

סוג הבחינה: א. בגרות לבתי ספר על-יסודיים
ב. בגרות לנבחנים אקסטרנניים
מועד הבחינה: תשס"ז, מועד ב
מספר השאלון: 305, 035005
נספח: דפי נוסחאות ל-4 ול-5 יחידות לימוד

מתמטיקה

שאלון ה'

הוראות לנבחן

- א. משך הבחינה: שעתיים.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים.
פרק ראשון – אלגברה – $33\frac{1}{3} \times 1 - 33\frac{1}{3}$ נקודות
פרק שני – הנדסת המישור והסתברות – $33\frac{1}{3} \times 2 - 66\frac{2}{3}$ נקודות
סה"כ – 100 נקודות
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
(2) דפי נוסחאות (מצורפים).
- ד. הוראות מיוחדות:
(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
(3) לטייטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
שימוש בטייטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

/המשך מעבר לדף/

ה ש א ל ו ת

שים לב! הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון – אלגברה (33 $\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 1-2.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

אלגברה

1. נתונה המשוואה $x - 2 = a(a - 3 - x)$.

א. מצא עבור אילו ערכים של a יש פתרון יחיד למשוואה.

ב. מצא עבור אילו ערכים של a הפתרון היחיד של המשוואה הנתונה מקיים את

האי-שוויון $x + 2 < 0$.

2. מכל מים מתמלא ב- 5 שעות.

היחס בין כמות המים הזורמת למכל כל שעה ובין כמות המים שזרמה אליו בשעה הקודמת הוא q .

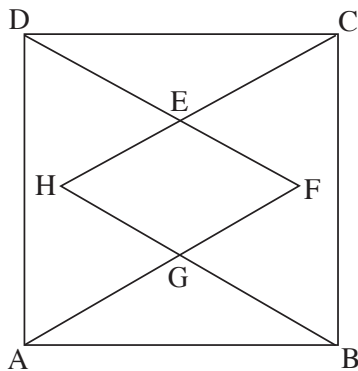
במשך 2 השעות הראשונות זרמו למכל 48 מ"ק מים, ובמשך 4 השעות הראשונות זרמה למכל כמות מים הגדולה פי 2 מכמות המים שזרמה למכל במשך 4 השעות האחרונות.
מצא את נפח המכל.

פרק שני – הנדסת המישור והסתברות (66 $\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 3-6, מהן מותר לענות לכל היותר על אחת מהשאלות 5-6.
(לכל שאלה – $33\frac{1}{3}$ נקודות)

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.
בשאלות בהנדסת המישור יש להשתמש בשיטות של הנדסה בלבד.

הנדסת המישור

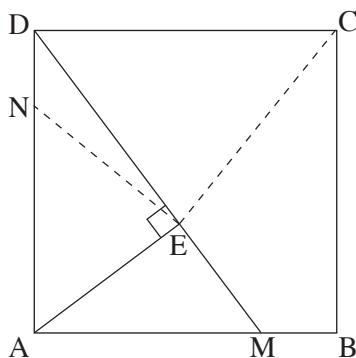


3. על צלעות הריבוע ABCD בנו

משולשים שווי-צלעות, AFD ו- BHC.
הצלעות CH ו- DF נחתכות בנקודה E,
והצלעות BH ו- AF נחתכות בנקודה G
(ראה ציור).

נתון כי האורך של צלע הריבוע הוא 6 ס"מ.
א. הוכח כי המרובע HEFG הוא מעוין.
ב. חשב את האורך של הגובה לצלע AB
במשולש ABG.

שים לב: אין להשתמש בחישובים טריגונומטריים.



4. בריבוע ABCD הנקודה M נמצאת על הצלע AB והנקודה N נמצאת על הצלע AD, כך ש- $MB = ND$.

AE הוא אנך ל- MD (ראה ציור).

נתון: $MB = ND = 1$ ס"מ,

האורך של צלע הריבוע הוא 4 ס"מ.

א. חשב:

(1) את האורך של MD.

(2) את האורך של DE, ואת האורך של AE.

ב. הוכח כי $\triangle AEN \sim \triangle DEC$. היעזר בסעיף א.

שים לב! מותר לענות לכל היותר על אחת מהשאלות 5-6.
נוסחאות בהסתברות מותנית נמצאות בעמוד 5.

