

מתמטיקה 5 יחידות לימוד — שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	—	אלגברה והסתברות	—	20×2	—	40 נקודות
פרק שני	—	גאומטריה וטריגונומטריה במישור	—	20×1	—	20 נקודות
פרק שלישי	—	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות	—	20×2	—	40 נקודות
	—		—	סה"כ	—	100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

- (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
- (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מן השאלות 1-3 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. במאפייה יש שתי מכונות לייצור עוגות: מכונה I ומכונה II.
 - א. כל אחת מן המכונות מייצרת עוגות בקצב קבוע משלה. ביום ראשון זמן העבודה של שתי המכונות היה שווה. ביום ראשון מכונה I ייצרה 80 עוגות יותר ממספר העוגות שייצרה מכונה II. ביום שני ייצרה מכונה II את אותו מספר עוגות שייצרה מכונה I ביום ראשון, ומכונה I ייצרה את אותו מספר עוגות שייצרה מכונה II ביום ראשון.
 - ב. ביום שני היה זמן העבודה של מכונה II ארוך פי $\frac{25}{9}$ מזמן העבודה של מכונה I באותו יום.
 - ג. חשב כמה עוגות סך הכול ייצרו שתי המכונות ביום ראשון.
- נסמן: T_1 — הזמן הדרוש למכונה I לייצר עוגה אחת, T_2 — הזמן הדרוש למכונה II לייצר עוגה אחת.
 - א. חשב את היחס $\frac{T_1}{T_2}$. נמק.
 - ב. בפרק זמן מסוים מכונה I ייצרה בדיוק 47 עוגות. כמה עוגות שלמות ייצרה מכונה II בפרק הזמן הזה? הסבר.
 - ג. ידוע ששתי המכונות עבדו אותו פרק זמן, וכל אחת מהן ייצרה מספר שלם של עוגות. האם ייתכן שבפרק הזמן הזה שתי המכונות יחד ייצרו 26 עוגות? נמק.

2. a_n היא סדרה הנדסית אינסופית שהמנה שלה היא q . $|q| \neq 1$.

נתון: $a_3 \cdot a_7 = 1$.

א. חשב את a_5 (מצא את שתי האפשרויות).

נתון: $a_5 > 0$.

ב. (1) הבע את a_1 באמצעות q .

(2) האם קיים n טבעי שעבורו $a_n = \frac{1}{a_1}$? אם כן – מצא אותו. אם לא – נמק.

(3) האם קיים n טבעי שעבורו $a_n = \frac{1}{a_{13}}$? אם כן – מצא אותו. אם לא – נמק.

ג. (1) הבע באמצעות q את 7 האיברים הראשונים של הסדרה a_n .

(2) נתון: $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k = 1$ (k הוא מספר טבעי).

מצא את הערך של k , והסבר מדוע הוא הערך האפשרי היחיד של k .

3. גלי ונטע משחקות משחק ובו אפשר לקבוע את מספר הסיבובים. בכל סיבוב אחת מהן זוכה והאחרת מפסידה.

המנצחת במשחק כולו תהיה זו שתזכה ביותר סיבובים מחברתה.

אם לשתיהן מספר שווה של זכיות בסיבובים, התוצאה במשחק כולו תהיה תיקו.

נתון: בכל סיבוב הסיכוי של נטע לזכות הוא $\frac{1}{3}$.

א. ביום ראשון שיחקו גלי ונטע 4 סיבובים במשחק.

(1) מהי ההסתברות שנטע ניצחה במשחק כולו?

(2) מהי ההסתברות לתוצאת תיקו במשחק כולו?

ב. גם ביום שני שיחקו גלי ונטע 4 סיבובים במשחק. הפעם הן החליטו מראש שאם התוצאה במשחק של

4 הסיבובים תהיה תיקו – הן ישחקו עוד 3 סיבובים כדי להכריע את תוצאת המשחק, ומי שתזכה ביותר

סיבובים, תנצח במשחק כולו.

מהי ההסתברות שנטע תנצח במשחק כולו?

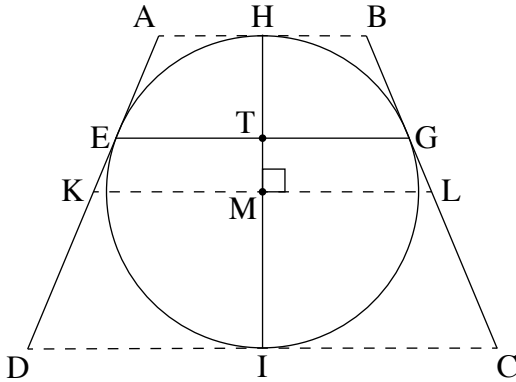
ג. ידוע שנטע ניצחה במשחק כולו בדיוק באחד משני הימים: ראשון או שני.

מהו הסיכוי שהיא ניצחה במשחק כולו ביום שני?

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מן השאלות 4-5.

שים לב: אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.



4. EG הוא מיתר במעגל שמרכזו M ורדיוסו r .

דרך הנקודות E ו-G העבירו משיקים למעגל.

דרך מרכז המעגל, M, העבירו ישר המקביל למיתר EG

וחותך את המשיקים בנקודות K ו-L, כמתואר בציור.

דרך מרכז המעגל, M, העבירו אנך ל- KL

אשר חותך את המיתר EG בנקודה T

ואת המעגל בנקודות H ו-I, כמתואר בציור.

נסמן: $TG = a$.

א. (1) הוכח: $TG \cdot ML = MG^2$.

(2) הבע את אורך הקטע KL באמצעות a ו- r .

