

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מתמטיקה

4 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	—	אלגברה, גאומטריה אנליטית,
הסתברות	—	$16 \frac{2}{3} \times 2$ — $33 \frac{1}{3}$ נקודות
פרק שני	—	גאומטריה וטריגונומטריה
במישור	—	$16 \frac{2}{3} \times 2$ — $33 \frac{1}{3}$ נקודות
פרק שלישי	—	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי
סה"כ	—	$16 \frac{2}{3} \times 2$ — $33 \frac{1}{3}$ נקודות 100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

- (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
- (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
- הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
- חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
- (3) לטייטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
- שימוש בטייטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

שאלה 1

רוכב אופניים יצא מיישוב A ליישוב B, ובדיוק באותה שעה יצא הולך רגל מיישוב B ליישוב A.

הולך הרגל הלך במהירות קבועה שקטנה ב-10 קמ"ש מהמהירות של רוכב האופניים.

כעבור 24 דקות המרחק בין רוכב האופניים להולך הרגל היה 12 ק"מ.

כעבור 36 דקות נוספות הם נפגשו.

א. מצא את המהירות של רוכב האופניים.

ב. מצא באיזה מרחק מיישוב A נפגשו רוכב האופניים והולך הרגל.

פתרון לשאלה 1

מהירות (קמ"ש)	זמן (שעות)	דרך (ק"מ)	א.
x	$\frac{36}{60}$	$\frac{36}{60}x$	36 דקות לפני הפגישה רוכב האופניים
x - 10	$\frac{36}{60}$	$\frac{36}{60}(x - 10)$	36 דקות לפני הפגישה הולך הרגל

$$\frac{36}{60}x + \frac{36}{60}(x - 10) = 12$$

↓

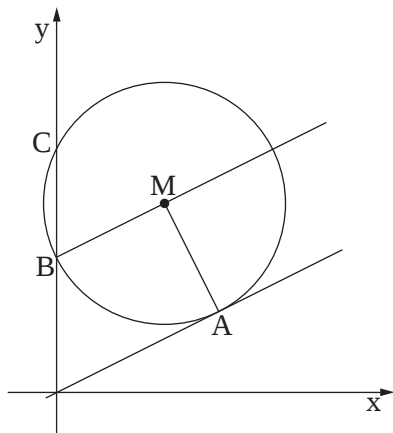
$$x = 15$$

ב. הזמן עד הפגישה הוא: 60 דקות = 24 + 36

לכן המרחק שעבר

רוכב האופניים עד הפגישה הוא: 15 ק"מ = 15 · 1

שאלה 2



- נתון מעגל, שמרכזו M נמצא על הישר $y = 7$.
 הישר $y = \frac{1}{2}x$ משיק למעגל בנקודה $A(6, 3)$ (ראה ציור).
 א. (1) מצא את השיעורים של המרכז M .
 (2) מצא את משוואת המעגל.
 ב. המעגל חותך את ציר ה- y בנקודות B ו- C .
 נקודה C נמצאת מעל נקודה B (ראה ציור).
 (1) הראה כי הישר BM מקביל לישר המשיק למעגל בנקודה A .
 (2) מצא את שטח המשולש BMA .

פתרון לשאלה 2

- א. (1) MA מאונך למשיק ששיפועו $\frac{1}{2}$,
 לכן השיפוע של MA הוא:
 -2
 נקודה על הישר MA היא:
 $A(6, 3)$
 מכאן שמשוואת MA היא:
 I. $y = -2x + 15$
 נתון ששיעור ה- y של M הוא:
 II. 7
 מ- I ו- II מקבלים כי שיעור
 ה- x של M הוא:
 $x = 4$
 $\Downarrow$
 $M(4, 7)$
 (2)
 $M(4, 7) \quad A(6, 3)$
 $\Downarrow$
 $MA^2 = (6 - 4)^2 + (7 - 3)^2 = 20$ רדיוס:
 $(x - 4)^2 + (y - 7)^2 = 20$ מכאן:

המשך פתרון לשאלה 2.