הסתברות

5. במבחן רב-בררה (מבחן אמריקני) יש 4 שאלות שוות-משקל.
לכל שאלה יש 3 אפשרויות תשובה, ורק אחת מהן נכונה.
תשובה נכונה לשאלה מזכה ב- 25 נקודות.
- א. תלמיד שלא התכוון למבחן בחר באקראי תשובה לכל אחת מארבע השאלות.
מהי ההסתברות שהציון של התלמיד שלא התכוון למבחן יהיה גבוה מ- 50 נקודות?
- ב. כל תלמיד שקיבל ציון הגבוה מ- 50 נקודות עבר את המבחן.
20% מתלמידי הכיתה לא התכוונו למבחן ובחרו תשובות באקראי.
90% מבין התלמידים שהתכוונו למבחן קיבלו ציון הגבוה מ- 50 נקודות.
- (1) מהי ההסתברות שתלמיד לא התכוון למבחן וגם קיבל ציון גבוה מ- 50 נקודות?
- (2) מבין התלמידים שנכשלו במבחן, בוחרים באקראי תלמיד אחד.
מהי ההסתברות שהתלמיד שבחרים התכוון למבחן?
בתשובותיך תוכל להשאיר שלוש ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

חשיבה הסתברותית בחיי יום-יום

6. בטיסות של חברת תעופה מסוימת נהוג לחלק ירחונים לעיון. בסקר שערכה החברה נמצא כי 50% מהפרופסורים הטסים במטוסי החברה בוחרים בירחון מדעי, ורק 5% מאנשי העסקים הטסים במטוסים שלה בוחרים בירחון כזה.
- נסמן: A – קבוצת אנשי העסקים הטסים במטוסי החברה.
B – קבוצת הפרופסורים הטסים במטוסי החברה.
M – קבוצת הבוחרים בירחון מדעי.
- אדם הנמצא בטיסה מסוימת של החברה קורא בירחון מדעי.
- א. אחד הנוסעים בטיסה זו טען כי הסיכוי שאדם זה הוא פרופסור גדול מהסיכוי שהוא איש עסקים. האם טענתו נכונה? נמק.
- ב. (1) מספר אנשי העסקים הטסים במטוסי החברה גדול פי 12 ממספר הפרופסורים הטסים במטוסים שלה. חשב את היחס בין הסיכוי שאדם זה הקורא בירחון מדעי הוא פרופסור ובין הסיכוי שהוא איש עסקים.
- (2) מה צריך להיות היחס בין מספר הפרופסורים הטסים במטוסי החברה למספר אנשי העסקים הטסים במטוסים שלה, כדי שהסיכוי שאדם זה הוא פרופסור יהיה שווה לסיכוי שהוא איש עסקים? פרט את חישוביך.

נוסחאות בהסתברות מותנית

$$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{פרופורציה מותנית והסתברות מותנית:}$$

$$P(A / B) = \frac{P(B / A) \cdot P(A)}{P(B)} \quad \text{נוסחת בייס:}$$

$$P(A / B) \neq P(A / \bar{B}) \quad \text{יש קשר סטטיסטי:}$$

$$P(A / B) \neq P(A)$$

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

נוסחאון מתמטיקה

5-4 יחידות לימוד (החל מקיץ תש"ן)

אלגברה

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$$

פירוק לגורמים

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k + \dots + b^n$$

בינום ניוטון

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

נוסחאות וייטה

$$(x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a})$$

(x_1, x_2) שורשי משוואה ריבועית.

סדרות

| סדרה הנדסית | סדרה חשבונית | |
|------------------------------------|-------------------------------------|---------------|
| $a_n = a_1 q^{n-1}$ | $a_n = a_1 + (n-1)d$ | האיבר ה-n'י : |
| $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$ | $S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$ | הסכום: |

$$z = a + bi = r(\cos\theta + i \sin\theta)$$

מספרים מרוכבים

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

מכפלה בהצגה קוטבית:

$$(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

משפט דה-מואבר:

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) \right] \quad \text{שורשי המשוואה } z^n = r(\cos\alpha + i \sin\alpha) \text{ הם:}$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1$$

קומבינטוריקה

$$P_n = n!$$

מספר התמורות של n עצמים (בלי חזרות):

מספר התמורות של n עצמים כשמתוכם יש n_1, n_2, \dots, n_k עצמים שווים ביניהם:

$$P_n = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

מספר החליפות של k מתוך n עצמים (בלי חזרות):

