האם המתמטיקה היא שפה? ואיך שלא!? מילים מילים במתמטיקה...

על חשיבותם ומשמעותם

דליה חן[1] נובמבר 2014

daliahen@gmail.com

פתח דבר

מתוך זכרונותיו של סטנדהל, מגדולי סופריה של צרפת, "חשבתי שמתמטיקה מוציאה מכלל אפשרות צביעות ... דמיינו לעצמכם איך הרגשתי כאשר הבנתי שאיש אינו יכול להסביר לי מדוע מינוס כפול מינוס נותן פלוס! העובדה שהאמת הפשוטה הזו לא הוסברה לי היא מצערת כשלעצמה. מה שמצער עוד יותר זאת העובדה שכאשר הדבר הוסבר, ההסבר ניתן בעזרת סיבות שלפי כל הסימנים לא היו ברורות לנותני ההנמקה, לבסוף אמרתי לעצמי מה שאני אומר עד היום מינוס כפול מינוס **חייב** להיות פלוס. ככלות הכל, הכלל הזה משמש בחישובים כל הזמן ולפי כל הסימנים מוביל תמיד לתוצאות שאין עליהן עוררין"

(Stendhal, 1783 -1843 יום עיון- למידת מתמטיקה כשינוי של שיח, ספרד, 2003).

עמיר (2005) מתאר רבות את השפה והמתמטיקה, "המתמטיקה אינה שפה במובן הרגיל של המילה. קשה לומר במתמטיקה "היום יורד גשם". שפה מתמטית היא עגה- עגה מעולה לתיאור היבטים רבים וחשובים של עולמנו הפיסי ורוחני".

מילות מפתח: שיח, שפה מתמטית, אוריינות מתמטית, הסבר, נימוק, רכיבי הוראת המתמטיקה, הצדקה, הוכחה, הכללה, הנמקה, הנמקה מימטית, הנמקה רטורית.

תקציר

המתמטיקה היא שפה ותרבות הדורשת מהלומדים מעורבות ואחריות אישית על התוצרים, רכישת המתמטיקה תלויה בבניה עקבית של מבני חשיבה. התנאים ההכרחיים הנם אבני **יסוד שפתיים** ומושגי מרחב וזמן.
נדרשת מהתלמידים יכולת שימוש בכלים מילוליים בכל שלבי החשיבה: בקלט, בעיבוד ובפלט. השפה מאפשרת תקשורת ויכולת אחסון ושליפה של הידע באופן יעיל (פירסט, 2012). השימוש המדויק בשפה בשיעורי המתמטיקה היינו אחד הגורמים שיביאו לדיוק מחשבתי (פילוסוף, 2007).
מאמר זה מתמקד בחשיבותה של השפה, השיח וההנמקה בשיעורי המתמטיקה הדָבור ו/או הכתוב. תיווך שיח מתמטי הוא אתגר מורכב למורים ודורש מהם שימוש אינטגרטיבי בשלושה סוגי ידע בו בזמן: ידע דיסציפלינארי,

---

[1] דליה חן- ממונה על החינוך המתמטי בבתי הספר היסודיים במחוז מרכז

ידע הלומדים וידע פדגוגי ההבעה בעל פה של רעיונות מתמטיים מאפשרת: רפלקציה על החשיבה, קישור לידע הקודם של הלומדים, יצירת דימויים מנטאליים למושגים ובניית רעיונות חדשים.

למורה המתמטיקה מקום מיוחד ומשמעותי בבית הספר היסודי ייחודיות המקצוע בא לידי ביטוי, בחשיבותו של המקצוע ללימודי המשך, ההתייחסות אליו בקרב הציבור היינו כמאפיין יכולת חשיבה גבוהה ועוד.

תכנית הלימודים לכיתות א'-ו' (2006) מציינת את חשיבות הכרת השפה המתמטית והשימוש הנכון בה, "כל נושא כולל מושגים פורמליים הקשורים ללמידתו. הכרת מושגים ומונחים אלה חייבת להיעשות בתהליך של למידה משמעותית ולא ברמה של שינון מיכאני. חשוב שהמורים ומחברי ספרי הלימוד יקפידו על שפה ודיוק מתמטיים נאותים. השימוש בשפה המתמטית גורם בדרך כלל לקושי אצל התלמידים וחשוב להגיע אליו רק לאחר שהם התנסו בפעילויות הקשורות למושג ברמה של תובנה וחקר לא פורמליים".

"הערכה חייבת להיות משולבת בתהליך ההוראה-למידה, ומתואמת עם מטרות ההוראה. במסגרת הערכת המורה את התלמידים יש לעקוב אחרי משימות ביצוע שונות תוך כדי הפעילות **ויש לשמוע את הנמקות התלמיד ומחשבותיו בעת ביצוע הפעילות המתמטי**" (עמ' 14).

בראשית מאמר זה אציג את המסגרת המושגית של שיח, הסבר, הנמקה ועוד, אדון בעקרונות השיח ודרכי הוראה בחינוך המתמטי ואסיים במספר דוגמאות והמלצות. מאמר זה היינו הראשון, מתוך סדרת מאמרים בנושא.

אפתח **בסקירה עיונית קצרה** כדי להניח מסגרת מושׂגית כבסיס לרציונל, תחילה נברר את המושגים וההגדרות המיליוניות **ל- *חלקם מוארים ע"י קישור למתעניינים להעמיק**

מָתֵמָטִיקָה היא תחום הדעת שעוסק במושגים כגון כמות, מבנה, מרחב ושינוי .יש המציגים אותה כמדע של דפוסים (תבניות משותפות), וכי המתמטיקאים מחפשים דפוסים: במספרים , במרחב, במדע , במחשבים ובהפשטות דמיוניות המתמטיקה התפתחה ממנייה חישוב ומדידה ומהמחקר השיטתי של צורות ותנועה של עצמים מוחשיים. הידע והשימוש במתמטיקה בסיסית היוו תמיד חלק טבעי וחיוני בחיי האדם והקבוצה.

