

שים לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש,

של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

עליך לענות על חמש שאלות לבחירתך – $5 \times 20 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.

כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

ענה על חמש מן השאלות 1-8 (לכל שאלה – 20 נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1. בין הבית של תמר ויואב לבין ביתו של דן יש שביל אופניים.

לאורך שביל האופניים, בין שני הבתים, נמצא חדר כושר. המרחק בין חדר הכושר ובין הבית של תמר ויואב הוא 24 ק"מ.

תמר יצאה מן הבית בשעה 6:00 ורכבה על אופניים במהירות קבועה לעבר ביתו של דן.

בשעה 7:00 יצא יואב גם הוא מן הבית ורכב על אופניו לעבר ביתו של דן במהירות שגבוהה ב־5 קמ"ש ממהירות

הרכיבה של תמר.

בשעה 7:30 יצא דן מחדר הכושר ורכב על אופניו במהירות קבועה לעבר ביתו.

תמר, יואב ודן רכבו שלושתם על אותו שביל אופניים.

תמר השיגה את דן וחלפה על פניו בשעה 8:00.

יואב ודן הגיעו שניהם לביתו של דן בשעה 9:15.

א. מצא את המהירות של כל אחד משלושת הרוכבים.

ב. מה היה המרחק בין יואב ובין דן כאשר תמר הגיעה לביתו של דן?

2. נתונה סדרה הנדסית A שאיבריה הם a_1, a_2, a_3, \dots ומנתה היא q . כל איברי הסדרה A שונים מאפס.

א. האם הסדרה $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \dots$ היא סדרה הנדסית? הוכח את תשובתך.

ב. (1) מסמנים ב- S_n את הסכום של n האיברים הראשונים של הסדרה A (n טבעי).

$$\frac{S_n}{a_1 \cdot a_n} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n} \quad \text{מתקיים: הוכח כי לכל } n$$

(2) נתון: $a_1 = 1, q = 3$.

סכום n האיברים הראשונים בסדרה A גדול פי 6561 מן הסכום: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n}$. מצא את n .

הסדרה B מתקבלת מן הסדרה A על ידי הפיכת הסימנים של האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה A.

איברי הסדרה B הם b_1, b_2, b_3, \dots .

נסמן ב- T_m את הסכום של m האיברים הראשונים של הסדרה B. נתון כי m הוא מספר טבעי אי-זוגי.

$$\frac{T_m}{b_1 \cdot b_m} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} - \dots + \frac{1}{a_m} \quad \text{נתונה נוסחה: ג.}$$

קבע אם הנוסחה הנתונה נכונה. הוכח את תשובתך.

3.

כדי להתקבל ללימודים במכללה מסוימת יש לעבור מבחן קבלה.

כל השאלות במבחן הן מתוך מאגר שיש בו n שאלות שונות. לנבחנים יש גישה למאגר והם יכולים להתכונן למבחן באמצעותו. ביום הבחינה, כל נבחן מוציא באקראי מתוך קופסה מלאה בפתקים שלושה פתקים בזה אחר זה, ללא החזרה. בכל אחד מן הפתקים כתובה שאלה אחת מתוך מאגר השאלות. מספר הפתקים שבקופסה שווה למספר השאלות שבמאגר, ובכל פתק כתובה שאלה אחרת. לאחר שהוציא הנבחן שלושה פתקים מן הקופסה וקרא את שלוש השאלות, הוא מחזיר את שלושת הפתקים לקופסה.

הנבחן יתקבל למכללה אם הוא יענה נכון על שתי שאלות לפחות מתוך שלוש השאלות שבפתקים שהוא הוציא. נתנאל התכונן למבחן באמצעות מאגר השאלות. הוא ידע לענות נכון רק על 20 שאלות מתוך n השאלות שבמאגר. על שאר השאלות הוא לא ידע לענות נכון.

ידוע כי ההסתברות של נתנאל לענות נכון על שאלה אחת לפחות מבין שתי השאלות שבשני הפתקים הראשונים שהוא הוציא היא $\frac{34}{69}$.

א. (1) מצא את n .

(2) מהי ההסתברות שנתנאל יתקבל למכללה?

ב. אם ידוע כי נתנאל התקבל למכללה, מהי ההסתברות שהוא לא ענה נכון על השאלה שבפתק הראשון שהוא הוציא?

רמי התכונן גם הוא למבחן באמצעות מאגר השאלות. הוא ידע לענות נכון על 40 שאלות מתוך n השאלות שבמאגר. על שאר השאלות הוא לא ידע לענות נכון.

ג. האם ההסתברות שרמי יענה נכון על כל שלוש השאלות שבפתקים שהוא הוציא באקראי גדולה פי 2 מן

ההסתברות שנתנאל יענה נכון על כל שלוש השאלות שבפתקים שהוא הוציא באקראי? נמק את תשובתך.

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4. בציור שלפניך מתואר משולש שווה-שוקיים ABC , $BA = BC$.

מנקודה D הנמצאת על השוק BC הורידו אנך לבסיס, והוא חותך אותו בנקודה K .

מנקודה E הנמצאת על השוק BA הורידו אנך לבסיס, והוא חותך אותו בנקודה L .

נתון: $AL = LK = KC$.

א. חשב את $\frac{BD}{DC}$.

הקטעים DL ו- EK נפגשים בנקודה G .

ב. הוכח כי המרובע $BDEG$ הוא דלתון.

