

מתמטיקה

5 יחידות לימוד — שאלון ראשון

הוראות לנבחן

- א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.
- | | | | | | | |
|-----------|---|---|---|--------------------------|---|-----------|
| פרק ראשון | — | אלגברה והסתברות | — | 20×2 | — | 40 נקודות |
| פרק שני | — | גאומטריה וטריגונומטריה במישור | — | 20×1 | — | 20 נקודות |
| פרק שלישי | — | חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות | — | 20×2 | — | 40 נקודות |
| | | | | <u>סה"כ</u> — 100 נקודות | | |
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
 - (2) דפי נוסחאות (מצורפים).
- ד. הוראות מיוחדות:
- (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
 - (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
 - (3) לטייטה יש להשתמש במחברת הבחינה. שימוש בטייטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מן השאלות 1-3 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. קבוצת פועלים, חוטבי עצים מנוסים, תכננה לירות 216 מ"ק עץ במספר ימים מסוים (ההספק של הפועלים הוא קבוע).

בשלושת הימים הראשונים עבדו הפועלים על פי ההספק המתוכנן. החל מן היום הרביעי הם הגבירו את קצב עבודתם ומדי יום כרתו 8 מ"ק עץ יותר מן המתוכנן. הם עבדו בפועל יום אחד פחות ממספר הימים המתוכנן, וכרתו 232 מ"ק עץ סך הכול.

א. (1) על פי התכנון, כמה מ"ק עץ היו אמורים הפועלים לירות ביום?

(2) כמה ימים עבדו הפועלים בפועל?

ב. במהלך איזה יום מתחילת העבודה סיימו הפועלים לירות $\frac{2}{3}$ מן הכמות המתוכננת?

לאחר מכן הוצמד פועל מתלמד לכל פועל מנוסה בקבוצה, וכך נוצרה קבוצה חדשה ובה 2m פועלים סך הכול (m מנוסים ו-m מתלמדים).

ההספק היומי של הפועלים המנוסים הוא ההספק היומי המתוכנן. כל הפועלים המנוסים עובדים באותו הספק יומי. ההספק היומי של פועל מתלמד קטן ב-1 מ"ק מן ההספק היומי של פועל מנוסה. הקבוצה החדשה עבדה 8 ימים.

ג. (1) בטא את ההספק היומי של פועל מנוסה יחיד ושל פועל מתלמד יחיד באמצעות m.

(2) כמה פועלים יש בקבוצה החדשה אם ידוע שהם כרתו 336 מ"ק עץ סך הכול?

2. נתונה סדרה חשבונית $a_1, a_2, \dots, a_{2n+3}$ ובה $2n+3$ איברים (n הוא מספר טבעי).
 סכום הסדרה גדול פי 43 מן האיבר האמצעי. האיבר האמצעי שונה מ-0.
 א. (1) הראה כי סכום הסדרה שווה ל- $a_{n+2} \cdot (2n+3)$.
 (2) מצא את מספר האיברים בסדרה.
 ב. ידוע כי בסדרה הנתונה סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים גדול ב-40 מסכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.
 (1) מצא את האיבר האמצעי.
 (2) מצא את סכום הסדרה.
 נתון כי הפרש הסדרה הנתונה הוא $-a_1$.
 ג. קבע אם הסדרה עולה או יורדת.
 מכל איברי הסדרה הנתונה בונים סדרה חדשה על ידי חיבור של כל k איברים סמוכים (k הוא מספר טבעי) באופן זה:
 $(a_1 + a_2 + \dots + a_k), (a_2 + a_3 + \dots + a_{k+1}), (a_3 + a_4 + \dots + a_{k+2}), \dots$
 ד. הבע באמצעות k את מספר האיברים בסדרה החדשה.
3. בבית ספר תיכון ניגשים תלמידי שכבת י"ב לבחינת המתכונת באזרחות ולאחר מכן לבחינת הבגרות באזרחות. נתון: גם בשנת 2017 וגם בשנת 2018 מספר התלמידים שעברו את בחינת המתכונת ונכשלו בבחינת הבגרות היה שווה למספר התלמידים שנכשלו בבחינת המתכונת ועברו את בחינת הבגרות.
 א. בשנת 2017 ניגשו 250 תלמידים לבחינת המתכונת ולאחר מכן לבחינת הבגרות באזרחות. ידוע שאם תלמיד עבר את בחינת המתכונת, ההסתברות שהוא עבר את בחינת הבגרות היא 0.9.
 שיעורם של הנכשלים בבחינת הבגרות מכלל התלמידים שניגשו לבחינות בשנה זו היה 20%.
 (1) מהו מספר התלמידים שעברו גם את בחינת המתכונת וגם את בחינת הבגרות?
 (2) ידוע שתלמיד מסוים נכשל בבחינת המתכונת. מהי ההסתברות שאותו תלמיד עבר את בחינת הבגרות?
 (3) בוחרים באקראי (עם החזרה) שני תלמידים שנכשלו בבחינת הבגרות. מהי ההסתברות ששניהם נכשלו גם בבחינת המתכונת?
 ב. נתון כי בשנת 2018 לא הייתה תלות בין המאורע "עובר את בחינת המתכונת" לבין המאורע "עובר את בחינת הבגרות", וכי ההסתברות שתלמיד עבר את בחינת הבגרות בשנה זו היא a ($0 < a < 1$).
 הבע באמצעות a את ההסתברות שתלמיד עבר את בחינת המתכונת ונכשל בבחינת הבגרות בשנה זו.

