מדינת ישראל

משרד החינוך

סוג הבחינה: א. בגרות לבתי"ס על־יסודיים
ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים

מועד הבחינה: חורף תשע"ג

מספר השאלון: **317 ,035807**

תרגום לערבית (2)

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מתמטיקה

5 יחידות לימוד — שאלון שני

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעתיים.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

בשאלון זה שני פרקים.

פרק ראשון: גאומטריה אנליטית, וקטורים

טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

$66\frac{2}{3}$ נק' — $2 \times 33\frac{1}{3}$

פרק שני: גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה

פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

$33\frac{1}{3}$ נק' — $1 \times 33\frac{1}{3}$

100 נק' — סה"כ

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
2. דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

1. אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
2. התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
   הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
   חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
3. לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
   שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

בהצלחה!

دولة إسرائيل

وزارة المعارف

نوع الامتحان: أ. بجروت للمدارس الثانويّة
ب. بجروت للممتحَنين الخارجيّين

موعد الامتحان: شتاء 2013

رقم النموذج: **317 ،035807**

ترجمة إلى العربيّة (2)

اقتراح حلّ لأسئلة امتحان بجروت

الرياضيّات

5 وحدات تعليمية – النموذج الثاني

تعليمات للممتحَن

أ. مدّة الامتحان: ساعتان.

ب. مبنى النموذج وتوزيع الدرجات:

في هذا النموذج فصلان.

الفصل الأوّل: الهندسة التحليلية، المتّجهات

حساب المثلثات في الفراغ، الأعداد المركّبة

$66\frac{2}{3}$ درجة — $2 \times 33\frac{1}{3}$

الفصل الثاني: الأعداد المركّبة، الدوالّ الأسّية واللوغريثمية

الدوالّ الأسّية واللوغريثمية

$33\frac{1}{3}$ درجة — $1 \times 33\frac{1}{3}$

100 درجة — المجموع

جـ. موادّ مساعدة يُسمح استعمالها:

1. حاسبة غير بيانية. لا يُسمح استعمال إمكانيات البرمجة في الحاسبة التي يمكن برمجتها. استعمال الحاسبة البيانية أو إمكانيات البرمجة في الحاسبة قد يؤدّي إلى إلغاء الامتحان.
2. لوائح قوانين (مرفقة).

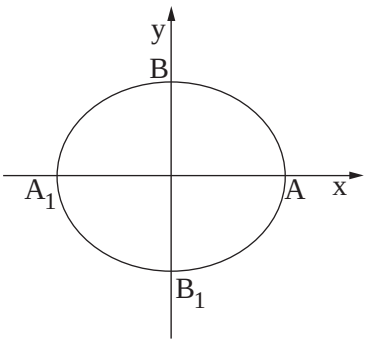
د. تعليمات خاصّة:

1. لا تنسخ السؤال؛ اكتب رقمه فقط.
2. ابدأ كلّ سؤال في صفحة جديدة. اكتب في الدفتر مراحل الحلّ، حتّى إذا أجريتَ حساباتك بواسطة حاسبة.
   فسّر كلّ خطواتك، بما في ذلك الحسابات، بالتفصيل وبوضوح وبترتيب.
   عدم التفصيل قد يؤدّي إلى خصم درجات أو إلى إلغاء الامتحان.
3. لكتابة مسوّدة يجب استعمال دفتر الامتحان أو الأوراق التي حصلتَ عليها من المراقبين.
   استعمال مسوّدة أخرى قد يؤدّي إلى إلغاء الامتحان.

التعليمات في هذا النموذج مكتوبة بصيغة المذكّر وموجّهة للممتحَنات وللممتحَنين على حدّ سواء.

نتمنّى لك النجاح!

السؤال 1



معطى القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ، $a>b$ (انظر الرسم).

F_1 وَ F_2 هما بؤرتا القطع الناقص

ورؤوسه هي A ، A_1 ، B ، B_1 .

معطى أنّ البؤرة F_1 هي منتصف القطعة AF_2 .

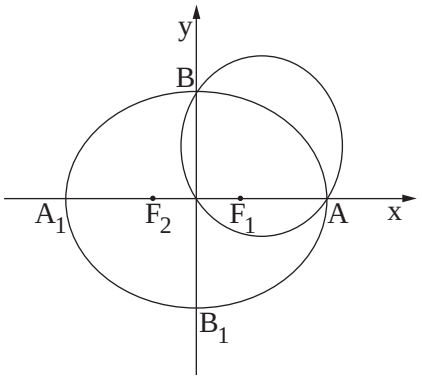
مرّروا دائرة عبر مركز القطع الناقص وعبر اثنين من رؤوسه.

معطى أنّ قطر الدائرة هو $\sqrt{17}$.

أ. جد معادلة القطع الناقص.

ب. مرّروا ثلاث دوائر أخرى عبر مركز القطع الناقص وعبر اثنين من رؤوسه. مراكز الدوائر الأربع هي رؤوس شكل رباعي.
الشكل الرباعي، الموجود في المستوى [x y] ، هو قاعدة هرم رأسه هو $S(0,3,4)$.
جد حجم الهرم.

حلّ السؤال 1



أ. الإحداثيّ x للبؤرة F_1 هو: I. $c=\sqrt{a^2-b^2}$

حسب منتصف القطعة AF_2 : II. $c=\frac{a-c}{2}$

حسب المعطى أنّ AB هو قطر الدائرة: III. $17=a^2+b^2$

من I وَ II وَ III نحصل على: $a^2=9$

$b^2=8$

$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$

ب. رؤوس القطع الناقص هي: $(0,2\sqrt{2})$ $(0,-2\sqrt{2})$

$(3,0)$ $(-3,0)$

لذلك يتكوّن مستطيل رؤوسه هي منتصفات القِطَع التي تصل بين رؤوس

القطع الناقص: $(\frac{3}{2},\sqrt{2})$ $(\frac{3}{2},-\sqrt{2})$

$(-\frac{3}{2},\sqrt{2})$ $(-\frac{3}{2},-\sqrt{2})$

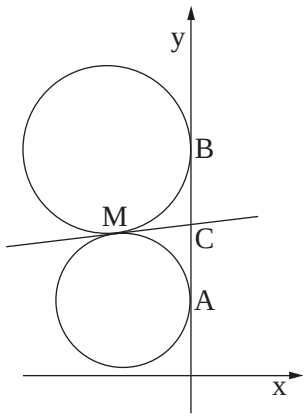
مساحة المستطيل هي: $(\frac{3}{2}+\frac{3}{2})\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{2})=6\sqrt{2}$

ارتفاع الهرم هو الإحداثيّ z للرأس S: 4

حجم الهرم هو: $\frac{1}{3}\cdot 4\cdot 6\sqrt{2}=8\sqrt{2}$

/ يتبع في صفحة 3 /

السؤال 2



دائرتان مركزاهما موجودان في الربع الثاني
تمسّان المحور y في النقطتين $A(0,1)$ وَ $B(0,3)$.
تمسّ الدائرتان إحداهما الأخرى في النقطة M (انظر الرسم) .

أ. المماس المشترك للدائرتين يقطع المحور y في النقطة C .
بيّن أنّ $MC = \frac{1}{2}AB$.

ب. (1) جد معادلة المحلّ الهندسي لنقاط التماس M
التي تتكوّن بالطريقة الموصوفة.

(2) ما هو شكل المحلّ الهندسي للنقاط M ، وفي أيّ ربع / أرباع يتواجد هذا المحلّ الهندسي؟

جـ. دليل القطع المكافئ $y^2 = 2px$ يمسّ المحلّ الهندسي الذي وجدتَ معادلته في البند "ب" .
جد إحداثيات النقاط على القطع المكافئ التي بُعدها عن بؤرته هو 10 .

حلّ السؤال 2

أ. $\left\{\begin{array}{l} CM = CB \\ CM = CA \end{array}\right.$ المماسان للدائرة، اللذان يخرجان من نقطة واحدة خارج الدائرة يكونان متساويين.

$$\Downarrow$$

$$CM = \frac{1}{2}AB$$

ب. (1) إحداثيّات منتصف القطعة AB هي : $C(0,2)$

طول القطعة CM هو : 1

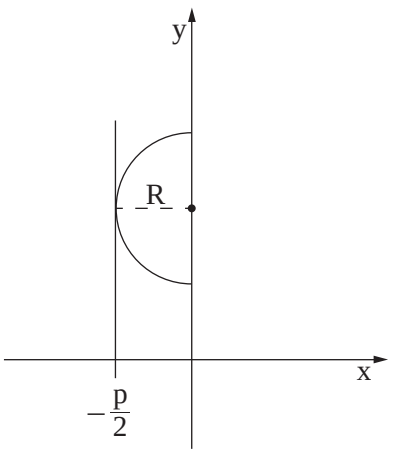
لذلك المحلّ الهندسيّ للنقاط $M(x,y)$: $(x<0)$ $x^2 + (y-2)^2 = 1$

(2) نصف دائرة في الربع الثاني (لأنّ مركزَي الدائرتين في الربع الثاني) . (نصف الدائرة لا يشمل الأطراف) .