ב. (1) שיעור ה־x של B הוא:

$$x = 0$$

מהצבת $x = 0$ במשוואת

המעגל מקבלים: $y = 5, y = 9$

נתון כי C מעל B, לכן

שיעור ה־y של B הוא: $y = 5$

השיפוע של BM על פי

שתי הנקודות $M(4,7)$ ו־ $B(0,5)$ הוא: $\frac{1}{2}$

שיפוע של BM שווה לשיפוע של המשיק, לכן BM מקביל למשיק.

$$\angle BMA = 90^\circ \quad (\text{שיפוע BM הוא } \frac{1}{2} \text{ ושיפוע MA הוא } -2) \quad (2)$$

$\Downarrow$

$$S_{\Delta BMA} = \frac{1}{2} BM \cdot MA$$

$$S_{\Delta BMA} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{20} \cdot \sqrt{20} = 10$$

שאלה 3

בשלוש קופסאות A, B ו- C יש כדורים שחורים ולבנים. בקופסה A יש 2 כדורים שחורים ו- 3 כדורים לבנים.

בקופסה B יש 3 כדורים שחורים ו- 2 כדורים לבנים. בקופסה C יש 4 כדורים שחורים ו- 1 כדור לבן.

א. בוחרים באקראי קופסה, ומוציאים ממנה באקראי כדור אחד.

(1) מהי ההסתברות להוציא כדור לבן?

(2) ידוע שהוצא כדור לבן.

מהי ההסתברות שהכדור הוצא מקופסה B?

ב. מקופסה C מוציאים באקראי 2 כדורים זה אחר זה בלי החזרה.

מהי ההסתברות שאחרי הוצאת הכדורים לא נותר בקופסה C כדור לבן?

פתרון לשאלה 3

א. (1) ההסתברות לבחור בקופסה A

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5}$$

ולהוציא ממנה כדור לבן:

ההסתברות לבחור בקופסה B

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}$$

ולהוציא ממנה כדור לבן:

ההסתברות לבחור בקופסה C

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}$$

ולהוציא ממנה כדור לבן:

מכאן שההסתברות להוציא

$$P\left(\begin{array}{c} \text{כדור} \\ \text{לבן} \end{array}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

כדור לבן היא:

$$P\left(\begin{array}{c} \text{קופסה} \\ B \end{array} \middle/ \begin{array}{c} \text{כדור} \\ \text{לבן} \end{array}\right) = \frac{P(B \cap \text{כדור לבן})}{P\left(\begin{array}{c} \text{כדור} \\ \text{לבן} \end{array}\right)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{3} \quad (2)$$

ב. "לא נותר בקופסה C כדור לבן" פירושו שהוצא מקופסה C כדור לבן וכדור שחור.

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{4} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{5}$$

לכן ההסתברות להוציא מקופסה C כדור לבן וכדור שחור בלי החזרה היא:

המשך פתרון לשאלה 4 סעיף ב.

$$\angle BAD = \angle DAE = \alpha \quad (2)$$

הקטע, המחבר את מרכז המעגל עם נקודה שממנה
יוצאים שני משיקים למעגל, חוצה את הזווית שבין
המשיקים

$\Downarrow$

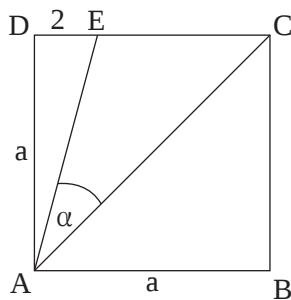
$$\angle BAD = \angle ABD$$

$\Downarrow$

$$BD = AD \quad \text{מול זוויות שוות — צלעות שוות}$$

/המשך בעמוד 8/

שאלה 5



נתון ריבוע ABCD שאורך צלעו a ס"מ.

נקודה E נמצאת על הצלע DC (ראה ציור).

נתון: DE = 2 ס"מ, $\angle EAC = \alpha$.

א. הבע את a באמצעות α .

ב. אם נתון כי $\alpha = 30^\circ$, חשב את שטח המשולש ACE.

ג. חשב את α במקרה שבו DE = EC = 2 ס"מ.

