מדינת ישראל

משרד החינוך

סוג הבחינה: א. בגרות לבתי"ס על־יסודיים
ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים

מועד הבחינה: חורף תשע"ג

מספר השאלון: **035806, 316**

תרגום לערבית (2)

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מתמטיקה

5 יחידות לימוד — שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון: אלגברה
והסתברות $16\frac{2}{3}\times 2$ — $33\frac{1}{3}$ נק'

פרק שני: גאומטריה וטריגונומטריה
במישור $16\frac{2}{3}\times 2$ — $33\frac{1}{3}$ נק'

פרק שלישי: חשבון דיפרנציאלי
ואינטגרלי $16\frac{2}{3}\times 2$ — $33\frac{1}{3}$ נק'

סה"כ — 100 נק'

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
2. דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

1. אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
2. התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
3. לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

בהצלחה!

دولة إسرائيل

وزارة المعارف

نوع الامتحان: أ. بجروت للمدارس الثانويّة
ب. بجروت للممتحَنين الخارجيّين

موعد الامتحان: شتاء 2013

رقم النموذج: **035806، 316**

ترجمة إلى العربيّة (2)

اقتراح حلّ لأسئلة امتحان بجروت

الرياضيّات

5 وحدات تعليمية – النموذج الأوّل

تعليمات للممتحَن

أ. مدّة الامتحان: ثلاث ساعات ونصف.

ب. مبنى النموذج وتوزيع الدرجات:

في هذا النموذج ثلاثة فصول.

الفصل الأوّل: الجبر
والاحتمال $16\frac{2}{3}\times 2$ — $33\frac{1}{3}$ درجة

الفصل الثاني: الهندسة وحساب
المثلثات في المستوى $16\frac{2}{3}\times 2$ — $33\frac{1}{3}$ درجة

الفصل الثالث: حساب التفاضل
والتكامل $16\frac{2}{3}\times 2$ — $33\frac{1}{3}$ درجة

المجموع — 100 درجة

جـ. موادّ مساعدة يُسمح استعمالها:

1. حاسبة غير بيانية. لا يُسمح استعمال إمكانيات البرمجة في الحاسبة التي يمكن برمجتها. استعمال الحاسبة البيانية أو إمكانيات البرمجة في الحاسبة قد يؤدّي إلى إلغاء الامتحان.
2. لوائح قوانين (مرفقة).

د. تعليمات خاصّة:

1. لا تنسخ السؤال؛ اكتب رقمه فقط.
2. ابدأ كلّ سؤال في صفحة جديدة. اكتب في الدفتر مراحل الحلّ، حتّى إذا أجريتَ حساباتك بواسطة حاسبة.
فسّر كلّ خطواتك، بما في ذلك الحسابات، بالتفصيل وبوضوح وبترتيب.
عدم التفصيل قد يؤدّي إلى خصم درجات أو إلى إلغاء الامتحان.
3. لكتابة مسوّدة يجب استعمال دفتر الامتحان أو الأوراق التي حصلتَ عليها من المراقبين.
استعمال مسوّدة أخرى قد يؤدّي إلى إلغاء الامتحان.

التعليمات في هذا النموذج مكتوبة بصيغة المذكّر وموجّهة للممتحَنات وللممتحَنين على حدّ سواء.

نتمنّى لك النجاح!

السؤال 1

خرج داني من تل أبيب إلى هرتسليا على درّاجته الهوائية، وسافر بسرعة ثابتة مقدارها v كم/الساعة.

بعد مرور $\frac{1}{2}$ ساعة منذ خروج داني، خرجت ليلى أيضًا على درّاجتها الهوائية من تل أبيب إلى هرتسليا، وسافرت في نفس المسار بسرعة أكبر بـ 2 كم/الساعة من سرعة داني.

ليلى وداني التقيا في الطريق إلى هرتسليا، وبعد مرور $\frac{1}{2}$ ساعة من اللقاء وصلت ليلى إلى هرتسليا.

جد في أيّ مجال أعداد تتواجد السرعة v ، إذا كان معطى أنّ مسار السفر من تل أبيب إلى هرتسليا أصغر من 25 كم وأكبر من 9 كم.

