

שימו לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

תוכנית חדשה

הוראות

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון – "שאלות קצרות", סדרות והסתברות

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש,

של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

יש לענות על חמש שאלות לבחירתכם – $20 \times 5 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.

(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים

בעזרת מחשבון.

יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד, יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.

כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

השאלות

שימו לב: יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

ענו על חמש מן השאלות 1-8 (לכל שאלה – 20 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברת.

פרק ראשון – "שאלות קצרות", סדרות והסתברות

1. ענו על שלושה מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משלושה סעיפים, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות במחברת.

א. הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי בעבור כל n טבעי מתקיים:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)}{6}$$

ב. במשולש חד זווית ABC, הגבהים AD, BE, CF נפגשים בנקודה O (ראו סרטוט).

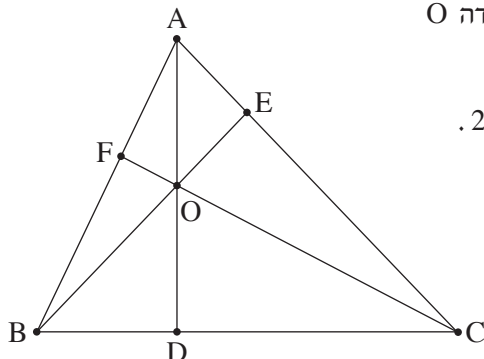
נתון כי סכום המרחקים של הנקודה O מקודקודי המשולש הוא 20.

(1) הוכיחו שאפשר לחסום במעגל כל אחד

מן המרובעים CDOE, BDOF, AEOF.

(2) מהו סכום ההיקפים של המעגלים החוסמים את

המרובעים CDOE, BDOF, AEOF?



ג. נתונה הפונקציה $f(x) = 3 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 25}}$.

(1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

(2) ידוע כי האסימפטוטות של גרף הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים, חותכות זו את זו.

חשבו את השטח הכלוא בין האסימפטוטות. נמקו את התשובה.

(שימו לב: המשך השאלה בעמוד הבא.)

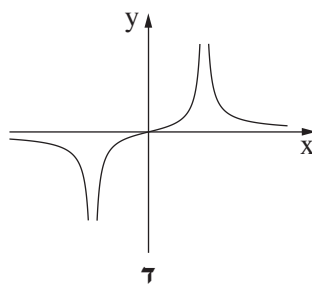
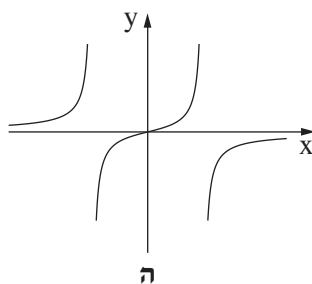
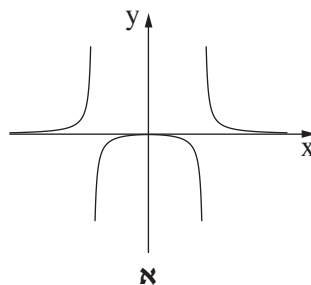
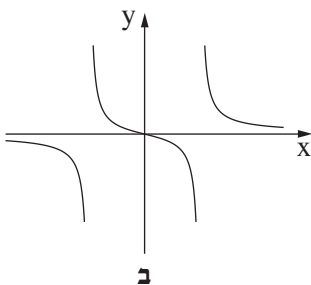
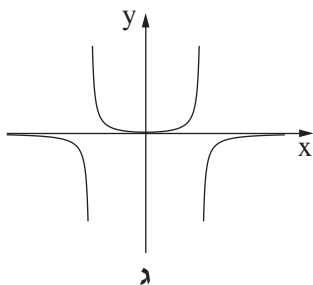
7. נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{a \cdot x}{x^2 - 4}$, המוגדרת עבור $x \neq 2$ ו- $x \neq -2$. $a \neq 0$ הוא פרמטר.

אחד מן הגרפים א-ה שלפניכם מתאים לפונקצייה $f(x)$ בעבור $a > 0$,

ואחד מהם מתאים לפונקצייה $f(x)$ בעבור $a < 0$.

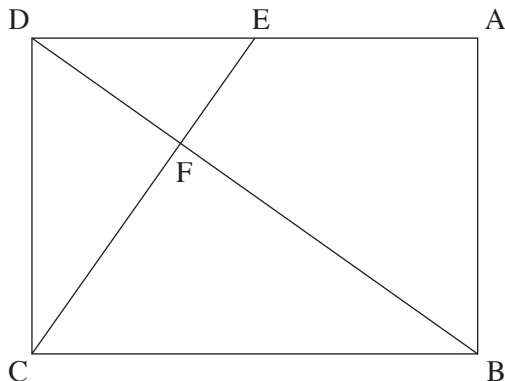
(1) איזה מן הגרפים מתאים לפונקצייה $f(x)$ בעבור $a > 0$? נמקו את התשובה בקצרה.

