מדינת ישראל

משרד החינוך

סוג הבחינה: א. בגרות לבתי"ס על־יסודיים
ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים

מועד הבחינה: קיץ תשע"ג

מספר השאלון: **035804, 314**

תרגום לערבית (2)

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מתמטיקה

4 יחידות לימוד — שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון: אלגברה, גאומטריה אנליטית,

הסתברות $16\frac{2}{3}\times 2$ — $33\frac{1}{3}$ נק'

פרק שני: גאומטריה וטריגונומטריה

במישור $16\frac{2}{3}\times 2$ — $33\frac{1}{3}$ נק'

פרק שלישי: חשבון דיפרנציאלי

ואינטגרלי $16\frac{2}{3}\times 2$ — $33\frac{1}{3}$ נק'

סה"כ — 100 נק'

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
2. דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

1. אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
2. התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
3. לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

دولة إسرائيل

وزارة التّربية والتّعليم

نوع الامتحان: أ. بجروت للمدارس الثّانويّة
ب. بجروت للممتحَنين الخارجيّين

موعد الامتحان: صيف 2013

رقم النّموذج: **035804، 314**

ترجمة إلى العربيّة (2)

اقتراح إجابات لأسئلة امتحان بجروت

الرياضيّات

4 وحدات تعليميّة – النّموذج الأوّل

تعليمات للممتحَن

أ. مدّة الامتحان: ثلاث ساعات ونصف.

ب. مبنى النّموذج وتوزيع الدّرجات:
في هذا النّموذج ثلاثة فصول.
الفصل الأوّل: الجبر، الهندسة التّحليليّة،
الاحتمال $16\frac{2}{3}\times 2$ – $33\frac{1}{3}$ درجة
الفصل الثاني: الهندسة وحساب
المثلّثات في المستوى $16\frac{2}{3}\times 2$ – $33\frac{1}{3}$ درجة
الفصل الثّالث: حساب التّفاضل
والتّكامل $16\frac{2}{3}\times 2$ – $33\frac{1}{3}$ درجة
المجموع – 100 درجة

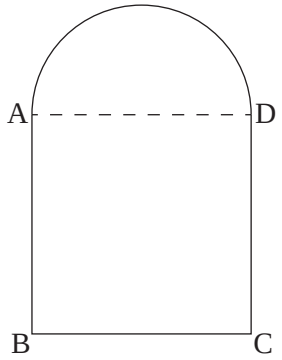
ج. موادّ مساعدة يُسمح استعمالها:
1. حاسبة غير بيانيّة. لا يُسمح استعمال إمكانيّات البرمجة في الحاسبة التي يمكن برمجتها. استعمال الحاسبة البيانيّة أو إمكانيّات البرمجة في الحاسبة قد يؤدّي إلى إلغاء الامتحان.
2. لوائح قوانين (مرفقة).

د. تعليمات خاصّة:
1. لا تنسخ السّؤال؛ اكتب رقمه فقط.
2. ابدأ كلّ سؤال في صفحة جديدة. اكتب في الدّفتر مراحل الحلّ، حتّى إذا أجريتَ حساباتك بواسطة حاسبة.
فسّر كلّ خطواتك، بما في ذلك الحسابات، بالتّفصيل وبوضوح وبترتيب.
عدم التّفصيل قد يؤدّي إلى خصم درجات أو إلى إلغاء الامتحان.
3. لكتابة مسوّدة يجب استعمال دفتر الامتحان أو الأوراق التي حصلتَ عليها من المراقبين.
استعمال مسوّدة أخرى قد يؤدّي إلى إلغاء الامتحان.

التّعليمات في هذا النّموذج مكتوبة بصيغة المذكّر وموجّهة للممتحَنات وللممتحَنين على حدّ سواء.

ب ה צ ל ח ה! **نتمنّى لك النّجاح!**

السؤال 1



شبّاك مكوّن من نصف دائرة ومن المربّع ABCD .