حلّ السؤال 1

	الزمن (ساعات)	السرعة (كم/الساعة)	المسافة (كم)
داني حتّى اللقاء	t	v	$v \cdot t$
ليلى حتّى اللقاء	$t-\frac{1}{2}$	$v+2$	$(v+2)(t-\frac{1}{2})$
ليلى بعد اللقاء	$\frac{1}{2}$	$v+2$	$(v+2)\cdot\frac{1}{2}$

طول المسار حتّى اللقاء: $\text{I.}\quad v\cdot t=(v+2)(t-\frac{1}{2})$

الزمن الذي تقطع به ليلى كلّ المسار: $t-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=t$

لذلك طول كلّ المسار هو: $\text{II.}\quad S=t(v+2)$

عن طريق فتح الأقواس والتبسيط نحصل من I على: $t=\frac{1}{4}v+\frac{1}{2}$

نعوّض t في II ونحصل على: $S=0.25v^2+v+1$

من حلّ المتباينتين $9<0.25v^2+v+1<25$

نحصل على: 8 كم/الساعة > v > 4 كم/الساعة

/يتبع في صفحة 3/

السؤال 2

أ. (1) إذا أدخلنا إحدى الإشارات $>$, $\leqslant$, $<$, $\geqslant$ إلى المربّع الفارغ الذي في التعبير:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 \ \square \ (1 + 2 + 3 + ... + n)^2$$

نحصل على متباينة صحيحة لكلّ n طبيعي. اختر الإشارة الملائمة.

(2) برهن بالاستقراء أو بطريقة أخرى أنّ المتباينة التي في البند الفرعي "أ(1)" تتحقّق لكلّ n طبيعي.

ب. معطاة متوالية حسابية حدودها هي: $58 , 62 , 66, ... ,(4n + 6)$

عبّر عن مجموع المتوالية بدلالة n $(n > 12)$.

ملاحظة: لا توجد علاقة بين البند "أ" والبند "ب".

حلّ السؤال 2

أ. (1) الإشارة الملائمة هي: $\leq$ (وليس $<$ ، لأنّه عندها لا تتحقّق المتباينة بالنسبة لِـ $n = 1$).

(2) فحص بالنسبة لِـ $n = 1$: $1^2 \leq 1^2$

نفترض أنّ الادّعاء صحيح بالنسبة لِـ k طبيعيّ ما: $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 \leq (1 + 2 + 3 + ... + k)^2$

نبرهن أنّ الادّعاء صحيح بالنسبة لِـ $k + 1$ ، أي يجب أن نبرهن أنّ:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k + 1)^2 \leq (1 + 2 + 3 + ... + k + k + 1)^2$$

البرهان:

من فرضيّة الاستقراء ينبع أنّ: $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k + 1)^2 \leq (1 + 2 + 3 + ... + k)^2 + (k + 1)^2$

لذلك يكفي أن نبرهن أنّ: $(1 + 2 + 3 + ... + k)^2 + (k + 1)^2 \leq (1 + 2 + 3 + ... + k + k + 1)^2$

حسب مجموع المتوالية الحسابيّة: $1 + 2 + 3 + ... + k = \frac{k}{2}(1 + k)$

$$1 + 2 + 3 + ... + k + k + 1 = \frac{k+1}{2}(2 + k)$$

لذلك بقي أن نبرهن أنّ: $\frac{k^2}{4}(1 + k)^2 + (k + 1)^2 \leq \frac{(k + 1)^2}{4}(2 + k)^2$

$$\Updownarrow$$

بعد قسمة طرفَي المتباينة على المعامل الموجب $(k + 1)^2$: $\frac{k^2 + 4}{4} \leq \frac{(2 + k)^2}{4}$

$$\Updownarrow$$

$$k^2 + 4 \leq 4 + 4k + k^2$$

لذلك الادّعاء صحيح لكلّ n طبيعيّ

/ يتبع في صفحة 4 /

تكملة حلّ السؤال 2 . أ (2) .

طريقة أخرى للبرهان :

نرمز : $A = 1 + 2 + ... + k$

$B = k + 1$

لذلك بقي أن نبرهن أنّ : $A^2 + B^2 \le (A + B)^2$

$\Updownarrow$

$A^2 + B^2 \le A^2 + 2A \cdot B + B^2$

$\Updownarrow$

$0 \le 2A \cdot B$

بما أنّ $A > 0$ وَ $B > 0$ برهنّا ما بقي أن نبرهن .