הפשטה (בלועזית: אבסטרקציה) היא הליך מרכזי של זיקוק התכונות העקרוניות של אובייקט נחקר וזניחת תכונות אחרות ממשיות שלו שבמסגרתן נחקר במקור. ההפשטה מפשטת את העיסוק באובייקט ומאפשרת להכליל אותו.

הכללה היא מאבני היסוד של הפעילות המתמטית. הכללה פירושה לקיחת עצם מתמטי מסוים, ומעבר ממנו לעצם כללי יותר, שהעצם שממנו יצאנו מהווה מקרה פרטי שלו.

מושג B מהווה הכללה של מושג A כאשר:

- כל מופע של המושג A הוא גם מופע של המושג B.
- יש מופע של המושג B שאיננו מופע של המושג A.

יתרונה הבולט של ההכללה היא בכך שהיא עוברת מהדיון במושג הפרטי, המצומצם, למושג כללי, ובכך מאפשרת את יישומו של הידע שנצבר אודות המושג המצומצם בעולם המקיף יותר שבו חל המושג הכללי. בנוסף, ההתעסקות ב"תמונה הגדולה" מאפשרת לעתים לגלות מידע חדש על המושג הפרטי, שעד אז היה קשה להבחין בו בשל ריבוי הפרטים הלא רלוונטיים

במתמטיקה ובלוגיקה **הוכחה** היא סדרה סופית של טענות הנובעות זו מזו בעזרת כללי היסק, תוך שימוש בהגדרות, באקסיומות, ובידע קודם שהוכח קודם לכן, המראה שטענה מסוימת היא נכונה.

הפרכה של טענה מהווה גם היא הוכחה - הוכחה שטענה זו אינה נכונה (כלומר ששלילתה של הטענה היא נכונה). טענה שטרם זכתה להוכחה קרויה השערה, וטענה שזכתה להוכחה קרויה משפט או תאורמה.

תפקידה המתמטי של ההוכחה הוא להפוך רעיונות והשערות לדרך סלולה, שממנה אפשר להתקדם לרעיונות חדשים (מתוך הוויקיפדיה ערך מושגים במתמטיקה).

הצדקה- טיעון היסקי המבוסס על מסקנות.

הוכחה- במתמטיקה ובלוגיקה היא סדרה סופית של טענות הנובעות זו מזו בעזרת כללי היסק, תוך שימוש בהגדרות, באקסיומות, ובידע קודם שהוכח קודם לכן, המראה שטענה מסוימת היא נכונה.

שיח - חילופי דברים; דיון; שיחה; דיאלוג.

הסבר - פירוש, באור.

נימוק – תירוץ.

הנמקה- פעולה פרשנית, מתן טיעונים תומכים, הסבר, נימוק (מילון אוקספורד, 1993).

שטרנברג מוסיף וטוען שהנמקה היינו תהליך פרשני פונקציונליסטי. הקורא מאתר אלמנטים בטקסט ומנסה להבין מדוע הם שם? ואיזה תפקיד הם ממלאים בטקסט. המונח מתחלק לשני סוגים בסיסיים: הנמקה מימטית והנמקה רטורית.

הנמקה מימטית היא הנמקה במונחי העולם המיוצג. כלומר, סיבתו של אירוע מסוים בעולם המיוצג היא אינהרנטית לאותו עולם.

הנמקה רטורית היא הנמקה במונחי השדר. כלומר, הנמקה באמצעות פניה לאפקטים שהמחבר רצה ליצור, המסר שהוא ניסה להעביר.

(*המונח נטבע על ידי פרו' מאיר שטרנברג (1970) במאמר Mimesis and Motivation: The Two Faces of Fictional Coherence גיליון 33 של כתב העת Poetics Today).

אוריינות מתמטית - היא יכולתו של הפרט לזהות ולהבין את התפקיד של המתמטיקה בעולם, לבצע שיקולים מבוססים היטב, להשתמש ולעסוק במתמטיקה בדרכים ובאופנים המתאימים לחיי הפרט של אזרח מודע, אחראי, מועיל, ובעל יכולת התבוננות ותגובה על הנעשה סביבו (De Lange et al., PISA, 2006).

רקע תיאורטי

ההתרחשות בכיתה נחשבת כאחד ממקורות הידע העיקריים של המורה. מהלך השיעורים וההתבוננות בחשיבת התלמידים, הם בסיס ללמידת המורים מתוך הוראה, התפתחות מתמשכת ויציבה של המורים, לידע המורים ישנה השפעה מכרעת על הלמידה של התלמידים,

(Hiebert, Morris & Glass, 2003; Grossman & McDonald, 2008; Leikin & Levav-Waynberg, 2007).

שלושה סוגי ידע שזורים זה בזה בהוראה, ידע התוכן, ידע הפדגוגי וידע המורה על התלמידים, על המורים להישען על מרחב זה של הידע ולשלב אותו בהבנות וכשירויות שלהם אם הם רוצים לתפקד במשולש המקשר בין תלמיד, תוכן החומר ומורה בכיתה. (בתוך רגב ומרגולין, 2013,

Grossman & McDonald, 2008; Hiebert & Morris,2009; Lampert & Graziani, 2009).