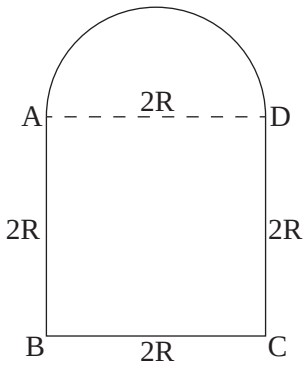
ضلع المربّع AD هو قطر لنصف الدائرة، كما هو موصوف في الرسم.

مساحة المربّع أكبر بِـ 0.2187 م^2 من مساحة نصف الدائرة.

جد محيط الإطار الخارجيّ للشبّاك.

استعمِل في حساباتك $\pi = 3.14$.

إجابة السؤال 1



نرمز: $AD = 2R$ (انظر الرسم)

مساحة نصف الدائرة التي نصف قطرها R : $\frac{1}{2}\pi R^2$

مساحة المربّع ADCB : $4R^2$

لذلك حسب المعطى: $4R^2 = \frac{1}{2}\pi R^2 + 0.2187$

$\Downarrow$

$R > 0$ ، لذلك: $R = 0.3$ متر

محيط نصف الدائرة التي نصف قطرها R : $\pi \times 0.3$

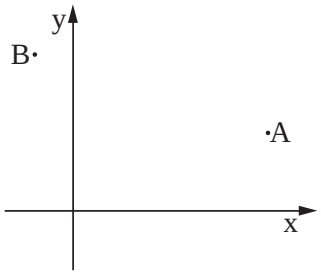
محيط ثلاثة أضلاع المربّع ADCB : $3 \times 2 \cdot 0.3$

محيط الإطار: $\pi \times 0.3 + 3 \times 2 \cdot 0.3 = 2.742$ متر

/ يتبع في صفحة 3 /

السؤال 2

معطاة النقطتان $A(10,4)$ وَ $B(-2,8)$ (انظر الرسم).



النقطة P موجودة على المحور x بحيث بُعدها عن النقطة A يساوي بُعدها عن النقطة B .

أ. جد إحداثيّات النقطة P .

النقاط A وَ B وَ P هي رؤوس للشكل الرباعيّ ADBP .

معطى أنّ: $BP \parallel AD$ ، $BD \parallel PA$.

ب. جد إحداثيّات الرأس D .

جـ. جد طول نصف قطر الدائرة التي تحصر المثلّث BDA . علّل.

إجابة السؤال 2

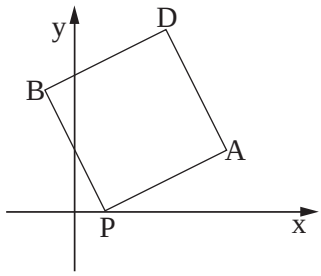
أ. حسب المعطى: $A(10,4)$ ، $B(-2,8)$ ، $P(x_P,0)$ ، $PA = PB$

$$\Downarrow$$

$$(10-x_P)^2+4^2 = (-2-x_P)^2+8^2$$

$$\Downarrow$$

$$x_P = 2 \quad \Rightarrow \quad P(2,0)$$



ب. في متوازي الأضلاع، القطران ينصّف أحدهما الآخر،
لذلك إحداثيّات نقطة التقاء القطرين هي:

$$x = \frac{10-2}{2} = 4$$

$$y = \frac{4+8}{2} = 6$$

من هنا:

$$\frac{x_P+x_D}{2} = 4 = \frac{2+x_D}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$x_D = 6$$

$$\frac{y_P+y_D}{2} = 6 = \frac{0+y_D}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$y_D = 12$$

إحداثيّات النقطة D : $D(6,12)$

/ يتبع في صفحة 4 /

تكملة إجابة السؤال 2.

جـ. ميل BD هو: $\frac{12-8}{6+2}=\frac{1}{2}$

ميل AD هو: $\frac{12-4}{6-10}=-2$

حاصل ضرب الميلين يساوي -1، لذلك: $BD \perp AD$

$\Downarrow$

BA هو قطر، لأنّ زاوية محيطيّة مقدارها 90^o تستند عليه.

$\Downarrow$

نصف القطر $= \frac{1}{2}BA = \frac{1}{2}\sqrt{(10+2)^2+(4-8)^2}$

$\Downarrow$

نصف القطر $= 2\sqrt{10}$

/ يتبع في صفحة 5 /

السؤال 3

يُصدِّر أحد المُزارعين زهورًا بيضاء وزهورًا حمراء. في مخزن المُزارع:

$\frac{1}{12}$ من الزهور البيضاء هي جوريّة.

$\frac{2}{3}$ الزهور الحمراء هي جوريّة.

25% من مجمل الزهور هي جوريّة، والباقي سوسن.

أ. نختار عشوائيًّا زهرة من بين الزهور التي في المخزن.

(1) ما هو الاحتمال بأن تكون الزهرة حمراء؟

(2) ما هو الاحتمال بأن تكون الزهرة حمراء إذا كان معلومًا أنّها جوريّة؟

ب. معطى أنّ عدد الجوريّات الحمراء في المخزن هو 300 .

ما هو عدد الزهور في المخزن؟

إجابة السؤال 3

نرمز: A – زهور حمراء

B – زهور هي جوريّة

أ. (1) حسب المعطى: $P(B)=0.25$, $P(B/A)=\frac{2}{3}$, $P(B/\overline{A})=\frac{1}{12}$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$P(B\cap A)=\frac{2}{3}P(A) \quad , \quad P(B\cap \overline{A})=\frac{1}{12}P(\overline{A})$$

$$P(B)=P(B\cap A)+P(B\cap \overline{A})=\frac{2}{3}P(A)+\frac{1}{12}(1-P(A))$$

$$\Downarrow$$

$$0.25=\frac{2}{3}P(A)+\frac{1}{12}(1-P(A))$$

$$\Downarrow$$

$$P(A)=\frac{2}{7}$$

(2) $$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{7}}{0.25}=\frac{16}{21}$$

ب. نرمز: N – عدد الزهور في المخزن

$$P(A\cap B)=\frac{300}{N}$$

$$\Downarrow$$

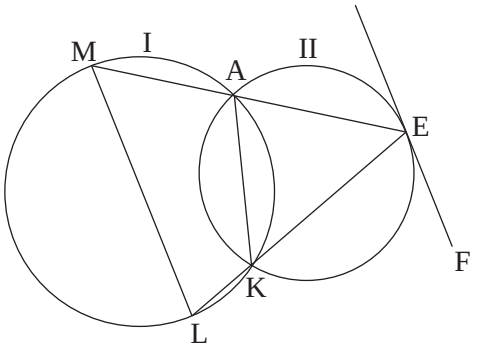
$$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{7}=\frac{300}{N}$$

$$\Downarrow$$

$$N=1575$$

/ يتبع في صفحة 6 /

السؤال 4



الشكل الرباعيّ AKLM محصور داخل الدائرة I .

عبر الرأسين A وَ K مرّروا الدائرة II .

امتدادا الضلعين MA وَ LK يلتقيان في النقطة E التي على محيط الدائرة II.

المستقيم FE يمسّ الدائرة II في النقطة E (انظر الرسم).

أ. برهن أنّ المستقيم FE يوازي الوتر LM .

ب. برهن أنّ $\Delta AEK \sim \Delta LEM$.

جـ. معطى أنّ: 6 سم = AE ، 7 سم = KE ، 2 سم = KL .

(1) احسب النسبة بين مساحة المثلّث AEK ومساحة المثلّث LEM .

(2) احسب النسبة بين مساحة المثلّث AEK ومساحة الشكل الرباعيّ AKLM .

إجابة السؤال 4

أ. $\sphericalangle FEK = \sphericalangle EAK = \alpha$ — الزاوية بين المماسّ والوتر تساوي الزاوية المحيطيّة التي تستند على هذا الوتر من جهته الثانية.

$\sphericalangle MAK = 180^o - \alpha$ — الزاويتان المتجاورتان مجموعهما 180^o .

$\Downarrow$

$\sphericalangle MLK = \alpha$ — مجموع الزاويتين المتقابلتين في شكل رباعيّ محصور في دائرة هو 180^o .

$\Downarrow$

$\sphericalangle MLK = \sphericalangle FEK$

$\Downarrow$

$LM \parallel FE$ — الزاويتان المتبادلتان متساويتان، ولذلك المستقيمان متوازيان.

ب. حسب البند "أ": $\sphericalangle EAK = \sphericalangle ELM = \alpha$

$\sphericalangle E$ مشتركة

لذلك: $\Delta AEK \sim \Delta LEM$ — حسب ز. ز.

/ يتبع في صفحة 7 /

تكملة إجابة السؤال 4.

جـ. (1) $\frac{S_{\triangle AEK}}{S_{\triangle LEM}} = \left(\frac{AE}{LE}\right)^2$

في المثلّثين المتشابهين النسبة بين المساحتين تساوي تربيع نسبة التشابه.

حسب المعطى: $KE = 7$ سم , $KL = 2$ سم , $AE = 6$ سم

$LE = KL + KE$

من هنا: $\frac{S_{\triangle AEK}}{S_{\triangle LEM}} = \left(\frac{6}{2+7}\right)^2 = \frac{4}{9}$

(2) I. $S_{\triangle LEM} = \frac{9}{4} S_{\triangle AEK}$

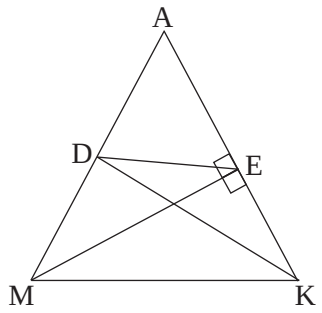
II. $S_{\square AKLM} = S_{\triangle LEM} - S_{\triangle AEK}$

من I ومن II ينتج: $S_{\square AKLM} = \frac{5}{4} S_{\triangle AEK}$

$\frac{S_{\triangle AEK}}{S_{\square AKLM}} = \frac{S_{\triangle AEK}}{\frac{5}{4} S_{\triangle AEK}} = \frac{4}{5}$

/ يتبع في صفحة 8 /

السؤال 5



في المثلّث المتساوي الساقين AMK $(AM = AK)$

KD هو مستقيم متوسّط للساق AM ، وَ ME هو ارتفاع على الساق AK (انظر الرسم) .

أ. برهن أنّ $\sphericalangle DAE = \sphericalangle DEA$.

معطى أنّ: $\sphericalangle MAK = 2\alpha$ ، $AM = 2b$.

ب. عبّر بدلالة b وَ α عن مساحة المثلّث ADE .

جـ. إذا كان معطى أيضًا أنّ $MK = 2 \cdot DE$:

(1) احسب α .

(2) برهن أنّ $DE \parallel MK$.

إجابة السؤال 5

أ. في المثلّث القائم الزاوية MEA: $DE = \frac{1}{2}AM = AD$

$$\Downarrow$$

$$\sphericalangle DAE = \sphericalangle DEA$$

في المثلّث القائم الزاوية المستقيم المتوسّط للوتر يساوي نصف الوتر.

مقابل الأضلاع المتساوية في المثلّث توجد زوايا متساوية.

ب.

$$S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2}AD \cdot ED \sin \sphericalangle ADE$$

$$\Downarrow$$

$$S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot b \sin(180^o - 4\alpha)$$

$$\Downarrow$$

$$S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2}b^2 \sin(4\alpha)$$

جـ. (1) حسب المعطى: $MK = 2DE$

$$\Downarrow$$

$DE = \frac{1}{2}AM$ ، لذلك: $MK = 2 \cdot b = AM$

$$\Downarrow$$

$AM = AK$ ، لذلك: $MK = AM = AK$

$$\Downarrow$$

$\triangle AMK$ هو متساوي الأضلاع

$$\Downarrow$$

$$2\alpha = 60^o$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha = 30^o$$

/ يتبع في صفحة 9 /

تكملة إجابة السؤال 5، البند "جـ".

(2) حسب البند الفرعيّ "جـ (1)": $\sphericalangle AMK = 60^o$

حسب البند "ب": $\sphericalangle ADE = 180^o - 4\alpha = 60^o$

$\Downarrow$

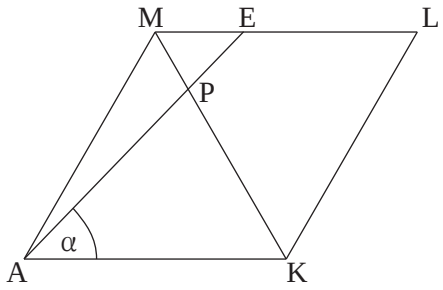
$\sphericalangle ADE = \sphericalangle AMK$

$\Downarrow$

$DE \parallel MK$ إذا كانت زاويتان متساويتين بالتناظر، فإنّ المستقيمين متوازيان.

/ يتبع في صفحة 10 /

السؤال 6



معطى المعيَّن AMLK .

النقطة E موجودة على الضلع ML .

القطر KM يقطع القطعة AE في النقطة P (انظر الرسم) .

معطى أنّ: $\sphericalangle AML = 120^o$ ، $\sphericalangle EAK = \alpha$ ، طول ضلع المعيَّن هو a .

أ. (1) جد مقدار الزاوية PKA . علّل.

(2) عبّر بدلالة a وَ α عن طول القطعة PK .

ب. عبر النقطة P مرّروا عمودًا على الضلع AK . العمود يقطع AK في النقطة G .

معطى أيضًا أنّ $\alpha = 46^o$.

عبّر بدلالة a عن طول القطعة GL .

إجابة السؤال 6

أ. (1) $\sphericalangle LKA = \sphericalangle AML = 120^o$ — الزاويتان المتقابلتان في المعيّن متساويتان.

$\Downarrow$

$\sphericalangle PKA = 60^o$ — القطر في المعيّن ينصّف الزاويتين المتقابلتين.

(2) حسب قانون الجيب،

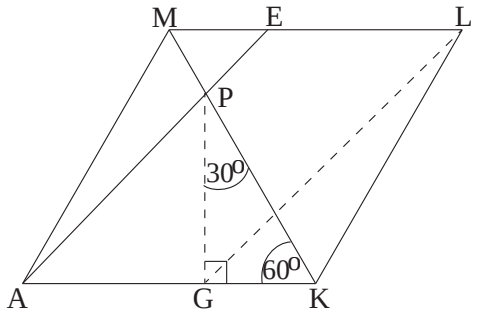
في المثلّث PKA يتحقّق:

$$\frac{PK}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin(180^o - (\alpha + 60^o))}$$

$\Downarrow$

$$PK = \frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha + 60^o)}$$

ب. الزوايا في المثلّث GPK هي: 90^o , 60^o , 30^o



$\Downarrow$

$GK = \sin 30^o \cdot PK$

$\Downarrow$

$$GK = \frac{a\sin 46^o}{2\sin(46^o + 60^o)}$$

$\Downarrow$

$GK = 0.374a$

حسب قانون جيب التمام،

في المثلّث GLK يتحقّق:

$$GL^2 = GK^2 + KL^2 - 2\cdot GK\cdot KL\cdot\cos\sphericalangle AKL$$

$\Downarrow$

$$GL^2 = 0.374^2\cdot a^2 + a^2 - 2\cdot 0.374\cdot a^2\cdot\cos 120^o$$

$\Downarrow$

$GL = 1.23a$

/ يتبع في صفحة 11 /

السؤال 7

معطاة الدالّة $f(x) = x\sqrt{4x} - 6x$.

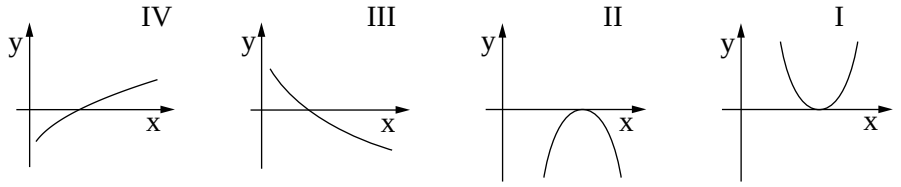
أ. (1) جد مجال تعريف الدالّة.

(2) جد نقاط تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة مع المحورين.

(3) جد إحداثيّات النقاط القصوى للدالّة، وحدّد نوع هذه النقاط.

ب. ارسم رسمًا تقريبيًّا للرسم البيانيّ للدالّة.

جـ. أيّ رسم بيانيّ من الرسوم البيانيّة I ، II ، III ، IV ، يمكن أن يصف دالّة المشتقّة $f'(x)$ في المجال $1 \le x \le 10$ ؟ علّل.



إجابة السؤال 7

أ. (1) يجب أن يتحقّق: $4x \ge 0$

$\Downarrow$

مجال التعريف: $x \ge 0$

(2)

$x = 0 \quad \Rightarrow \quad f(0) = 0$

$y = 0 \quad \Rightarrow \quad x\sqrt{4x} - 6x = 0 = x(\sqrt{4x} - 6)$

$\Downarrow$

$x = 0 \ , \ x = 9$

نقطتا التقاطع مع المحورين: $(9 , 0) \ , \ (0 , 0)$

/ يتبع في صفحة 12 /

تكملة إجابة السؤال 7.

أ. (3)

$$f(x) = x\sqrt{4x} - 6x$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x) = \sqrt{4x} + x \cdot \frac{4}{2\sqrt{4x}} - 6 = \frac{6x - 6\sqrt{4x}}{\sqrt{4x}}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 6x = 6\sqrt{4x}$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 = 4x$$

$$\Downarrow$$

مجال تعريف $f'(x)$ هو $x > 0$ ، لذلك: $x = 4$

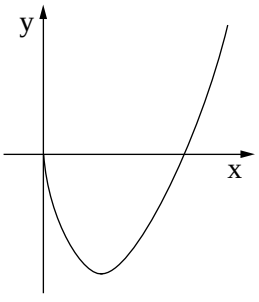
مجالات تصاعد وتنازل $f(x)$:

x	0		4		9
f(x)	0	↘	−8	↗	0

نقطة النهاية العظمى في طرف المجال: $(0\ ,\ 0)$

نقطة النهاية الصغرى: $(4\ ,\ -8)$

ب.



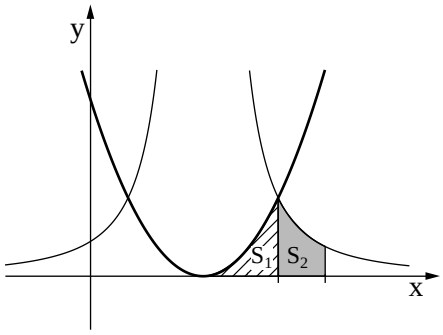
جـ. للدالّة $f(x)$ توجد نهاية صغرى في $x = 4$ ،

لذلك: $f'(x) < 0$ بالنسبة لِـ $1 \le x < 4$ وَ $f'(x) > 0$ بالنسبة لِـ $x > 4$.

من هنا الرسم البيانيّ هو: IV

/ يتبع في صفحة 13 /

السؤال 8



يعرض الرسم الذي أمامك الرسمين البيانيّين للدالّتين: $f(x) = (x-a)^2$ و $g(x) = \frac{16}{(x-a)^2}$

a هو بارامتر أكبر من 0 .

أ. جد خطوط التقارب الموازية للمحورين للدالّة g(x) (عبّر بدلالة a إذا دعت الحاجة).

إحدى نقاط التقاطع بين الرسمين البيانيّين للدالّتين هي النقطة التي فيها $x = a+2$.

S_1 هي المساحة المحصورة بين الرسم البيانيّ للدالّة f(x) والمحور x والمستقيم $x = a+2$ (المساحة المخطّطة في الرسم).

S_2 هي المساحة المحصورة بين الرسم البيانيّ للدالّة g(x) والمحور x والمستقيمين $x = a+2$ وَ $x = a+3$ (المساحة الرماديّة في الرسم).

