מדינת ישראל

משרד החינוך

סוג הבחינה: א. בגרות לבתי"ס על־יסודיים
ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים

מועד הבחינה: חורף תשע"ג

מספר השאלון: **035805, 315**

תרגום לערבית (2)

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מתמטיקה

4 יחידות לימוד — שאלון שני

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעה ושלושה רבעים.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:
בשאלון זה שני פרקים:
פרק ראשון — סדרות, טריגונומטריה במרחב
$33\frac{1}{3} \times 1$ — $33\frac{1}{3}$ נק'
פרק שני — גדילה ודעיכה, חשבון דיפרנציאלי
ואינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות,
פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות ופונקציות חזקה
$33\frac{1}{3} \times 2$ — $66\frac{2}{3}$ נק'
סה"כ — 100 נק'

ג. חומר עזר מותר בשימוש:
1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
2. דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:
1. אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
2. התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
3. לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

בהצלחה!

دولة إسرائيل

وزارة المعارف

نوع الامتحان: أ. بجروت للمدارس الثانويّة
ب. بجروت للممتحَنين الخارجيّين

موعد الامتحان: شتاء 2013

رقم النموذج: **035805، 315**

ترجمة إلى العربيّة (2)

اقتراح حلّ لأسئلة امتحان بجروت

الرياضيّات

4 وحدات تعليمية – النموذج الثاني

تعليمات للممتحَن

أ. مدّة الامتحان: ساعة وثلاثة أرباع.

ب. مبنى النموذج وتوزيع الدرجات:
في هذا النموذج فصلان:
الفصل الأوّل – المتواليات، حساب المثلثات في الفراغ
$33\frac{1}{3} \times 1$ — $33\frac{1}{3}$ درجة
الفصل الثاني – التزايد والتضاؤل، حساب التفاضل والتكامل للدوالّ المثلثية والدوالّ الأسّيّة واللوغريثمية ودوالّ القوى
$33\frac{1}{3} \times 2$ — $66\frac{2}{3}$ درجة
المجموع — 100 درجة

جـ. موادّ مساعدة يُسمح استعمالها:
1. حاسبة غير بيانية. لا يُسمح استعمال إمكانيات البرمجة في الحاسبة التي يمكن برمجتها. استعمال الحاسبة البيانية أو إمكانيات البرمجة في الحاسبة قد يؤدّي إلى إلغاء الامتحان.
2. لوائح قوانين (مرفقة).

د. تعليمات خاصّة:
1. لا تنسخ السؤال؛ اكتب رقمه فقط.
2. ابدأ كلّ سؤال في صفحة جديدة. اكتب في الدفتر مراحل الحلّ، حتّى إذا أجريتَ حساباتك بواسطة حاسبة.
فسّر كلّ خطواتك، بما في ذلك الحسابات، بالتفصيل وبوضوح وبترتيب.
عدم التفصيل قد يؤدّي إلى خصم درجات أو إلى إلغاء الامتحان.
3. لكتابة مسوّدة يجب استعمال دفتر الامتحان أو الأوراق التي حصلتَ عليها من المراقبين.
استعمال مسوّدة أخرى قد يؤدّي إلى إلغاء الامتحان.

التعليمات في هذا النموذج مكتوبة بصيغة المذكّر وموجّهة للممتحَنات وللممتحَنين على حدّ سواء.

نتمنّى لك النجاح!

السؤال 1

معطاة متواليتان، a_n وَ b_n ، معرَّفتان لكلّ n طبيعي حسب الدستور: $a_{n+1} = 3a_n + 5$

$b_n = a_n + 2.5$

أ. برهن أنّ المتوالية b_n هي متوالية هندسية، وَجِد أساسها $(a_n \neq -2.5)$.

معطى أيضًا أنّ $b_1 = 2$.

ب. عبّر بدلالة n عن a_n .

جـ. (1) عبّر بدلالة n عن مجموع n الحدود الأولى في المتوالية b_n .

(2) عبّر بدلالة n عن مجموع n الحدود الأولى في المتوالية a_n .

حلّ السؤال 1

أ. معطى أنّ: $a_{n+1} = 3a_n + 5$ $\quad b_n = a_n + 2.5$

$$\Downarrow$$

$$b_{n+1} = a_{n+1} + 2.5 = 3a_n + 7.5$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{3(a_n + 2.5)}{a_n + 2.5} = 3$$

الأساس هو قيمة ثابتة، لذلك المتوالية هي هندسيّة.

