מדינת ישראל

משרד החינוך

סוג הבחינה: א. בגרות לבתי"ס על־יסודיים
ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים

מועד הבחינה: קיץ תשע"ג

מספר השאלון: **035805, 315**

תרגום לערבית (2)

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מתמטיקה

4 יחידות לימוד — שאלון שני

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעה ושלושה רבעים.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:
בשאלון זה שני פרקים:
פרק ראשון — סדרות, טריגונומטריה במרחב
$33\frac{1}{3} \times 1$ — $33\frac{1}{3}$ נק'
פרק שני — גדילה ודעיכה, חשבון דיפרנציאלי
ואינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות,
פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ופונקציות חזקה
$33\frac{1}{3} \times 2$ — $66\frac{2}{3}$ נק'
סה"כ — 100 נק'

ג. חומר עזר מותר בשימוש:
1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
2. דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:
1. אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
2. התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
3. לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

בהצלחה!

دولة إسرائيل

وزارة التّربية والتّعليم

نوع الامتحان: أ. بجروت للمدارس الثّانويّة
ب. بجروت للممتحَنين الخارجيّين

موعد الامتحان: صيف 2013

رقم النّموذج: **035805، 315**

ترجمة إلى العربيّة (2)

اقتراح إجابات لأسئلة امتحان بجروت

الرياضيّات

4 وحدات تعليميّة – النّموذج الثّاني

تعليمات للممتحَن

أ. مدّة الامتحان: ساعة وثلاثة أرباع.

ب. مبنى النموذج وتوزيع الدّرجات:
في هذا النموذج فصلان:
الفصل الأوّل – المتواليات، حساب المثلّثات في الفراغ
$33\frac{1}{3} \times 1$ — $33\frac{1}{3}$ درجة
الفصل الثّاني – التّزايد والتّضاؤل، حساب التّفاضل والتّكامل للدّوالّ المثلّثية والدّوالّ الأسّيّة واللّوغريثميّة ودوالّ القوى
$33\frac{1}{3} \times 2$ — $66\frac{2}{3}$ درجة
المجموع — 100 درجة

ج. موادّ مساعدة يُسمح استعمالها:
1. حاسبة غير بيانيّة. لا يُسمح استعمال إمكانيّات البرمجة في الحاسبة التي يمكن برمجتها. استعمال الحاسبة البيانيّة أو إمكانيّات البرمجة في الحاسبة قد يؤدّي إلى إلغاء الامتحان.
2. لوائح قوانين (مرفقة).

د. تعليمات خاصّة:
1. لا تنسخ السّؤال؛ اكتب رقمه فقط.
2. ابدأ كلّ سؤال في صفحة جديدة. اكتب في الدفتر مراحل الحلّ، حتّى إذا أجريتَ حساباتك بواسطة حاسبة.
فسّر كلّ خطواتك، بما في ذلك الحسابات، بالتّفصيل وبوضوح وبترتيب.
عدم التّفصيل قد يؤدّي إلى خصم درجات أو إلى إلغاء الامتحان.
3. لكتابة مسوّدة يجب استعمال دفتر الامتحان أو الأوراق التي حصلتَ عليها من المراقبين.
استعمال مسوّدة أخرى قد يؤدّي إلى إلغاء الامتحان.

التعليمات في هذا النموذج مكتوبة بصيغة المذكّر وموجّهة للممتحَنات وللممتحَنين على حدّ سواء.

نتمنّى لك النجاح!

السؤال 1

معطاة متوالية حسابيّة: $a_1 , a_2 , a_3 , ... , a_n$

الحدّ الأوّل في المتوالية هو 2.5 .

الحدّ الذي يقع في المكان الـ33 في المتوالية أكبر بِـ 80 من الحدّ الذي يقع في المكان الـ17 في المتوالية.

من المتوالية المعطاة، أخذوا كلّ حدّ ثالث بحيث نتجت متوالية حسابيّة جديدة:

$a_3 , a_6 , a_9 , ... , a_n$

أ. جد فرق المتوالية الجديدة.

ب. مجموع كلّ الحدود في المتوالية الجديدة هو 3100 .

(1) جد عدد الحدود في المتوالية الجديدة.

(2) ما هو عدد الحدود في المتوالية الأصليّة؟ علّل.

إجابة السؤال 1

أ. حسب المعطى: $a_{33} = a_{17} + 80$

$$\Downarrow$$

(d هو فرق المتوالية المعطاة) $a_1 + 32d = a_1 + 16d + 80$

$$\Downarrow$$

$$d = 5$$

فرق المتوالية الجديدة: $d_{\text{جديدة}} = a_6 - a_3 = a_1 + 5d - (a_1 + 2d) = 3d$

$$\Downarrow$$

$$d_{\text{جديدة}} = 15$$

/ يتبع في صفحة 3 /

تكملة إجابة السؤال 1.

ب. (1) حسب المعطى: $a_1 = 2.5$, حسب البند "أ": $d = 5$

$$\Downarrow$$

$$a_3 = 2.5 + 5 \cdot 2 = 12.5$$

$$S_{\text{جديدة}} = \frac{N}{2}(2 \cdot a_3 + d_{\text{جديدة}}(N-1))$$

$$\Downarrow$$

$$3100 = \frac{N}{2}(2 \cdot 12.5 + 15(N-1))$$

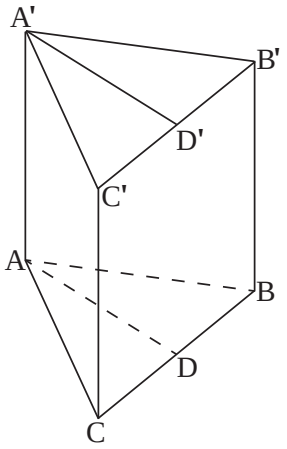
$$\Downarrow$$

$$N = 20$$

(2) عدد الحدود في المتوالية الأصليّة هو ثلاثة أضعاف
عدد الحدود في المتوالية الجديدة،
لذلك عدد الحدود في المتوالية الأصليّة هو: $n = 3 \cdot 20 = 60$

/ يتبع في صفحة 4 /

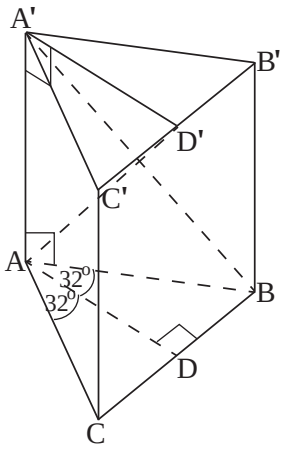
السؤال 2



في المنشور القائم $ABCA'B'C'$ القاعدتان هما مثلّثان متساويا الساقين $(AB = AC)$.
AD هو ارتفاع على الضلع BC ، وَ $A'D'$ هو ارتفاع على الضلع $B'C'$ (انظر الرسم).
معطى أنّ: $\sphericalangle BAC = 64^o$ ، $BC =$ 26 سم ،
حجم المنشور هو 8112 سم^3.

أ. احسب ارتفاع المنشور.
ب. احسب الزاوية التي بين القطر $A'B$ وقاعدة المنشور ABC.
جـ. احسب $\sphericalangle A'AD'$.

إجابة السؤال 2



أ. حسب المعطى: $AD \perp BC$, $AB = AC$, $BC =$ 26 سم , $\sphericalangle BAC = 64^o$

$$\Downarrow$$

$CD = DB =$ 13 سم , $\sphericalangle CAD = \sphericalangle BAD = 32^o$

$$\Downarrow$$

$$AD = \frac{13}{tg32^o} = \text{ 20.8 سم}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 20.8 \cdot 26 = \text{ 270.4 سم}^2$$

$$V_{\text{منشور}} = S_{\triangle ABC} \cdot AA' = \text{ 8112 سم}^3$$

$$\Downarrow$$

$AA' =$ 30 سم

ب. AA' يعامد مستوى القاعدة ABC ، لذلك الزاوية المطلوبة هي $\sphericalangle ABA'$.

$$tg \sphericalangle ABA' = \frac{AA'}{AB} \quad , \quad \sin 32^o = \frac{13}{AB}$$

$$\Downarrow$$

$$tg \sphericalangle ABA' = \frac{30}{\frac{13}{\sin 32^o}}$$

$$\Downarrow$$

$$\sphericalangle ABA' = 50.73^o$$

/ يتبع في صفحة 5 /

تكملة إجابة السؤال 2.

جـ. في المثلّث $A'AD'$ الذي فيه $\sphericalangle AA'D' = 90^o$ ، يتحقّق:

$$tg \sphericalangle A'AD' = \frac{A'D'}{AA'}$$

حسب البند "أ": $A'D' = AD =$ 20.8 سم ، $AA' =$ 30 سم

لذلك:

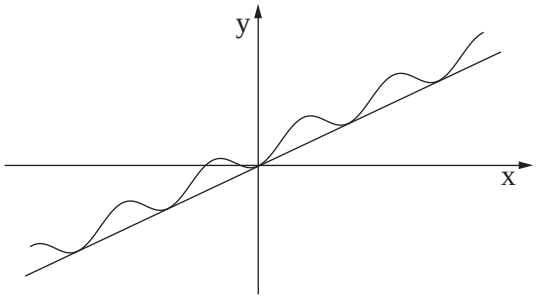
$$tg \sphericalangle A'AD' = \frac{20.8}{30}$$

$$\Downarrow$$

$$\sphericalangle A'AD' = 34.73^o$$

/ يتبع في صفحة 6 /

السؤال 3



معطاة الدالّة $f(x) = 0.5x - 0.5\cos(2x) + 0.5$

ومعطى المستقيم $y = 0.5x$ (انظر الرسم) .

أ. (1) جد الإحداثيّات x للنقاط المشتركة بين المستقيم والرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ في المجال $-\pi \le x \le \pi$.

(2) بيّن أنّ المستقيم يمسّ الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ في النقاط التي وجدتَها في البند الفرعيّ "أ (1)" .

ب. جد المساحة المحصورة بين الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ والمستقيم $y = 0.5x$ في المجال $-\pi \le x \le \pi$.

إجابة السؤال 3

أ. (1) في النقطة المشتركة يتحقّق: $f(x) = y$

$$\Downarrow$$

$$0.5x - 0.5\cos(2x) + 0.5 = 0.5x$$

$$\Updownarrow$$

$$\cos(2x) = 1$$

$$\Updownarrow$$

$$2x = 2\pi k$$

$$\Downarrow$$

$$x = \pi k$$

في المجال المعطى:

$k = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

$k = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm \pi$

(2) مشتقّة $f(x)$ هي: $f'(x) = 0.5 + \sin(2x)$

ميل المستقيم الذي يمسّ الدالّة في النقطة التي فيها $x = 0$ هو: $f'(0) = 0.5$

ميل المستقيم الذي يمسّ الدالّة في النقطة التي فيها $x = -\pi$ هو: $f'(\pi) = 0.5$

ميل المستقيم الذي يمسّ الدالّة في النقطة التي فيها $x = \pi$ هو: $f'(-\pi) = 0.5$

الميول مطابقة لميل المستقيم $y = 0.5x$ ، لذلك المستقيم يمسّ الدالّة في النقاط التي وجدناها.

ب. $f(x) \ge 0.5x$ لكلّ x ، لذلك: $S = \int_{-\pi}^{\pi} (0.5x - 0.5\cos(2x) + 0.5 - 0.5x)\,dx$

$$\Downarrow$$

$$S = \left[0.5x - \frac{1}{4}\sin(2x)\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$\Downarrow$$

$$S = \pi$$

/ يتبع في صفحة 7 /

السؤال 4

معطاة الدالّة $f(x)=2x^2e^{-\frac{x^2}{m}}$ ، m هو بارامتر لا يساوي 0 .

أ. ما هو مجال تعريف الدالّة $f(x)$ ؟

ب. معلوم أنّه توجد للدالّة $f(x)$ نقطة قصوى إحداثيّها الـ x هو -2 .
جد قيمة البارامتر m .

عوِّض $m=4$ ، وأجب عن البندين اللذين أمامك.

جـ. (1) جد نقاط تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ مع المحورين (إذا وُجدت مثل هذه النقاط).

(2) جد إحداثيّات النقاط القصوى للدالّة $f(x)$ ، وحدّد نوع هذه النقاط.

(3) ارسم رسمًا تقريبيًّا للرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$.

د. حسب الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$، ارسم رسمًا تقريبيًّا للرسم البيانيّ لدالّة المشتقّة $f'(x)$ في المجال $-2\le x\le 2$.

إجابة السؤال 4

أ. الدالّة معرَّفة لكلّ x .

ب. $$f'(x)=4xe^{-\frac{x^2}{m}}+2x^2\cdot\frac{(-2x)}{m}\cdot e^{-\frac{x^2}{m}}=4xe^{-\frac{x^2}{m}}(1-\frac{x^2}{m})$$

$$f'(-2)=0 \quad\Rightarrow\quad 0=-8e^{-\frac{4}{m}}(1-\frac{4}{m})$$

$$\Updownarrow$$

$$0=1-\frac{4}{m}$$

$$\Updownarrow$$

$$m=4$$

/ يتبع في صفحة 8 /

تكملة إجابة السؤال 4.

جـ. (1) $f(x) = 2x^2 e^{-\frac{x^2}{4}}$

$x = 0 \quad \Rightarrow \quad f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad (0\,,\,0)$

$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad (0\,,\,0)$

$f'(x) = 4xe^{-\frac{x^2}{4}}(1 - \frac{x^2}{4})$

(2) $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad , \quad 1 - \frac{x^2}{4} = 0$

$\Updownarrow$

$x = \pm 2$

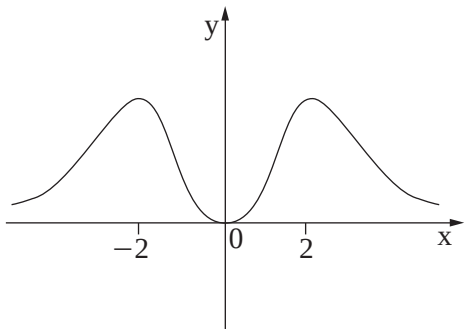
نقاط محتملة: $(-2\,,\,\frac{8}{e}) \quad , \quad (0\,,\,0) \quad , \quad (2\,,\,\frac{8}{e})$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f'(x)	+	0	−	0	+	0	−
f(x)	↗		↘		↗		↘

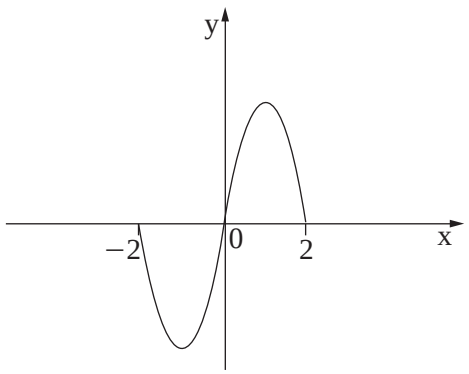
نهاية عظمى في: $(-2\,,\,\frac{8}{e})$, $(2\,,\,\frac{8}{e})$

نهاية صغرى في: $(0\,,\,0)$

(3)

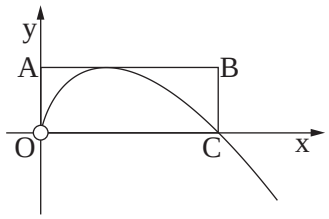


د.



/ يتبع في صفحة 9 /

السؤال 5



أ. معطاة الدالّة $f(x) = -x\,\ell n(2x)$ ، $x > 0$ (انظر الرسم).
عبر النقطة القصوى للدالّة، مرّروا مماسًّا يوازي المحور x ، وعبر نقطة تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة مع المحور x ، مرّروا مستقيمًا يوازي المحور y .
هذان المستقيمان يُكوِّنان مع المحورين المستطيل ABCO ،
كما هو موصوف في الرسم (O — نقطة أصل المحاور).
جد مساحة المستطيل ABCO .
بإمكانك إبقاء e في إجابتك.

ب. بحوزة أحد الباحثين اليوم كمّيّة معيّنة من مادّة إشعاعيّة. تتضاءل هذه الكمّيّة بصورة أُسّيّة.
بعد 10 سنوات، كمّيّة المادّة التي بحوزة الباحث اليوم ستقلّ بِـ 20%.
جد بعد كم سنة من اليوم ستقلّ كمّيّة المادّة بِـ40%.

ملاحظة: لا توجد علاقة بين البند "أ" والبند "ب".

إجابة السؤال 5

أ.
$$f(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \ell n(2x)=0 \quad , \quad (x>0)$$
$$\Updownarrow$$
الإحداثيّ x لِـ C :
$$x=\frac{1}{2}$$
$$\Downarrow$$
$$OC=\frac{1}{2}$$

$$f'(x) = -\ell n(2x) - x\cdot\frac{1}{2x}\cdot 2 = -\ell n(2x)-1$$
$$f'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \ell n2x+1=0$$
$$\Updownarrow$$
الإحداثيّ x للنقطة القصوى:
$$x=\frac{1}{2e}$$

الإحداثيّ y للنقطة القصوى:
$$f(\frac{1}{2e}) = -\frac{1}{2e}\,\ell n\frac{2}{2e} = \frac{1}{2e}$$
$$\Downarrow$$
$$OA=\frac{1}{2e}$$

مساحة المستطيل ABCO :
$$S_{\text{مستطيل}} = OC\cdot OA = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2e}$$
$$\Downarrow$$
$$S_{\text{مستطيل}} = \frac{1}{4e}$$

/ يتبع في صفحة 10 /

تكملة إجابة السؤال 5.

ب.

$$M_t = M_0 \cdot q^t$$

بعد 10 سنوات:

$$M_0 \cdot 0.8 = M_0 \cdot q^{10}$$

$$\Downarrow$$

$$q = 0.8^{\frac{1}{10}}$$

عندما تقلّ الكمّيّة بـ40%:

$$M_0 \cdot 0.6 = M_0 \cdot q^x$$

$$\Downarrow$$

$$0.6 = 0.8^{\frac{x}{10}}$$

$$\Downarrow$$

$$\ell n\ 0.6 = \frac{x}{10} \ell n\ 0.8$$

$$\Downarrow$$

$$x = 22.89 \text{ سنة}$$

حقوق الطّبع محفوظة لدولة إسرائيل.
النّسخ أو النّشر ممنوعان إلّا بإذن من وزارة التّربية والتّعليم.