ب. احسب النسبة $\frac{S_1}{S_2}$.

إجابة السؤال 8

أ. خطوط التقارب: $x = a$

$y = 0$

ب. نقطة تقاطع f(x) مع المحور x :

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = a$$

$$\Downarrow$$

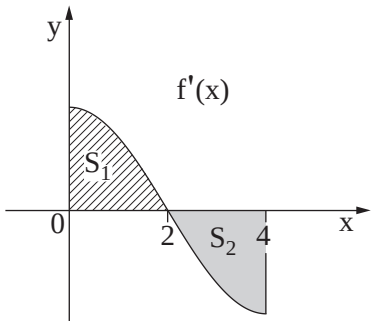
$$S_1 = \int_a^{a+2} (x-a)^2 dx = \left[\frac{(x-a)^3}{3}\right]_a^{a+2} = \frac{2^3}{3} - \frac{0}{3} = \frac{8}{3}$$

$$S_2 = \int_{a+2}^{a+3} \frac{16}{(x-a)^2} dx = \left[-\frac{16}{x-a}\right]_{a+2}^{a+3} = -\frac{16}{3} + \frac{16}{2} = \frac{8}{3}$$

النسبة هي: $\frac{S_1}{S_2} = 1$

/ يتبع في صفحة 14 /

السؤال 9



يعرض الرسم الذي أمامك الرسم البيانيّ لدالّة المشتقّة $f'(x)$ في المجال $0 \le x \le 4$.

الرسم البيانيّ لِـ $f'(x)$ يقطع المحور x في النقطة التي فيها $x = 2$.

S_1 هي المساحة المحصورة بين الرسم البيانيّ لدالّة المشتقّة $f'(x)$

والمحورين (المساحة المخطّطة في الرسم) .

S_2 هي المساحة المحصورة بين الرسم البيانيّ لدالّة المشتقّة $f'(x)$ والمحور x

والمستقيم $x = 4$ (المساحة الرماديّة في الرسم) .

أ . (1) معطى أنّ : $f(0) = 0$ ، $S_1 = 4$.

احسب $f(2)$.

(2) معطى أيضًا أنّ : $S_2 = 4$.

احسب $f(4)$.

ب . جد إحداثيّات النقطة القصوى الداخليّة للدالّة $f(x)$ في المجال المعطى،

وحدّد نوع هذه النقطة . علّل .

جـ. ارسم رسمًا تقريبيًّا للرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ في المجال المعطى .

إجابة السؤال 9

أ . (1)

$$\text{I. } S_1 = \int_0^2 f'(x)\,dx = \left[f(x)\right]_0^2 = f(2) - f(0)$$

حسب المعطى : $f(0) = 0$, $S_1 = 4$ II.

من I وَ II ينتج : $f(2) = 4$

(2)

$$\text{III. } S_2 = -\int_2^4 f'(x)dx = -\left[f(x)\right]_2^4 = -(f(4) - f(2))$$

حسب المعطى : $S_2 = 4$ ، ووجدنا أنّ : $f(2) = 4$ IV.

من III وَ IV ينتج : $f(4) = 0$

/ يتبع في صفحة 15 /

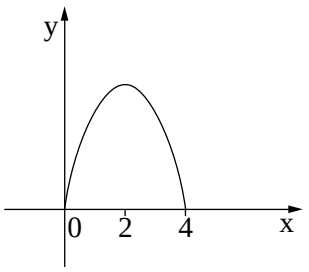
تكملة إجابة السؤال 9.

ب. حسب الرسم البيانيّ ينتج:

x	$0 \leqslant x < 2$	2	$2 < x \leqslant 4$
f'(x)	+	0	−
f(x)	↗		↘

لذلك للدالّة f(x) نهاية عظمى في النقطة: (4 , 2)

جـ. حسب نتائج البندين السابقين:



حقوق الطّبع محفوظة لدولة إسرائيل.
النّسخ أو النّشر ممنوعان إلّا بإذن من وزارة التّربية والتّعليم.