מדינת ישראל

משרד החינוך

סוג הבחינה: א. בגרות לבתי"ס על־יסודיים
ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים

מועד הבחינה: חורף תשע"ג

מספר השאלון: **314 ,035804**

תרגום לערבית (2)

הצעת תשובות לשאלות בחינת הבגרות

מתמטיקה

4 יחידות לימוד — שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:
בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון: אלגברה, גאומטריה אנליטית, הסתברות	$16\frac{2}{3}\times 2$	—	$33\frac{1}{3}$ נק'
פרק שני: גאומטריה וטריגונומטריה במישור	$16\frac{2}{3}\times 2$	—	$33\frac{1}{3}$ נק'
פרק שלישי: חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי	$16\frac{2}{3}\times 2$	—	$33\frac{1}{3}$ נק'
סה"כ		—	100 נק'

ג. חומר עזר מותר בשימוש:
1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
2. דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:
1. אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
2. התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
3. לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

דولة إسرائيل

وزارة المعارف

نوع الامتحان : أ. بجروت للمدارس الثانويّة
ب. بجروت للممتحَنين الخارجيّين

موعد الامتحان : شتاء 2013

رقم النموذج : **035804 ، 314**

ترجمة إلى العربيّة (2)

اقتراح حلّ لأسئلة امتحان بجروت

الرياضيّات

4 وحدات تعليمية – النموذج الأوّل

تعليمات للممتحَن

أ. مدّة الامتحان: ثلاث ساعات ونصف .

ب. مبنى النموذج وتوزيع الدرجات :
في هذا النموذج ثلاثة فصول .

الفصل الأوّل : الجبر، الهندسة التحليلية، الاحتمال	$16\frac{2}{3}\times 2$	—	$33\frac{1}{3}$ درجة
الفصل الثاني : الهندسة وحساب المثلثات في المستوى	$16\frac{2}{3}\times 2$	—	$33\frac{1}{3}$ درجة
الفصل الثالث : حساب التفاضل والتكامل	$16\frac{2}{3}\times 2$	—	$33\frac{1}{3}$ درجة
المجموع		—	100 درجة

جـ. موادّ مساعدة يُسمح استعمالها :
1. حاسبة غير بيانية . لا يُسمح استعمال إمكانيات البرمجة في الحاسبة التي يمكن برمجتها . استعمال الحاسبة البيانية أو إمكانيات البرمجة في الحاسبة قد يؤدّي إلى إلغاء الامتحان .
2. لوائح قوانين (مرفقة) .

د. تعليمات خاصّة :
1. لا تـنـسـخ الـسـؤال؛ اكتـب رقـمـه فقط .
2. ابدأ كلّ سؤال في صفحة جديدة . اكتب في الدفتر مراحل الحلّ، حتّى إذا أجريتَ حساباتك بواسطة حاسبة .
فسّر كلّ خطواتك، بما في ذلك الحسابات، بالتفصيل وبوضوح وبترتيب .
عدم التفصيل قد يؤدّي إلى خصم درجات أو إلى إلغاء الامتحان .
3. لكتابة مسوّدة يجب استعمال دفتر الامتحان أو الأوراق التي حصلتَ عليها من المراقبين .
استعمال مسوّدة أخرى قد يؤدّي إلى إلغاء الامتحان .

التعليمات في هذا النموذج مكتوبة بصيغة المذكّر وموجّهة للممتحَنات وللممتحَنين على حدّ سواء .

ב ה צ ל ח ה! **نتمنّى لك النجاح !**

السؤال 1

خرج راكب درّاجة هوائية من البلدة A إلى البلدة B ، وخرج في نفس الساعة بالضبط شخص سيرًا على الأقدام من البلدة B إلى البلدة A .

سار الشخص بسرعة ثابتة وأقلّ بـ 10 كم/الساعة من سرعة راكب الدرّاجة الهوائية .

بعد مرور 24 دقيقة كان البُعد بين راكب الدرّاجة الهوائية والشخص 12 كم .

بعد مرور 36 دقيقة أخرى التقى راكب الدرّاجة الهوائية والشخص .

أ . جد سرعة راكب الدرّاجة الهوائية .

ب . جد في أيّ بُعد عن البلدة A التقى راكب الدرّاجة الهوائية والشخص .

حلّ السؤال 1

أ .

	السرعة (كم/الساعة)	الزمن (ساعات)	المسافة (كم)
36 دقيقة قبل اللقاء راكب الدرّاجة الهوائيّة	x	$\frac{36}{60}$	$\frac{36}{60}x$
36 دقيقة قبل اللقاء الشخص (الذي سار على الأقدام)	$x-10$	$\frac{36}{60}$	$\frac{36}{60}(x-10)$

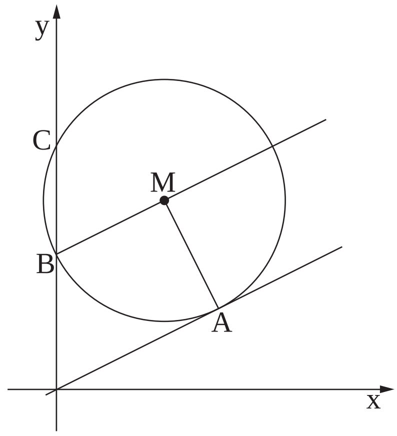
$$\frac{36}{60}x + \frac{36}{60}(x-10) = 12$$
$$\Downarrow$$
$$x = 15$$

ب . الزمن حتّى اللقاء هو : $24 + 36 =$ 60 دقيقة

لذلك المسافة التي قطعها
راكب الدرّاجة الهوائيّة حتّى اللقاء هي : $15 \cdot 1 =$ 15 كم

/يتبع في صفحة 3/

السؤال 2



معطاة دائرة، مركزها M موجود على المستقيم $y = 7$.

المستقيم $y = \frac{1}{2}x$ يمسّ الدائرة في النقطة $A(6, 3)$ (انظر الرسم).

أ. (1) جد إِحداثيات المركز M .

(2) جد معادلة الدائرة .

ب. الدائرة تقطع المحور y في النقطتين B وَ C .

النقطة C موجودة فوق النقطة B (انظر الرسم).

(1) بيّن أنّ المستقيم BM يوازي المستقيم الذي يمسّ الدائرة في النقطة A .

(2) جد مساحة المثلث BMA .

حلّ السؤال 2

أ. (1) MA معامد للمماس الذي ميله $\frac{1}{2}$ ،

لذلك ميل MA هو: -2

نقطة على المستقيم MA هي: $A(6, 3)$

من هنا معادلة MA هي: I. $y = -2x + 15$

معطى أنّ الإحداثيّ y لِـ M هو: II. 7

من I وَ II ينتج أنّ الإحداثيّ x لِـ M هو: $x = 4$

$\Downarrow$

$M(4, 7)$

(2) $M(4, 7) \quad A(6, 3)$

$\Downarrow$

نصف القطر: $MA^2 = (6-4)^2 + (7-3)^2 = 20$

من هنا: $(x-4)^2 + (y-7)^2 = 20$

/ يتبع في صفحة 4 /

تكملة حلّ السؤال 2.

ب. (1) الإحداثيّ x لِـ B هو: $x = 0$

من تعويض $x = 0$ في معادلة
الدائرة نحصل على: $y = 5\,,\ y = 9$

معطى أنّ C فوق B ، لذلك
الإحداثيّ y لِـ B هو: $y = 5$

ميل BM حسب
النقطتين $M(4,7)$ وَ $B(0,5)$ هو: $\frac{1}{2}$

ميل BM يساوي ميل المماس، لذلك BM يوازي المماس.

(2) $\sphericalangle BMA = 90^{o}$ (ميل BM هو $\frac{1}{2}$ وميل MA هو -2)

$$\Downarrow$$

$$S_{\Delta BMA} = \frac{1}{2} BM \cdot MA$$

$$S_{\Delta BMA} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{20} \cdot \sqrt{20} = 10$$

/ يتبع في صفحة 5 /

السؤال 3

يوجد في ثلاث عُلَب A وَ B وَ C كرات سوداء وكرات بيضاء.