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

מספר הצירופים של k מתוך n עצמים (בלי חזרות):

וקטורים

מישור דרך קצות הווקטורים $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$, $\vec{c} = \vec{OC}$: $\vec{x} = t(\vec{b} - \vec{a}) + s(\vec{c} - \vec{a})$
 מכפלה סקלרית: $(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos\alpha$
 ניצבות: $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$
 אורך של וקטור: $|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

מרחק בין $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3)$ למישור $\vec{a} \cdot \vec{x} + c = 0$: $\frac{|\vec{a} \cdot \vec{z} + c|}{|\vec{a}|}$

זווית בין הישר $t\vec{b} + d$ למישור $\vec{a} \cdot \vec{x} + c = 0$: $\sin\beta = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

זווית בין המישורים $\vec{a} \cdot \vec{x} + c = 0$, $\vec{b} \cdot \vec{x} + d = 0$: $\cos\alpha = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

חוקות ולוגריתמים: $\log_a a^x = x$, $a^{\log_a x} = x$, $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

טריגונומטריה

זהויות

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$ $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$

$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$ $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}$

$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$ $\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$ $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$

משפט הסינוס: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$

שטח גזרה: $\frac{1}{2}r^2\alpha$ אורך קשת של α רדיאנים: $r\alpha$

הנדסת המרחב

נפח כדור: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ נפח הרוט ופירמידה (B - שטח הבסיס): $V = \frac{B \cdot h}{3}$

שטח פנים של כדור: $P = 4\pi R^2$ שטח מעטפת הרוט: $M = \pi R l$

אנליזה (חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי)

נגזרות

$(uv)' = u'v + uv'$ $(x^n)' = nx^{n-1}$ $\sin'x = \cos x$ $\operatorname{arc} \sin'x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - v'u}{v^2}$ $(a^x)' = a^x \ln a$ $\cos'x = -\sin x$ $\operatorname{arc} \cos'x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\log_a'x = \frac{1}{x \ln a}$ $\operatorname{tg}'x = \frac{1}{\cos^2x}$ $\operatorname{arc} \operatorname{tg}'x = \frac{1}{1+x^2}$

כלל השרשרת: $f'(x) = v'(u) \cdot u'(x)$

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$$

אינטגרלים

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} [f(a) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(b)]$$

כלל הטרפז:

פונקציות

$f(-x) = -f(x)$: פונקציה אי-זוגית:

$f(x) = f(-x)$

פונקציה זוגית:

U : פונקציה קמורה:

נקודת פיתול: נקודת מעבר בין קמירות לקעירות

סטטיסטיקה והסתברות

$$S = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 f_1 + (x_2 - \bar{x})^2 f_2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2 f_n}{N}}$$

סטיית תקן:

x_n, \dots, x_2, x_1 השכיחויות של f_n, \dots, f_2, f_1

$f_1 + f_2 + \dots + f_n = N$; \bar{x} ממוצע הנתונים

נוסחת ברנולי: ההסתברות לִ k הצלחות בִ n נסיונות בהתפלגות בינומית עם הסתברות p :

