

מדינת ישראל  
משרד החינוך

סוג הבחינה: א. בגרות לבתי"ס על-יסודיים  
ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים  
מועד הבחינה: חורף תשע"ג  
מספר השאלון: 313,035803  
תרגום לערבית (2)

دولة إسرائيل  
وزارة المعارف

نوع الامتحان: أ. بجلوت للمدارس الثانوية  
ب. بجلوت للممتحنين الخارجيين  
موعد الامتحان: شتاء 2013  
رقم النموذج: 313,035803  
ترجمة إلى العربية (2)

הצעת תשובות לשאלות  
בחינת הבגרות

מתמטיקה

3 יחידות לימוד – שאלון שלישי

הוראות לנבחן

- א. משך הבחינה: שתיים.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:  
בשאלון זה שש שאלות.  
בשאלון זה שש שאלות בנושאים:  
אלגברה, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי.  
עליך לענות על ארבע שאלות –  
 $4 \times 25 = 100$  נק'
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:  
1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.  
2. דפי נוסחאות (מצורפים).  
ד. הוראות מיוחדות:  
1. כתוב את כל החישובים והתשובות בגוף השאלון.  
2. לטיוטה יש להשתמש בדפים שבגוף השאלון (כולל הדפים שבסופו) או בדפים שקיבלת מהממשיגים. שימוש בטיטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.  
3. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.  
חסור פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

اقتراح حلّ لأسئلة  
امتحان بجلوت

الرياضيات

3 وحدات تعليمية – النموذج الثالث

تعليمات للممتحن

- א. מְדַת האמתחא: ساعتان.
- ב. מבני النموذج وتوزيع الدرجات:  
في هذا النموذج ستة أسئلة.  
في هذا النموذج ستة أسئلة في الموضوعين:  
الجبر، حساب التفاضل والتكامل.  
عليك الإجابة عن أربعة أسئلة –  
 $4 \times 25 = 100$  درجة
- ج. موادّ مساعدة يُسمح استعمالها:  
1. حاسبة غير بيانية. لا يُسمح استعمال إمكانيات البرمجة في الحاسبة التي يمكن برمجتها. استعمال الحاسبة البيانية أو إمكانيات البرمجة في الحاسبة قد يؤدي إلى إلغاء الامتحان.  
2. لوائح قوانين (مرفقة).  
د. تعليمات خاصة:  
1. اكتب جميع الحسابات والإجابات في نموذج الامتحان.  
2. لكتابة مسودة يجب استعمال الصفحات التي في نموذج الامتحان (بما في ذلك الصفحات التي في نهايته) أو الأوراق التي حصلت عليها من المراقبين.  
3. فسّر كلّ خطواتك، بما في ذلك الحسابات، بالتفصيل وبوضوح وبترتيب.  
عدم التفصيل قد يؤدي إلى خصم درجات أو إلى إلغاء الامتحان.

التعليمات في هذا النموذج مكتوبة بصيغة المدكّر وموجهة للممتحنات وللممتحنين على حدّ سواء.

نتمّنّى لك النجاح!

בהצלחה!

## السؤال 1

- اشترى صاحب مطعم بيتسا 5 كيلوغرام من الجبنة الصفراء و 10 كيلوغرام من الدقيق .  
معلوم أنّ سعر الكيلوغرام الواحد من الجبنة الصفراء أكبر بـ 50 شيقل من سعر الكيلوغرام الواحد من الدقيق .  
حصل صاحب المطعم على تخفيض بنسبة 20% عن كلّ كيلوغرام واحد من الجبنة الصفراء، وعلى تخفيض بنسبة 25% عن كلّ كيلوغرام واحد من الدقيق .  
بعد التخفيض دفع صاحب المطعم 315 شيقل مقابل ما اشتراه .
- أ. كم كان سعر الكيلوغرام الواحد من الجبنة الصفراء، وكم كان سعر الكيلوغرام الواحد من الدقيق قبل التخفيض؟  
ب. معلوم أنّ كلّ بيتسا تُباع بنفس السعر، ومن أجل تحضيرها هناك حاجة لـ 250 غرام من الجبنة الصفراء و 500 غرام من الدقيق .  
يرغب صاحب المطعم في استغلال جميع المركّبات التي اشتراها .  
جد كم بيتسا عليه أن ينتج . فضّل حساباتك .

## حلّ السؤال 1

- أ. نرمز بـ  $x$  إلى سعر 1 كغم دقيق قبل التخفيض . اعتماداً على المعطيات نبني الجدول التالي :

السعر بعد التخفيض	السعر قبل التخفيض	
$0.75x$	$x$	1 كغم دقيق
$0.8(x + 50)$	$x + 50$	1 كغم جبنة صفراء

- كذلك، معطى أنّ صاحب مطعم البيتسا دفع بعد التخفيض 315 شيقل مقابل ما اشتراه  
( اشترى 5 كغم جبنة صفراء و 10 كغم دقيق ) .