Kilpatrick ,Swafford and Findell (2001) מתארים את הוראת המתמטיקה **כמארג** השזור מ-5 רכיבים: רכיב הבנה קונספטואלית – מושגים פעולות ויחסים בין המספרים, רכיב הרהיטות הפרוצדורלית – הפעלת פרוצדורות נכונות, רכיב יכולת אסטרטגית – ניתוח וייצוג שאלות באופן מתמטי, ביעילות ודייקנות, רכיב הסקת המסקנות- הסקה לוגית לצורך הנמקה והכללה **ורכיב עמדות חיוביות-** המתמטיקה כבעלות **ערך קריטי**, המועילה וניתנת ללמידה שיטתית לגבי כל אחד.

מילים והשימוש בהן – כל שיח מקצועי מתבסס מבחינת המילים שבו על השפה הטבעית הנהוגה באותו מקום גאוגרפי. עם זאת לכל שיח ישנן את המילים הייחודיות לו.

לדוגמא, בשיח המתמטי ישנן מילים אופייניות הקשורות לכמויות ולצורות. ייתכן שבסוגי שיח אחרים ישתמשו באותה מילה בכמה דרכים למשל במילה "קבוצה" משתמשים באופן שונה בשיח היום-יומי לעומת השיח המתמטי (Pimm, 1987 בתוך: מחקר קרן ישראלית למדע, מאפייני השיח המתמטי הכיתתי של סטודנטיות טבח ונחליאלי, 2013).

ויטגנשטיין (Wittgenstein, 1953 בתוך טבח ונחליאלי, 2013) מוסיף כי המילים הרבות בשיח אינן מצביעות בהכרח על אובייקטים ספציפיים, המושג משמעות של המילה שקול לאופן שבו משתמשים באותה מילה. המילים והשימוש בהן מאפיין עיקרי של שיח, שכן המילים אחראיות למה שהמשתמש רואה בעולם ומסוגל לומר לגביו.

ההגדרה אוריינות מתמטית המוזכרת במאמר, מדגישה את הפן של תפקוד מושכל במגוון מצבים מציאותיים. כמו שלא ניתן לצמצם את המובן של אוריינות הקריאה לאוצר מילים עשיר, לכללי דקדוק, או לכתיב וכתב, כך לא ניתן לצמצם את המובן של האוריינות המתמטית להכרת מינוח מתמטי, פרוצדורות ועובדות, או למיומנויות ביצוע של פעולות מסוימות בשיטות שונות. האוריינות המתמטית מתייחסת לכל אלה כתנאי מקדים, שבלעדיו היא לא תתאפשר. מובנה של האוריינות המתמטית הוא שילוב יצירתי של מרכיבים אלה, כתגובה לדרישות הנובעות ממצב מציאותי חוץ מתמטי (אתר מזכירות פדגוגית).

מכאן, אוריינות מתמטית: הנה היכולת להשתמש בשיח מתמטי לפי כלליו ובנוסף היכולת להחליט מתי להשתמש בו ומה לספר בו באפן לשוני דבור וכתוב קרי, היכולת להתאים אופן שימוש (שיח) למצב ולצרכים.
אהרוני (2004) מציין אם בונים נכונה את המושגים, כלומר לומדים אותם מיסודם על דרך ההתנסות המוחשית, הם נשמרים לאורך זמן.

Sfard (2008, 2007) טוענת כי **אפשר** להבדיל בין סוגי השיח המקובלים, המתפתחים בקרב קהילות מקצועיות למיניהן, כמו זו של המתמטיקאים, באמצעות התייחסות לארבעה מאפיינים: מילים והשימוש בהן, מתווכים ויזואליים, שְגרות ונרטיבים מקובלים (routines).

מתווכים ויזואליים – מתווכים ויזואליים הם עצמים שעליהם פועלים כחלק מתהליך התקשורת.
שגרות (routines) - שיח הן דפוסים שאותם אפשר לזהות ברצפים של שיח– שבהם המשתתפים מגיבים לסיטואציה מוכרת.
נרטיבים מקובלים-(endorsed narratives) – הם כל טקסט דָבור או כתוב, שאנשי הקהילה הרלוונטית מקבלים אותו כנכון. במתמטיקה כל ההגדרות, ההוכחות והמשפטים הם נרטיבים מקובלים.

במסגרת זו למידת מתמטיקה היא שינוי בשיח המתמטי של הלומד שינוי שעשוי לבוא לידי ביטוי בכל אחד מארבעת מאפייני השיח.

שינוי זה יכול להיות ברמה של האובייקטים הדיסקורסיביים "מתוך" השיח או ברמת-על שיח לגבי השיח. ההתפתחות ברמת האובייקט באה לידי ביטוי באמצעות הרחבה של מה שידוע לגבי האובייקטים המתמטיים שכבר קיימים בעולמו של היחיד. כלומר, מדובר בניתוח האובייקטים כדי לנסח ולקבל נרטיבים חדשים לגביהם. התפתחות זו כוללת הכרת **מילים חדשות, נרטיבים מקובלים חדשים כמו, למשל, משפטים מתמטיים לגבי אובייקטים מוכרים (ושגרות חדשות).**

לעומת זאת, מקורה של התפתחות ברמת-על היא **ברפלקציה לגבי שיח קיים בכללותו שלא כמו רפלקציה על האובייקטים שלו**. התפתחות זו כוללת שינויים בכללי-העל המנהלים את השיח. השיח החדש שמתפתח כתוצאה משינוי זה אינו בר-השוואה עם השיח הקודם. השיח החדש רחב יותר ומורכב יותר. השיח הקודם נתון כעת לכללים חדשים. במקרים רבים הצורך בשינוי הוא תוצאה של הכרת אובייקטים מתמטיים חדשים. לדוגמא: כאשר מספרים חדשים, בין אם הרציונליים, השליליים, האי-רציונליים או המרוכבים מוצגים לראשונה, לא נראה שאפשר לקבל אותם אלא אם ישתנו הנרטיבים שהתקבלו קודם לכן. לדוגמה, כאשר מתחילים לעבוד עם מספרים שליליים אי אפשר יותר לטעון שכפל מגדיל או שחילוק מקטין, כלומר כללי-העל השתנו.