ب. حسب المعطى: $a_n = b_n - 2.5 \quad , \quad b_1 = 2$

حسب البند "أ"، أساس b_n هو 3، لذلك: $b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

من هنا: $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 2.5$

جـ. (1) حسب معادلة مجموع n الحدود في المتوالية الهندسيّة، مجموع n الحدود في المتوالية b_n هو:

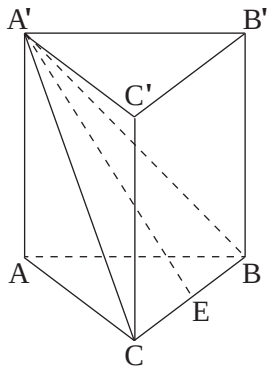
$$S_I = \frac{2(3^n - 1)}{3 - 1} = 3^n - 1$$

(2) مجموع n الحدود في المتوالية التي كلّ واحد من حدودها هو -2.5 : $S_{II} = -2.5n$

لذلك مجموع المتوالية $a_n = b_n - 2.5$ هو: $S_I + S_{II} = 3^n - 1 - 2.5n$

/ يتبع في صفحة 3 /

السؤال 2



معطى منشور قائم $ABCA'B'C'$ ، قاعدتاه مثلثان متساويا الأضلاع (انظر الرسم) .

$A'E$ هو الارتفاع على BC في المثلث $A'BC$.

الزاوية التي بين $A'E$ وبين مستوى القاعدة ABC هي α .

ارتفاع المنشور هو h .

أ. عبّر بدلالة h وَ α عن طول ضلع قاعدة المنشور.

ب. إذا كان معطى أنّ $\alpha = 30^o$ ، جد مقدار الزاوية التي بين $A'C$ والمستوى ABC .

حلّ السؤال 2

أ. حسب المعطى: $A'E \perp BC$

$A'E$ هو ارتفاع على القاعدة

في المثلّث المتساوي الساقين $A'BC$ ،

لذلك E هي منتصف BC ،

من هنا في المثلّث المتساوي الأضلاع ABC : $AE \perp BC$

لذلك: $\sphericalangle A'EA = \alpha$

I. $\frac{h}{AE} = \tan\alpha$

نرمز: a — طول ضلع القاعدة

II. $\frac{AE}{a} = \sin 60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$

من I وَ II ينتج: $a = \frac{2 \cdot h}{\sqrt{3}\tan\alpha}$

ب. AA' معامد للمستوى ABC ، لذلك الزاوية المطلوبة هي $\sphericalangle A'CA$.

$$\tan(\sphericalangle A'CA) = \frac{h}{a} = h \cdot \frac{\sqrt{3}\tan\alpha}{2h} = \frac{1}{2}$$

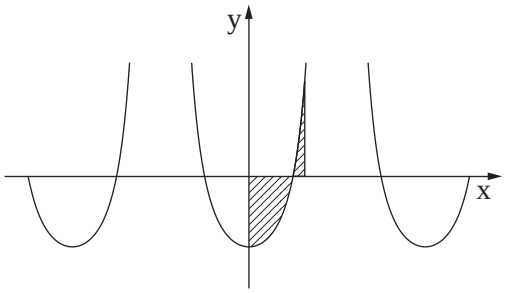
$$\Downarrow$$

$$\sphericalangle A'CA = 26.56^o$$

/ يتبع في صفحة 4 /

السؤال 3

معطاة الدالة $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-2$ في القطعة $-\frac{5}{4}\pi \leqslant x \leqslant \frac{5}{4}\pi$ (انظر الرسم).



أ. جد في القطعة المعطاة :

(1) مجال تعريف الدالة وخطوط تقارب الدالة، الموازية للمحور y .

(2) نقاط تقاطع الرسم البياني للدالة مع المحور x .

ب. في المجال $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}$ ، جد المساحة المحصورة بين الرسم البياني للدالة والمحور x (المساحة المخطّطة في الرسم).