↓

$$5 \cdot [0.8(x + 50)] + 10 \cdot 0.75x = 315$$

↓

$$x = 10 \text{ شيقل}$$

↓

سعر 1 كغم جبنة صفراء هو 60 شيقل .

- ب. نحوّل الغرامات إلى كيلوغرامات، ونفحص ما هو عدد البيتسات التي يكفيها كلّ واحد من المركّبين .

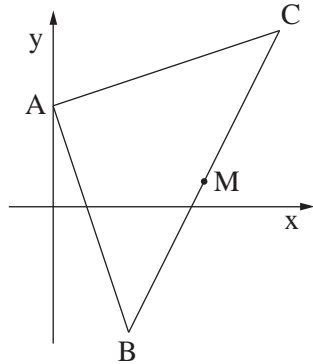
$$\text{عدد البيتسات حسب كمّيّة الجبنة الصفراء: } \frac{5}{0.25} = 20$$

$$\text{عدد البيتسات حسب كمّيّة الدقيق: } \frac{10}{0.5} = 20$$

↓

على صاحب مطعم البيتسا أن يُنتج 20 بيتسا

## السؤال 2



معطى في الرسم الذي أمامك أن:

النقطة A موجودة على المحور y ،  $B(3, -5)$  ،  $C(9, 7)$  والنقطة A موجودة على المحور y .

معادلة المستقيم الموضوع عليه الضلع AB

هي  $y = mx + 4$  (m هو بارامتر).

أ. (1) جد إحداثيات النقطة A .

(2) جد m .

ب. برهن أن المثلث BAC هو قائم الزاوية.

ج. النقطة M هي منتصف الضلع BC .

معطاة نقطة D في الربع الأول (لا تظهر في الرسم)

بحيث يكون الشكل الرباعي AMDC متوازي أضلاع ( $AM \parallel CD$  و  $AC \parallel MD$ ).

جد إحداثيات النقطة D . فضل حساباتك .

## حل السؤال 2

أ. (1) A موجودة على المحور y

↓

$$x_A = 0$$

$$y_A = m \cdot x_A + 4$$

↓

$$y_A = 4$$

$$A(0, 4)$$

(2) B(3, -5) موجودة على المستقيم  $y = mx + 4$

↓

$$-5 = 3m + 4$$

↓

$$m = -3$$

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{4 - (-5)}{0 - 3} = -3 \quad \text{أو}$$

ب. ميل AB هو -3 . نجد ميل AC حسب  $A(0, 4)$  و  $C(9, 7)$

$$m_{AC} = \frac{7 - 4}{9 - 0} = \frac{1}{3}$$

↓

$$m_{AB} \cdot m_{AC} = -1$$

↓

$$\angle BAC = 90^\circ \quad (\text{شرط التعامد يتحقق})$$

תכלמה חלל السؤال 2.

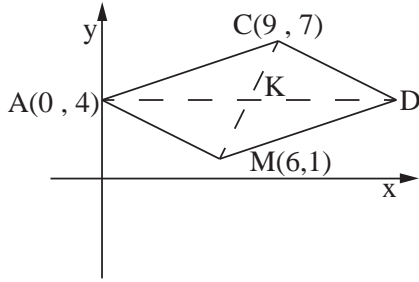
ג. نجد إحداثيات النقطة M حسب منتصف القطعة التي طرفاها B(3, -5) و C(9, 7)

↓

$$x_M = \frac{9+3}{2}, y_M = \frac{7-5}{2}$$

↓

$$M(6, 1)$$



من هنا توجد طرق كثيرة للحل، نذكر اثنتين منها:

الطريقة "أ": نرسم K إلى التقاء القطرين في متوازي الأضلاع AMDC.

بنفس الطريقة نجد إحداثيات النقطة K حسب منتصف القطعة التي طرفاها C(9, 7) و M(6, 1).

↓

$$K(7.5, 4)$$

نجد إحداثيات نقطة الطرف D بواسطة منتصف القطعة AD [النقطة K(7.5, 4)]، ونقطة الطرف A(0, 4).