ب . حسب المعطى : $a_1 = 58$ وَ $d = 4$

نرمز إلى عدد الحدود في المتوالية بِـ k .

حسب قانون الحدّ العامّ في المتوالية الحسابيّة : $a_k = 58 + 4(k - 1)$ .I

حسب المعطى : $a_k = 4n + 6$ .II

من I وَ II نحصل على : $k = n - 12$

لذلك : $S_k = \frac{n-12}{2}(2 \cdot 58 + 4(n - 13))$

$\Downarrow$

$S_k = (n - 12)(32 + 2n)$

/ يتبع في صفحة 5 /

السؤال 3

في الغرفة I يوجد k نساء وَ k رجال $(k > 1)$. في الغرفة II يوجد k نساء وَ 3k رجال.

نرمي مكعّبًا متوازنًا.

إذا نتج عدد يقسم على 3 ، نختار الواحد تلو الآخر بدون إعادة، شخصين من الغرفة I .

إذا نتج عدد لا يقسم على 3 ، نختار الواحد تلو الآخر بدون إعادة، شخصين من الغرفة II .

عندما نختار بهذه الطريقة، فإنّ احتمال اختيار امرأتين من الغرفة I هو $\frac{15}{7}$ أضعاف احتمال اختيار امرأتين من الغرفة II .

أ. جد k .

ب. جد احتمال اختيار امرأتين بالطريقة الموصوفة.

جـ. معلوم أنّنا اخترنا رجلاً واحدًا على الأقلّ بالطريقة الموصوفة.

ما هو الاحتمال بأن نكون قد اخترنا رجلين بالضبط من الغرفة I ؟

حلّ السؤال 3

أ. احتمال اختيار الغرفة I هو: $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. احتمال اختيار الغرفة II هو: $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

من هنا:

احتمال اختيار امرأتين من الغرفة I هو: $P\left(\begin{matrix}\text{امرأتين من} \\ \text{الغرفة I}\end{matrix}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{k}{2k} \cdot \frac{k-1}{2k-1}$

واحتمال اختيار امرأتين من الغرفة II هو: $P\left(\begin{matrix}\text{امرأتين من} \\ \text{الغرفة II}\end{matrix}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{k}{4k} \cdot \frac{k-1}{4k-1}$

حسب المعطى: $P\left(\begin{matrix}\text{امرأتين من} \\ \text{الغرفة I}\end{matrix}\right) = \frac{15}{7} P\left(\begin{matrix}\text{امرأتين من} \\ \text{الغرفة II}\end{matrix}\right)$

$$\Downarrow$$

من حلّ المعادلة، بعد قسمة طرفَي المعادلة على $k-1$ ، نحصل على: $k = 4$

ب. $P(\text{امرأتين}) = P\left(\begin{matrix}\text{امرأتين من} \\ \text{الغرفة I}\end{matrix}\right) + P\left(\begin{matrix}\text{امرأتين من} \\ \text{الغرفة II}\end{matrix}\right)$

$P(\text{امرأتين}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{15} = \frac{11}{105}$

/ يتبع في صفحة 6 /

تكملة حلّ السؤال 3.

جـ.

$$P\left(\begin{matrix}\text{رجلين من}\\ \text{الغرفة I}\end{matrix} \Big/ \begin{matrix}\text{على الأقلّ}\\ \text{رجل 1}\end{matrix}\right) = \frac{P\left(\begin{matrix}\text{رجلين من}\\ \text{الغرفة I}\end{matrix}\right)}{P\left(\begin{matrix}\text{على الأقلّ}\\ \text{رجل 1}\end{matrix}\right)}$$

$$P\left(\begin{matrix}\text{على الأقلّ}\\ \text{رجل 1}\end{matrix}\right) = 1 - P(\text{امرأتين}) = 1 - \frac{11}{105}$$

$$P\left(\begin{matrix}\text{رجلين من}\\ \text{الغرفة I}\end{matrix}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7}$$

لذلك:

$$P\left(\begin{matrix}\text{رجلين من}\\ \text{الغرفة I}\end{matrix} \Big/ \begin{matrix}\text{على الأقلّ}\\ \text{رجل 1}\end{matrix}\right) = \frac{15}{188}$$

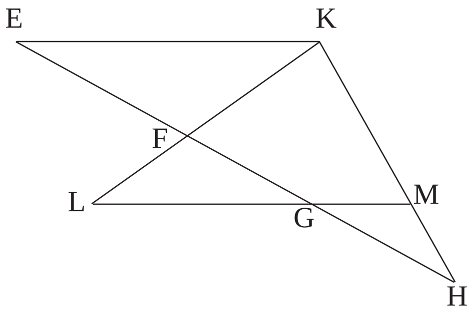
/يتبع في صفحة 7/

السؤال 4

معطى المثلث KHE . النقطتان M وَ G موجودتان على الضلعين KH وَ EH بالتلاؤم بحيث $GM \parallel EK$.

النقطة F موجودة على الضلع EH .

امتدادا القطعتين GM وَ FK يلتقيان في النقطة L (انظر الرسم).



معطى أنّ: $\sphericalangle KML = \sphericalangle KFH$.

أ. برهن أنّ $\Delta KHE \sim \Delta FLG$.

ب. معطى أيضًا أنّ: $\frac{EF}{GE} = \frac{3}{5}$ ، $EH =$ 12.5 سم ، $LG =$ 5 سم .

(1) جد طول EK .

(2) جد النسبة $\frac{MH}{KH}$.

حلّ السؤال 4

أ. معطى أنّ: $GM \parallel EK$

$\sphericalangle KML = \sphericalangle KFH$

يجب أن نبرهن أنّ: $\Delta KHE \sim \Delta FLG$

<u>البرهان</u>:

نرمز: $\sphericalangle KML = \sphericalangle KFH = \alpha$

$\sphericalangle EKH = 180^o - \alpha$ زاويتان في جانب واحد بين متوازيين مجموعهما 180^o .

$\sphericalangle LFG = 180^o - \alpha$ زاوية مجاورة لـِ $\sphericalangle KFH$

$\Downarrow$

$\sphericalangle EKH = \sphericalangle LFG$

$\sphericalangle KEH = \sphericalangle FGL$ الزاويتان المتبادلتان بين متوازيين متساويتان .

$\Downarrow$

$\Delta KHE \sim \Delta FLG$ حسب ز.ز .

/يتبع في صفحة 8/

تكملة حلّ السؤال 4.

ب. معطى أيضًا أنّ : $\frac{EF}{GE} = \frac{3}{5}$ EH = سم 12.5 LG = سم 5

(1) من المعطى ينبع أنّ : $\frac{EF}{FG} = \frac{3}{2}$

حسب قانون تلس أو حسب

تشابه المثلّثين FKE وَ FLG : $\frac{EK}{LG} = \frac{EF}{FG}$

$$\Downarrow$$

$$\frac{EK}{LG} = \frac{3}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$EK = 7.5$$

(2) من التشابه الذي في البند "أ" ينبع أنّ : $\frac{EK}{FG} = \frac{EH}{LG}$

$$\Downarrow$$

$$FG = 3$$

$$\Downarrow$$

$$EG = 7.5$$

$$\Downarrow$$

$$GH = 5$$

حسب قانون تلس أو حسب

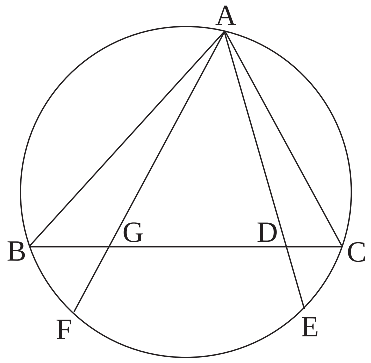
تشابه المثلّثين HKE وَ HMG : $\frac{MH}{KH} = \frac{GH}{EH}$

$$\Downarrow$$

$$\frac{MH}{KH} = \frac{5}{12.5} = \frac{2}{5}$$

/يتبع في صفحة 9/

السؤال 5



المثلث ABC محصور داخل دائرة.

الوتر AF يقطع BC في النقطة G .

الوتر AE يقطع BC في النقطة D (انظر الرسم).

معطى أنّ: $BF = BG$

$\sphericalangle BAF = \sphericalangle CAE$

أ. برهن أنّ $\Delta AGB \cong \Delta ACE$.