يوجد في العلبة A كرتان سوداوان وَ 3 كرات بيضاء.

يوجد في العلبة B 3 كرات سوداء وَ كرتان بيضاوان.

يوجد في العلبة C 4 كرات سوداء وكرة واحدة بيضاء.

أ. نختار علبة بشكل عشوائي، ونُخرج منها بشكل عشوائي كرة واحدة.

(1) ما هو الاحتمال بأن نُخرج كرة بيضاء؟

(2) معلوم أنّنا أخرجنا كرة بيضاء.

ما هو الاحتمال بأن تكون الكرة قد أُخرجت من العلبة B ؟

ب. نُخرج بشكل عشوائي من العلبة C كرتَيْن الواحدة تلو الأخرى بدون إعادة.

ما هو الاحتمال بأن لا تبقى في العلبة C كرة بيضاء بعد إخراج الكرتين؟

حلّ السؤال 3

أ. (1) احتمال اختيار العلبة A

وإخراج كرة بيضاء منها: $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5}$

احتمال اختيار العلبة B

وإخراج كرة بيضاء منها: $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}$

احتمال اختيار العلبة C

وإخراج كرة بيضاء منها: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}$

من هنا احتمال إخراج

كرة بيضاء هو: $P\left(\begin{matrix}\text{كرة}\\\text{بيضاء}\end{matrix}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

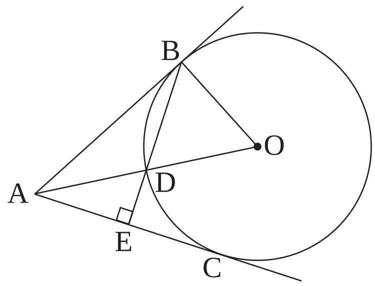
(2) $$P\left(\begin{matrix}\text{العلبة}\\B\end{matrix} \Big/ \begin{matrix}\text{كرة}\\\text{بيضاء}\end{matrix}\right) = \frac{P(B\ \text{العلبة} \cap \text{كرة بيضاء})}{P\left(\begin{matrix}\text{كرة}\\\text{بيضاء}\end{matrix}\right)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{3}$$

ب. "لا تبقى في العلبة C كرة بيضاء" تعني أنّه أُخرجت من العلبة C كرة بيضاء وكرة سوداء.

لذلك احتمال إخراج كرة بيضاء وكرة سوداء بدون إعادة من العلبة C هو: $\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{4} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{5}$

/يتبع في صفحة 6/

السؤال 4



يخرج من النقطة A مستقيم يمسّ في النقطة B دائرة مركزها O .

القطعة AO تقطع الدائرة في النقطة D (انظر الرسم).

أ. برهن أنّ $\sphericalangle BOD = 2 \cdot \sphericalangle ABD$.

يخرج من النقطة A مستقيم آخر يمسّ الدائرة في النقطة C .

امتداد الوتر BD يقطع AC في النقطة E (انظر الرسم).

معطى أنّ $BE \perp AC$.

ب. (1) برهن أنّ $\sphericalangle BOD = 2 \cdot \sphericalangle DAE$.

(2) برهن أنّ $BD = AD$.

حلّ السؤال 4

أ. نرمز: α = زاوية محيطيّة تستند على القوس BD

$\sphericalangle ABD = \alpha$ الزاوية بين المماس والوتر تساوي الزاوية المحيطيّة التي تستند على هذا الوتر من جهته الثانية.

$\sphericalangle BOD = 2\alpha$ الزاوية المحيطيّة تساوي نصف الزاوية المركزيّة التي تستند على نفس القوس.

من هنا: $\sphericalangle BOD = 2 \cdot \sphericalangle ABD$

ب. (1) معطى أنّ: $\sphericalangle AEB = 90^o$ ، AC مماس للدائرة

المطلوب برهانه: $\sphericalangle BOD = 2 \sphericalangle DAE$

<u>برهان:</u>

حسب البند "أ": $\sphericalangle ABD = \alpha$, $\sphericalangle BOD = 2\alpha$

$OB = OD$ نصفا قطر

$\Downarrow$

$\sphericalangle OBD = \sphericalangle ODB$

$\Downarrow$

$\sphericalangle ODB = 90^o - \alpha$ مجموع زوايا المثلّث هو 180^o .

$\sphericalangle ODB = \sphericalangle ADE = 90^o - \alpha$ زاويتان متقابلتان بالرأس.

$\Downarrow$

$\sphericalangle DAE = \alpha$ مجموع زوايا المثلّث هو 180^o .

$\Downarrow$

$\sphericalangle BOD = 2 \cdot \sphericalangle DAE$

/يتبع في صفحة 7/

تكملة حلّ السؤال 4، البند "ب".

(2) $\sphericalangle BAD = \sphericalangle DAE = \alpha$ القطعة التي تصل مركز الدائرة مع النقطة التي يخرج منها مماسان للدائرة، تنصّف الزاوية التي بين المماسين.

$\Downarrow$

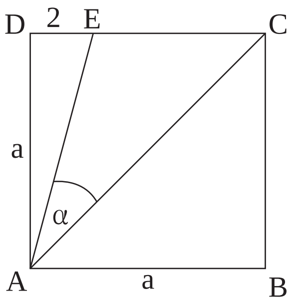
$\sphericalangle BAD = \sphericalangle ABD$

$\Downarrow$

$BD = AD$ مقابل الزاويتين المتساويتين – ضلعان متساويان.

/ يتبع في صفحة 8 /

السؤال 5



معطى المربّع ABCD الذي طول ضلعه a سم.

النقطة E موجودة على الضلع DC (انظر الرسم).

معطى أنّ: DE = 2 سم ، $\sphericalangle EAC = \alpha$.

أ. عبّر عن a بدلالة α .

ب. إذا كان معطى أنّ $\alpha = 30^o$، احسب مساحة المثلث ACE .

جـ. احسب α في الحالة التي فيها DE = EC = 2 سم .

حلّ السؤال 5

أ. $\sphericalangle DAC = 45^o$ القطران في المربّع ينصّفان الزوايا.

$$\Downarrow$$

$$\sphericalangle DAE = 45^o - \alpha$$

$$tg(45^o - \alpha) = \frac{2}{a}$$

$$\Downarrow$$

$$a = \frac{2}{tg(45^o - \alpha)}$$

ب. $$a = \frac{2}{tg(45^o - 30^o)} = 7.46$$

الطريقة I:

$$CA = \sqrt{a^2 + a^2} = 10.56$$

$$EC = a - 2 = 5.46$$

$$S_{\Delta ACE} = \frac{1}{2} \cdot EC \cdot CA \sin 45^o$$

$$\Downarrow$$

$S_{\Delta ACE} =$ 20.37 سم^2

الطريقة II:

$S_{\Delta AEC} = S_{\Delta ACD} - S_{\Delta AED} = \frac{1}{2} \cdot a^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot a =$ 20.37 سم^2

جـ. $$DE = EC = 2$$

$$\Downarrow$$

$$a = 4$$

$$tg \sphericalangle DAE = \frac{2}{4}$$

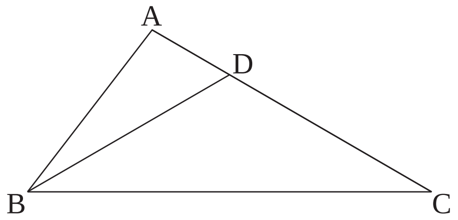
$$\sphericalangle DAE = 26.56^o$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha = 45^o - 26.56^o = 18.43^o$$

/يتبع في صفحة 9/

السؤال 6



في المثلث ABC معطى أنّ: AB = 5 سم
AC = 8 سم
BC = 10 سم

النقطة D موجودة على الضلع AC
بحيث BD = DC (انظر الرسم).