(2) איזה מן הגרפים מתאים לפונקצייה $f(x)$ בעבור $a < 0$? נמקו את התשובה בקצרה.



2. נתונה סדרה הנדסית אינסופית A שהאיבר הכללי שלה הוא a_n ומנתה היא q .
- א. הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים $a_1 \cdot a_{2n} = a_n \cdot a_{n+1}$.
- בעבור $2k$ האיברים הראשונים בסדרה A מתקיים כי מכפלת שני האיברים האמצעיים בסדרה שווה $10,935 \cdot a_1$.
- נתון: $a_{2k} - 2 = 1,215$.
- ב. מצאו את q (שתי אפשרויות).
- נתון: $a_1 = 5$.
- ג. (1) קבעו אם הסדרה A היא סדרה עולה, סדרה יורדת או סדרה לא עולה ולא יורדת. נמקו את התשובה.
- (2) מצאו את k .
- ד. מן הסדרה A בונים את הסדרה האינסופית B באופן הזה: $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}, \dots$.
- הוכיחו שהסדרה B היא סדרה הנדסית.
- בסדרה B מחליפים את הסימן של כל האיברים במקומות האי-זוגיים
- כך שמתקבלת הסדרה C שלפניהם: $-\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, -\frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}, \dots$.
- ה. מצאו את סכום הסדרה C .
3. בעיר גדולה בישראל נערך סקר ובו נבדקה רמת השליטה בשפה האנגלית בקרב תושבי העיר.
- בסקר השתתפו אנשים רבים – מבוגרים וצעירים.
- בסקר נמצא שמספר המבוגרים ששולטים באנגלית גדול פי 3 ממספר הצעירים ששולטים בה,
- ומספר המבוגרים שלא שולטים באנגלית גדול פי $2\frac{2}{3}$ ממספר המבוגרים ששולטים בה.
- נסמן ב- p את ההסתברות לבחור באקראי צעיר ששולט באנגלית מבין כלל המשתתפים בסקר.
- א. מצאו את ההסתברות לבחור באקראי מבוגר ששולט באנגלית מבין כלל המבוגרים שהשתתפו בסקר.
- ב. בחרים באקראי שלושה מבוגרים מבין המבוגרים שהשתתפו בסקר. מצאו את ההסתברות שבדיוק שניים מהם שולטים באנגלית.
- ג. (1) הביעו באמצעות p את ההסתברות לבחור באקראי צעיר שלא שולט באנגלית מבין כלל המשתתפים בסקר.
- (2) הראו כי תחום הערכים האפשרי בעבור p הוא $0 < p < \frac{1}{12}$.
- ידוע כי ההסתברות לבחור באקראי מבוגר מבין משתתפי הסקר שלא שולטים באנגלית שווה
- להסתברות לבחור באקראי צעיר מבין משתתפי הסקר שלא שולטים באנגלית.
- ד. מצאו את הערך של p .
- ה. האם המאורעות "לשלוט באנגלית" ו"להיות מבוגר" תלויים זה בזה? נמקו את תשובתכם.

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור



4. במלבן ABCD, הנקודה E נמצאת על הצלע AD.

הקטע CE חותך את האלכסון BD בנקודה F.

המרובע EABF הוא בר חסימה במעגל.

א. הוכיחו: $\triangle DAB \sim \triangle BFC$.

נתון: $DE = EA$.

ב. חשבו את היחס $\frac{EF}{FC}$.

נסמן את שטח המשולש DEF ב- S .

ג. הביעו את שטחי המשולשים DFC ו- BFC באמצעות S .

ד. חשבו את יחס הדמיון בין המשולש DAB ובין המשולש BFC.

נסמן: $DE = a$.

ה. (1) הביעו את אורך האלכסון BD באמצעות a .

(2) הביעו את קוטר המעגל החוסם את המרובע EABF באמצעות a .

5. נתון מעגל שמרכזו בנקודה O ורדיוסו R.

מנקודה A, שמחוץ למעגל, העבירו ישר שמשיק למעגל בנקודה D

וישר אחר, שחותך את המעגל בנקודה B כמתואר בסרטוט.

נסמן: $\angle AOD = \alpha$, $\angle AOB = \beta$.

