

שימו לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות

- א. משך הבחינה: ארבע שעות ורבע.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.
- פרק ראשון – אלגברה והסתברות
 - פרק שני – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור
 - פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות
- יש לענות על ארבע שאלות, לפחות על שאלה אחת מכל פרק – $25 \times 4 = 100$ נקודות.
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.
 - (2) דפי נוסחאות (מצורפים).
- ד. הוראות מיוחדות:
- (1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
 - (2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
 - יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
 - חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

השאלות

ענו על ארבע מן השאלות 1-8, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה – 25 נקודות).
שימו לב: אם תענו על יותר מארבע שאלות, ייבדקו רק ארבע התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1. אלון יצא בשעה 8:00 מעיר א' לעיר ב'. אלון הלך במהירות קבועה במשך חצי שעה, ולאחר מכן עצר למנוחה של 10 דקות. לאחר המנוחה התחיל אלון לרוץ לכיוון עיר ב' במהירות הגדולה פי 2 ממהירות הליכתו. אלון רץ במשך חצי שעה $\frac{1}{6}$ מן המרחק בין שתי הערים, ולאחר מכן עצר שוב למנוחה של 10 דקות. לאחר המנוחה השנייה המשיך אלון לרוץ באותה המהירות עד שהגיע לעיר ב'.
 דני יצא מעיר ב' ורכב על אופניים לעיר א'. הוא רכב במהירות קבועה. אחרי שעה ו-50 דקות הוא הגיע לנקודה שבה נח אלון לראשונה.
 א. מצאו פי כמה גדולה מהירות הרכיבה של דני ממהירות ההליכה של אלון.
 כאשר הגיע דני לנקודה שבה עצר אלון למנוחה בפעם הראשונה הוא הגביר את מהירות הרכיבה שלו למהירות הגדולה ב-12.6 קמ"ש ממהירותו ההתחלתית.
 אלון ודני הגיעו ליעדם בדיוק באותה השעה.
 ב. מצאו את מהירות ההליכה של אלון אם נתון כי דני יצא מעיר ב' בשעה 9:40.
 ג. מצאו בין אילו שעות היה צריך דני לצאת מעיר ב', אילו היה רוצה לחלוף על פני אלון במהלך המנוחה השנייה שלו.

2. בסדרה חשבונית A נתון: $a_1 = -4 - 4k$, $a_3 = -16 + 2k$, k הוא פרמטר.

א. מצאו עבור אילו ערכים של k:

(1) הסדרה A עולה, (2) הסדרה A יורדת, (3) הסדרה A קבועה.

נתון כי $a_{17} = -232$.

ב. מצאו את הערך של k.

הציבו את הערך של k שמצאתם וענו על הסעיפים ג-ד.

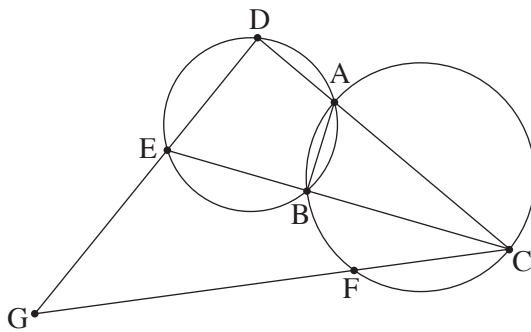
נתונה סדרה חדשה, B, שאיבריה מוגדרים כך: לכל n טבעי, $b_n = a_n + 24n + 17$.

ג. הוכיחו כי הסדרה B היא חשבונית.

ד. חשבו את הסכום: $b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 - b_4^2 + \dots + b_{29}^2 - b_{30}^2$.

3. ביישוב מסוים הוחלט לערוך סקר בנוגע להקמת פארק ביישוב. בסקר השתתפו תושבים מבוגרים וצעירים בלבד. כל אחד מן התושבים שהשתתף בסקר כתב אם הוא תומך בהקמת הפארק או מתנגד להקמתו (לא היו נמנעים). כל התושבים המבוגרים שהשתתפו בסקר תמכו בהקמת הפארק. בחרו באקראי בתושב אחד מבין התושבים שהשתתפו בסקר. נסמן ב- p את ההסתברות שהתושב שנבחר היה צעיר. נסמן ב- k את ההסתברות שהתושב שנבחר תמך בהקמת הפארק. א. הביעו באמצעות p ו- k את ההסתברות שהתושב שנבחר היה צעיר התומך בהקמת הפארק. מחצית מן התושבים הצעירים שהשתתפו בסקר תמכו בהקמת הפארק. $\frac{3}{7}$ מן המשתתפים בסקר שתמכו בהקמת הפארק היו צעירים. ב. מצאו את p ואת k . יוסי, כתב חדשות מקומי, ריאיון באקראי 6 מן התושבים הצעירים שהשתתפו בסקר. ג. מהי ההסתברות שלפחות אחד מהם תמך בהקמת הפארק ולפחות אחד מהם התנגד להקמת הפארק? לאחר מכן ריאיון יוסי באקראי, בזה אחר זה, 5 תושבים שהשתתפו בסקר. ד. מהי ההסתברות שבדיוק 3 מן המרואיינים האלה היו צעירים, ושהמרואיין האחרון מהם היה צעיר?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור



4. שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו-B. C היא נקודה על המעגל הימני.

המשכי הקטעים CA ו-CB חותכים את המעגל השמאלי בנקודות D ו-E בהתאמה.

הנקודה F נמצאת על הקשת BC, כמתואר בסרטוט.

המשכי הקטעים CF ו-DE נפגשים בנקודה G.

א. הוכיחו: $\angle EDA = \angle CBA$.

ב. הוכיחו: המרובע GDAF הוא בר חסימה במעגל.

המיתרים AF ו-BC נפגשים בנקודה H.

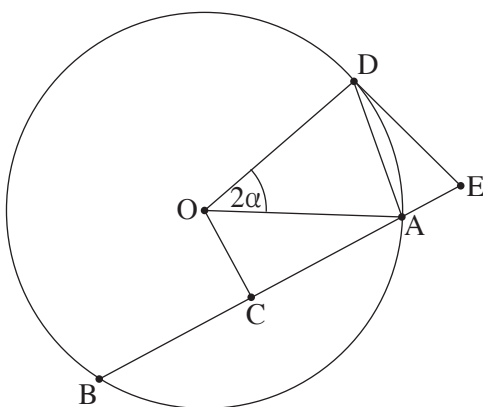
נתון: $\angle GEC = \angle CHA$.

ג. הוכיחו: $\frac{CG}{CD} = \frac{GE}{DE}$.

נתון: CE מאונך ל-AB.

CD = 36, DE = 18

ד. חשבו את אורכי הקטעים EG ו-CG.



5. נתון מעגל שמרכזו O והרדיוס שלו R.

מנקודה E, הנמצאת מחוץ למעגל, העבירו ישר החותך את המעגל

בנקודות A ו-B, כמתואר בסרטוט.

הנקודה D נמצאת על הקשת הגדולה AB,

כך שהקטע ED משיק למעגל.

הנקודה C היא אמצע המיתר AB.

נסמן את הזווית בין הרדיוסים OD ו-OA ב- 2α ($\alpha < 60^\circ$).

נתון: המרחק של הנקודה O מן המיתר AB הוא $0.5R$.

א. מצאו את זוויות המרובע DOCE. הביעו באמצעות α אם יש צורך.

ב. הביעו באמצעות R ו- α את אורך הקטע DE.

נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש AOD הוא $\frac{4}{7}R$.

ג. מצאו את α .

ד. מצאו את היחס בין שטח המעגל החוסם את המרובע DOCE ובין שטח המעגל הנתון.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

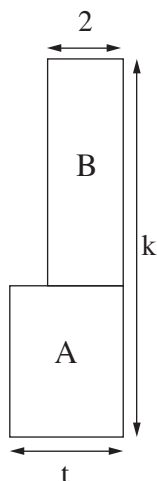
6. נתונה הפונקצייה: $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 4}{(\sqrt{x} - 2)^2}$.

- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.
 (2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.
 (3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.
 (4) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.
 ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.
 נתונה הפונקצייה: $g(x) = \frac{2x}{\sqrt{x} - 2}$ המוגדרת באותו התחום כמו הפונקצייה $f(x)$.
 ג. הראו כי לכל $x > 0$ בתחום ההגדרה של הפונקציות מתקיים $f(x) = g'(x)$.
 ד. לפניכם טענות II-I. קבעו בנוגע לכל טענה אם היא נכונה או לא נכונה. נמקו את קביעותיכם.
 I. יש משיק לגרף הפונקצייה $g(x)$ ששיפועו הוא 2.
 II. לפונקצייה $g(x)$ יש נקודת פיתול אחת בלבד.
 ה. חשבו את ערך הביטוי $\int_{0.25}^1 g(x) \cdot f(x) dx$.

7. נתונה הפונקצייה: $f(x) = \frac{\sin(x) - a}{\sin(x) + a}$. a הוא פרמטר חיובי.

- הפונקצייה $f(x)$ מוגדרת לכל x המקיים $\sin(x) \neq -a$.
 נתון כי הגרף של הפונקצייה $f(x)$ משיק לציר x בכל נקודות הקיצון שלה.
 א. מצאו את הערך של a .
 הציבו $a = 1$, וענו על הסעיפים ב-ה עבור התחום $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.
 ב. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.
 (2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.
 (3) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.
 ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.
 ד. כמה פתרונות יש למשוואה $f(x) = -1$ בתחום הנתון? נמקו את תשובתכם.
 ידוע כי הפונקצייה $f(x)$ קעורה כלפי מטה בכל אחד מחלקי תחום הגדרתה.
 ה. קבעו אם הטענה שלפניכם נכונה או לא נכונה. נמקו את קביעתכם.

$\int_0^{\pi} (f(x) + 1) dx > \frac{\pi}{2}$.



8. נתונות שתי גינות מלבניות הצמודות זו לזו, גינה A וגינה B.

הרוחב של גינה A הוא t מטרים.

הרוחב של גינה B הוא 2 מטרים ושטחה הוא $2t + 2$ מ"ר, כמתואר בסרטוט שלפניכם.

האורך הכולל של שתי הגינות הוא k מטרים. k הוא קבוע.

א. הביעו באמצעות k ו- t את שטח הגינה A.

ב. הביעו באמצעות k את הערך של t שבעבורו היחס בין שטח הגינה B

ובין שטח הגינה A הוא מינימלי.

ג. הביעו באמצעות k את הערך של t שבעבורו היחס בין שטח הגינה A

ובין שטח הגינה B הוא מקסימלי. נמקו את תשובתכם.

בהצלחה!