أ. احسب زوايا المثلث BDC.

ب. جد النسبة بين نصف قطر الدائرة التي تحصر المثلث ABD
وبين نصف قطر الدائرة التي تحصر المثلث BDC.

حلّ السؤال 6

أ. معطى أنّ: BD = DC

في المثلّث ABC يتحقّق: $5^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cos \sphericalangle C$

$$\Downarrow$$

$$\sphericalangle C = 29.69^{o}$$

$\sphericalangle DBC = \sphericalangle C = 29.69^{o}$ مقابل ضلعين متساويين — زاويتان متساويتان.

$$\sphericalangle BDC = 180^{o} - 2 \times 29.69^{o} = 120.62^{o}$$

ب. نصف قطر الدائرة التي تحصر ΔABD: I. $R_1 = \dfrac{5}{2\sin(180^{o} - 120.62^{o})}$

نصف قطر الدائرة التي تحصر ΔBDC: II. $R_2 = \dfrac{10}{2 \cdot \sin 120.62^{o}}$

من I وَ II ينتج: $\dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$

/ يتبع في صفحة 10 /

السؤال 7

معطاة الدالة $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}$.

أ. جد مجال تعريف الدالة .

ب. جد نقاط تقاطع الرسم البياني للدالة مع المحورين (إذا وُجدت مثل هذه النقاط) .

جـ. جد النقاط القصوى المطلقة للدالة، وحدّد نوع هذه النقاط .

د. (1) ارسم رسمًا تقريبيًّا للرسم البياني للدالة .

(2) استعن بالرسم البياني الذي رسمتَه، وَجِد معادلة المستقيم الذي يمسّ الرسم البياني للدالة في نقطتين بالضبط .

حلّ السؤال 7

أ. مجال التعريف : $x^2 - 4 \geq 0 \quad , \quad x \neq 0$

$$\Downarrow$$

$x \leq -2$ أو $x \geq 2$

ب. $x \neq 0 \quad \Leftarrow$ لا يوجد تقاطع مع المحور y

$y = 0 \quad \Leftarrow \quad \sqrt{x^2-4} = 0 \quad \Leftarrow \quad x = \pm 2$

جـ. $$f'(x) = \frac{8x - x^3}{x^4\sqrt{x^2-4}} = \frac{8 - x^2}{x^3\sqrt{x^2-4}} \qquad (x \neq 0)$$

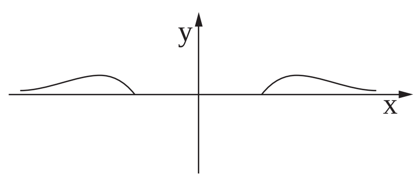
$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{8}$$

x	$-\sqrt{13}$	$-\sqrt{8}$	-2		2	$\sqrt{8}$	$\sqrt{13}$
f(x)	$\frac{3}{13}$ ↗	$\frac{1}{4}$	0 ↘		0 ↗	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{13}$ ↘

نهاية عظمى مطلقة : $(\sqrt{8}, \frac{1}{4})$, $(-\sqrt{8}, \frac{1}{4})$

نهاية صغرى مطلقة : $(2, 0)$, $(-2, 0)$

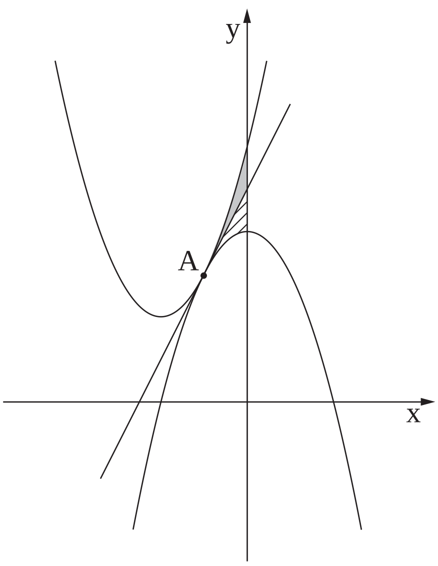
د. (1)



(2) $y = \frac{1}{4}$

/يتبع في صفحة 11/

السؤال 8



يعرض الرسم الذي أمامك قطعين مكافئين: $f(x) = x^2 + 4x + 6$

$g(x) = -x^2 + c$

c هو بارامتر.

يمسّ القطعان المكافئان أحدهما الآخر في النقطة A .

مرّروا عبر النقطة A مماسًا مشتركًا للقطعين المكافئين (انظر الرسم).

أ. (1) ارمز بِـ t إلى الإحداثي x للنقطة A ،

وعبّر بدلالة t عن ميل المماس المشترك.

عبّر بطريقتين.

(2) جد إحداثيات النقطة A .

(3) جد قيمة البارامتر c .

ب. المماس المشترك يقسّم المساحة المحصورة بين القطعين المكافئين والمحور y

إلى مساحتين (المساحة الرماديّة والمساحة المخطّطة في الرسم).

عوِّض قيمة البارامتر c التي وجدتَها، وبيّن أنّ المساحتين متساويتان.

حلّ السؤال 8

أ. (1)

$$g'(x) = -2x \quad\quad f'(x) = 2x + 4$$

$$\Downarrow \quad\quad \Downarrow$$

$$g'(t) = -2t \quad\quad f'(t) = 2t + 4$$

(2)

$$f'(t) = g'(t)$$
$$\Downarrow$$
$$t = -1$$
$$\Downarrow$$
$$f(-1) = 3$$
$$\Downarrow$$
$$A(-1, 3)$$

(3)

$$f(-1) = g(-1)$$
$$\Downarrow$$
$$3 = -1 + c$$
$$\Downarrow$$
$$c = 4$$

/ يتبع في صفحة 12 /

تكملة حلّ السؤال 8.

ب. ميل المماس: I. $f'(-1) = 2$

نقطة التماس: II. $A(-1, 3)$

من I وَ II ينتج أنّ معادلة المماس: $y = 2x + 5$

المساحة الرماديّة $= \int_{-1}^{0} [f(x) - y]\,dx = \int_{-1}^{0} (x^2 + 2x + 1)\,dx$

المساحة المخطّطة $= \int_{-1}^{0} [y - g(x)]\,dx = \int_{-1}^{0} (x^2 + 2x + 1)\,dx$

التكاملان متساويان، لذلك: المساحة المخطّطة = المساحة الرماديّة

/ يتبع في صفحة 13 /

السؤال 9

أ. من بين جميع المستطيلات التي مساحتها k سم^2، عبّر بدلالة k عن أضلاع المستطيل الذي محيطه أصغر ما يمكن.

ب. معطى أنّ قطر الدائرة التي تحصر المستطيل الذي محيطه أصغر ما يمكن، هو 8 سم.
جد قيمة k .

حلّ السؤال 9

أ. نرمز إلى طول وعرض المستطيل: x وَ y

مساحة المستطيل: $k = y \cdot x$

محيط المستطيل: $p = 2x + 2y$

$$0 < x \ , \ p(x) = 2x + \frac{2k}{x}$$
$$\Downarrow$$
$$p'(x) = 2 - \frac{2k}{x^2}$$

$$p'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{k} \qquad (k > 0)$$

$$y = \frac{k}{\sqrt{k}} = \sqrt{k}$$

لذلك المستطيل الذي محيطة أصغر ما يمكن هو مربّع طول ضلعه $\sqrt{k}$.

فحص قيمة صغرى:

x	$\frac{1}{2}\sqrt{k}$	$\sqrt{k}$	$2\sqrt{k}$
p'	-6	0	1.5
p	↘		↗

ب. قطر الدائرة هو قطر المربّع،
لذلك:
$$8^2 = (\sqrt{k})^2 + (\sqrt{k})^2$$
$$\Downarrow$$
$k =$ 32 سم