↓

$$\frac{x_D + 0}{2} = 7.5, \frac{y_D + 4}{2} = 4$$

$$D(15, 4)$$

الطريقة "ب":

D هي نقطة تقاطع المستقيمين MD و CD. نجد معادلة هذين المستقيمين.

$$(AC \parallel MD \text{ لأن } m_{MD} = \frac{1}{3}, m_{AC} = \frac{1}{3})$$

المستقيم MD يمر عبر النقطة M(6, 1) ← معادلة المستقيم MD  $y = \frac{1}{3}x - 1$ .

$$m_{AM} = \frac{1-4}{6-0} = -\frac{1}{2}$$

$$(AM \parallel CD \text{ لأن } m_{AM} = m_{CD})$$

بطريقة مشابهة ينتج أن معادلة المستقيم CD:  $y = -\frac{1}{2}x + 11.5$

نجد نقطة تقاطع المستقيمين (النقطة D) ←

$$-\frac{1}{2}x + 11.5 = \frac{1}{3}x - 1$$

↓

$$x = 15$$

↓

$$y_D = \frac{1}{3} \cdot 15 - 1 = 4$$

$$D(15, 4)$$

### السؤال 3

في الرسم الذي أمامك معطاة الدائرة  $x^2 + y^2 = 125$  (O - نقطة أصل المحاور).

A و B هما نقطتا تقاطع الدائرة مع المستقيم  $x = 5$ .

AC هو قطر في الدائرة.

أ. جد إحداثيات النقطتين A و B.

ب. جد معادلة المستقيم الموضوع عليه

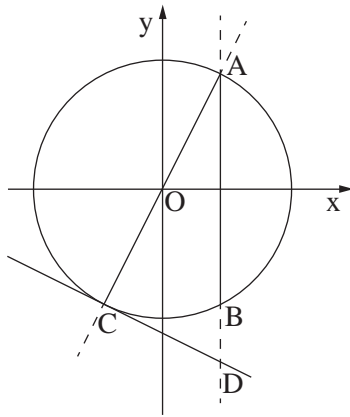
قطر الدائرة، AC.

ج. نمّر مماساً للدائرة في النقطة C.

جد معادلة المماس.

د. امتداد القطعة AB يقطع المماس في النقطة D.

جد إحداثيات النقطة D.



### حلّ السؤال 3

أ. لإيجاد نقطتي التقاطع A و B نعوض  $x = 5$  في معادلة الدائرة  $x^2 + y^2 = 125$   $\Leftrightarrow$   $A(5, 10)$ ،  $B(5, -10)$

ب. نجد ميل ومعادلة المستقيم حسب النقطتين  $A(5, 10)$  و  $O(0, 0)$  اللتين على المستقيم.

$\Downarrow$

$$m_{AO} = \frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \frac{10 - 0}{5 - 0} = 2$$

معادلة المستقيم الذي يمرّ عبر نقطة أصل المحاور هي  $y = mx$

$\Downarrow$

$$y = 2x$$

ج.  $O(0, 0)$  هي منتصف القطعة AC. نجد إحداثيات النقطة C حسب إحداثيات النقطتين  $A(5, 10)$  و  $O(0, 0)$ .

$$\frac{x_C + x_A}{2} = 0, \quad \frac{y_C + y_A}{2} = 0$$

$$C(-5, -10) \quad \Leftrightarrow \quad A(5, 10)$$

$$\text{من شرط تعامد المماس ونصف القطر } -1 = m_{\text{مماس}} \cdot 2 \Leftrightarrow m_{\text{مماس}} = -\frac{1}{2}$$

من هنا نجد معادلة المماس حسب الميل وحسب النقطة  $C(-5, -10)$

$\Downarrow$

$$CD: \quad y = -\frac{1}{2}x - 12\frac{1}{2}$$

$$D(5, -15) \quad \Leftrightarrow \quad x_D = x_B \quad \Leftrightarrow \quad \text{نعوض في معادلة المماس} \quad y_D = -\frac{1}{2} \cdot 5 - 12\frac{1}{2} = -15$$

#### السؤال 4

معطاة الدالة  $y = x^2 - 4\sqrt{x}$ .

- أ. جد مجال تعريف الدالة.  
 ب. جد النقطة القصوى الداخلية للدالة، وحدد نوع هذه النقطة.  
 ج. جد مجالات تصاعد وتنازل الدالة.  
 د. جد نقطة تقاطع الدالة مع المحور  $y$ .  
 هـ. معطى أن الدالة تقطع المحور  $x$  في النقطة  $(2.52, 0)$ .  
 استعن بهذا المعطى وبإجاباتك عن البنود "أ-د"، وارسم رسماً تقريبياً للرسم البياني للدالة.

#### حل السؤال 4

أ. مجال التعريف هو  $x \geq 0$

ب.  $y' = 2x - \frac{2}{\sqrt{x}}$

$y' = 0$  في النقاط القصوى

$$x = 1 \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow 4x^2 = \frac{4}{x} \Leftrightarrow 2x = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$y = -3$  ولذلك  $(1, -3)$  هي نقطة محتملة كنقطة قصوى.

نفحص نوعها:

x	$\frac{1}{4}$	1	4
y'	$-3\frac{1}{2}$	0	7
y	↘		↗

↓

$(1, -3)$  Min

x	0	1	4
y	0	-3	8

أو حسب الإحداثي  $y$ :

ج.  $0 < x < 1$

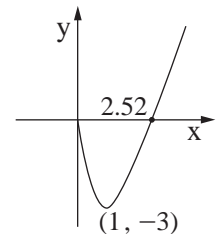
مجال التنازل:

$1 < x$

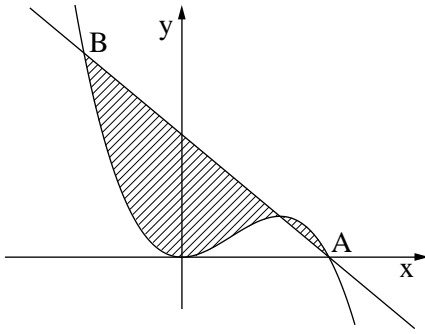
مجال التصاعد:

د.  $(0, 0)$

$y = 0 \Leftrightarrow x = 0$



### السؤال 5



معطاة الدالة  $f(x) = -4x^3 + 6x^2$ .

أ. جد النقاط القصوى للدالة، وحدد نوع هذه النقاط.

ب. الرسم البياني للدالة يقطع المحور  $x$  في النقطة  $A$  (ليست نقطة أصل المحاور).

جد إحداثيات النقطة  $A$ .

ج. معادلة المستقيم الذي يمر عبر نقطة النهاية العظمى للدالة وعبر النقطة  $A$

هي  $y = -4x + 6$ .

المستقيم يقطع الرسم البياني للدالة في النقطة  $B(-1, 10)$  (انظر الرسم).

احسب المساحة المحصورة بين الرسم البياني للدالة والمستقيم  $BA$  (المساحة المخططة في الرسم).

### حل السؤال 5

أ.  $f'(x) = -12x^2 + 12x$

$$12x(-x+1)=0 \Leftrightarrow -12x^2+12x=0 \Leftrightarrow f'(x)=0 \text{ في النقاط القصوى}$$

$$\Leftrightarrow x_2=1, x_1=0$$

↓

لذلك  $(0, 0)$  و  $(1, 2)$  هما نقطتان محتملتان كنقاط قصوى.

نفحص نوع النقطتين القصويتين:

$x$	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$f'(x)$	-24	0	3	0	-24
$f(x)$	↘		↗		↘

↓

$(1, 2) \text{Max}, (0, 0) \text{Min}$

ب.  $A(1.5, 0) \Leftrightarrow x=0, x=1.5 \Leftrightarrow x^2(-4x+6)=0 \Leftrightarrow -4x^3+6x^2=0 \Leftrightarrow f(x)=0$

ج. ننتبه أنه في المجال الذي بين  $x_B$  و  $x_2=1$  (نقطة النهاية العظمى) المستقيم هو فوق الدالة، وفي المجال الذي بين  $x_2$  و  $x_A$

الدالة هي فوق المستقيم.

نجمع قسمي المساحة ونحصل على:

$$S = \int_{-1}^1 [-4x + 6 - (-4x^3 + 6x^2)] dx + \int_1^{1.5} [-4x^3 + 6x^2 - (-4x + 6)] dx$$

↓

$$S = (x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 6x) \Big|_{-1}^1 + (-x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 6x) \Big|_1^{1.5}$$

↓

$$S = 8\frac{3}{16}$$

### السؤال 6

- أ. من بين جميع أزواج الأعداد الموجبة  $x$  و  $z$  التي تحقق  $x \cdot z = 48$ ، جد زوج الأعداد الذي يكون المجموع  $x + 3z$  بالنسبة له هو أصغر ما يمكن.  
 ب. ما هو أصغر مجموع ممكن؟

### حل السؤال 6

أ. نعبر عن المجموع بواسطة  $x$  ( $x > 0$ ):  $x \cdot z = 48 \Leftrightarrow z = \frac{48}{x} \Leftrightarrow f(x) = x + \frac{3 \cdot 48}{x}$  دالة تصف المجموع

لإيجاد أصغر مجموع ممكن نشتق

$$1 - \frac{144}{x^2} = 0, \quad f'(x) = 1 - \frac{144}{x^2}$$

دالة المجموع ونساويها لـ 0:

↓

$$x = \pm 12$$

معطى أن  $x > 0 \Leftrightarrow$  نفحص  $x = 12$  فقط:

x	4	12	16
f(x)	-8	0	0.4375
f(x)	↘		↗

↓

$$z = \frac{48}{12} = 4$$

ب.  $f(12) = 24$  أقل مجموع ممكن.