساحة المثلّث FBA .

إجابة السؤال 3

أ. معادلة المستقيم I : $y = 2x + 30$ ، معادلة المستقيم II : $y = 2x + 10$
لأنّ $2x + 30 > 2x + 10$ ، والمستقيم I يقع فوق المستقيم II .

ب. من تعويض $x = 4$ في معادلة المستقيم II
ينتج الإحداثيّ y لِـ A : $y = 2 \cdot 4 + 10 = 18$

المستقيمان II وَ III متعامدان،
لذلك حاصل ضرب ميل المستقيم II
والميل m للمستقيم III هو: $-1 = 2 \cdot m$

$$\Downarrow$$

$$m = -\frac{1}{2}$$

حسب الميل $-\frac{1}{2}$ والنقطة A(4 , 18)
معادلة المستقيم III هي: $y - 18 = -\frac{1}{2}(x - 4)$

$$\Downarrow$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 20$$

/ يتبع في صفحة 6 /

تكملة إجابة السؤال 3.

جـ. (1) ميل المستقيم I يساوي ميل المستقيم II (المستقيمان متوازيان).
المستقيم III يعامد المستقيم II، لذلك المستقيم III يعامد المستقيم I أيضًا
(حاصل ضرب ميلَي المستقيم I والمستقيم III يساوي هو أيضًا -1).

(2) مساحة المثلّث FBA
الذي فيه $\sphericalangle FBA = 90^o$ هي: $S_{\triangle FBA} = \frac{1}{2} BF \cdot BA$

للحصول على الإحداثيّ x للنقطة F،
نعوّض $y = 0$ في معادلة المستقيم I: $0 = 2 \cdot x + 30$
$\Downarrow$
الإحداثيّ x لِـ F: $x = -15$

B هي نقطة التقاء المستقيم I مع المستقيم III،
لذلك الإحداثيّ x لِـ B يحقّق: $2x + 30 = -\frac{1}{2}x + 20$
$\Downarrow$
الإحداثيّ x لِـ B: $x = -4$

من تعويض $x = -4$ في معادلة المستقيم I
أو في معادلة المستقيم III ينتج أنّ الإحداثيّ y لِـ B هو: 22

حسب النقطتين $F(-15, 0)$ ، $B(-4, 22)$
طول BF هو: $BF = \sqrt{(-4+15)^2 + 22^2} = \sqrt{605}$

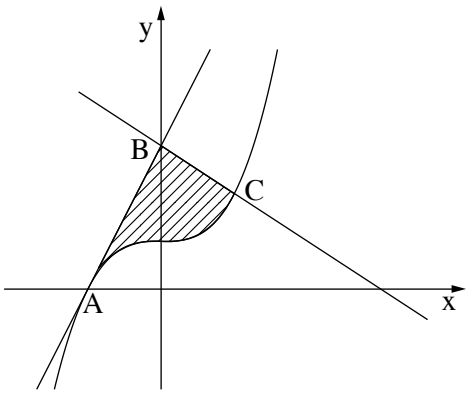
حسب النقطتين $A(4, 18)$ ، $B(-4, 22)$
طول BA هو: $BA = \sqrt{(-4-4)^2 + (22-18)^2} = \sqrt{80}$

مساحة المثلّث FBA: $S_{\triangle FBA} = \frac{1}{2}\sqrt{605} \cdot \sqrt{80} = 110$

/ يتبع في صفحة 7 /

السؤال 4

معطاة الدالّة $f(x) = x^3 + 1$.



أ. النقطة C تقع على الرسم البيانيّ
للدالّة f(x) في الربع الأوّل.
ميل المستقيم، الذي يمسّ الرسم البيانيّ للدالّة f(x) في النقطة C ، هو 3.
جد إحداثيّات النقطة C .

الرسم البيانيّ للدالّة يقطع المحور x في النقطة A .
المستقيم $y = 3x + 3$ يمرّ عبر النقطة A ،
ويقطع المحور y في النقطة B ، كما هو موصوف في الرسم.

ب. جد إحداثيّات النقطة B ، وَجِد معادلة المستقيم BC .

جـ. جد المساحة المحصورة بين الرسم البيانيّ للدالّة f(x) والمستقيم BA (BA يمسّ f(x))
والمستقيم BC (المساحة المخطّطة في الرسم).

إجابة السؤال 4

أ.

$$f(x) = x^3 + 1$$
$$\Downarrow$$
$$f'(x) = 3x^2$$
$$\Downarrow$$

ميل المماسّ في النقطة C
يساوي المشتقّة f'(x) في النقطة C ، لذلك: $3x^2 = 3$

$$\Downarrow$$
$$x = \pm 1$$

بما أنّ النقطة C في الربع الأوّل،
الإحداثيّ x لِـ C هو: $x = 1$

من تعويض $x = 1$ في f(x)
ينتج الإحداثيّ y لِـ C : $y = 1^3 + 1 = 2$

إحداثيّات النقطة C : $(1 , 2)$

/ يتبع في صفحة 8 /

تكملة إجابة السؤال 4.

ب. من تعويض $x = 0$ في معادلة المستقيم
ينتج الإحداثيّ y لِـ B : $y = 3$

إحداثيّات B : $(0 , 3)$

حسب النقطتين $B(0 , 3)$ وَ $C(1 , 2)$
ميل المستقيم BC هو : $\frac{3-2}{0-1} = -1$

$$\Downarrow$$

معادلة المستقيم BC هي : $y - 3 = -(x - 0)$

$$\Downarrow$$

$$y = -x + 3$$

جـ. المستقيم BA يقطع المحور x في النقطة التي فيها : $x = -1$

المساحة المطلوبة مكوّنة من مساحتين :

$$S = \int_{-1}^{0} ((3x + 3 - f(x))\,dx + \int_{0}^{1} (-x + 3 - f(x))\,dx$$

$$\Downarrow$$

$$S = \int_{-1}^{0} (3x + 2 - x^3)\,dx + \int_{0}^{1} (-x + 2 - x^3)\,dx$$

$$\Downarrow$$

$$S = \left[\frac{3x^2}{2} + 2x - \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1}$$

$$\Downarrow$$

$$S = -(\frac{3}{2} - 2 - \frac{1}{4}) + (-\frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{4}) = 2$$

/ يتبع في صفحة 9 /

السؤال 5

معطاة الدالّة $f(x)=x+\frac{4}{x^2}$.

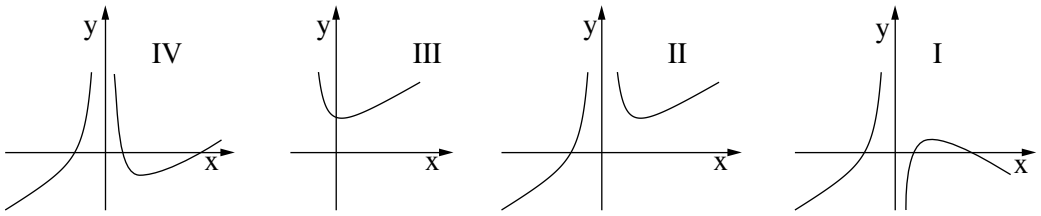
أ. جد مجال تعريف الدالّة.

ب. جد خطّ التقارب العموديّ للدالّة.

جـ. جد إحداثيّات النقطة القصوى للدالّة، وحدّد نوع هذه النقطة.

د. جد مجالات تصاعد وتنازل الدالّة.

هـ. أيّ رسم بيانيّ من الرسوم البيانيّة I ، II ، III ، IV التي أمامك يصف الدالّة المعطاة؟ علّل.



إجابة السؤال 5

أ. مجال التعريف: $x\neq 0$

ب. خطّ التقارب العموديّ: $x=0$

جـ.

$$f(x)=x+\frac{4}{x^2}$$
$$\Downarrow$$
$$f'(x)=1-4\cdot\frac{2}{x^3}=1-\frac{8}{x^3}$$

$$f'(x)=0 \quad\Rightarrow\quad x^3=8$$
$$\Downarrow$$

الإحداثيّ x للنقطة التي تساوي فيها المشتقّة 0 : $x=2$

فحص مجالات تصاعد وتنازل f(x) :

x	-1	0	1	2	3
f'(x)	9		-7	0	0.7
f(x)	↗		↘		↗

حسب الجدول توجد لِـ f(x) نهاية صغرى في النقطة التي فيها: $x=2$

من تعويض $x=2$ في f(x) ينتج أنّ

الإحداثيّ y لنقطة النهاية الصغرى هو: $y=2+\frac{4}{2^2}=3$

إحداثيّات نقطة النهاية الصغرى: $(2\ ,\ 3)$

/ يتبع في صفحة 10 /

تكملة إجابة السؤال 5.

د. حسب الجدول الذي في البند "جـ":

الدالّة تصاعديّة بالنسبة لِـ: $x < 0 \ , \ x > 2$

الدالّة تنازليّة بالنسبة لِـ: $0 < x < 2$

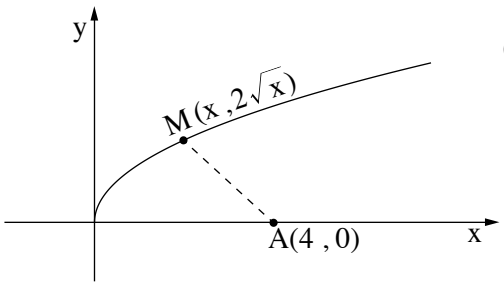
هـ. الرسم البيانيّ II ،

لأنّ النهاية الصغرى لِـ $f(x)$ هي في النقطة $(3 \ , \ 2)$ ، في الربع الأوّل.

/ يتبع في صفحة 11 /

السؤال 6

معطاة الدالّة $f(x)=2\sqrt{x}$ (انظر الرسم).



أ. جد الإحداثيّ x للنقطة M على الرسم البيانيّ للدالّة، التي تربيع بُعدها (d^2) عن النقطة $A(4,0)$ هو أصغر ما يمكن.

ب. جد أصغر بُعد ممكن (d) بين النقطة M والنقطة A.

إجابة السؤال 6

أ. تربيع بُعد $M(x\ ,2\sqrt{x})$ عن $A(4\ ,0)$ هو:

$$d^2=(x-4)^2+(2\sqrt{x}-0)^2$$

$$\Downarrow$$

$$d^2=x^2-4x+16$$

$$\Downarrow$$

نرمز $g(x)=d^2$ ، وينتج أنّ مشتقّة تربيع البُعد هي:

$$g'(x)=2x-4$$

النقطة القصوى تنتج عندما $g'(x)=0$ ،

لذلك في النقطة القصوى يتحقّق:

$$0=2x-4$$

الإحداثيّ x للنقطة القصوى:

$$x=2$$

فحص نهاية صغرى:

x	1	2	3
g'(x)	−2	0	2
g(x)	↘		↗

حسب الجدول توجد لِـ $g(x)$ نهاية صغرى في $x=2$.

ب. بعد تعويض $x=2$ في d^2 ، ينتج أنّ تربيع أصغر بُعد ممكن هو:

$$d^2=2^2-4\cdot 2+16=12$$

$$\Downarrow$$

لذلك أصغر بُعد ممكن هو:

$$d=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

حقوق الطّبع محفوظة لدولة إسرائيل.
النّسخ أو النّشر ممنوعان إلّا بإذن من وزارة التّربية والتّعليم.