

שימו לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות

תוכנית חדשה

א. משך הבחינה: ארבע שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה ארבעה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון – שאלות קצרות

פרק שני – סדרות והסתברות

פרק שלישי – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש,

של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

יש לענות על ארבע שאלות, לפחות על שאלה אחת מכל אחד מן הפרקים השני, השלישי והרביעי –

$100 = 25 \times 4$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.

(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים

בעזרת מחשבון.

יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.

כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

השאלות

ענו על ארבע מן השאלות 1-8, לפחות על שאלה אחת מכל אחד מן הפרקים השני, השלישי והרביעי (לכל שאלה – 25 נקודות).
שימו לב: אם תענו על יותר מארבע שאלות, ייבדקו רק ארבע התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – שאלות קצרות

1. ענו על שניים מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. הוכיחו באינדוקציה או בדרך אחרת שלכל n טבעי זוגי מתקיים:

$$48 + 144 + 288 + \dots + 6n(n+2) = n(n+2)(n+4)$$

ב. המרובע BCED חסום במעגל.

המשך המיתר BD והמשך המיתר CE נפגשים בנקודה A (ראו סרטוט).

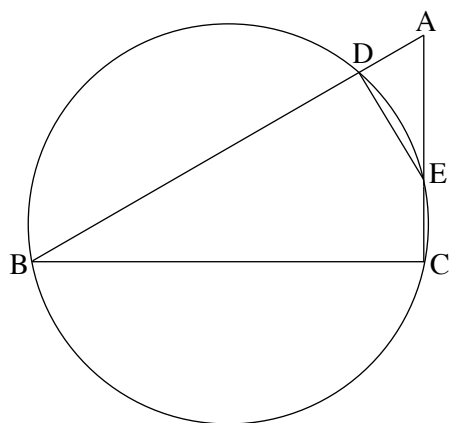
נתון: $AD = CE$, $AE = 2CE$.

(1) הוכיחו: $\triangle AED \sim \triangle ABC$.

(2) מצאו את היחס $\frac{AB}{AC}$.

(3) נתון: $\angle DEC = 150^\circ$.

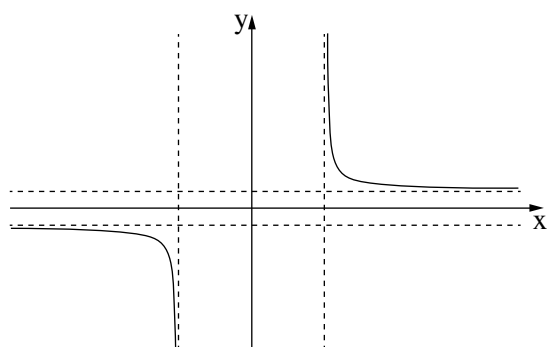
האם BE הוא קוטר במעגל הנתון? נמקו את תשובתכם.



ג. לפניכם סרטוט של גרף הפונקציה $f(x)$.

לפונקציה $f(x)$ יש שתי אסימפטוטות מאונכות לציר ה- x ושתי אסימפטוטות מאונכות לציר ה- y .

אחד מן הביטויים I-IV שלפניכם מתאר את הפונקציה $f(x)$.



I. $\frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}}$

II. $\frac{x}{\sqrt{x^2 - 16}}$

III. $\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 16}}$

IV. $\frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 16}}$

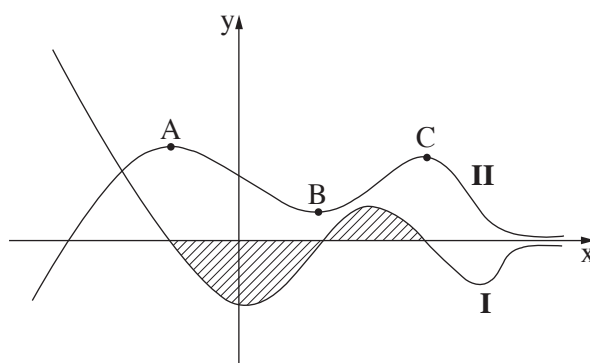
(1) קבעו איזה מן הביטויים I-IV מתאר את הפונקציה $f(x)$. נמקו את קביעתכם.

נתונה הפונקציה $g(x)$, המוגדרת באותו התחום כמו הפונקציה $f(x)$.

פונקציית הנגזרת $g'(x)$ מקיימת: $g'(x) = f(x) + \frac{5}{3}$.

(2) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

7. הגרפים II-I בסרטוט שלפניכם מתארים את הפונקצייה $f(x)$ ואת פונקציית הנגזרת $f'(x)$. כל נקודות הקיצון של הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$ מתוארות בסרטוט.



