

Математика
5 единиц обучения – второй вопросник

מתמטיקה
5 יחידות לימוד – שאלון שני

Указания

הוראות

- а. Продолжительность экзамена: 2 часа 15 минут.
- б. Строение вопросника и ключ к оценке:
В этом вопроснике два раздела, и в них пять вопросов.
Раздел первый – аналитическая геометрия, векторы, тригонометрия в пространстве, комплексные числа
Раздел второй – рост и затухание, степенные функции, показательные и логарифмические функции
Вы должны ответить на три вопроса по выбору, по меньшей мере на один вопрос из каждого раздела – $3 \times 33\frac{1}{3} = 100$ баллов.
- в. Разрешенный вспомогательный материал:
1. Калькулятор без графического дисплея. При работе с калькулятором, который предоставляет возможности программирования, запрещается использовать эти возможности. Использование калькулятора с графическим дисплеем или возможностей программирования может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.
2. Листы с формулами (прилагаются).
3. Двухязычный словарь.
- г. Особые указания:
1. Не переписывайте вопрос; обозначьте только его номер.
2. Начинайте ответ на каждый вопрос с новой страницы. Запишите в тетради этапы решения (также и в том случае, когда вычисления производились с помощью калькулятора). Объясните все свои действия, включая вычисления, подробно, ясно и по порядку. Недостаточно подробная запись решения может привести к тому, что оценка за экзамен будет снижена или экзамен будет аннулирован.

- א. משך הבחינה: שתיים ורבע.
ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:
בשאלון זה שני פרקים, ובהם חמש שאלות.
פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים
פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות
יש לענות על שלוש שאלות לבחירתכם, לפחות על שאלה אחת מכל פרק – $3 \times 33\frac{1}{3} = 100$ נקודות.
ג. חומר עזר מותר בשימוש:
1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
2. דפי נוסחאות (מצורפים).
3. מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.
ד. הוראות מיוחדות:
1. אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
2. יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש.
יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Пишите только в экзаменационной тетради. Напишите слово «טיוטה» в начале каждой страницы, отведенной вами под черновик. Выполнение любых черновых записей на листах, не относящихся к экзаменационной тетради, может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.

Вопросы

Ответьте на три из вопросов 1–5, по меньшей мере на один вопрос из каждого раздела (за каждый вопрос – $33\frac{1}{3}$ балла).

Обратите внимание: если вы ответите более чем на три вопроса, будут проверены только первые три из ответов в вашей тетради.

Раздел первый – аналитическая геометрия, векторы, тригонометрия в пространстве, комплексные числа

1. Дан эллипс, уравнение которого $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{144 - 4k^2} = 1$, $0 < k < 6$.

Точка F_1 – это правый фокус эллипса, а точка F_2 – это левый фокус эллипса.

(к) Выразите при помощи k координаты точек F_1 и F_2 .

Точка A располагается в первом квадранте на параболе, уравнение которой является каноническим, а фокус которой расположен в точке F_1 , так что выполняется $AF_1 = 10k$.

(з) (1) Выразите при помощи k уравнение директрисы [גךךד] параболы.

(2) Выразите при помощи k координаты точки A .

AF_1 – диаметр окружности. Прямая, уравнение которой $5x + 12y = 138$, является касательной к этой окружности.

(г) Найдите значение k .

D – это точка на данном эллипсе.

(т) Определите, периметр треугольника F_1AF_2 больше, чем периметр треугольника F_1DF_2 , меньше его или равен ему. Обоснуйте свой ответ.

2. На приведенном чертеже изображен куб $ABCD A' B' C' D'$.

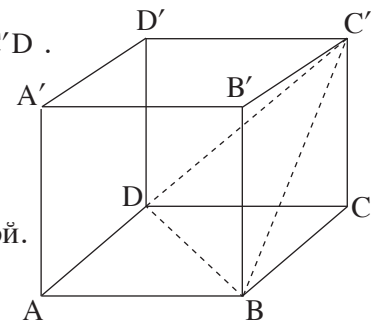
Обозначим: $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.

(к) Докажите, что диагональ CA' перпендикулярна плоскости $BC'D$.

Точка E – это пересечение медиан треугольника $BC'D$.

(д) (1) Выразите вектор \overrightarrow{CE} при помощи \underline{u} , \underline{v} и \underline{w} .

(2) Докажите, что точки C , E и A' находятся на одной прямой.



Дано: $D(0, 0, 0)$, $C(3, 4, 0)$, $A(4, n, p)$, n и p – параметры.

Координата z точки C' является положительной.

(а) (1) Найдите координаты точки A и докажите, что $ABCD$ расположен в плоскости $z = 0$.

(2) Найдите координаты точки C' .

ℓ – это прямая пересечения плоскости $BC'D$ с плоскостью $BCC'B'$.

(г) Найдите параметрическое уравнение прямой ℓ .

(н) Найдите параметрическое уравнение плоскости, содержащей прямую ℓ и не пересекающей ось x .

3. Дано уравнение $z^3 = \frac{1}{z^3}$, z – комплексное число.

Дано также, что число z_0 – одно из решений данного уравнения и что оно представлено точкой, расположенной в четвертом квадранте в плоскости Гаусса.

(к) Найдите комплексное число z_0 .

Точки A , B и C представляют в плоскости Гаусса комплексные числа $d \cdot z_0$, $di \cdot z_0$ и $d \cdot (z_0)^4$, соответственно. $d > 0$ – параметр.

Дано, что площадь треугольника ABC равна $5d + 6$.

(д) Найдите значение d .

Определим: $w = \left((z_0)^2 - \frac{1}{(z_0)^2} \right) (1 + i)$.

(а) Найдите $|w|$ и аргумент (угол) w .

Дано, что число w^n (n – натуральное число) – это чисто мнимое число, расположенное за пределами окружности, описывающей треугольник ABC .

(г) Найдите минимальное возможное значение n .

Раздел второй – рост и затухание, степенные функции, показательные и логарифмические функции

4. Дана функция $f(x) = (e^x - 1)^n - 4$, определенная для любого x . n – натуральное число, которое больше или равно 2.

Ответьте на вопросы пункта (к) для четного n и для нечетного n .

- (к) (1) Найдите уравнение горизонтальной асимптоты функции $f(x)$.
(2) Найдите координаты точек экстремума функции $f(x)$ и определите их тип (если таковые существуют).
(3) Начертите схематический график функции $f(x)$.

Ответьте на вопросы пунктов (д)–(з) для $n = 2$.

Дана функция $g(x) = 3e^x - 7$, определенная для любого x .

- (д) (1) Найдите координаты точек пересечения графика функции $f(x)$ и графика функции $g(x)$.
(2) Вычислите площадь фигуры, заключенной между графиком функции $f(x)$ и графиком функции $g(x)$.

Дана функция $h(x) = |f(x)|$, определенная для любого x .

- (з) (1) Сколько точек экстремума есть у функции $h(x)$? Найдите координаты этих точек и определите их тип.
(2) Найдите область значений k , для которой прямая $y = k$ пересекает график функции $h(x)$ в 3 точках.

5. Дана функция $f(x) = \ln(x) + \frac{1}{x}$.

- (к) (1) Найдите область определения функции $f(x)$.
(2) Найдите координаты точки экстремума функции $f(x)$ и определите ее тип.
(3) Начертите схематический график функции $f(x)$.

Дана функция $g(x) = (x + 1)(1 - \ln(x))$ с той же областью определения, что и функция $f(x)$.

- (д) (1) Найдите координаты точки пересечения графика функции $g(x)$ с осью x .
(2) Найдите области возрастания и области убывания функции $g(x)$ (если такие существуют).
(3) Найдите область вогнутости вверх \cup и область вогнутости вниз \cap функции $g(x)$.
(4) Начертите схематический график функции $g(x)$.

Дана функция $h(x) = \frac{1}{x} \cdot g'(x)$, определенная в той же области, что и функция $g(x)$.

- (з) Вычислите площадь фигуры, заключенной между графиком функции $h(x)$, осью x и прямыми $x = e$ и $x = 1$.

Желаем успеха!

בהצלחה!