

סוג הבחינה: א. בגרות לבתי ספר על-יסודיים
ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים
מועד הבחינה: קיץ תשס"ז, 2007
מספר השאלון: 305, 035005
נספח: דפי נוסחאות ל-4 ול-5 יחידות לימוד

מתמטיקה

שאלון ה'

הוראות לנבחן

- א. משך הבחינה: שעתיים.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים.
- פרק ראשון – אלגברה – $33\frac{1}{3} \times 1 - 33\frac{1}{3}$ נקודות
- פרק שני – הנדסת המישור והסתברות – $33\frac{1}{3} \times 2 - 66\frac{2}{3}$ נקודות
- סה"כ – 100 נקודות
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).
- ד. הוראות מיוחדות:
- (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
- (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
- הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
- (3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים. שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

/המשך מעבר לדף/

ה ש א ל ו ת

שים לב! הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון – אלגברה (33 $\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 1-2.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

אלגברה

1. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x+1}{2x^2+x+1}$.

א. מצא עבור אילו ערכים של x הפונקציה שלילית.

ב. נתון הישר $y = m$, $m \neq 0$.

(1) מצא עבור אילו ערכים של m הישר חותך את גרף הפונקציה הנתונה

בשתי נקודות שונות.

(2) מצא עבור אילו ערכים של m הישר אינו חותך את גרף הפונקציה הנתונה.

2. הסדרה a_n מוגדרת לכל n טבעי על ידי כלל הנסיגה

$$\begin{cases} a_1 = 11 \\ a_{n+1} = -0.5 a_n + 4.5 \end{cases}$$

הסדרה b_n מוגדרת לכל n טבעי על ידי $b_n = a_n - 3$.

א. הוכח שהסדרה b_n היא סדרה הנדסית.

ב. (1) מצא את מנת הסדרה של כל האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים

בסדרה b_n .

(2) מצא את הסכום של כל האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה

האין-סופית b_n .

שים לב! מותר לענות לכל היותר על אחת מהשאלות 5-6.
נוסחאות בהסתברות מותנית נמצאות בעמוד 6.

הסתברות

5. במשחק אחד אפשר לזכות באחת משלוש האפשרויות:
ב- 10 נקודות, ב- 15 נקודות או ב- 30 נקודות.
ההסתברות לזכות במשחק אחד ב- 30 נקודות היא 0.2 .
ההסתברות לזכות ב- 2 משחקים רצופים בסכום כולל של בדיוק 25 נקודות היא 0.3 .
א. P היא ההסתברות לזכות ב- 10 נקודות במשחק אחד.
חשב את P אם ידוע כי $P > 0.4$.
ב. חשב את ההסתברות לזכות ב- 3 משחקים רצופים בסכום כולל של בדיוק 50 נקודות.
ג. 5 אנשים משחקים במשחק. כל אחד מהם משחק 3 משחקים רצופים.
מהי ההסתברות שלכל היותר אחד מהאנשים יזכה בסכום כולל של בדיוק 50 נקודות?

חשיבה הסתברותית בחיי יום-יום

6. בסקר שנערך בין כלל המועמדים לתחרות שירה, נמצא כי מספר המועמדים שהגיעו מערים היה גדול פי 1.5 ממספר המועמדים שהגיעו מיישובים אחרים.
52% מבין המועמדים שהגיעו מערים לא התקבלו לתחרות.
25.6% מכלל המועמדים הגיעו מיישובים אחרים וגם התקבלו לתחרות.
- א. מהי פרופורציית המועמדים שהתקבלו לתחרות, מבין המועמדים מהערים?
ב. על סמך הנתונים, טען עיתונאי כי בקבלה לתחרות הייתה העדפה של המועמדים מיישובים אחרים.
הסבר בעזרת חישוב מתאים, על אילו נתונים הסתמך העיתונאי.
ג. מארגני התחרות טענו כי למקום המגורים לא הייתה השפעה על קבלת המועמדים לתחרות, והם הציעו לבדוק גורם אחר שהיה עשוי להשפיע על קבלתם.
הם בדקו את הקשר בין מקום המגורים לקבלת המועמדים לתחרות בשתי קבוצות: מועמדים שלמדו פיתוח קול ומועמדים שלא למדו פיתוח קול.
להלן התוצאות שהתקבלו בבדיקה.

מועמדים שלמדו פיתוח קול

מספר המועמדים שלא התקבלו	מספר המועמדים שהתקבלו	
15	60	מספר המועמדים מערים
30	120	מספר המועמדים מיישובים אחרים

מועמדים שלא למדו פיתוח קול

מספר המועמדים שלא התקבלו	מספר המועמדים שהתקבלו	
180	120	מספר המועמדים מערים
60	40	מספר המועמדים מיישובים אחרים

- (1) האם תוצאות הבדיקה מצדיקות את הטענה של מארגני התחרות? נמק על ידי חישוב מתאים, והסבר.
- (2) האם על פי תוצאות הבדיקה אפשר לשער כי לימוד פיתוח קול עשוי להיות גורם שהשפיע על קבלת המועמדים לתחרות? נמק על ידי חישוב מתאים, והסבר.

נוסחאות בהסתברות מותנית

פרופורציה מותנית והסתברות מותנית: $P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

נוסחת בייס: $P(A / B) = \frac{P(B / A) \cdot P(A)}{P(B)}$

יש קשר סטטיסטי: $P(A / B) \neq P(A / \bar{B})$

$P(A / B) \neq P(A)$

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

נוסחאון מתמטיקה

5-4 יחידות לימוד (החל מקיץ תש"ן)

אלגברה

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$$

פירוק לגורמים

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k + \dots + b^n$$

בינום ניוטון

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

נוסחאות וייטה

$$(x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a})$$

(x_1, x_2) שורשי משוואה ריבועית.

סדרות

סדרה הנדסית	סדרה חשבונית	
$a_n = a_1 q^{n-1}$	$a_n = a_1 + (n-1)d$	האיבר ה-n'י :
$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$	$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$	הסכום:

$$z = a + bi = r(\cos\theta + i \sin\theta)$$

מספרים מרוכבים

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

מכפלה בהצגה קוטבית:

$$(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

משפט דה-מואבר:

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) \right] \quad \text{שורשי המשוואה } z^n = r(\cos\alpha + i \sin\alpha) \text{ הם:}$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1$$

קומבינטוריקה

$$P_n = n!$$

מספר התמורות של n עצמים (בלי חזרות):

מספר התמורות של n עצמים כשמתוכם יש n_1, n_2, \dots, n_k עצמים שווים ביניהם:

$$P_n = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

מספר החליפות של k מתוך n עצמים (בלי חזרות):

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

מספר הצירופים של k מתוך n עצמים (בלי חזרות):

וקטורים

מישור דרך קצות הווקטורים $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$, $\vec{c} = \vec{OC}$: $\vec{x} = t(\vec{b} - \vec{a}) + s(\vec{c} - \vec{a})$
 מכפלה סקלרית: $(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos\alpha$
 ניצבות: $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$
 אורך של וקטור: $|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

מרחק בין $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3)$ למישור $\vec{a} \cdot \vec{x} + c = 0$: $\frac{|\vec{a} \cdot \vec{z} + c|}{|\vec{a}|}$

זווית בין הישר $t\vec{b} + \vec{d}$ למישור $\vec{a} \cdot \vec{x} + c = 0$: $\sin\beta = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

זווית בין המישורים $\vec{a} \cdot \vec{x} + c = 0$, $\vec{b} \cdot \vec{x} + d = 0$: $\cos\alpha = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

חוקות ולוגריתמים: $\log_a a^x = x$, $a^{\log_a x} = x$, $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

טריגונומטריה

זהויות

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$ $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$

$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$ $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}$

$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$ $\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$ $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$

משפט הסינוס: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$

שטח גורה: $\frac{1}{2}r^2\alpha$ אורך קשת של α רדיאנים: $r\alpha$

הנדסת המרחב

נפח כדור: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ נפח הרוט ופירמידה (B - שטח הבסיס): $V = \frac{B \cdot h}{3}$

שטח פנים של כדור: $P = 4\pi R^2$ שטח מעטפת הרוט: $M = \pi R l$

אנליזה (חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי)

נגזרות

$(uv)' = u'v + uv'$ $(x^n)' = nx^{n-1}$ $\sin'x = \cos x$ $\arcsin'x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - v'u}{v^2}$ $(a^x)' = a^x \ln a$ $\cos'x = -\sin x$ $\arccos'x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\log_a'x = \frac{1}{x \ln a}$ $\operatorname{tg}'x = \frac{1}{\cos^2x}$ $\operatorname{arctg}'x = \frac{1}{1+x^2}$

כלל השרשרת: $f'(x) = v'(u) \cdot u'(x)$

הנדסה אנליטית

קו ישר

$y - y_1 = m(x - x_1)$ משוואת ישר דרך (x_1, y_1) ששיפועו m :

$\text{tg}\alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$ נוסחה לזווית α שבין הישרים $y = m_2 x + n_2$, $y = m_1 x + n_1$:

$m_1 \cdot m_2 = -1$ ניצבות הישרים $y = m_2 x + n_2$, $y = m_1 x + n_1$:

$d = \pm \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ מרחק הנקודה $(x_0; y_0)$ מהישר $Ax + By + C = 0$:

$\left(\frac{\ell x_1 + kx_2}{k + \ell}, \frac{\ell y_1 + ky_2}{k + \ell} \right)$ נקודה המחלקת את הקטע AB ביחס $k : \ell$: $(A(x_1, y_1); B(x_2, y_2))$

מעגל

משוואת המשיק למעגל $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ בנקודה $(x_0; y_0)$:

$(x_0 - a) \cdot (x - a) + (y_0 - b) \cdot (y - b) = R^2$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ היפרבולה

$y = \pm \frac{b}{a}x$ האסימפטוטות:

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ מרחק המוקד מהראשית:

$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$ משיק להיפרבולה בנקודה $(x_0; y_0)$:

$n^2 = m^2 a^2 - b^2$ התנאי שהישר $y = mx + n$ ישיק להיפרבולה:

$y^2 = 2px$ פרבולה

$yy_0 = p(x + x_0)$ משיק לפרבולה בנקודה $(x_0; y_0)$:

$n = \frac{p}{2m}$ התנאי שהישר $y = mx + n$ ישיק לפרבולה: