מדינת ישראל

משרד החינוך

סוג הבחינה: א. בגרות לבתי"ס על־יסודיים
ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים

מועד הבחינה: קיץ תשע"ג

מספר השאלון: **317 ,035807**

תרגום לערבית (2)

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מתמטיקה

5 יחידות לימוד — שאלון שני

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעתיים.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

בשאלון זה שני פרקים.

פרק ראשון: גאומטריה אנליטית, וקטורים

טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

$2 \times 33\frac{1}{3}$ – $66\frac{2}{3}$ נק'

פרק שני: גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה

פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

$1 \times 33\frac{1}{3}$ – $33\frac{1}{3}$ נק'

סה"כ – 100 נק'

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
2. דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

1. אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
2. התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
3. לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ב ה צ ל ח ה!

دولة إسرائيل

وزارة التّربية والتّعليم

نوع الامتحان: أ. بجروت للمدارس الثانويّة
ب. بجروت للممتحَنين الخارجيّين

موعد الامتحان: صيف 2013

رقم النموذج: **317 ،035807**

ترجمة إلى العربيّة (2)

اقتراح إجابات لأسئلة امتحان بجروت

الرياضيّات

5 وحدات تعليميّة – النموذج الثاني

تعليمات للممتحَن

أ. مدّة الامتحان: ساعتان.

ب. مبنى النموذج وتوزيع الدرجات:

في هذا النموذج فصلان.

الفصل الأوّل: الهندسة التحليليّة، المتّجهات

حساب المثلّثات في الفراغ، الأعداد المركّبة

$2 \times 33\frac{1}{3}$ – $66\frac{2}{3}$ درجة

الفصل الثاني: التزايد والتضاؤل، دوالّ القوى، الدوالّ الأسّيّة واللوغريثميّة

$1 \times 33\frac{1}{3}$ – $33\frac{1}{3}$ درجة

المجموع – 100 درجة

جـ. موادّ مساعدة يُسمح استعمالها:

1. حاسبة غير بيانيّة. لا يُسمح استعمال إمكانيّات البرمجة في الحاسبة التي يمكن برمجتها. استعمال الحاسبة البيانيّة أو إمكانيّات البرمجة في الحاسبة قد يؤدّي إلى إلغاء الامتحان.
2. لوائح قوانين (مرفقة).

د. تعليمات خاصّة:

1. لا تنسخ السؤال؛ اكتب رقمه فقط.
2. ابدأ كلّ سؤال في صفحة جديدة. اكتب في الدفتر مراحل الحلّ، حتّى إذا أجريتَ حساباتك بواسطة حاسبة.
فسّر كلّ خطواتك، بما في ذلك الحسابات، بالتفصيل وبوضوح وبترتيب.
عدم التفصيل قد يؤدّي إلى خصم درجات أو إلى إلغاء الامتحان.
3. لكتابة مسوّدة يجب استعمال دفتر الامتحان أو الأوراق التي حصلتَ عليها من المراقبين.
استعمال مسوّدة أخرى قد يؤدّي إلى إلغاء الامتحان.

التّعليمات في هذا النّموذج مكتوبة بصيغة المذكّر وموجّهة للممتحَنات وللممتحَنين على حدّ سواء.

نتمنّى لك النّجاح!

السؤال 1

معطاة النقطتان: $A(0,6)$, $B(-8,0)$.

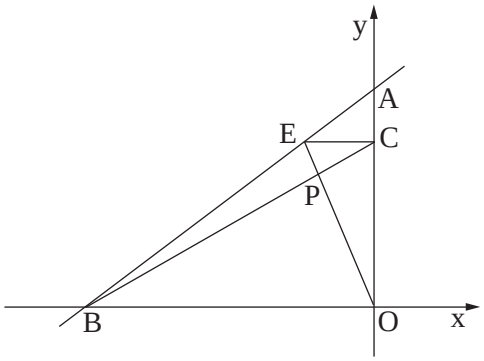
عبر النقطة E التي على القطعة AB نمرّر مستقيمًا يوازي المحور x

(النقطة E تختلف عن النقطة A وعن النقطة B).

هذا المستقيم يقطع المحور y في النقطة C .

المستقيم BC يقطع المستقيم OE في النقطة P .

O – نقطة أصل المحاور (انظر الرسم).



أ. بيّن أنّ المحلّ الهندسيّ الذي تقع عليه النقاط P التي تتكوّن بالطريقة الموصوفة، يتواجد على خطّ مستقيم.

ب. النقطة P_o تقع على المحلّ الهندسيّ الذي وجدتَه في البند "أ"، بحيث تكون النقطة E مركز الدائرة التي تحصر المثلّث ABO.

جد مساحة المثلّث AP_oO .

إجابة السؤال 1

أ. الإحداثيّان y للنقطتين E وَ C يحقّقان: $y_E = y_C$

ميل المستقيم الذي يمرّ عبر $A(0,6)$ وَ $B(-8,0)$ يحقّق: $\frac{6}{8} = \frac{y_E}{x_E + 8}$

$$\Downarrow$$

I. $x_E = \frac{8y_E - 6 \cdot 8}{6}$

ميل المستقيم الذي يمرّ عبر $E(y_E, x_E)$ وَ $P(x,y)$ يحقّق: $\frac{y_E}{x_E} = \frac{y}{x}$

$$\Downarrow$$

II. $x_E = \frac{y_E \cdot x}{y}$

$m_{CB} = m_{PB}$

$$\Downarrow$$

ميل المستقيم الذي يمرّ عبر $B(-8,0)$ وَ $C(0,y_E)$ وَ $P(x,y)$ يحقّق: $\frac{y_E}{8} = \frac{y}{x+8}$

$$\Downarrow$$

III. $y_E = \frac{8y}{x+8}$

من I وَ II ينتج: IV. $\frac{8y_E - 6 \cdot 8}{6} = \frac{y_E \cdot x}{y}$

من III وَ IV ينتج: $y = \frac{3}{2}x + 6$

/ يتبع في صفحة 3 /

تكملة إجابة السؤال 1.

ب. قطر الدائرة التي تحصر ΔABO هو: AB الزاوية المحيطيّة التي تستند على AB هي 90^o .

$\Downarrow$

E مركز الدائرة التي تحصر ΔABO ،

لذلك E هو منتصف AB وإحداثيّات E هي: $E(-4\,,3)$

حسب المعادلة II التي في البند "أ": $x_E = \dfrac{y_E \cdot x_{P_o}}{y_{P_o}}$

$\Downarrow$

I. $-4 = \dfrac{3x_{P_o}}{y_{P_o}}$

النقطة $P_o(x_{P_o}\,, y_{P_o})$ على

المحلّ الهندسيّ، لذلك يتحقّق: II. $y_{P_o} = \dfrac{3}{2}x_{P_o} + 6$

من I وَ II ينتج: $x_{P_o} = -\dfrac{8}{3}$

مساحة ΔAP_oO هي: $\dfrac{1}{2} \cdot \left| x_{P_o} \right| \cdot AO$

$\Downarrow$

$\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{8}{3} \cdot 6 = 8$

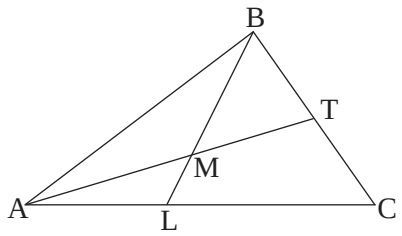
/ يتبع في صفحة 4 /

السؤال 2

في المثلّث ABC المستقيم المتوسّط للضلع BC هو AT .

النقطة L تقع على الضلع AC .

AT وَ BL يلتقيان في النقطة M (انظر الرسم).



نرمز: $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$ ، $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$ ، $\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AT}$ ، $\overrightarrow{BM}=\beta\overrightarrow{BL}$.

أ. معطى أنّ: $\frac{AL}{LC}=\frac{3}{4}$.

جد قيمة α وقيمة β .

ب. (1) جد معادلة المحلّ الهندسيّ الموضوعة عليه النقاط B ، التي يتحقّق بالنسبة لها في المثلّث ABC : $AT=\sqrt{50}$ ، $\underline{v}=(7,7)$ ، $A(1,0)$.

حسب المعطيات التي في البند الفرعيّ "ب (1)" والمعطى الذي في البند "أ"، أجب عن البندين الفرعيّين (2) وَ (3) .

(2) جد إحداثيّات النقطة L .

(3) إذا كان المستقيم MB يوازي المحور y ، جد إحداثيّات الرأس B .

ملاحظة: حلّ البند "ب" لا يتعلّق بحلّ البند "أ".

إجابة السؤال 2

أ. AT هو مستقيم متوسّط، لذلك: $\overrightarrow{AT}=\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}$

$$\overrightarrow{BL}=\overrightarrow{AL}-\underline{u}=\frac{3}{7}\underline{v}-\underline{u}$$

I. $\overrightarrow{BM}=\beta\overrightarrow{BL}=\beta\cdot\frac{3}{7}\underline{v}-\beta\underline{u}$

II. $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}-\underline{u}=\alpha\overrightarrow{AT}-\underline{u}=\frac{\alpha}{2}\underline{v}+(\frac{\alpha}{2}-1)\underline{u}$

حسب وحدات التمثيل

ينتج من I وَ II:

$$\begin{matrix}\frac{3}{7}\beta=\frac{\alpha}{2}\\ -\beta=\frac{\alpha}{2}-1\end{matrix}\quad\Rightarrow\quad\beta=\frac{7}{10}\ ,\ \alpha=\frac{3}{5}$$

/ يتبع في صفحة 5 /

تكملة إجابة السؤال 2.

ب. (1) التمثيل الجبريّ للمتّجه $\overrightarrow{AC}$: $(x_C - x_A , y_C - y_A)$

$$\Downarrow$$

معطى $A(1 , 0)$ ، لذلك : I. $\overrightarrow{AC} = (x_C - 1 , y_C)$

حسب المعطى : II. $\overrightarrow{AC} = (7 , 7)$

من I وَ II ينتج : $x_C - 1 = 7 \ , \ y_C = 7$

$$\Downarrow$$

$$C(8 , 7)$$

النقطة $T(x_T , y_T)$ هي منتصف BC ، لذلك : III. $x_T = \frac{8 + x_B}{2} \quad , \quad y_T = \frac{7 + y_B}{2}$

IV. $AT^2 = (x_T - 1)^2 + y_T^2 = 50$

من III وَ IV ينتج : $(x_B + 6)^2 + (y_B + 7)^2 = 200$

$$\Downarrow$$

معادلة المحلّ الهندسيّ : $(x + 6)^2 + (y + 7)^2 = 200$

(2) النقطة L تقسم القطعة AC

بنسبة 3:4 ، لذلك : $x_L = \frac{3 \cdot 8 + 4 \cdot 1}{7} = 4 \quad , \quad y_L = \frac{3 \cdot 7 + 4 \cdot 0}{7} = 3$

$$\Downarrow$$

$$L(4 , 3)$$

(3) MB يوازي المحور y ، لذلك : $x_B = x_L = 4$

النقطة B تقع على المحلّ الهندسيّ

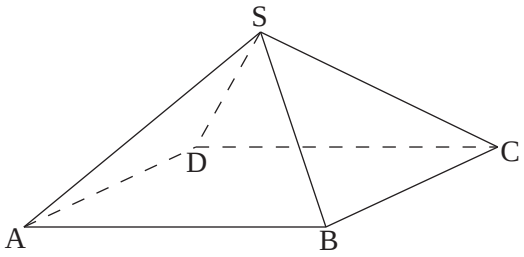
الذي وجدناه في البند "ب" ، لذلك يتحقّق : $(4 + 6)^2 + (y_B + 7)^2 = 200$

$$\Downarrow$$

$y_B \neq y_L$ ، لذلك : $y_B = -17$

/ يتبع في صفحة 6 /

السؤال 3



أ. معطى الهرم SABCD الذي قاعدته ABCD هي متوازي أضلاع (انظر الرسم).

نرمز: $\overrightarrow{SA} = \underline{w}$, $\overrightarrow{SB} = \underline{u}$

$\overrightarrow{SD} = \underline{v}$.

(1) عبّر بدلالة $\underline{v}$ وَ $\underline{u}$ وَ $\underline{w}$ عن المتّجه $\overrightarrow{SC}$.

(2) معطى أيضًا أنّ: $SD = SB$ ، $SC = SA$ ، $|\underline{u}| = a$ ، $|\underline{w}| = 2a$ ،

$\sphericalangle DSB = 90^o$ ، $\sphericalangle ASD = \alpha$ ، $\sphericalangle ASB = \beta$.

بيّن أنّ $\cos\alpha + \cos\beta = \frac{1}{2}$.

ب. z هو عدد مركّب.

(1) حلّ المعادلة $|z|i + 2z = \sqrt{3}$.

(2) بيّن أنّه عندما يكون n عددًا طبيعيًّا، عندها z^{6n} يمكن أن يحصل على قيمتين فقط.

ملاحظة: لا توجد علاقة بين البند "أ" والبند "ب".

إجابة السؤال 3

أ. (1)

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \underline{u} - \underline{w}$$

$$\overrightarrow{SC} = \underline{v} + \overrightarrow{DC} = \underline{v} + \underline{u} - \underline{w}$$

(2)

$$|\overrightarrow{SC}|^2 = |\underline{w}|^2 = (\underline{v} + \underline{u} - \underline{w})^2$$

$$|\underline{w}|^2 = |\underline{v}|^2 + |\underline{u}|^2 + |\underline{w}|^2 + 2\underline{u}\cdot\underline{v} - 2\underline{u}\cdot\underline{w} - 2\underline{v}\cdot\underline{w} =$$

$$= |\underline{v}|^2 + |\underline{u}|^2 + |\underline{w}|^2 + 2|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cos 90^o - 2|\underline{u}|\cdot|\underline{w}|\cos\beta - 2|\underline{v}|\cdot|\underline{w}|\cos\alpha$$

$$\Downarrow$$

$$0 = 2a^2 - 4a^2\cos\beta - 4a^2\cos\alpha$$

$$\Downarrow$$

$$\cos\beta + \cos\alpha = \frac{1}{2}$$

/ يتبع في صفحة 7 /

تكملة إجابة السؤال 3.

ب. (1) نرمز: $z = x + yi$

$$\Downarrow$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\Downarrow$$

بعد تعويض $|z|$ في المعادلة المعطاة ينتج:

$$\sqrt{x^2 + y^2}\,i + 2x + 2yi = \sqrt{3}$$

$$\Downarrow$$

$$2x - \sqrt{3} + i(2y + \sqrt{x^2 + y^2}) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$2x - \sqrt{3} = 0 \quad , \quad 2y + \sqrt{x^2 + y^2} = 0$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad\qquad x^2 = 3y^2$$

$$\Downarrow$$

النتيجة $y = \frac{1}{2}$ لا تحقّق المعادلة، لذلك:

$$y = -\frac{1}{2}$$

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

(2) وجدنا أنّ: $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

$$\Downarrow$$

$$R = 1 \quad , \quad \theta = -30^o = 330^o$$

حسب قانون دي موابر: $z^{6n} = (\cos(330^o \cdot 6) + i\sin(330^o \cdot 6))^n$

$$\Downarrow$$

$$z^{6n} = (-1)^n$$

بالنسبة لِـ n فرديّ: $z^{6n} = -1$

بالنسبة لِـ n زوجيّ: $z^{6n} = 1$

/ يتبع في صفحة 8 /

السؤال 4

معطاة دالّة المشتقّة $f'(x) = \frac{2\ell nx \cdot (2 - \ell nx)}{x \cdot (1 - \ell nx)^2}$.

أ. (1) جد مجال تعريف $f'(x)$.

(2) أحد خطَّي التقارب العموديّين لِـ $f'(x)$ هو $x = 0$.

جد خطّ التقارب العموديّ الثاني.

(3) جد نقاط تقاطع الرسم البيانيّ لِـ $f'(x)$ مع المحورين (إذا وُجدت مثل هذه النقاط).

(4) جد المجالات التي تكون فيها $f'(x)$ سالبة، والمجالات التي تكون فيها موجبة.

ب. معلوم أنّه لدالّة المشتقّة $f'(x)$ يوجد أيضًا خطّ تقارب أفقيّ، $y = 0$.

ارسم رسمًا تقريبيًّا للرسم البيانيّ لدالّة المشتقّة $f'(x)$.

جـ. المستقيم $y = -4$ يمسّ الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ في نقطة فيها $x > e$.

(1) جد إحداثيّات نقطة التماسّ. علّل.

(2) فسّر لماذا $f(e^3) < -4$.

(3) المساحة المحصورة بين الرسم البيانيّ لدالّة المشتقّة $f'(x)$ والمحور x
في المجال $e^2 \le x \le e^3$ ، تساوي 0.5 .
جد قيمة $f(e^3)$.

إجابة السؤال 4

أ. (1) ℓnx معرَّف بالنسبة لِـ: $x > 0$

المقام لا يساوي 0 ، لذلك: $1 - \ell nx \neq 0 \Rightarrow \ell nx \neq 1 \Rightarrow x \neq e$

من هنا مجال التعريف هو: $0 < x < e \ , \ x > e$

(2) خطّ التقارب: $1 - \ell nx = 0 \quad \Rightarrow \quad x = e$

(3) $x \neq 0$ ، لذلك: لا يوجد تقاطع مع المحور y

$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 - \ell nx = 0 \quad , \quad \ell nx = 0$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

تقاطع مع المحور x : $x = e^2 \qquad x = 1$

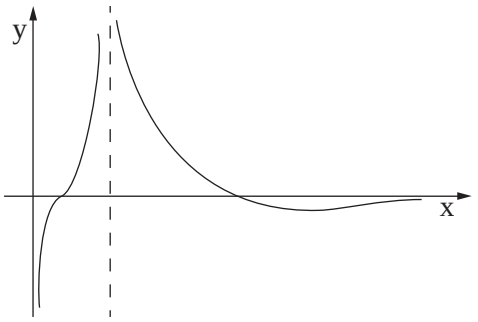
(4)

x	$0 < x < 1$	1	$1 < x < e$	$e < x < e^2$	e^2	$x > e^2$
$f'(x)$	−	0	+	+	0	−

/ يتبع في صفحة 9 /

تكملة إجابة السؤال 4.

ب.



جـ. (1) حسب جدول $f'(x)$ في البند الفرعيّ "أ (4)"

يوجد لِـ $f(x)$ نقطة نهاية عظمى في النقطة التي فيها: $x = e^2$

ميل المماسّ $y = -4$ هو صفر،

لذلك يمسّ $f(x)$ في النقطة القصوى

التي فيها $x > e$ ، أي في نقطة النهاية العظمى،

لذلك إِحداثيّات نقطة التماسّ: $(e^2, -4)$

(2) يوجد لِـ $f(x)$ نقطة نهاية عظمى في $x = e^2$ ،

لذلك $f(x)$ تنازليّة بالنسبة لِـ $x > e^2$ ،

لذلك:

$$f(e^3) < f(e^2)$$

$$\Downarrow$$

$$f(e^3) < -4$$

(3)

$$S = 0.5 = -\int_{e^2}^{e^3} f'(x)\,dx = -[f(x)]_{e^2}^{e^3} = f(e^2) - f(e^3)$$

$$\Downarrow$$

$$0.5 = -4 - f(e^3)$$

$$\Downarrow$$

$$f(e^3) = -4.5$$

/ يتبع في صفحة 10 /

السؤال 5

معطاة الدالّة $f(x) = \frac{a^{x+1}}{a^{2x} - 1}$ ، $0 < a < 1$.

أ. جد مجال تعريف الدالّة $f(x)$.

ب. بيّن أنّ الدالّة $f(x)$ هي دالّة فرديّة.

جـ. جد مجالات تصاعد وتنازل الدالّة $f(x)$ (إذا وُجدت مثل هذه المجالات).

د. ارسم رسمًا تقريبيًّا للرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$.

هـ. معلوم أنّ دالّة المشتقّة $f'(x)$ هي دالّة زوجيّة.
مرّروا المستقيم ℓ الذي يمسّ الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ في النقطة التي فيها $x = 1$ ،
ومرّروا مستقيمًا آخر يمسّ الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ في نقطة أخرى، T .
المماسّان متوازيان.
(T هي النقطة الوحيدة على الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ التي يكون فيها المماسّ موازيًا لِـ ℓ .)
عبّر بدلالة a (إذا دعت الحاجة) عن إحداثيّات النقطة T . علّل.

إجابة السؤال 5

أ. المقام لا يساوي 0 ، لذلك: $a^{2x} - 1 \neq 0$

$$\Downarrow$$

مجال التعريف: $x \neq 0$

ب.
$$f(-x) = \frac{a^{-x+1}}{a^{-2x} - 1} = \frac{a^{-x+1}}{\frac{1}{a^{2x}} - 1} = \frac{a^{-x+1} \cdot a^{2x}}{1 - a^{2x}} = -\frac{a^{x+1}}{a^{2x} - 1}$$

$$\Downarrow$$

$$f(-x) = -f(x)$$

/ يتبع في صفحة 11 /

تكملة إجابة السؤال 5.

جـ.

$$f'(x)=\frac{a^{x+1}\cdot \ell na\cdot (a^{2x}-1)-a^{x+1}\cdot 2\cdot a^{2x}\ell na}{(a^{2x}-1)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x)\ =\ -\ \ell na\ \frac{a^{x+1}\cdot (a^{2x}+1)}{(a^{2x}-1)^2}$$

لكلّ $a>0$ يتحقّق: $(a^{2x}-1)^2>0$, $a^{x+1}>0$, $a^{2x}+1>0$

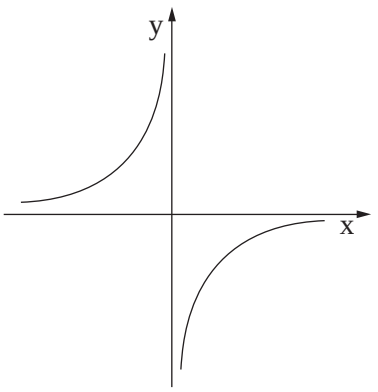
بالنسبة لِـ $0<a<1$: $\ell na<0$

لذلك بالنسبة لِـ $0<a<1$: $f'(x)>0$

$$\Downarrow$$

بالنسبة لِـ $x>0$ أو $x<0$: $f(x)$ تصاعديّة

د.



هـ. $f'(x)$ زوجيّة، لذلك: $f'(1)=f'(-1)$

من هنا الإحداثيّ x لِـ T: $x_T=-1$ (T هي النقطة الوحيدة على $f(x)$ التي فيها المماسّ يوازي ℓ .)

الإحداثيّ y لِـ T: $f(-1)=\frac{a^2}{1-a^2}$

النقطة T هي: $T(-1\ ,\frac{a^2}{1-a^2})$

حقوق الطّبع محفوظة لدولة إسرائيل.
النّسخ أو النّشر ممنوعان إلّا بإذن من وزارة التّربية والتّعليم.