ب. معطى أيضًا أنّ: $CE = 2$ سم ، $AC = 5$ سم ،

$GC = 6$ سم .

احسب طول الوتر AE .

حلّ السؤال 5

أ. معطى أنّ: $BF = BG$ $\quad \sphericalangle BAF = \sphericalangle CAE$

يجب أن نبرهن أنّ: $\Delta AGB \cong \Delta ACE$

<u>البرهان</u>:

$BF = CE$ زاويتان محيطيّتان متساويتان تستندان على وترين متساويين.

$\Downarrow$

$BG = CE$

$\sphericalangle ABC = \sphericalangle AEC$ الزاويتان المحيطيّتان اللتان تستندان على نفس القوس هما متساويتان.

$\Downarrow$

$\sphericalangle AGB = \sphericalangle ACE$ مجموع زوايا المثلّث هو 180^o.

$\Downarrow$

$\Delta AGB \cong \Delta ACE$ حسب ز.ض.ز.

ب. معطى أيضًا أنّ: $CE = 2$ سم $\quad AC = 5$ سم $\quad GC = 6$ سم

من التطابق الذي في البند "أ" ينبع أنّ: $AC = AG = 5$

$AB = AE$

في المثلّث المتساوي الساقين AGC يتحقّق: $\cos \sphericalangle AGC = \frac{3}{5}$

$\Downarrow$

$\cos \sphericalangle AGB = -\frac{3}{5}$

حسب نظريّة جيب التمام (الكوسينوس)

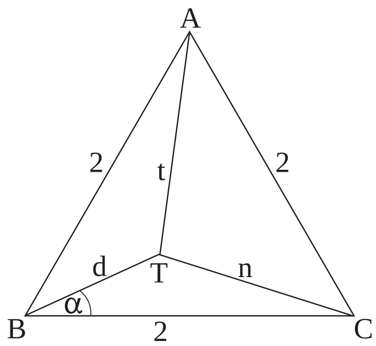
في المثلّث ABG: $AB^2 = 2^2 + 5^2 - 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot (-\frac{3}{5})$

$\Downarrow$

$AB = \sqrt{41}$ سم $\quad \Rightarrow \quad AE = \sqrt{41}$ سم

/ يتبع في صفحة 10 /

السؤال 6



معطى مثلث متساوي الأضلاع ABC .

النقطة T موجودة داخل المثلث (انظر الرسم) .

معطى أنّ : $\sphericalangle TBC = \alpha$ ، $CT = n$ سم ،

$BT = d$ سم ، $AT = t$ سم .

طول ضلع المثلث هو 2 سم .

أ . برهن أنّ $\sin(\alpha - 30^o) = \frac{n^2 - t^2}{4d}$.

ب . عبّر عن مساحة المثلث ATC

بدلالة α وَ d .

حلّ السؤال 6

أ . حسب نظريّة جيب التمام (الكوسينوس) في المثلّث BTC :

I. $n^2 = 2^2 + d^2 - 2 \cdot 2 \cdot d\cos\alpha$

حسب نظريّة جيب التمام في المثلّث TBA :

II. $t^2 = 2^2 + d^2 - 2 \cdot 2 \cdot d\cos(60^o - \alpha)$

من I وَ II نحصل على:

$$\frac{n^2 - t^2}{4d} = \cos(60^o - \alpha) - \cos\alpha$$

$$\Downarrow$$

حسب متطابقة فرق جيوب التمام:

$$\frac{n^2 - t^2}{4d} = -2\sin\frac{60^o}{2}\sin\frac{60^o - 2\alpha}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{n^2 - t^2}{4d} = \sin(\alpha - 30^o)$$

ب .

$$S_{\Delta ATC} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta ABT} - S_{\Delta TBC}$$

$$\Downarrow$$

$$S_{\Delta ATC} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sin 60^o - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot d\sin(60^o - \alpha) - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot d\sin\alpha$$

$$\Downarrow$$

$$S_{\Delta ATC} = \sqrt{3} - d(\sin(60^o - \alpha) + \sin\alpha)$$

/ يتبع في صفحة 11 /

السؤال 7

معطاة الدالة $f(x) = \frac{6}{x^2 + 3a^2}$. a هو بارامتر، $a > 0$.

