

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות

תוכנית חדשה

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

- פרק ראשון – "שאלות קצרות", סדרות והסתברות
 - פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור
 - פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות
- יש לענות על חמש שאלות לבחירתכם – $20 \times 5 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

- (1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
 - (2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
- יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה. כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

השאלות

שימו לב: יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

ענו על חמש מן השאלות 1–8 (לכל שאלה – 20 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – "שאלות קצרות", סדרות והסתברות

1. ענו על שלושה מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משלושה סעיפים, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. ידוע כי לכל n טבעי מתקיים:

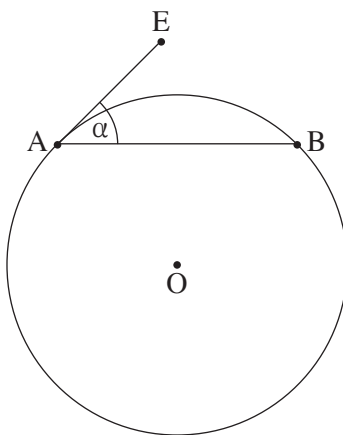
$$1 \cdot 2 + 4 \cdot 7 + 7 \cdot 12 + \dots + (3n - 2)(5n - 3) = n(5n^2 - 2n - 1)$$

(1) חשבו את הערך של הביטוי: $7 \cdot 12 + 10 \cdot 17 + \dots + 58 \cdot 97$

ידוע כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1 \cdot 2 + 4 \cdot 7 + 7 \cdot 12 + \dots + (3n - 2)(5n - 3) + (3n + 1)(5n + 2) = (n + 1)(5n^2 + 8n + C)$$

(2) מצאו את הערך של C .



ב. הנקודה A נמצאת על מעגל שמרכזו O. מעבירים משיק למעגל בנקודה A, והוא יוצר זווית של α מעלות עם המיתר AB (ראו סרטוט).

(1) הביעו באמצעות α את הזווית AOB.

(2) הביעו באמצעות α את היחס בין אורך הקשת הקטנה AB

ובין היקף המעגל.

ג. נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x}$ המוגדרת לכל x השונה מ-0.

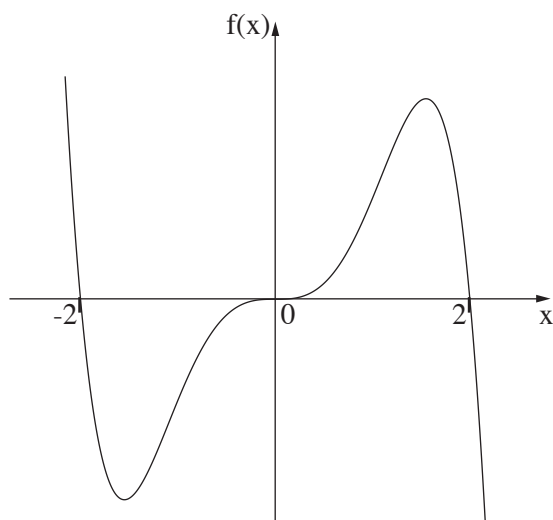
(1) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(2) נתונה הפונקצייה $g(x) = k \cdot f(x + 3)$, $k > 0$, הוא פרמטר.

מצאו את הערך של k שעבורו המרחק בין האסימפטוטות האופקיות של הפונקצייה $g(x)$ הוא 10.

נמקו את תשובתכם.

ד. $f(x)$ היא פונקצייה אי-זוגית המוגדרת לכל x . הגרף שלפניכם מתאר את הפונקצייה $f(x)$.



נתונה הפונקצייה $g(t)$ המוגדרת בתחום $-2 \leq t \leq 2$ ומקיימת $g(t) = \int_{-2}^t f(x) dx$.

- (1) קבעו באיזה תחום הפונקצייה $g(t)$ יורדת.
- (2) האם קיימים ערכים של t (בתחום $-2 \leq t \leq 2$) שעבורם הפונקצייה $g(t)$ חיובית? נמקו את תשובתכם.
- (3) האם לפונקצייה $g(t)$ יש נקודות פיתול? נמקו את תשובתכם.

2. נתונה סדרה הנדסית אין סופית A שהאיבר הכללי שלה הוא a_n ומנתה היא q .
 בונים סדרה חדשה B שהאיבר הכללי שלה הוא $b_n = a_n \cdot q^{n-1}$.
 א. הוכיחו שגם סדרה B היא סדרה הנדסית.
 ב. בנוגע לכל אחד מן ההיגדים (1)–(2) שלפניכם קבעו אם הוא נכון או לא נכון, ונמקו את קביעתכם.
 (1) אם הסדרה A לא מתכנסת – בהכרח גם הסדרה B לא מתכנסת.
 (2) אם הסדרה A יורדת – בהכרח היא גם מתכנסת.
 נתון כי שתי הסדרות מתכנסות, וכי היחס בין הסכום של כל איברי הסדרה B לסכום של כל איברי הסדרה A הוא $\frac{3}{5}$.
 ג. מצאו את q .
 ד. נתון: n הוא מספר טבעי המקיים $\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_3}{a_3} + \dots + \frac{b_n}{a_n} = \frac{2059}{729}$. מצאו את n .
3. בחנות פירות יש ארגזים ובתוכם פירות.
 בארגז א' יש a פירות: 3 תפוחים והשאר אגסים.
 בארגז ב' יש b פירות: 5 תפוחים והשאר אגסים.
 מוציאים באקראי פרי אחד מארגז א'. אם יצא תפוח – מעבירים אותו לארגז ב', ואם יצא אגס – מחזירים אותו לארגז א'.
 לאחר מכן מוציאים באקראי פרי אחד מארגז ב'.
 א. הביעו באמצעות a ו-b את ההסתברות שיצאו 2 תפוחים.
 נתון: ההסתברות להוציא באופן המתואר 2 תפוחים היא $\frac{9}{65}$.
 ההסתברות להוציא באופן המתואר תפוח אחד ואחר כך אגס אחד היא $\frac{21}{130}$.
 ב. מצאו את a ואת b .
 ג. חשבו את ההסתברות שמארגז ב' יצא אגס, אם ידוע כי מארגז א' יצא תפוח.
 מעבירים את כל הפירות משני הארגזים לארגז אחר שהיה ריק, ומוציאים ממנו באקראי פרי 6 פעמים, עם החזרה.
 ד. מצאו את ההסתברות שב- 4 מן הפעמים בדיוק יצא תפוח או שבכל 6 הפעמים יצא אגס.
 ה. ידוע שב- 4 מן הפעמים בדיוק יצא תפוח. מצאו את ההסתברות שהתפוחים יצאו ברציפות, בזה אחר זה.

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4. שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו-B (ראו סרטוט).

המיתר AC במעגל השמאלי חותך את המעגל הימני בנקודה D.

המיתר AE במעגל הימני חותך את המעגל השמאלי בנקודה F.

הקטע CE עובר דרך הנקודה B.

א. הוכיחו כי $\triangle ACE \sim \triangle BCD$.

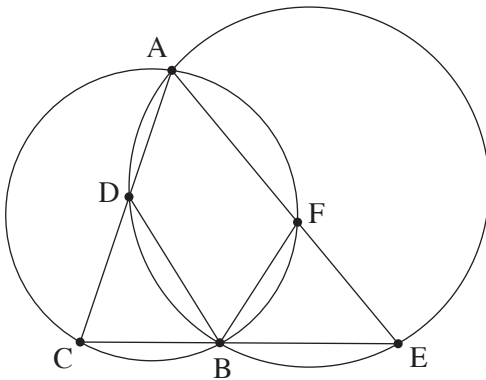
נתון: $DC = FE$.

ב. הוכיחו כי $\triangle BFE \cong \triangle BCD$.

ג. (1) הוכיחו כי $AC \cdot BE = AE \cdot BC$.

(2) הוכיחו כי AB הוא חוצה זווית CAE.

ד. הוכיחו כי $\angle DEC = \angle FCE$.



5. משולש BCD חסום במעגל שמרכזו בנקודה O ורדיוסו R.

הנקודות O ו-E נמצאות על הצלע BD כך שמתקיים $OE = ED$ (ראו סרטוט).

נסמן: $CD = m$, $\angle CDB = \alpha$.

א. הביעו את $\cos \alpha$ באמצעות m ו-R.

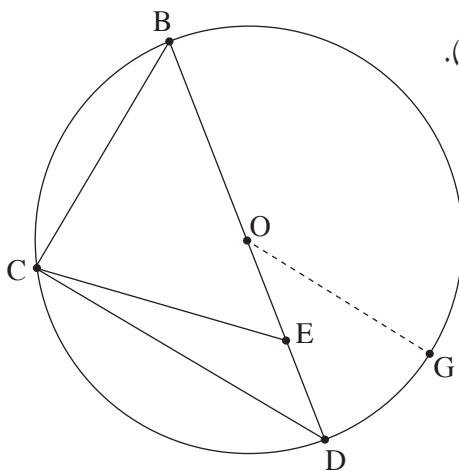
ב. הוכיחו כי $CE = \frac{1}{2} \sqrt{2m^2 + R^2}$.

נתון: $BC = EC$.

ג. חשבו את α .

מעבירים רדיוס OG המקביל לצלע CD, כמתואר בסרטוט.

ד. חשבו את גודל הזווית OEG.