جـ. نصف قطر المحلّ الهندسيّ هو : 1

لذلك معادلة الدليل هي : $x = -1$

حسب التعريف، معادلة الدليل هي : $x = -\frac{p}{2}$



من هنا معادلة القطع المكافئ هي : I. $y^2 = 4x$

بُعد نقطة على القطع المكافئ عن دليله
يساوي بُعدها عن البؤرة،

لذلك الإحداثيّ x للنقطة يحقّق : II. $x + 1 = 10$

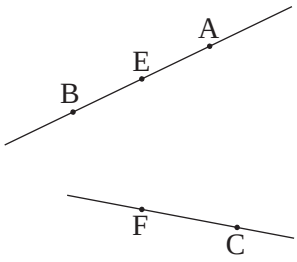
من I وَ II نحصل على النقطتين : $(9,6)$ $(9,-6)$

/ يتبع في صفحة 4 /

السؤال 3

معطى مستقيمان متصالبان. القطعة AB موجودة على أحد المستقيمين، والقطعة CF موجودة على المستقيم الآخر.

النقطة E هي منتصف القطعة AB (انظر الرسم).



نرمز: $\overrightarrow{EA} = \underline{w}$, $\overrightarrow{FE} = \underline{v}$, $\overrightarrow{CF} = \underline{u}$.

معطى أنّ: $\underline{v} \perp \underline{w}$, $\underline{v} \perp \underline{u}$, $|\underline{w}| = \sqrt{5}$, $|\underline{v}| = \sqrt{13}$, $|\underline{u}| = \sqrt{7}$

جيب تمام (كوسينوس) الزاوية التي بين المتّجهين $\underline{w}$ وَ $\underline{u}$ هو $\frac{\sqrt{35}}{10}$.

أ. جد مقدار الزاوية ABC .

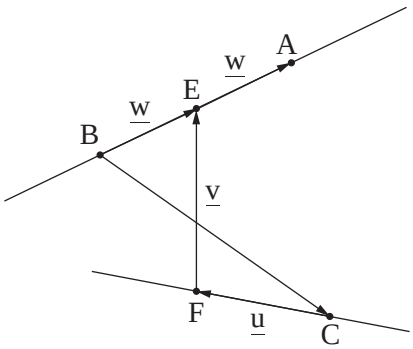
معطى أيضًا أنّ: $B(2, 6, 3)$ ، $A(0, 2, 3)$. المستوى π يمرّ عبر النقطة B ويعامد المستقيم AB.

ب. جد معادلة المستوى π .

جـ. استعن بإجابتك عن البند "أ"، وَجِد مقدار الزاوية التي بين المستقيم BC والمستوى π .

حلّ السؤال 3

أ.



$\overrightarrow{BA} = 2\underline{w}$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FC} = \underline{w} - \underline{v} - \underline{u}$

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 2\underline{w} \cdot (\underline{w} - \underline{v} - \underline{u}) = 3$

$|\overrightarrow{BA}| = 2\sqrt{5}$

$|\overrightarrow{BC}|^2 = (\underline{w} - \underline{v} - \underline{u}) \cdot (\underline{w} - \underline{v} - \underline{u}) = 18$

$$\cos \sphericalangle ABC = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{3}{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{18}}$$

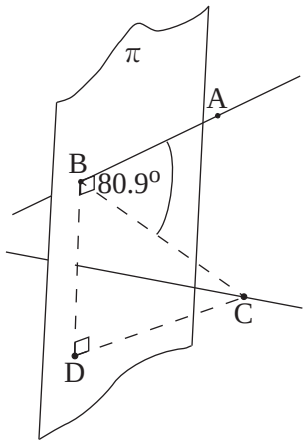
$\sphericalangle ABC = 80.9^o$

ب. المعامد للمستوى π هو: $\overrightarrow{AB} = (2, 4, 0)$

نقطة في المستوى π هي: $B(2, 6, 3)$

لذلك معادلة المستوى π هي: $x + 2y - 14 = 0$

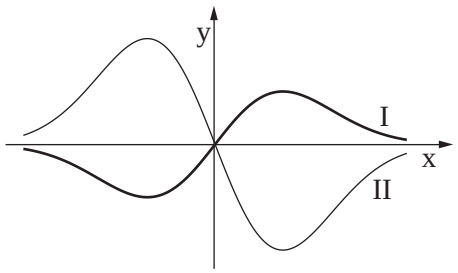
جـ. الزاوية التي بين المستقيم BC والمستوى π هي $\sphericalangle CBD$ ، كما هو موصوف في الرسم.



$$AB \perp \pi$$
$$\Downarrow$$
$$AB \perp BD$$
$$\Downarrow$$
$$\sphericalangle CBD = 90^o - 80.9^o = 9.1^o$$

/ يتبع في صفحة 5 /

السؤال 4



معطاة الدالتان $f(x)$ وَ $g(x)$.