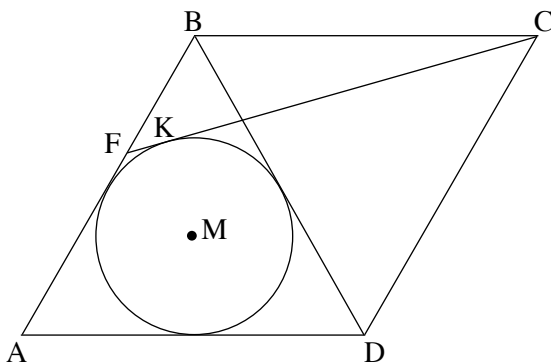
דרך הנקודות H ו-I העבירו משיקים למעגל כך שנוצר טרפז שווה שוקיים ABCD שחוסם את המעגל,

כמתואר בציור.

ב. (1) הוכח: $BC = KL$.

(2) הבע את היקף הטרפז ABCD באמצעות a ו- r .

ג. האם היחס בין היקף הטרפז ABCD והיקף המעגל יכול להיות קטן מ- $\frac{4}{\pi}$? נמק.



5. ABCD הוא מעוין שאורך צלעו הוא a .

נתון: $\angle BAD = 60^\circ$.

במשולש ABD חסום מעגל שמרכזו M.

מן הקודקוד C העבירו משיק למעגל

שהמשכו חותך את הצלע AB בנקודה F

והוא משיק למעגל בנקודה K (ראה ציור).

א. הבע באמצעות a את רדיוס המעגל.

ב. (1) הסבר מדוע הנקודה M נמצאת על אלכסון המעוין AC.

(2) חשב את גודל הזווית ACF.

ג. הבע באמצעות a את שטח המשולש ACF.

**פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,
של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות
ושל פונקציות טריגונומטריות (40 נקודות)**

ענה על שתיים מן השאלות 6-8 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6. נתונה משפחת הפונקציות: $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{2x - a}$. a הוא פרמטר המקיים $-4 < a < 2$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) הסבר מדוע לפונקציה $f(x)$ אין אסימפטוטה מקבילה לציר ה- y .

(3) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המקבילות לציר ה- x .

(4) מה הם שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים?

(5) מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$.

ב. (1) הבע באמצעות a את שיעורי ה- x שבעבורם $f'(x) = 0$ (אם יש כאלה).

(2) מצא את הערך של a שבעבורו $f'(x) \neq 0$ לכל x בתחום ההגדרה.

הצב $a = -1$ במשוואת הפונקציה $f(x)$ וענה על הסעיפים ג-ד.

ג. (1) מה הם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה)?

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. חשב את $\int_3^4 \frac{1}{f(x)} dx$. תוכל להשאיר שורש בתשובתך.

7. נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 \sin x$ המוגדרת בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$.

א. (1) קבע אם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי־זוגית או לא זוגית ולא אי־זוגית. נמק.

(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה־ x בתחום הנתון.

(3) הסבר מדוע הפונקציה $f(x)$ היא אי־שלילית בתחום הנתון.

(4) קבע אם פונקציית הנגזרת, $f'(x)$, היא זוגית או אי־זוגית או לא זוגית ולא אי־זוגית. נמק.

ב. (1) הראה ששיעורי ה־ x שעבורם $f'(x) = 0$ מקיימים $\tan x = -\frac{1}{3}x$.

(2) בציר שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות

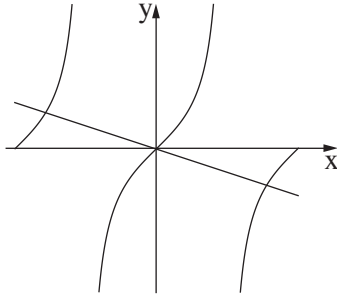
$$g(x) = \tan x \quad \text{ו} \quad h(x) = -\frac{1}{3}x$$

$$\text{בתחום } -\pi \leq x \leq \pi.$$

היעזר בציר,

וקבע כמה נקודות בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$

מקיימות $f'(x) = 0$.



נתון: שיעור ה־ x של אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ הוא 2.46 בקירוב.

ענה על הסעיפים ג-ד בעבור התחום $-\pi \leq x \leq \pi$.

ג. (1) מה הם שיעורי ה־ x של כל נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ בתחום? נמק וקבע את סוגן.

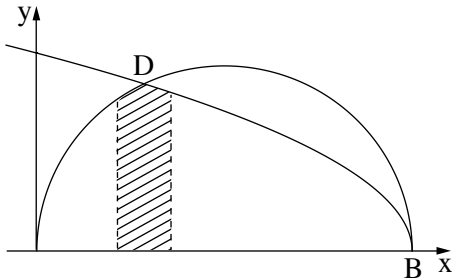
(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום.

ד. (1) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת, $f'(x)$, בתחום.

(2) כמה נקודות פיתול לכל הפחות יש לפונקציה $f(x)$ בתחום? נמק.

8. בציר שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x) = \sqrt{-x^2 + 7x}$ ו- $g(x) = \sqrt{14 - 2x}$.

גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- x בראשית הצירים ונקודה B , ואת גרף הפונקציה $g(x)$ הוא חותך בנקודות B ו- D , כמתואר בציור.



א. (1) מצא את תחומי ההגדרה של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

(2) מצא את שיעורי ה- x של הנקודות B ו- D .

a הוא פרמטר המקיים $1 \leq a \leq 2$.

השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$,

על ידי האנכים $x = a$ ו- $x = a + 1$ ועל ידי ציר ה- x , מסתובב סביב ציר ה- x .

ב. (1) חשב את a שבעבורו נפח גוף הסיבוב המתקבל הוא המקסימלי.

(2) מצא את a שבעבורו נפח גוף הסיבוב המתקבל הוא המינימלי.

אם צריך, השאר בתשובותיך שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

בהצלחה!