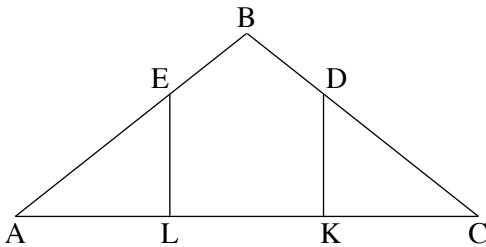
נתון: $AC = 45$.

היקף המרובע $EDKL$ הוא 54.

ג. חשב את אורך הקטע BG .

ד. האם קיימת נקודה F שנמצאת על הישר BG שעבורה המרובע $BDFE$ הוא בר-חסימה במעגל?

נמק את תשובתך.



5. בציור שלפניך מתואר משולש שווה-שוקיים ABC , $AB = AC$,

שחסום במעגל שרדיוסו R .

האריכו את הבסיס BC עד לנקודה D והעבירו ישר מנקודה

לנקודה A .

נתון: $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle CAD = \alpha$.

א. הוכח כי רדיוס המעגל החוסם את משולש ABD

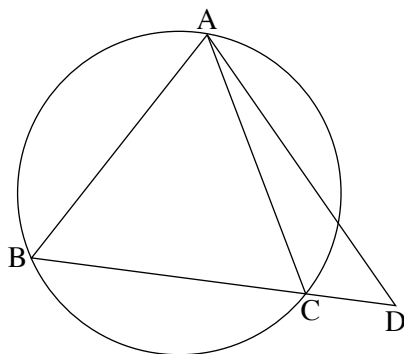
שווה לרדיוס המעגל החוסם את משולש ACD .

ב. הבע את שטח משולש ACD באמצעות R ו- α .

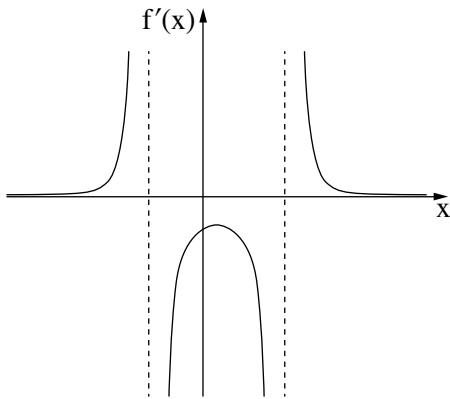
נסמן ב- m את היחס בין שטח המשולש ACD לבין שטח המשולש ABC .

ג. (1) האם ייתכן כי $m = 0.5$? נמק את תשובתך.

(2) נתון כי $m = 0.6$. מצא את גודלי זוויות המשולש ABC .



**פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,
של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות
ושל פונקציות טריגונומטריות**



6. נתונה פונקציה $f(x)$ המוגדרת בתחום $x < b$, $b < x < c$, $c < x$ וגזירה בכל תחום הגדרתה.

בסרטוט שלפניך מתואר הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

לפונקציית הנגזרת $f'(x)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד

ושלוש אסימפטוטות המאונכות לצירים: $x = c$, $x = b$, $y = 0$.

שיעור ה- x של נקודת הקיצון של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ הוא a .

b , a ו- c הם פרמטרים.

א. הבע את תשובותיך באמצעות b , a ו- c , אם יש צורך.

(1) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה (\cup) ואת תחומי הקעירות כלפי מטה (\cap) של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי גרף הפונקציה $f(x)$ עובר בנקודה $(a, 0)$.

ב. סרטוט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $f(x)$.

$$\text{נתון גם כי } f(x) = \frac{18 - 36x}{(x^2 - x - 6)^2}$$

ג. מצא את b , a ו- c .

ד. (1) הראה כי בתחום $b < x < c$ מתקיים: $f'(x) \cdot (f(x))^2 \leq 0$.

(2) חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f'(x) \cdot (f(x))^2$, על ידי ציר ה- x

ועל ידי הישרים $x = 0$ ו- $x = 2a$.

7. נתונה הפונקציה $f(x) = \tan(x) + \frac{1}{x}$.

ענה על הסעיפים א-ב בעבור התחום $0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לציר ה- x .

גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- x בתחום הנתון בנקודה אחת בלבד ששיעוריה $(0, 2.798)$ בקירוב.

ב. מצא את תחומי החיוביות ואת תחומי השליליות של הפונקציה $f(x)$.

נתונה גם הפונקציה $g(x) = \frac{\cos(x)}{x}$, המוגדרת לכל $x \neq 0$.

ג. האם הפונקציה $g(x)$ היא זוגית, אי-זוגית, או לא זוגית ולא אי-זוגית? הוכח את תשובתך.

ד. (1) הראה כי בתחום $0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ שיעור ה- x של אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ שווה לשיעור

ה- x של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x , וקבע את סוגה של נקודת קיצון זו.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ בתחום $-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$.

8. חותכים חוט שאורכו k לשני חלקים.

מחלק אחד של החוט יוצרים משולש שווה-צלעות ומן החלק האחר יוצרים מעגל.

נסמן ב- x את אורך צלע המשולש.

א. הבע באמצעות k את תחום ההגדרה של x .

ב. הבע באמצעות k את אורך צלע המשולש, שעבורו סכום השטחים של שתי הצורות הוא מינימלי.

ג. הראה כי כאשר סכום השטחים של שתי הצורות הוא מינימלי, אי אפשר לחסום את המשולש שהתקבל

במעגל שהתקבל.

בהצלחה!