الدالة $f(x)$ ودالة المشتقّة $g'(x)$

تحقّقان: $g'(x) = -2f(x)$.

يعرض الرسم الذي أمامك الرسمين البيانيّين I وَ II للدالتين $f(x)$ وَ $g'(x)$.

أ. حدّد أيّ رسم بياني هو للدالة $f(x)$ ، وأيّ رسم بياني هو لدالة المشتقّة $g'(x)$. علّل.

ب. معطى أيضًا أنّ: $g'(x) = -2xe^{-x^2}$ ، $g(0.5) = \frac{1}{e^{0.25}}$.

جد بالنسبة لأيّة قيَم x يتواجد الرسم البياني للدالة $f(x)$ فوق الرسم البياني للدالة $g(x)$.

جـ. المستقيم ℓ_1 يمرّ عبر نقطة النهاية الصغرى للدالة $f(x)$ وعبر نقطة النهاية العظمى لدالة المشتقّة $g'(x)$.

المستقيم ℓ_2 يمرّ عبر نقطة النهاية العظمى للدالة $f(x)$ وعبر نقطة النهاية الصغرى لدالة المشتقّة $g'(x)$.

جد معادلة المستقيم ℓ_1 ، ومعادلة المستقيم ℓ_2 .

د. المساحة المحصورة بين المستقيم ℓ_1 والرسم البياني للدالة $f(x)$ والرسم البياني لدالة المشتقّة $g'(x)$ ، هي S_1 .

المساحة المحصورة بين المستقيم ℓ_2 والرسم البياني للدالة $f(x)$ والرسم البياني لدالة المشتقّة $g'(x)$ ، هي S_2 .

ما هي النسبة $\frac{S_1}{S_2}$ ؟ علّل.

حلّ السؤال 4

أ. معطى أنّ: $g'(x) = -2f(x)$

لذلك الإحداثيّ y بقيمته المطلقة لكلّ نقطة على الرسم البيانيّ للدالّة $g'(x)$ هو ضعف الإحداثيّ y بقيمته المطلقة لكلّ نقطة على الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$.

من هنا حسب الرسم المعطى: الرسم البيانيّ I هو لِـ $f(x)$ ، والرسم البيانيّ II هو لِـ $g'(x)$.

ب.

$$g(x) = \int -2xe^{-x^2}\,dx = e^{-x^2} + C$$

$$g(0.5) = e^{\frac{1}{0.25}} \;\Rightarrow\; e^{\frac{1}{0.25}} = e^{-0.5^2} + C \;\Rightarrow\; C = 0$$

$$\Downarrow$$

$$g(x) = e^{-x^2}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}g'(x) = xe^{-x^2}$$

$$f(x) > g(x)$$

$$\Updownarrow$$

$$xe^{-x^2} > e^{-x^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$x > 1 \quad (\text{لأنّ } e^{-x^2} > 0)$$

/ يتبع في صفحة 6 /

تكملة حلّ السؤال 4.

جـ.

$$f(x) = xe^{-x^2}$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x) = e^{-x^2}(1-2x^2)$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$g'(x) = -2f(x) \Rightarrow \quad g''(x) = -2f'(x)$$

لذلك توجد لِـ $f(x)$ ولِـ $g'(x)$ في النقاط القصوى نفس الإحداثيّات x ، وأنواع النقاط القصوى متعاكسة.

حسب رسم $f(x)$ توجد نهاية صغرى في $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ،

لذلك معادلة ℓ_1 هي: $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

معادلة ℓ_2 هي: $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

د.

$$S_1 = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0} [g'(x) - f(x)]\,dx = 1.5\,[g(x)]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0}$$

$$S_2 = \int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} [f(x) - g'(x)]\,dx = -1.5\,[g(x)]_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1.5\,[g(x)]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0}$$

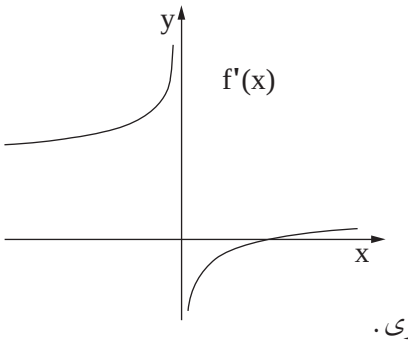
$$g(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = g(\frac{\sqrt{2}}{2})$$

لذلك: $\frac{S_1}{S_2} = 1$

/ يتبع في صفحة 7 /

السؤال 5

يعرض الرسم الذي أمامك الرسم البياني لدالة المشتقّة $f'(x) = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x}}$.



الدالة $f(x)$ معرَّفة لكلّ x .

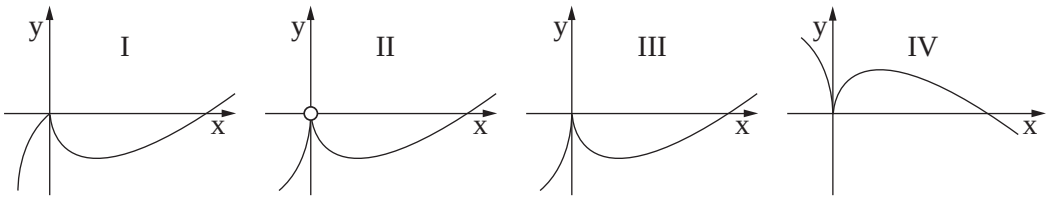
أ. استعن بالرسم البياني لدالة المشتقّة $f'(x)$ ، وَجِد:

(1) مجالات تصاعد وتنازل الدالة $f(x)$. علّل.

(2) مجالات التقعّر باتّجاه الأعلى $\cup$ وباتّجاه الأسفل $\cap$ للدالة $f(x)$
(إذا وُجدت مثل هذه المجالات). علّل.

ب. معطى أنّ المستقيم $y = -1$ يمسّ الرسم البياني للدالة $f(x)$ في نقطة نهايتها الصغرى.
جد نقاط تقاطع الرسم البياني للدالة $f(x)$ مع المحورين.

جـ. أمامك أربعة رسوم بيانية I-IV . أيّ رسم بياني يمكنه أن يصف الدالة $f(x)$ ؟ علّل.



حلّ السؤال 5

أ. (1) نقطة تقاطع $f'(x)$ مع المحور x : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

حسب الرسم البيانيّ لِـ $f'(x)$ نجد:

x	$x<0$	$0<x<1$	$x=1$	$x>1$
$f'(x)$	$+$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	↘		↗

($f'(x)$ معرّفة لكلّ $x \neq 0$)

$f(x)$ تصاعديّة في المجالين: $x<0$, $x>1$ ، $f(x)$ تنازليّة في المجال: $0<x<1$

(2) حسب الرسم البيانيّ، $f'(x)$ تصاعديّة بالنسبة لِـ $x>0$ وتصاعديّة بالنسبة لِـ $x<0$ ، لذلك $f''(x)$ موجبة في هذين المجالين، ولذلك $f(x)$ مقعّرة باتّجاه الأعلى $\cup$ بالنسبة لِـ $x>0$, $x<0$.

ب. حسب مجالات تصاعد وتنازل $f(x)$ توجد للدالّة نهاية صغرى في النقطة التي فيها $x = 1$ ،
لذلك إحداثيّات نقطة النهاية الصغرى هي:

I. $(1, -1)$

II. $f(x) = \int (2 - \frac{2}{\sqrt[3]{x}})dx = 2x - 3 \cdot \sqrt[3]{x^2} + C$

من I وَ II نحصل على: $f(x) = 2x - 3 \cdot \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}(2x^{\frac{1}{3}} - 3)$

نقاط التقاطع مع المحورين:

$$\left.\begin{array}{ll} x = 0 & \Rightarrow f(0) = 0 \\ f(x) = 0 & \Rightarrow x_1 = 0 \\ & x_2 = 3.375 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}(0\,,\,0) \\ (3.375\,,\,0)\end{array}$$

جـ. الرسم البيانيّ III ، لأنّ: لِـ $f(x)$ توجد نقطة نهاية صغرى في $x = 1$ ، حسب البند الفرعيّ "أ (1)".
$f(x)$ مقعّرة باتّجاه الأعلى $\cup$ أيضًا بالنسبة لِـ $x<0$ ، حسب البند الفرعيّ "أ (2)".
$f(x)$ معرّفة أيضًا بالنسبة لِـ $x = 0$ ، حسب المعطى.

حقوق الطبع محفوظة لدولة إسرائيل.
النسخ أو النشر ممنوعان إلّا بإذن من وزارة المعارف.