- (1) קבעו איזה גרף, I או II, מתאר את הפונקצייה $f(x)$. נמקו את קביעתכם.
 - (2) כמה נקודות פיתול יש לפונקצייה $f(x)$? נמקו את תשובתכם.
- הנקודות A, B ו- C הן נקודות הקיצון של גרף II, כמתואר בסרטוט.
- נתון: $y_A = 6$, $y_B = 2$.
- השטח המוגבל על ידי גרף I ועל ידי ציר ה- x (השטח המקווקו בסרטוט) שווה ל- 7.
- (3) מצאו את שיעור ה- y של הנקודה C.

פרק שני – סדרות והסתברות

2. בסדרה חשבונית A נתון: $a_1 = -4 - 4k$, $a_3 = -16 + 2k$, k הוא פרמטר.

א. מצאו עבור אילו ערכים של k:

(1) הסדרה A עולה, (2) הסדרה A יורדת, (3) הסדרה A קבועה.

נתון כי $a_{17} = -232$.

ב. מצאו את הערך של k.

הציבו את הערך של k שמצאתם וענו על הסעיפים ג-ד.

נתונה סדרה חדשה, B, שאיבריה מוגדרים כך: לכל n טבעי, $b_n = a_n + 24n + 17$.

ג. הוכיחו כי הסדרה B היא חשבונית.

ד. חשבו את הסכום: $b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 - b_4^2 + \dots + b_{29}^2 - b_{30}^2$.

3. ביישוב מסוים הוחלט לערוך סקר בנוגע להקמת פארק ביישוב.

בסקר השתתפו תושבים מבוגרים וצעירים בלבד.

כל אחד מן התושבים שהשתתף בסקר כתב אם הוא תומך בהקמת הפארק או מתנגד להקמתו (לא היו נמנעים).

כל התושבים המבוגרים שהשתתפו בסקר תמכו בהקמת הפארק.

בחרו באקראי בתושב אחד מבין התושבים שהשתתפו בסקר.

נסמן ב-p את ההסתברות שהתושב שנבחר היה צעיר.

נסמן ב-k את ההסתברות שהתושב שנבחר תמך בהקמת הפארק.

א. הביעו באמצעות p ו-k את ההסתברות שהתושב שנבחר היה צעיר התומך בהקמת הפארק.

מחצית מן התושבים הצעירים שהשתתפו בסקר תמכו בהקמת הפארק.

$\frac{3}{7}$ מן המשתתפים בסקר שתמכו בהקמת הפארק היו צעירים.

ב. מצאו את p ואת k.

יוסי, כתב חדשות מקומי, ריאיון באקראי 6 מן התושבים הצעירים שהשתתפו בסקר.

ג. מהי ההסתברות שלפחות אחד מהם תמך בהקמת הפארק ולפחות אחד מהם התנגד להקמת הפארק?

לאחר מכן ריאיון יוסי באקראי, בזה אחר זה, 5 תושבים שהשתתפו בסקר.

ד. מהי ההסתברות שבדיוק 3 מן המרואיינים האלה היו צעירים, ושהמרואיין האחרון מהם היה צעיר?

פרק שלישי – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4. שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו-B. C היא נקודה על המעגל הימני.

המשכי הקטעים CA ו-CB חותכים את המעגל השמאלי

בנקודות D ו-E בהתאמה.

הנקודה F נמצאת על הקשת BC, כמתואר בסרטוט.

המשכי הקטעים CF ו-DE נפגשים בנקודה G.

א. הוכיחו: $\angle EDA = \angle CBA$.

ב. הוכיחו: המרובע GDAF הוא בר חסימה במעגל.

המיתרים AF ו-BC נפגשים בנקודה H.

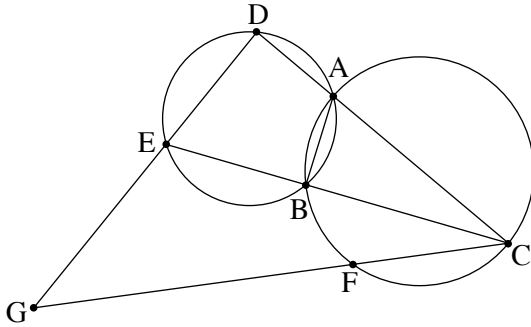
נתון: $\angle GEC = \angle CHA$.

ג. הוכיחו: $\frac{CG}{CD} = \frac{GE}{DE}$.

נתון: CE מאונך ל-AB.

CD = 36, DE = 18

ד. חשבו את אורכי הקטעים EG ו-CG.



5.

נתון מעגל שמרכזו O והרדיוס שלו R.

מנקודה E, הנמצאת מחוץ למעגל, העבירו ישר החותך את המעגל

בנקודות A ו-B, כמתואר בסרטוט.

הנקודה D נמצאת על הקשת הגדולה AB,

כך שהקטע ED משיק למעגל.

הנקודה C היא אמצע המיתר AB.

נסמן את הזווית בין הרדיוסים OD ו-OA ב- 2α ($\alpha < 60^\circ$).

נתון: המרחק של הנקודה O מן המיתר AB הוא $0.5R$.

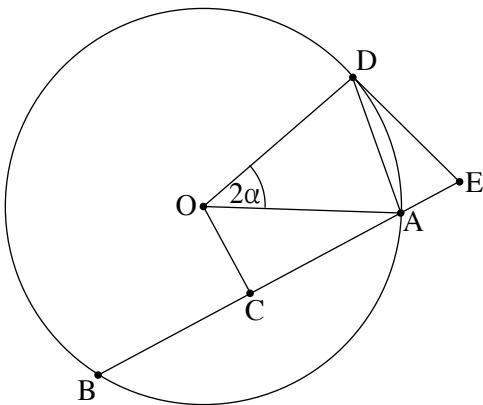
א. מצאו את זוויות המרובע DOCE. הביעו באמצעות α אם יש צורך.

ב. הביעו באמצעות R ו- α את אורך הקטע DE.

נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש AOD הוא $\frac{4}{7}R$.

ג. מצאו את α .

ד. מצאו את היחס בין שטח המעגל החוסם את המרובע DOCE ובין שטח המעגל הנתון.



פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

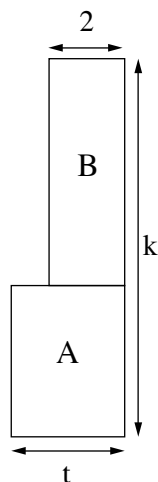
6. נתונה הפונקצייה: $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 4}{(\sqrt{x} - 2)^2}$.

- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.
- (2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.
- (3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.
- (4) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.
- ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.
- נתונה הפונקצייה: $g(x) = \frac{2x}{\sqrt{x} - 2}$ המוגדרת באותו התחום כמו הפונקצייה $f(x)$.
- ג. הראו כי לכל $x > 0$ בתחום ההגדרה של הפונקציות מתקיים $f(x) = g'(x)$.
- ד. לפניכם טענות I–II. קבעו בנוגע לכל טענה אם היא נכונה או לא נכונה. נמקו את קביעותיכם.
 - I. יש משיק לגרף הפונקצייה $g(x)$ ששיפועו הוא 2.
 - II. לפונקצייה $g(x)$ יש נקודת פיתול אחת בלבד.
- ה. חשבו את ערך הביטוי $\int_{0.25}^1 g(x) \cdot f(x) dx$.

7. נתונה הפונקצייה: $f(x) = \frac{\sin(x) - a}{\sin(x) + a}$, a הוא פרמטר חיובי.

- הפונקצייה $f(x)$ מוגדרת לכל x המקיים $\sin(x) \neq -a$.
- נתון כי הגרף של הפונקצייה $f(x)$ משיק לציר x בכל נקודות הקיצון שלה.
- א. מצאו את הערך של a .
 - הציבו $a = 1$, וענו על הסעיפים ב–ה עבור התחום $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.
 - ב. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.
 - (2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.
 - (3) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.
 - ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.
 - ד. כמה פתרונות יש למשוואה $f(x) = -1$ בתחום הנתון? נמקו את תשובתכם.
 - ה. ידוע כי הפונקצייה $f(x)$ קעורה כלפי מטה בכל אחד מחלקי תחום הגדרתה. קבעו אם הטענה שלפניכם נכונה או לא נכונה. נמקו את קביעתכם.

ה. $\int_0^\pi (f(x) + 1) dx > \frac{\pi}{2}$.



8. נתונות שתי גינות מלבניות הצמודות זו לזו, גינה A וגינה B.

הרוחב של גינה A הוא t מטרים.

הרוחב של גינה B הוא 2 מטרים ושטחה הוא $2t + 2$ מ"ר, כמתואר בסרטוט שלפניכם.

האורך הכולל של שתי הגינות הוא k מטרים. k הוא קבוע.

א. הביעו באמצעות k ו- t את שטח הגינה A.

ב. הביעו באמצעות k את הערך של t שבעבורו היחס בין שטח הגינה B

ובין שטח הגינה A הוא מינימלי.

ג. הביעו באמצעות k את הערך של t שבעבורו היחס בין שטח הגינה A

ובין שטח הגינה B הוא מקסימלי. נמקו את תשובתכם.

בהצלחה!