ענה על אחת מן השאלות 4-5.

- א. הוכח: $\angle BFC = \angle BAD$.

נתון: K היא נקודה על הצלע BC, כך ש-FK חוצה את BFC.

ב. הוכח: $KC = \frac{CF \cdot BO}{AB}$.

ג. הוכח: $KB \cdot AB = 2R^2$.

7. הסבר מדוע שטח ΔBFK גדול משטח ΔKFC .

5. ABC הוא משולש החסום במעגל שרדיוסו R.

הנקודות D ו- E נמצאות על הצלעות AB

ו- AC בהתאמה, והנקודה F נמצאת על הקשת BC

כך שהמרובע ADFE הוא מעוין (ראה ציור).

נתון: $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle BAC = \alpha$.

- א. (1) הבע באמצעות α ו- β את $\angle ABF$.

- (2) הבע באמצעות R , α ו- β את אורך האלכסון AF.

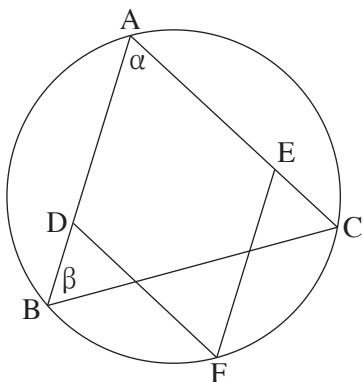
- ב. הבע באמצעות R , α ו- β את אורך צלע המעוין.

נתון כי AF הוא קוטר במעגל.

ג. הראה כי שטח המעוין הוא $2R^2 \tan \frac{\alpha}{2}$.

נתון כי רדיוס המעגל החסום במעוין ADFE הוא $\frac{3}{5}R$.

- ד. חשב את β .



**פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,
של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות
ושל פונקציות טריגונומטריות (40 נקודות)**

ענה על שתיים מן השאלות 6-8 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6. נתון: הפונקציה $g''(x) = -\frac{18}{x^4} + \frac{18}{(x-4)^4}$ היא פונקציית הנגזרת השנייה של הפונקציה $g(x)$.

הפונקציות $g(x)$, $g'(x)$, $g''(x)$ מוגדרות באותו תחום.

נתון כי משוואת המשיק לפונקציה $g(x)$ בנקודת הפיתול שלה היא $y = \frac{3}{2}x - 3$.

א. (1) מצא את הפונקציה $g(x)$.

(2) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?

(3) מצא את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה $g(x)$.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נגדיר: $h(x) = |g(x)|$.

ב. באותה מערכת צירים שבה סרטטת סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$, הוסף בקו מקווקו סקיצה של גרף

הפונקציה $h(x)$.

ג. נתון כי $\int_a^2 g(x) dx = t$, $0 < a < 2$, t הוא פרמטר.

הבע באמצעות t את $\int_a^2 (h(x) - g(x)) dx$.

7. נתונה הפונקציה $f(x) = 2 \sin x + \cos 2x - 1$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$.

א. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

גרף הפונקציה $f(x)$ הוזז שמאלה ב- $\frac{\pi}{2}$ כך שהתקבלה פונקציה $g(x)$ המוגדרת בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$.

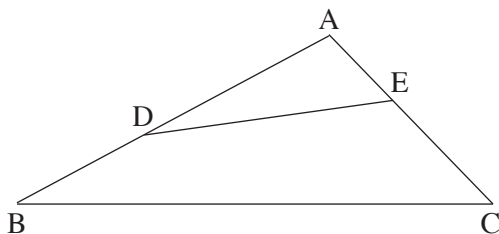
ב. (1) בטא את הפונקציה $g(x)$ באמצעות הפונקציה $f(x)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

(3) הוכח כי $g(x)$ היא פונקציה זוגית.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx : \text{III} \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) dx : \text{II} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x + \pi) dx : \text{I} \quad : \text{III-I}$$

ג. ציין איזה מן הביטויים III-I שווה ל- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$. נמק את תשובתך. אין צורך בחישוב.



8. במשולש ABC נתון: $AB = 30$, $AC = 20$.

$\angle CAB = \alpha$. הוא קבוע.

הנקודה D נמצאת על הצלע AB

והנקודה E נמצאת על הצלע AC (ראה ציור).

נתון: שטח המשולש ADE שנוצר באופן הזה הוא

רבע משטח המשולש ABC.

סמן את אורך הקטע AD ב- x .

א. הבע באמצעות x את אורך הקטע AE.

ב. (1) הבע באמצעות α את האורך המינימלי של הקטע DE.

(2) הסק מתת-סעיף ב(1) את הערך של x שבעבורו היחס $\frac{DE}{BC}$ הוא מינימלי. הסבר.

בהצלחה!