حلّ السؤال 3

أ. (1) المقام يساوي صفرًا عندما :

$$\cos^2 x=0 \iff \cos x=0 \iff x=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

$$\Downarrow$$

مجال التعريف : $x\neq\frac{\pi}{2} \quad , \quad x\neq-\frac{\pi}{2}$

خطوط التقارب : $x=\frac{\pi}{2} \quad , \quad x=-\frac{\pi}{2}$

(2)

$$f(x)=0 \iff \cos^2 x=\frac{1}{2} \iff \cos x=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad \cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k \qquad x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k$$

$k=0 \quad \Rightarrow \quad x=\pm\frac{\pi}{4} \qquad x=\pm\frac{3\pi}{4}$

$k=\pm 1 \quad \Rightarrow \qquad\qquad x=\pm\frac{5\pi}{4}$

ب.
$$S=-\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx = -[\tan x-2x]_0^{\frac{\pi}{4}}+[\tan x-2x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$S=\frac{\pi}{2}-1+(\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3})-(1-\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}-2=0.779$$

/ يتبع في صفحة 5 /

السؤال 4

معطاة الدالة $f(x) = \ell og_2(-x^2 + 4x + 32)$.

أ. جد مجال تعريف الدالة.

ب. جد نقاط تقاطع الرسم البياني للدالة مع المحورين.

أبقِ في إجابتك، إذا دعت الحاجة، رقمين بعد الفاصلة العشرية.

جـ. جد مجالات تصاعد وتنازل الدالة.

د. جد معادلة المستقيم الذي يمسّ الرسم البياني للدالة ويوازي المحور x .

في إجابتك، بإمكانك إبقاء ℓog أو بإمكانك إبقاء رقمين بعد الفاصلة العشرية.

حلّ السؤال 4

أ. مجال التعريف:

$$-x^2 + 4x + 32 > 0$$
$$\Updownarrow$$
$$-4 < x < 8$$

ب.

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad f(0) = \ell og_2(32) = 5$$

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 + 4x + 32 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \pm \sqrt{35}$$

لذلك نقاط التقاطع مع المحورين هي: $(0\,,\,5)$, $(-3.92\,,\,0)$, $(7.92\,,\,0)$

جـ.

$$f'(x) = \frac{-2x + 4}{(-x^2 + 4x + 32) \cdot \ell n2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

x	$-4 < x < 2$	2	$2 < x < 8$
f'(x)	+	0	−
f(x)	↗		↘

تصاعد: $-4 < x < 2$

تنازل: $2 < x < 8$

د. المستقيم يمسّ في النقطة القصوى للدالّة التي فيها $x = 2$ ، لذلك: $y = \ell og_2 36 = 5.17$ $\Rightarrow$ $f(2) = \ell og_2 36$

/ يتبع في صفحة 6 /

السؤال 5

أ. في 1/1/2000 كان عدد سكّان دولة معيّنة 2.5 مليون نسمة.

يزداد عدد السكّان بصورة أسّيّة، وحتّى 1/1/2010 ازداد عدد السكّان بنسبة 63% .

بعد مرور كم سنة منذ 1/1/2000 سيكون عدد السكّان في الدولة 8 ملايين؟

ب. معطاة الدالة $f(x) = e^{x^2-m} - e^{m-x^2}$. m هو بارامتر.

(1) عبّر بدلالة m (إذا دعت الحاجة) عن إحداثيات النقطة القصوى للدالة، وحدّد نوع هذه النقطة.

(2) معطى أنّ المستقيم $y = 0$ يمسّ الرسم البياني للدالة.

جد قيمة m .

ملاحظة: لا توجد علاقة بين البند "أ" والبند "ب".

حلّ السؤال 5

أ. $M_t = M_o \cdot q^t$

بعد مرور 10 سنوات: $2.5 \times 1.63 = 2.5 \times q^{10} \implies q = 1.63^{\frac{1}{10}}$

بعد مرور t سنوات: $8 = 2.5 \times q^t = 2.5 \cdot 1.63^{\frac{t}{10}}$

$$\Downarrow$$

$t = 23.8$ سنة

ب. (1) $f'(x) = 2x(e^{x^2-m} + e^{m-x^2})$

$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ (لأنّ $0 < e^{x^2-m} + e^{m-x^2}$)

$f(0) = e^{-m} - e^{m}$

x	$x < 0$	0	$x > 0$
f'(x)	–	0	+
f(x)	↘		↗

نهاية صغرى في $(0 \ , \ e^{-m} - e^{m})$

(2) ميل المستقيم $y = 0$ هو صفر، لذلك يمسّ الرسم البيانيّ للدالّة في النقطة التي فيها المشتقّة تساوي صفرًا، $(0 \ , \ e^{-m} - e^{m})$.

من هنا: $e^{-m} - e^{m} = 0$

$$\Downarrow$$

$e^{-m} = e^{m}$

$$\Downarrow$$

$m = 0$

حقوق الطبع محفوظة لدولة إسرائيل.
النسخ أو النشر ممنوعان إلّا بإذن من وزارة المعارف.