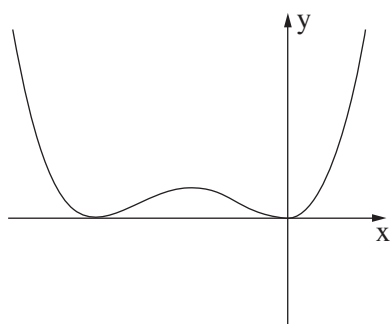


**פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש,
של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות**

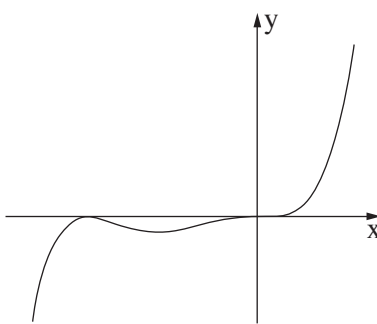
6. נתונה הפונקצייה $f(x) = x^n \cdot (x + 1)^2$, $n > 1$ הוא מספר טבעי. הפונקצייה $f(x)$ מוגדרת לכל x .

- א. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.
- ב. מצאו את תחומי החיוביות ואת תחומי השליליות של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה). הבחינו בין n זוגי ובין n אי-זוגי.
- ג. מצאו את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן. הביעו את תשובותיכם באמצעות n , אם יש צורך. הבחינו בין n זוגי ובין n אי-זוגי.

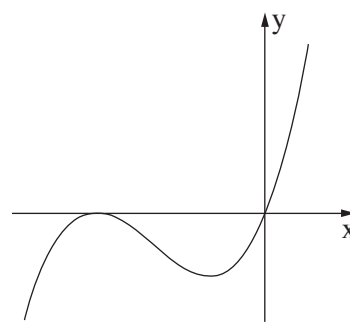
לפניכם שלושה גרפים III-I. אחד מן הגרפים מתאר את הפונקצייה $f(x)$ עבור n זוגי, ואחד מהם מתאר את הפונקצייה $f(x)$ עבור $n > 1$ ואי-זוגי.



III



II



I

- ד. קבעו איזה גרף מתאר את הפונקצייה $f(x)$ עבור n זוגי, ואיזה גרף מתאר את הפונקצייה $f(x)$ עבור $n > 1$ ואי-זוגי. נמקו את קביעותיכם.

נתונה הפונקצייה $g(x) = a \cdot f(x - 2)$, a הוא פרמטר חיובי.

נסמן ב- T את השטח הכלוא בין גרף הפונקצייה $g(x)$ ובין ציר ה- x .

- ה. הביעו באמצעות a ו- T את השטח הכלוא בין גרף הפונקצייה $f(x)$ ובין ציר ה- x . נמקו את תשובתכם.

7. נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{2 \sin(x)}{\cos^2(x) - 1}$ בתחום $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.

- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.
 (2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה $f(x)$ המאונכות לציר ה- x .
 (3) האם הפונקצייה $f(x)$ זוגית, אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית? הוכיחו את תשובתכם.
 ב. ענו על התת-סעיפים (1)–(2) שלפניכם בעבור התחום $0 \leq x \leq 2\pi$.
 (1) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).
 (2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.
 ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$ (בתחום $-2\pi \leq x \leq 2\pi$).
 ד. הוכיחו כי לפונקצייה $f(x)$ אין נקודות פיתול.
 ה. חשבו את השטח הכלוא בין גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ובין ציר ה- x , בתחום $1.7 \leq x \leq 2$.

8. לפניכם שלוש פונקציות שלכל אחת מהן יש שני ערכי x שבהם היא אינה מוגדרת.

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{(x + 1)(x + 2)}, \quad h(x) = \frac{x^3}{x(x + 2)}, \quad k(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2(x + 2)}$$

- ידוע כי לאחת משלוש הפונקציות יש אסימפטוטה אופקית אחת ואסימפטוטה אנכית אחת בלבד.
 א. מבין שלוש הפונקציות הנתונות, קבעו איזו פונקצייה מקיימת את כל התכונות האלה. נמקו את קביעתכם.
 ענו על סעיפים ב–ד עבור הפונקצייה שקבעתם בסעיף א.
 ב. (1) מצאו את המשוואה של האסימפטוטה האופקית ואת המשוואה של האסימפטוטה האנכית של הפונקצייה.
 (2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה עם הצירים.
 נתון כי לפונקצייה זו אין נקודות קיצון.
 ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה.
 נסמן נקודה A על גרף הפונקצייה, שעבורה $x = t$, $-1 < t < 1$.
 מן הנקודה A מעבירים שני ישרים, האחד מאונך לציר ה- x והאחר מאונך לאסימפטוטה האנכית של הפונקצייה, כך שנוצר מלבן על ידי שני הישרים, על ידי האסימפטוטה האנכית ועל ידי ציר ה- x .
 ד. מצאו את ערכו של t שבעבורו היקף המלבן המתקבל הוא מינימלי. תוכלו להשאיר שורש בתשובתכם.

בהצלחה!