מכאן, כל שיח מגדיר קהילת שיח שהמשתתפים בה מְתקשרים ופועלים על פי דפוסים מותאמים.

השפה מופנמת רק באמצעות תקשורת של רעיונות, כאשר תלמידים מדברים, הם מפנימים את המשמעות של המילים.

תלמידים לומדים מילים חדשות כאשר הם עושים רפלקציה ומדמיינים את המשמעות **וההקשר לתוכן**. כאשר התלמידים משתמשים במילים חדשות בנוכחות אדם בעל ידע, כגון מורה, והמורה מוסיף את המשמעות למה שכבר ידוע לתלמיד, הם בעצם נמצאים באזור הלמידה הנמצא בין ההבנה העכשווית של התלמיד לבין פוטניצאל ההבנה שלו, קרי "טווח ההתפתחות האפשרית הקרובה" ZPD, כלומר מורים יכולים לסייע לבסס ולפתח את השפה וידע התלמידים באמצעות התנסות, מהמוכר אל הלא מוכר.

השימוש **במשמעות המילים**, הכללה של הרעיונות הנה קריטית לבניית השפה בכלל והשפה המתמטית בפרט (ויגוצקי, 1994, בתוך מאמר מתורגם מרכז מורים ארצי- לימוד השפה המתמטית ב"טווח ההתפתחות האפשרית הקרובה").

Straker (1993, בתוך מאמר מתורגם מרכז מורים ארצי- לימוד השפה המתמטית ב"טווח ההתפתחות האפשרית הקרובה") מוסיף כי על התלמידים לעבור התנסויות פעילות למושגים המבוטאים בשפה, הפנמה של השפה והמשמעות לתוכן מתרחשת רק כאשר אלו מוצגים בהתאמה לתלמידים "טווח ההתפתחות האפשרית הקרובה" ZPD ועל כן חשוב לבסס ולקשר את ההתנסויות של התלמידים בשיעורי המתמטיקה הן **לשפה הדבורה והן לשפה הכתובה.**

באתר מפמ"ר –טיפוח אוריינות מתמטית לכיתות ז'-ט' מוצגת רשימת כישורים נדרשים המבוססת במדינות ה- OECD (De lange et al., PISA, 2006).

יכולת חשיבה והנמקה: במתמטיקה נשאלות שאלות אופייניות כגון: האם..?, אם כן - כמה...?, כיצד ניתן למצוא...?, ועוד.

במסגרת הגדרת יכולת זו, נדרש התלמיד להכיר את התשובות שמתמטיקאים מציעים בדרך כלל לשאלות מעין אלה. בנוסף, צריך התלמיד להבדיל בין סוגים שונים של היגדים,

כגון: הגדרות, משפטים, דוגמאות, השערות, מסקנות ומסקנות מותנות, ולהבין את השימוש ואת המגבלות שיש למושגים מתמטיים רלבנטיים.

יכולת טיעון: בה נדרש התלמיד להכיר מגוון של הסברים מתמטיים, וביניהם את ההוכחה. התלמיד צריך להיות מסוגל לעקוב אחר שרשרת טיעונים מתמטיים מסוגים שונים, כדי להשתכנע ולשכנע אחרים בנכונות היגד מתמטי. התלמיד צריך ליצור ולבטא טיעונים מתמטיים. במידת האפשר, הוא צריך לבסס תחושה היוריסטית (כללי אצבע לאומדן ראשוני) לגבי מה יכול להתרחש, מה לא יכול להתרחש, ובאילו תנאים.

יכולת תקשורת: משמעה שלתלמיד צריכה להיות יכולת ביטוי בכתב ובעל פה במגוון דרכים לגבי נושאים בעלי תוכן מתמטי, וכן הבנה של התבטאויות של אחרים בכתב או בעל פה באותם נושאים.

יכולת הדגמה (modeling): בכך כלולה היכולת של התלמיד לתרגם את המציאות למודל מתמטי, לפרש מודלים מתמטיים במנוחים של מציאות, ולפעול במסגרת של מודל מתמטי: בקרה, פיקוח ושליטה על תהליך המודל, תיקופו, הערכתו וניתוח ביקורתי של המודל ושל תוצאותיו.

יכולת הצגת בעיות ופתרונן: במסגרתה על התלמיד להכיר הצגות וניסוחים של סוגים שונים של בעיות מתמטיות (טהורות, שימושיות, פתוחות או סגורות), לבדל אותן זו מזו, וכמובן, לפתור סוגים שונים של בעיות מתמטיות במגוון דרכים.

יכולת ייצוג: בכך מעורבת יכולת ההצפנה, הפענוח, התרגום, הפרשנות והאבחנה בין סוגים שונים של ייצוגים של אובייקטים מתמטיים במצבים שונים. התלמיד נדרש להכיר את הקשרים ההדדיים הקיימים בין ייצוגים שונים, לבחור את המתאים מהם, ולהחליף ביניהם, בהתאם למצב ולמטרה.

יכולת שימוש בשפה טכנית פורמאלית הכוללת סימולים מתמטיים: בכך מעורבים פענוח ופרשנות של שפה מתמטית פורמאלית, והבנת הקשר שלה לשפה היומיומית. נדרש מהתלמיד תרגום הדדי בין שפה דבורה רגילה לשפה המתמטית, טיפול בהיגדים ובביטויים הכוללים סימולים ונוסחאות, שימוש במשתנים, פתרון משוואות וביצוע פעולות חשבון.