أ. جد (عبّر بدلالة a إذا دعت الحاجة):

(1) مجال تعريف الدالة $f(x)$.

(2) نقاط تقاطع الرسم البياني للدالة $f(x)$ مع المحورين (إذا وُجدت مثل هذه النقاط).

(3) خطوط التقارب المعامدة للمحورين للدالة $f(x)$ (إذا وُجدت مثل هذه الخطوط).

(4) النقاط القصوى للدالة $f(x)$ (إذا وُجدت مثل هذه النقاط)، وحدّد نوع هذه النقاط.

ب. ارسم رسمًا تقريبيًّا للرسم البياني للدالة $f(x)$.

جـ. معلوم أنّه توجد للدالة $f(x)$ نقطتا التواء فقط وفيهما $x = \pm a$.

(1) استعن بالرسم البياني لِـ $f(x)$ ، وعبّر بدلالة a عن المجال الذي تكون فيه دالة المشتقّة الثانية $f''(x)$ موجبة، والمجال الذي تكون فيه سالبة. علّل.

(2) عبّر بدلالة a عن الإحداثيات x للنقاط القصوى لِـ $f'(x)$ ، وحدّد نوع هذه النقاط.

د. عبّر بدلالة a عن المساحة المحصورة بين الرسم البياني للدالة $f'(x)$ والمستقيم $x = a$ والمحور x . أشر إلى المساحة المطلوبة في هيئة محاور.

حلّ السؤال 7

أ. (1) $f(x)$ معرّفة لكلّ x (المقام موجب دائمًا، لأنّه عبارة عن مجموع عدد موجب وعدد غير سالب).

(2) نقطة التقاطع مع المحور y : $(0 , \frac{2}{a^2})$. لا توجد نقاط تقاطع مع المحور x .

(3) خطّ التقارب الأفقيّ: $y = 0$

لا توجد خطوط تقارب عموديّة.

(4) $f'(x) = \frac{-12x}{(x^2 + 3a^2)^2} \qquad f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

بالنسبة لِـ $x > 0$ $\quad f'(x) < 0$

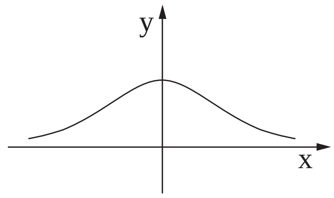
بالنسبة لِـ $x < 0$ $\quad f'(x) > 0$

من هنا توجد نهاية عظمى في النقطة $(0 , \frac{2}{a^2})$

/ يتبع في صفحة 12 /

تكملة حلّ السؤال 7.

ب.



جـ. حسب المعطى ينبع أنّ: $f''(a) = f''(-a) = 0$

(1) $f''(x) > 0$ بالنسبة لِـ $x > a$ أو $x < -a$ ، لأنّ $f(x)$ مقعّرة باتّجاه الأعلى $\cup$ في هذين المجالين.

$f''(x) < 0$ بالنسبة لِـ $-a < x < a$ ، لأنّ $f(x)$ مقعّرة باتّجاه الأسفل $\cap$ في هذا المجال.

(2)

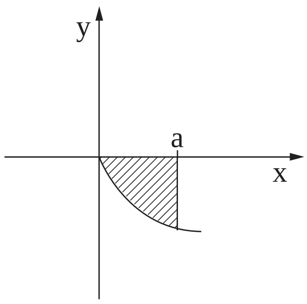
x	$x < -a$	$-a$	$-a < x < a$	a	$x > a$
$f''(x)$	+	0	−	0	+
$f'(x)$	↗		↘		↗

توجد لِـ $f'(x)$ نهاية عظمى في النقطة التي فيها $x = -a$

وتوجد نهاية صغرى في النقطة التي فيها $x = a$

د. حسب البند "أ (4)": $f'(x)$ سالبة بالنسبة لِـ $x > 0$ وَ $f'(0) = 0$.

لذلك المساحة المطلوبة S موجودة تحت المحور x في الحدود التي بين 0 وَ a :



$$S = -\int_0^a f'(x)\,dx = -[f(x)]_0^a$$

$$S = \frac{1}{2a^2}$$

/يتبع في صفحة 13/

السؤال 8

معطاة الدالة $f(x) = -\sqrt{\sin x} + \frac{1}{2}\sin x$ في القطعة $0 \leqslant x \leqslant 3\pi$.

أ. جد في القطعة المعطاة:

(1) بالنسبة لأيّة قيَم x تكون الدالة معرَّفة.

(2) إحداثيات النقاط القصوى للدالة، وحدّد نوع هذه النقاط.

ب. (1) ارسم رسمًا تقريبيًّا للرسم البياني للدالة في القطعة المعطاة.

(2) جد معادلة مستقيم يمسّ الرسم البياني للدالة في نقطتين بالضبط.

جـ. هل توجد قيَم لـِ x في القطعة المعطاة تتحقّق بالنسبة لها المتباينة $\sqrt{\sin x} > \frac{1}{2}\sin x$ ؟ علّل.

حلّ السؤال 8

أ. (1) بالنسبة لكلّ x في القطعة المعطاة: $\sin x \geq 0$ ($\sqrt{\sin x}$ معرّف فقط عندما $\sin x \geq 0$)

$$\Updownarrow$$

$0 \leq x \leq \pi$ أو $2\pi \leq x \leq 3\pi$

(2) (بالنسبة لـِ $2\pi < x < 3\pi$ أو $0 < x < \pi$):

$$f'(x) = \frac{\cos x(\sqrt{\sin x} - 1)}{2\sqrt{\sin x}}$$

$\cos x = 0$ أو $f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{\sin x} - 1 = 0$

$$\Updownarrow \qquad \Updownarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{3\pi}{2} & \text{ليس في مجال التعريف} \\ x = \frac{5\pi}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{5}{2}\pi \end{cases}$$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π		2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π
f(x)	0 ↘	$-\frac{1}{2}$	0 ↗		0 ↘	$-\frac{1}{2}$	0 ↗

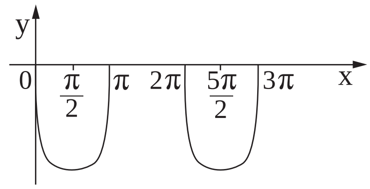
نهاية عظمى في النقاط: $(0, 0)$ $(\pi, 0)$ $(2\pi, 0)$ $(3\pi, 0)$

نهاية صغرى في النقطتين: $(\frac{\pi}{2}, -\frac{1}{2})$ $(\frac{5\pi}{2}, -\frac{1}{2})$

/ يتبع في صفحة 14 /

تكملة حلّ السؤال 8.

ب. (1)



(2) $y = -\frac{1}{2}$ (مستقيم يمرّ عبر نقطتَي النهاية الصغرى)

جـ. المتباينة $\frac{1}{2}\sin x > \sqrt{\sin x}$ تكافئ $f(x) > 0$.

لذلك لا توجد قيَم تتحقّق بالنسبة لها المتباينة $\frac{1}{2}\sin x > \sqrt{\sin x}$ ، لأنّ $f(x) \le 0$ لكلّ x في مجال التعريف.

/ يتبع في صفحة 15 /

السؤال 9

نقسّم خيطًا طوله k إلى قسمين (القسمان ليسا متساويين بالضرورة) .
نُكوِّن من أحد قسمَي الخيط دائرة، ونُكوِّن من القسم الآخر مربّعًا .
مجموع مساحتَي الشكلين هو أصغر ما يمكن عندما يكون محيط الدائرة $\frac{5\pi}{\pi+4}$.
جد قيمة k .

حلّ السؤال 9

محيط الدائرة: $x \quad (0 \le x \le k)$

محيط المربّع: $k - x$

مجموع المساحتين: $S = \pi \cdot (\frac{x}{2\pi})^2 + (\frac{k-x}{4})^2$

$$\Downarrow$$

$$S' = \frac{x(\pi+4) - \pi k}{8\pi}$$

$$S' = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{I.} \ \ x = \frac{\pi k}{\pi + 4}$$

(النقطة $\frac{\pi k}{\pi+4}$ موجودة في القطعة $[0 , k]$)

فحص أصغر مساحة ممكنة: $S'' = \frac{\pi + 4}{8\pi} > 0$

حسب المعطى: $\text{II.} \quad x = \frac{5\pi}{\pi + 4}$

من I وَ II نحصل على: $k = 5$