א. הביעו באמצעות α , β ו- R, אם יש צורך, את:

(1) אורך הקטע AO.

(2) אורך הקטע AB.

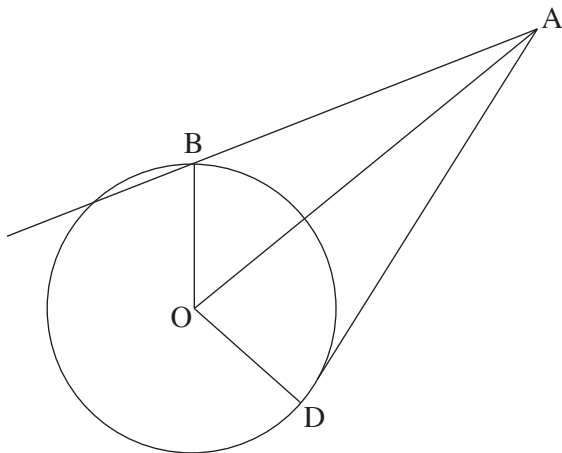
נתון: $AB = \sqrt{2} R$.

ב. הוכיחו כי $\cos \beta = \frac{\sin^2 \alpha}{2 \cos \alpha}$.

משולש ADO חסום במעגל אחר, שרדיוסו r.

נתון: $\frac{R}{r} = \frac{2\sqrt{7}}{5}$.

ג. מצאו את גודלי הזוויות α ו- β .



פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6. נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x + a}}$, a הוא פרמטר חיובי.

א. הביעו באמצעות a את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

נתון כי לפונקצייה $f(x)$ אין אסימפטוטות מאונכות לצירים.

ב. (1) מצאו את a .

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

(3) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונות הפונקציות $g(x) = -f(x + 2)$, $h(x) = |f(x)|$.

ג. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$ ואת תחום ההגדרה של הפונקצייה $h(x)$.

(2) האם שיעור ה- y של נקודת המקסימום של הפונקצייה $g(x)$ גדול משיעור ה- y של נקודת המקסימום של הפונקצייה $h(x)$, קטן ממנו או שווה לו? נמקו את התשובה.

נתון כי $\int_{-1}^3 h(x) dx = \int_{-3}^k g(x) dx$, $k > -3$.

7. מצאו את k . הסבירו את התשובה.

7. נתונה הפונקצייה $f(x) = \sin^2(x) - \cos^2(x) - 1$, המוגדרת לכל x .

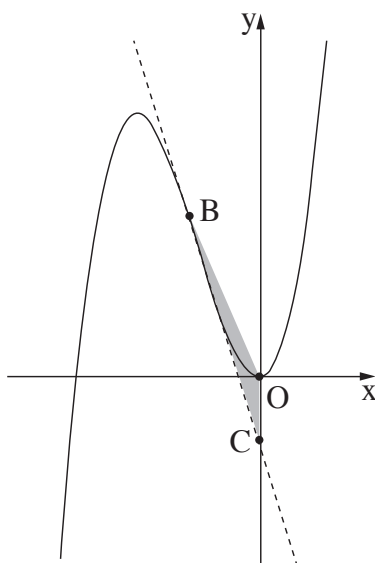
- האם הפונקצייה $f(x)$ זוגית? נמקו.
- הוכיחו כי לכל x מתקיים: $-2 \leq f(x) \leq 0$.
- מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$.
- סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$ בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$.

נתונה הפונקצייה $g(x) = f(2x)$, המוגדרת לכל x .

ה. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $g(x)$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, וקבעו את סוגן.

ו. נתון כי $\int_0^{\frac{\pi}{8}} (g'(x) - f'(x)) dx = S$.

הביעו באמצעות S את $\int_{-\frac{\pi}{8}}^0 (g'(x) - f'(x)) dx$. הסבירו את התשובה.



8. נתונה הפונקצייה $f(x) = x^3 + 4x^2$, המוגדרת לכל x .

הנקודה B נמצאת על גרף הפונקצייה $f(x)$ ברביע השני (ראו סרטוט).

מן הנקודה B מעבירים משיק לגרף הפונקצייה $f(x)$.

המשיק חותך את ציר ה- y בנקודה C.

נסמן ב- t את שיעור ה- x של הנקודה B.

א. הביעו באמצעות t את משוואת המשיק לגרף הפונקצייה $f(x)$ בנקודה B.

ידוע כי הנקודה C נמצאת מתחת לציר ה- x .

ב. מהו תחום הערכים של t ?

הנקודה O היא ראשית הצירים.

ג. מצאו את השטח המקסימלי של המשולש OBC.

בהצלחה!