$$p_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

לוח של התפלגות נורמלית (0,1) מצטברת

| u | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|-----|--------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 0.0 | 0.500 | 504 | 508 | 512 | 516 | 520 | 524 | 528 | 532 | 536 |
| 0.1 | 0.540 | 544 | 548 | 552 | 556 | 560 | 564 | 568 | 571 | 575 |
| 0.2 | 0.579 | 583 | 587 | 591 | 595 | 599 | 603 | 606 | 610 | 614 |
| 0.3 | 0.618 | 622 | 625 | 629 | 633 | 637 | 641 | 644 | 648 | 652 |
| 0.4 | 0.655 | 659 | 663 | 666 | 670 | 674 | 677 | 681 | 684 | 688 |
| 0.5 | 0.692 | 695 | 699 | 702 | 705 | 709 | 712 | 716 | 719 | 722 |
| 0.6 | 0.726 | 729 | 732 | 736 | 739 | 742 | 745 | 749 | 752 | 755 |
| 0.7 | 0.758 | 761 | 764 | 767 | 770 | 773 | 776 | 779 | 782 | 787 |
| 0.8 | 0.788 | 791 | 794 | 797 | 800 | 802 | 805 | 809 | 811 | 813 |
| 0.9 | 0.816 | 819 | 821 | 824 | 826 | 829 | 832 | 834 | 837 | 839 |
| 1.0 | 0.841 | 844 | 846 | 848 | 851 | 853 | 855 | 858 | 860 | 862 |
| 1.1 | 0.864 | 866 | 869 | 871 | 873 | 875 | 877 | 879 | 881 | 883 |
| 1.2 | 0.885 | 887 | 889 | 891 | 893 | 894 | 896 | 898 | 900 | 902 |
| 1.3 | 0.903 | 905 | 907 | 908 | 910 | 911 | 913 | 915 | 916 | 918 |
| 1.4 | 0.919 | 921 | 922 | 924 | 925 | 926 | 928 | 929 | 931 | 932 |
| 1.5 | 0.933 | 935 | 936 | 937 | 938 | 939 | 941 | 942 | 943 | 944 |
| 1.6 | 0.945 | 946 | 947 | 948 | 9495 | 9505 | 9515 | 9525 | 9535 | 9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 9564 | 9573 | 9582 | 9591 | 9599 | 9608 | 9616 | 9625 | 9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 9650 | 9656 | 9664 | 9671 | 9678 | 9686 | 9693 | 9699 | 9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 9719 | 9726 | 9732 | 9738 | 9744 | 9750 | 9756 | 9762 | 9767 |
| 2.0 | 0.9773 | 9778 | 9783 | 9788 | 9793 | 9798 | 9803 | 9808 | 9812 | 9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 9826 | 9830 | 9834 | 9838 | 9842 | 9846 | 9850 | 9854 | 9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 9865 | 9868 | 9871 | 9875 | 9878 | 9881 | 9884 | 9887 | 9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 9896 | 9898 | 9901 | 9904 | 9906 | 9909 | 9911 | 9913 | 9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 9920 | 9922 | 9925 | 9927 | 9929 | 9931 | 9932 | 9934 | 9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 9940 | 9941 | 9943 | 9945 | 9946 | 9948 | 9949 | 9951 | 9952 |
| 2.6 | 0.9954 | 9955 | 9956 | 9957 | 9959 | 9960 | 9961 | 9962 | 9963 | 9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 9966 | 9967 | 9968 | 9969 | 9970 | 9971 | 9972 | 9973 | 9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 9975 | 9976 | 9977 | 9977 | 9978 | 9979 | 9979 | 9980 | 9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 9982 | 9983 | 9983 | 9984 | 9984 | 9985 | 9985 | 9986 | 9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 9987 | 9987 | 9988 | 9988 | 9989 | 9989 | 9989 | 9990 | 9990 |

הנדסה אנליטית

קו ישר

$y - y_1 = m(x - x_1)$ משוואת ישר דרך (x_1, y_1) ששיפועו m :

$\text{tg}\alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$ נוסחה לזווית α שבין הישרים $y = m_2 x + n_2$, $y = m_1 x + n_1$:

$m_1 \cdot m_2 = -1$ ניצבות הישרים $y = m_2 x + n_2$, $y = m_1 x + n_1$:

$d = \pm \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ מרחק הנקודה $(x_0; y_0)$ מהישר $Ax + By + C = 0$:

$\left(\frac{\ell x_1 + kx_2}{k + \ell}, \frac{\ell y_1 + ky_2}{k + \ell} \right)$ נקודה המחלקת את הקטע AB ביחס $k : \ell$: $(A(x_1, y_1); B(x_2, y_2))$

מעגל

משוואת המשיק למעגל $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ בנקודה $(x_0; y_0)$:

$(x_0 - a) \cdot (x - a) + (y_0 - b) \cdot (y - b) = R^2$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ היפרבולה

$y = \pm \frac{b}{a}x$

האסימפטוטות:

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

מרחק המוקד מהראשית:

$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$

משיק להיפרבולה בנקודה $(x_0; y_0)$:

$n^2 = m^2 a^2 - b^2$

התנאי שהישר $y = mx + n$ ישיק להיפרבולה:

$y^2 = 2px$ פרבולה

$yy_0 = p(x + x_0)$

משיק לפרבולה בנקודה $(x_0; y_0)$:

$n = \frac{p}{2m}$

התנאי שהישר $y = mx + n$ ישיק לפרבולה: