

מתמטיקה 5 יחידות לימוד – שאלון שני

הוראות

- א. משך הבחינה: שעתיים ורבע.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים, ובהם חמש שאלות.
פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים
פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות
יש לענות על שלוש שאלות לבחירתכם, לפחות על שאלה אחת מכל פרק – $3 \times 33\frac{1}{3} = 100$ נקודות.
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
(2) דפי נוסחאות (מצורפים).
- ד. הוראות מיוחדות:
(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

השאלות

ענו על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה – $33\frac{1}{3}$ נקודות).
שימו לב: אם תענו על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – גאומטרייה אנליטית, וקטורים, טריגונומטרייה במרחב, מספרים מרוכבים

1. נתונה אליפסה שמשוואתה $1 = \frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{144 - 4k^2}$, $0 < k < 6$.

הנקודה F_1 היא המוקד הימני של האליפסה, והנקודה F_2 היא המוקד השמאלי שלה.

א. הביעו באמצעות k את שיעורי הנקודות F_1 ו- F_2 .

הנקודה A נמצאת ברביע הראשון על פרבולה שמשוואתה קנונית והמוקד שלה נמצא בנקודה F_1 , כך שמתקיים: $AF_1 = 10k$.

ב. (1) הביעו באמצעות k את משוואת מדריך הפרבולה.

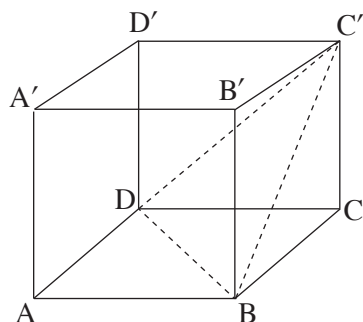
(2) הביעו באמצעות k את שיעורי הנקודה A .

AF_1 הוא קוטר במעגל הישר שמשוואתו $5x + 12y = 138$ משיק למעגל זה.

ג. מצאו את הערך של k .

D היא נקודה על האליפסה.

ד. קבעו אם היקף המשולש F_1AF_2 גדול מהיקף המשולש F_1DF_2 , קטן ממנו או שווה לו. נמקו את קביעתכם.



2. בסרטוט שלפניכם מתוארת הקובייה $ABCD A' B' C' D'$.

נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$.

א. הוכיחו כי האלכסון CA' מאונך למישור $BC'D$.

נקודה E היא מפגש התיכונים במשולש $BC'D$.

ב. (1) הביעו את הווקטור $\overrightarrow{CE}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

(2) הוכיחו כי הנקודות E, C ו- A' נמצאות על ישר אחד.

נתון: $D(0, 0, 0)$, $C(3, 4, 0)$, $A(4, n, p)$, n ו- p הם פרמטרים.

שיעור ה- z של הנקודה C' הוא חיובי.

ג. (1) מצאו את שיעורי הנקודה A , והוכיחו כי $ABCD$ נמצא במישור $z = 0$.

(2) מצאו את שיעורי הנקודה C' .

ℓ הוא ישר החיתוך בין המישור $BC'D$ ובין המישור $BCC'B'$.

ד. מצאו הצגה פרמטרית של הישר ℓ .

ה. מצאו הצגה פרמטרית של המישור המכיל את הישר ℓ ואינו חותך את ציר ה- x .

3. נתונה המשוואה $z^3 = \frac{1}{z^3}$, z הוא מספר מרוכב.

נתון גם כי המספר z_0 הוא אחד מפתרונות המשוואה וכי הוא מיוצג על ידי נקודה הנמצאת ברביע הרביעי במישור גאוס.

א. מצאו את המספר המרוכב z_0 .

הנקודות A, B ו- C מיוצגות במישור גאוס על ידי המספרים המרוכבים $d \cdot z_0$, $di \cdot z_0$ ו- $d \cdot (z_0)^4$ בהתאמה, $d > 0$ הוא פרמטר.

נתון כי שטח המשולש ABC הוא $5d + 6$.

ב. מצאו את הערך של d .

נגדיר: $w = \left((z_0)^2 - \frac{1}{(z_0)^2} \right) (1 + i)$.

ג. מצאו את $|w|$ ואת הארגומנט (הזווית) של w .

נתון כי המספר w^n (n הוא מספר טבעי) הוא מספר מדומה טהור, ונמצא מחוץ למעגל החוסם את המשולש ABC .

ד. מצאו את הערך המינימלי האפשרי של n .

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4. נתונה הפונקצייה $f(x) = (e^x - 1)^n - 4$, המוגדרת לכל x . n הוא מספר טבעי גדול או שווה ל-2. ענו על סעיף א עבור n זוגי ועבור n אי-זוגי.

- א. (1) מצאו את משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקצייה $f(x)$.
- (2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן (אם יש כאלה).
- (3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

ענו על הסעיפים ב-ג עבור $n = 2$.

נתונה הפונקצייה $g(x) = 3e^x - 7$, המוגדרת לכל x .

- ב. (1) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך שבין גרף הפונקצייה $f(x)$ ובין גרף הפונקצייה $g(x)$.
- (2) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $f(x)$ ועל ידי גרף הפונקצייה $g(x)$.

נתונה הפונקצייה $h(x) = |f(x)|$, המוגדרת לכל x .

- ג. (1) כמה נקודות קיצון יש לפונקצייה $h(x)$? מצאו את שיעורי הנקודות הללו, וקבעו את סוגן.
- (2) מצאו את תחום הערכים של k שעבורו הישר $y = k$ חותך את גרף הפונקצייה $h(x)$ ב-3 נקודות.

5. נתונה הפונקצייה $f(x) = \ln(x) + \frac{1}{x}$.

- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.
 - (2) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.
 - (3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.
- נתונה הפונקצייה $g(x) = (x+1)(1 - \ln(x))$, המוגדרת באותו התחום שבו מוגדרת הפונקצייה $f(x)$.
- ב. (1) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $g(x)$ עם ציר ה- x .
 - (2) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקצייה $g(x)$ (אם יש כאלה).
 - (3) מצאו את תחום הקעירות כלפי מעלה $\cup$ ואת תחום הקעירות כלפי מטה $\cap$ של הפונקצייה $g(x)$.
 - (4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

נתונה הפונקצייה $h(x) = \frac{1}{x} \cdot g'(x)$, המוגדרת באותו התחום שבו מוגדרת הפונקצייה $g(x)$.

- ג. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $h(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = e$ ו- $x = 1$.

בהצלחה!