פתרון לשאלה 5

א. בריבוע האלכסונים חוצים את הזוויות $\angle DAC = 45^\circ$

$\Downarrow$

$$\angle DAE = 45^\circ - \alpha$$

$$\operatorname{tg}(45^\circ - \alpha) = \frac{2}{a}$$

$\Downarrow$

$$a = \frac{2}{\operatorname{tg}(45^\circ - \alpha)}$$

$$a = \frac{2}{\operatorname{tg}(45^\circ - 30^\circ)} = 7.46 \quad \text{ב.}$$

$$CA = \sqrt{a^2 + a^2} = 10.56 \quad \text{דרך I:}$$

$$EC = a - 2 = 5.46$$

$$S_{\triangle ACE} = \frac{1}{2} \cdot EC \cdot CA \sin 45^\circ$$

$\Downarrow$

$$S_{\triangle ACE} = 20.37 \text{ סמ"ר}$$

דרך II:

$$S_{\triangle AEC} = S_{\triangle ACD} - S_{\triangle AED} = \frac{1}{2} \cdot a^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot a = 20.37 \text{ סמ"ר}$$

$$DE = EC = 2 \quad \text{ג.}$$

$\Downarrow$

$$a = 4$$

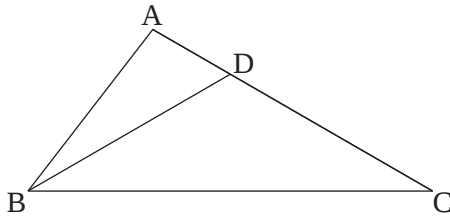
$$\operatorname{tg} \angle DAE = \frac{2}{4}$$

$$\angle DAE = 26.56^\circ$$

$\Downarrow$

$$\alpha = 45^\circ - 26.56^\circ = 18.43^\circ$$

שאלה 6



במשולש ABC נתון: $AB = 5$ ס"מ

$AC = 8$ ס"מ

$BC = 10$ ס"מ

נקודה D נמצאת על הצלע AC כך ש- $BD = DC$ (ראה ציור).

א. חשב את זוויות המשולש BDC.

ב. מצא את היחס בין רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD לרדיוס המעגל החוסם את המשולש BDC.

פתרון לשאלה 6

$$BD = DC$$

א. נתון:

$$5^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cos \angle C \quad \text{במשולש ABC מתקיים:}$$

$\Downarrow$

$$\angle C = 29.69^\circ$$

$$\angle DBC = \angle C = 29.69^\circ \quad \text{מול צלעות שוות – זוויות שוות}$$

$$\angle BDC = 180^\circ - 2 \times 29.69^\circ = 120.62^\circ$$

$$\text{ב.} \quad \text{I. } R_1 = \frac{5}{2 \sin(180^\circ - 120.62^\circ)} \quad \text{רדיוס המעגל החוסם } \triangle ABD :$$

$$\text{II. } R_2 = \frac{10}{2 \cdot \sin 120.62^\circ} \quad \text{רדיוס המעגל החוסם } \triangle BDC :$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \quad \text{מ- I ו- II מקבלים:}$$

שאלה 7

$$\text{נתונה הפונקציה } f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^2}.$$

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).
 ג. מצא את נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה, וקבע את סוגן.
 ד. (1) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
 (2) היעזר בגרף שסרטטת, ומצא את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה בשתי נקודות בדיוק.

פתרון לשאלה 7

א. תחום ההגדרה: $x^2 - 4 \geq 0, x \neq 0$

$$\Downarrow$$

$$x \leq -2 \text{ או } x \geq 2$$

ב. $x \neq 0 \Leftrightarrow$ אין חיתוך עם ציר ה-y

$$y = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

ג. $(x \neq 0) \quad f'(x) = \frac{8x - x^3}{x^4 \sqrt{x^2 - 4}} = \frac{8 - x^2}{x^3 \sqrt{x^2 - 4}}$

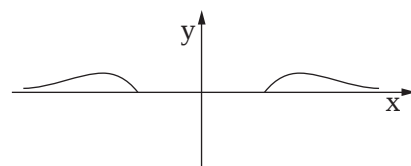
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{8}$$

x	$-\sqrt{13}$	$-\sqrt{8}$	-2		2	$\sqrt{8}$	$\sqrt{13}$
f(x)	$\frac{3}{13}$ ↗	$\frac{1}{4}$	0 ↘		0 ↗	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{13}$ ↘

מקסימום מוחלט: $(\sqrt{8}, \frac{1}{4}), (-\sqrt{8}, \frac{1}{4})$

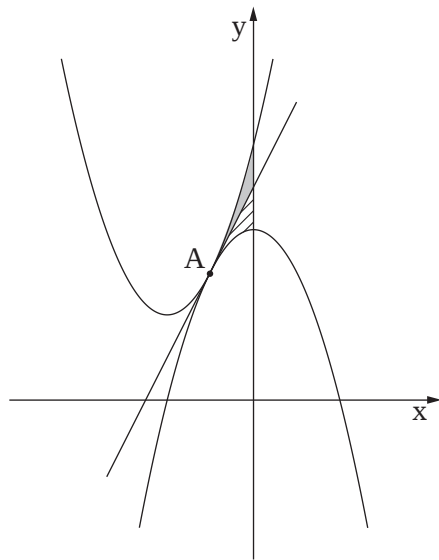
מינימום מוחלט: $(2, 0), (-2, 0)$

ד. (1)



(2) $y = \frac{1}{4}$

שאלה 8



בציור שלפניך מוצגות שתי פרבולות:

$$f(x) = x^2 + 4x + 6$$

$$g(x) = -x^2 + c$$

c הוא פרמטר.

הפרבולות משיקות זו לזו בנקודה A .

דרך נקודה A העבירו משיק המשותף לשתי הפרבולות (ראה ציור).

א. (1) סמן ב- t את שיעור ה- x של נקודה A , והבע באמצעות t

את השיפוע של המשיק המשותף.

הבע בשני אופנים.

(2) מצא את השיעורים של נקודה A .

(3) מצא את ערך הפרמטר c .

ב. המשיק המשותף מחלק את השטח, המוגבל על ידי שתי הפרבולות

ועל ידי ציר ה- y , לשני שטחים (השטח האפור והשטח המקווקו בציור).

הצב את הערך של הפרמטר c שמצאת, והראה כי שני השטחים שווים זה לזה.

פתרון לשאלה 8

$$f'(x) = 2x + 4 \quad g'(x) = -2x \quad \text{א. (1)}$$

$$\Downarrow$$

$$\Downarrow$$

$$f'(t) = 2t + 4$$

$$g'(t) = -2t$$

$$f'(t) = g'(t) \quad (2)$$

$$\Downarrow$$

$$t = -1$$

$$\Downarrow$$

$$f(-1) = 3$$

$$\Downarrow$$

$$A(-1, 3)$$

$$f(-1) = g(-1) \quad (3)$$

$$\Downarrow$$

$$3 = -1 + c$$

$$\Downarrow$$

$$c = 4$$

המשך פתרון לשאלה 8.

I. $f'(-1) = 2$ ב. שיפוע המשיק:

II. $A(-1, 3)$ נקודת ההשקה:

מ־ I ו־ II מקבלים את משוואת המשיק: $y = 2x + 5$

$$\text{השטח האפור} = \int_{-1}^0 [f(x) - y] dx = \int_{-1}^0 (x^2 + 2x + 1) dx$$

$$\text{השטח המקווקו} = \int_{-1}^0 [y - g(x)] dx = \int_{-1}^0 (x^2 + 2x + 1) dx$$

שני האינטגרלים שווים, לכן: השטח המקווקו = השטח האפור

שאלה 9

- א. מבין כל המלבנים ששטחם k סמ"ר, הבע באמצעות k את צלעות המלבן שהיקפו מינימלי.
- ב. נתון כי קוטר המעגל החוסם את המלבן שהיקפו מינימלי, הוא 8 ס"מ. מצא את הערך של k .

פתרון לשאלה 9

א. נסמן את ממדי המלבן: x ו- y

שטח המלבן: $k = y \cdot x$

היקף המלבן: $p = 2x + 2y$

$$0 < x, \quad p(x) = 2x + \frac{2k}{x}$$

$$\Downarrow$$

$$p'(x) = 2 - \frac{2k}{x^2}$$

$$p'(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{k} \quad (k > 0)$$

$$y = \frac{k}{\sqrt{k}} = \sqrt{k}$$

לכן המלבן שהיקפו מינימלי הוא ריבוע בעל אורך צלע $\sqrt{k}$.

בדיקת מינימום:

x	$\frac{1}{2}\sqrt{k}$	$\sqrt{k}$	$2\sqrt{k}$
p'	-6	0	1.5
p	$\searrow$		$\nearrow$

ב. קוטר המעגל הוא אלכסון הריבוע,

$$8^2 = (\sqrt{k})^2 + (\sqrt{k})^2 \quad \text{לכן:}$$

$$\Downarrow$$

$$k = 32 \text{ ס"מ}$$