יכולת שימוש בכלים ובעזרים: במסגרתה נדרש התלמיד לדעת על מגוון כלים ועזרים (כולל עזרי מידע אלקטרוניים) העשויים להועיל בפעילות מתמטית, ולעשות בהם שימוש תוך הכרת המגבלות שיש לכלים ולעזרים אלה.

כאשר רוצים להתחיל ללמד בכיתה... מאגר של רשימת מילים וביטויים שימושיים להוראת המתמטיקה

כאשר רוצים...	סוג הקשר	מילות קישור מילים וביטויים שימושיים - למתמטיקה
להוסיף, למנות	הוספה וצירוף	ו, וכן, גם, נוסף לכך, יתרה מזאת, יתר על כן, זאת ועוד, כמו כן, לא כל שכן, בנוסף..., לא רק... כי אם גם, לרבות ה..., מלבד ה..., חוץ מזה... ואף... אגב..... דוגמה: נופר הביאה ליום ההולדת של דנה מתנה בנוסף לבלונים.
לתאר מתי קרו הדברים	זמן	כאשר, כש..., בשעה ש..., בזמן ש..., לפני ש..., אחרי ש..., במשך, קודם לכן, בינתיים, בטרם, לאחרונה, מאז, מראש..., לאחר מכן, לאחר, אחרי זה.. לעתים קרובות/רחוקות... דוגמה: כדי לחלק 30 תפוחים בין שני ילדים ביחס של 2:3 נחלק בכל שלב 5 תפוחים, 2תפוחים לילד אחד ו-3 תפוחים לאחר, ולאחר 6 שלבים נקבל את החלוקה.
להתנגד, להסתייג	ניגוד	בעוד..., בו בזמן ש..., לעומת ה..., לעומת זאת, אבל, אמנם, אך, אולם, ברם, אפס כי, עם זאת, לא... (הטקסט המנוגד) אלא, ואילו..., בניגוד לכך, מאידך גיסא, מנגד, מצד אחד...(טקסט) מצד שני... דוגמה: אמנם דני הכין שיעורים, בניגוד ליוסי שלא הכין שיעורים אך הממוצע....
לציין סיבה, לנמק	סיבה	כי, מפני ש..., משום ש..., מאחר ש..., הואיל ו..., שכן..., בשל, בגלל ה..., בעקבות, בזכות ה..., כיוון ש, בגין ה..., לרגל ה..., בעטיו של..., היות ש..., מחמת ה..., מפאת ה...,עקב....,לאור,.... דוגמה: משולש אינו מרובע מאחר ש...
לציין תוצאה	תוצאה	כך ש... מכאן ש...,לאור זאת..., מכאן נובע ש..., לכן, על כן, לפיכך, הואיל וכך, כתוצאה מכך, אי לכך, משום כך..., בעקבות זאת, עקב כך, בשל..., מתוך כך, מכיוון שכך, דוגמה: לריבוע 4 צלעות שוות ו-4 זוויות ישרות, מכאן **שריבוע** הוא **מלבן**.
לציין מטרה	תכלית (מטרה)	בחיוב: כדי ש..., לכבוד ה..., במטרה ש..., על מנת ש..., לשם ה..., למען ה.., כדי ל..., במטרה ל..., במגמה ל..., על מנת ל..., לשם כך, לתכלית זאת, בשביל ש... בשלילה: כדי שלא, שלא, פן, שמא.

כאשר רוצים...	סוג הקשר	מילות קישור מילים וביטויים שימושיים - למתמטיקה
		דוגמה: לכבוד מסיבת הכתה דני קנה ציוד למסיבה, במטרה להוזיל עלויות....
להשוות	השוואה	דמיון: בהשוואה ל..., בדומה ל..., דומה ל..., במקביל ל..., כמו ה..., כפי ש..., בעוד, כשם ש... כך גם, כאילו, לניגוד: לעומת זאת, אילו, בניגוד ל..., לחלופין. אחרים: ככל ש... כן, במידה ש... כך, יותר ממה ש..., פחות ממה ש..., יותר מ..., פחות מ..., יחסית ל..., בהשוואה ל... דוגמה: בסיבוב שלם, שהוא סיבוב של ° 360, כל נקודה מועתקת על עצמה, לעומת זאת, בסיבוב חלקי של השלם וחלקיו דרושים ארבעה סיבובים של °90, כדי שהנקודה תחזור למקומה הראשון.
לציין תנאי	תנאי	תנאי קיים: אם, במקרה ש..., בתנאי ש..., ובלבד ש..., לא... אלא אם כן תנאי בטל (היפוטטי): לו, אילו, לולא, אילולא, אלמלא דוגמה: לצורה יש סימטריה סיבובית, אם יש סיבוב חלקי שמעביר את הצורה על עצמה. 0.37-0.11=0.26 ייבדק כך 0.11+0.26 אם תוצאת החיבור היא המחוסר 0.37 , הרי שפתרון תרגיל החיסור נכון
לציין ניגוד לצפוי	ויתור	על אף ש/ה..., אף על פי ש..., חרף ה..., אף על פי כן, אף כי, אף אם, גם אם, אפילו, למרות ה..., למרות זאת, בכל זאת, עם זאת, בכל אופן, מכל מקום, על כל פנים דוגמה: ניתן להשוות שברים גם אם המכנים שלהם שונים, אבל המונים שלהם שווים. כל אחד מהם קיבל הנחה של 2 שקלים, למרות שאחוז ההנחה היה שונה בכל מיקרה.
לציין חלופות	ברירה	או, לחלופין דוגמה: ½ או 0.5
להסביר	הסבר	כלומר, למשל, לדוגמה, זאת אומרת, דהיינו, קרי, הכוונה היא ועוד... דוגמה: מחיר בקבוק מים גדול המכיל 2½ ליטר, מחיר של 1 ליטר הוא 6 שקלים כלומר...

(wikibooks- מבוא למתמטיקה אוניברסיטאית-ניסוחים מדויקים המתמטיקה וההסבר להם)

ויש גם (ובזהירות אילו אינן מילות שגורות בביה"ס, נכתב לצורך העשרה למורים) -

לכל נסמן $\forall$, אם עובדה מסוימת מתקיימת תמיד עבור כל איבר מקבוצת ערכים מסוימת. אם לא מצוינת קבוצה, בד"כ הכוונה לקבוצת המספרים. לדוגמא": **לכל** מספר טבעי n קיים מספר טבעי העוקב לו".
את הביטוי "לכל n טבעי" ניתן לכתוב כ. $\forall n \in N$ -

קיים ונסמן $\exists$, אם עובדה מסוימת מתרחשת עבור עצם אחד בעולם לפחות (כלומר יכולים להיות יותר מאחד).

לדוגמא: "לכל מספר טבעי n **קיים** מספר טבעי העוקב לו" - כאן קיים בדיוק אחד כזה.

"לכל מספר טבעי n **קיים** מספר טבעי הגדול ממנו" - כאן קיימים אינסוף מספרים כאלו].

נאמר שטענה א' מתקיימת **בפרט** אם הוכחנו כבר טענה ב' שמכילה בתוכה את טענה א'. לדוגמא: 2 " הוא מספר זוגי **ובפרט** 2 הוא מספר". כלומר כל מספר זוגי הוא מספר **ולכן** גם 2 מקיים זאת.
$2 < 5 < x$"ובפרט ."$2 < x$

שטענה א' מתקיימת **רק עבור** קבוצה ב' אם אינה מתקיימת עבור כל העצמים שאינם בקבוצה ב' וכן מתקיימת עבור עצמים בקבוצה ב.'

נאמר שטענה א' מתקיימת **רק אולי עבור** קבוצה ב' אם אינה מתקיימת עבור כל העצמים שאינם בקבוצה ב' ואיננו יודעים האם היא מתקיימת עבור עצמים בקבוצה ב.'

שטענה א' מתקיימת **פרט ל-**קבוצה ב' אם היא מתקיימת לכל עצם אחר מלבד קבוצת עצמים ב' המקיימת תנאי מסוים, ואינה מתקיימת לאף איבר ב-ב.'

נאמר שטענה א' מתקיימת **פרט אולי ל-**קבוצה ב' אם היא מתקיימת לכל עצם אחר מלבד קבוצת עצמים ב' המקיימת תנאי מסוים, למרות שלא מן הנמנע שהיא כן מתקיימת לחלק מהעצמים ב-ב'. בד"כ משתמשים בטענה מסוג **פרט אולי ל -**כאשר יש כמה מקרי קצה שאינם מקיימים את הטענה המרכזית, אך עצם קיומם לא יפריע להלך הרוח הכללי. לדוגמא: "הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$ היא פונקציה רציפה, פרט אולי לנקודה אחת."

נאמר ש-א '**וגם** ב' אם מתקיימים שני התנאים יחדיו.

ש-א '**או** ב' אם מתקיים לפחות אחד מבין שני התנאים. שימו לב שבשפת היום יום כאשר אומרים **או** מתכוונים בד"כ לכך שרק אחד התנאים מתקיים, ואילו בניסוח מתמטי יתכן ששני התנאים מתקיימים יחדיו.

משתמשים במושג **"יהי"** בהוכחות כאשר רוצים להוכיח טענה כללית כלשהי. נהוג לקחת עצם **יחיד** ואקראי מתוך קבוצה גדולה ולהוכיח עבורו. מעצם אקראיות הבחירה ההוכחה מורחבת לשאר העצמים בקבוצה. פרוט על שיטת הוכחה זו בפרק הבא.

במתמטיקה, נהוג לומר על טענה כי היא מתקיימת **באופן ריק** (אין סימון מיוחד לכך) אם נכונותה אינה עומדת כלל למבחן, בשל העובדה שהיא מדברת על אובייקטים שאינם קיימים. דוגמא לטענה המתקיימת באופן ריק היא זו: "כל מספר ראשוני המתחלק ב-6 מסתיים בספרה 9". מכיוון שלא קיים מספר ראשוני שמתחלק ב-6, הטענה נכונה באופן ריק.

נכונותו הפורמלית של השימוש ב"באופן ריק" נובעת מתכונתו של קשר הגרירה בלוגיקה. קשר הגרירה $A \to B$, שפירושו "אם A אז B" מקבל ערך "שקר" אך ורק כאשר A אמת ואילו B הוא שקר.

למשל, הטענה "אם אתמול היה יום שני אז היום יום רביעי" היא שקר אך ורק אם טענה" :A אתמול היה יום שני" היא אמת, אך טענה" ,B היום יום רביעי" היא שקר. אם נאמר את הטענה ביום חמישי, למשל, היא תהיה נכונה, שכן אתמול לא היה יום שני.

אם כן, טענה מתקיימת באופן ריק אם היא מנוסחת בצורה $A \to B$ אך A אינו מתקיים. מבחינה מתמטית אין בכך כל דופי, אך הדבר עלול להיראות כעומד בסתירה לשכל הישר ולאינטואיציה.

דרך נוספת ושקולה לראות טענה המתקיימת "באופן ריק" היא על ידי כך שחושבים עליה כעל טענה שמתקיימת רק עבור קבוצה ריקה של עצמים. למשל, הטענה "כל הנחשים ההולכים על שתיים הם שקרנים ואין לסמוך עליהם" מתקיימת באופן ריק, שכן אין נחשים בעלי רגליים.

היפוכי ניסוח- לעיתים קרובות נדרש לבצע היפוך ניסוח לטענה, למשל כאשר רוצים להפריך אותה (להוכיח שאינה נכונה). לסטודנט הלא מנוסה עשויה להיות לעיתים קרובות בעיה בהיפוך נכון של טענות, דבר שנראה קל. הכללים הבאים חייבים להישמר על מנת להפוך טענה בצורה נכונה:

יש להחליף בין המילים "לכל" ו"קיים" (ולהפך). לדוגמא" :**לכל** מספר טבעי n מתקיים..." יהפוך ל :

"**קיים** מספר טבעי n כך שלא מתקיים."...יש להחליף בין המילים "וגם" ו"או" (ולהפך).

אם-אז בלוגיקה מתמטית, **אם-אז** הוא קשר לוגי, הנקרא גם **קֶשֶׁר הגרירה** או **אימפליקציה מטריאלית**, שסימנו $\to$. הקשר יוצר משני פסוקים p ו- q פסוק חדש, $p \to q$, שמרכיבו הראשון, p, נקרא "תנאי", ומרכיבו השני, q, נקרא "תוצאה".

דוגמאות:

אם א', אז ב'.

במקרה זה, הפותח הוא א' והסוגר הוא ב'.

אם ורק אם

במקום להשתמש בביטוי "אם ורק אם", משתמשים לעתים בביטוי "תנאי הכרחי ומספיק", שמשמעותו שקולה.

בלוגיקה מתמטית, אם ורק אם (ראשי תיבות: אם"ם, אנגלית: iff) או "אימוּם" (ובעברית תלמודית: אך ורק אם, או: תנאי כפול) הוא קֶשֶׁר לוגי בין שתי טענות השקולות אחת לשנייה במובן שהאחת אמתית כשהשנייה אמתית ולהפך. כאשר כל אחת משתי הטענות גוררת אחריה את רעותה ולמעשה הטענות שקולות.

בכדי להפריד בין שני מקרים אלו, ולמן הסרת ספק, לעיתים כותבים במקום המונח "אִם": "אִם, אבל לא רק אִם" או "אִם... אבל לא להפך."באופן פורמלי זהו קשר בינארי (פונקציה בעלת שני ארגומנטים שכל אחד מהם הוא פסוק) המוגדר בטבלת אמת להלן. סימונו הוא ⇔ (יש המסמנים ↔ או ≡).

דוגמאות למשפטי "אם ורק אם" מתחומים מתמטיים שונים:

- a גדול ממש מ־b **אם ורק אם** a לא שווה b וגם a לא קטן ממש מ־b.
- אדם א' לחץ יד לאדם ב' **אם ורק אם** אדם ב' לחץ יד לאדם א', שהרי לחיצת ידיים היא פעולה הדדית: אי אפשר ללחוץ יד באופן חד־צדדי.
- משולש הוא משולש ישר-זווית **אם ורק אם** סכום שטחי הריבועים שעל שתיים מצלעותיו שווה לשטח ריבוע שעל הצלע השלישית. (משפט פיתגורס)
- גרף בלתי ־ מכוון הוא עץ **אם ורק אם** הוא קשיר וחסר ־מעגלים **אם ורק אם** הוא קשיר מינימלי (הסרת קשת כלשהי מהגרף תבטל את קשירותו) **אם ורק אם** הוא חסר־ מעגלים מקסימלי (הוספה של קשת כלשהי לגרף תיצור מעגל). זוהי שרשרת של טענות.

(מתוך אתר wikibooks - מבוא למתמטיקה אוניברסיטאית, ניסוחים במתמטיקה והסבר להם)

הלכה למעשה – תיעוד תצפית של קבוצת תלמידים בכיתה ג', ניהול שיח מתמטי

רציונל

בדרך כלל נדרשת מהתלמיד שליטה טובה בפרוצדורות אלגוריתמיות, ולאו הבנה מושגית, המודל של Lampert תומך בהוראת חשיבה מסדר גבוהה לכלל התלמידים, בניית מטלה קצרה בקבוצה קטנה. הרעיון המרכזי לאפשר לתלמידים לבטא את מחשבותיהם במהלך פתרון הבעיה (Lampert, 1990).

במסגרת הלימודים בבית הספר, אנו מעוניינים לפתח את יכולתם של התלמידים לנתח, להסביר ולתקשר רעיונות מתמטיים ביעילות. בתוך כך עליהם להציב, לנסח, לפתור ולפרש בעיות מתמטיות במגוון מצבים. פתרון בעיות באופן כזה דורש מהתלמיד ניצול של מלוא המיומנויות המתמטיות אותן רכש במסגרת בית הספר ומחוץ לה. הכישורים והיכולות הנדרשים מתלמיד לצורך זה הם:

יכולת חשיבה והנמקה, יכולת טיעון, יכולת תקשורת, יכולת הדגמה (modeling), יכולת הצגת בעיות ופתרונן, יכולת ייצוג, יכולת שימוש בשפה טכנית פורמאלית ויכולת שימוש בכלים ובעזרים

(אתר מפמ"ר- טיפוח אוריינות מתמטית בכיתות ז'-ט').

תיעוד תצפית זו מתארת את יחסי הגומלין המיוחדים הצריכים להיווצר בכיתה, שבה התלמידים "מזגזגים" ולומדים לחשוֹב ולא רק לחַשֵׁב, השפה שבה מתרחשת האינטראקציה בין התלמידים, המורה מנהלת את השיח המתמטי יוצרת מרחב "בטוח ופתוח" בקבוצת התלמידים לשאול שאלות, לטעות, שימוש בשגיאות ובתפיסות שגויות למינוף הדיון, התיווך של המורה היינו קריטי, דרך זו מכריעה בפיתוח החשיבה.

קטע מתצפית מכיתה ג' תחילת שנה – התלמידים עובדים בקבוצות

תצפית בקבוצה של 6 תלמידים: 4 בנות ו- 2 בנים המורה מנהלת את השיח

התרגיל 5X37

מורה: למי כבר יש תשובה?

נועה: אני חילקתי בין ה 3 וה 7. 5X3 זה 15 ו-5X7 35 וזה יחד 50

עידו: היא לא עשתה את הכפול 5

נועה: הורדתי את ה - 7 ונשאר לי 30

עידו: זה לא יכול להיות תשובה נכונה בגלל ש 2X30 זה 60 אז זה כבר לא יכול להיות

מורה : למה זה לא נכון, מי אומר זאת?

(הסברים של תלמידים)

מורה : תגידו לי כמה בערך צריך לקבל בתוצאה, בלי לחשב, פחות מ-100 או יותר מ - 100?

***שימוש בשגיאות ובתפיסות שגויות למינוף הדיון**

עידו: עשיתי 7+7+7+7+7 =35 וחיברתי 30+30+30+30+30=150

וביחד 185

מורה: מה דעתכם על הדרך של עידו?

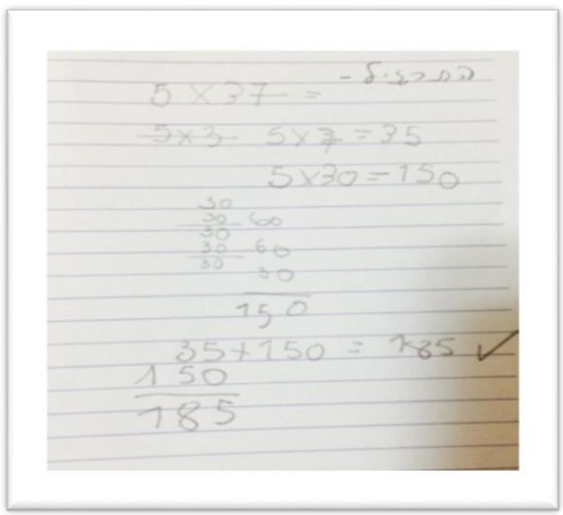
נועה: זה תרגיל ארוך אבל עדיין לא יודעים אם זה נכון , ייקח הרבה זמן לדעת

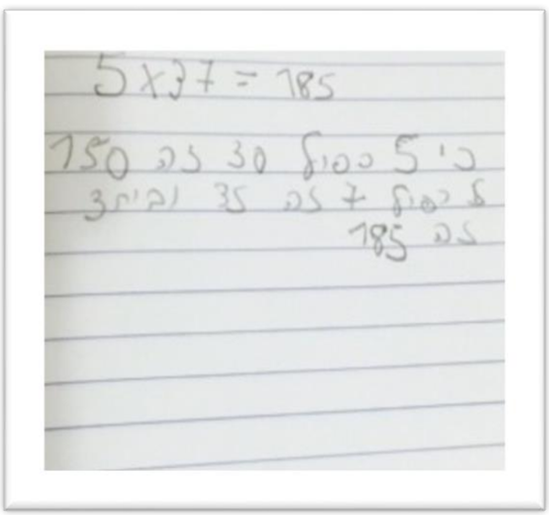
מורה: האם הדרך נכונה?

מורה: האם יש עוד דרך לפתרון?

נועה: אני חושבת שיכול להיות שאפשר לעשות 5*30 ...

מורה: **עתה אני מבקשת מכל אחד לכתוב במחברת את הדרך שלו או של אחד מחברי הקבוצה לנמק ולהסבר במילים.**





מסקנות פדגוגיות

- ✓ להרבות בשיח מתמטי ובהנמקה הן בעל פה והן בכתב בדרכי פתרון ופרוצדורות לחישובים שונים
- ✓ חשוב לנתח את הנימוקים של התלמידים מה יש בהם ומה אין בהם?
- ✓ ללמד את התלמידים **לחשוֹב** ולא רק **לחַשֵּׁב**
- ✓ התיווך של המורה היינו קריטי
- ✓ ליצור מרחב "בטוח ופתוח" בקבוצת התלמידים לשאול שאלות וגם לטעות
- ✓ שימוש בשגיאות ובתפיסות שגויות למינוף הדיון
- ✓ תלמידים המביעים את הצעותיהם ואת רעיונותיהם, על המורים לפעול בו-זמנית ומידית בשלושת המישורים מתמטי, פדגוגי וחברתי
- ✓ להציג לתלמידים מגוון רחב של בעיות הדורשות הסבר והנמקה
- ✓ לבקש מתלמידים לחזור על הצעה, הסבר או הנמקה
- ✓ לשאול את התלמידים האם הם הבינו את ההסבר ההצעה של חברו
- ✓ לבדוק האם ישנה הסכמה או אי-הסכמה
- ✓ לבקש הסברים נוספים, הצעות, הסברים והנמקות אלטרנטיביות
- ✓ לתעד ולכתוב את התובנות בסיום התהליך מהטעמים:
- ✓ לגשר בין הפער של השיח הדבור לשיח הכתוב
- ✓ הוכח במחקרים כי שליפת זיכרון היא תהליך קריטי בשלב הלמידה, רכישת הידע (פירסט, 2012).

אז מה הלאה?

מצורפים שני כלים לסיוע המורים בקידום שיח מתמטי מיטבי בכיתה: הכלי הראשון מיועד לניתוח שיח מתמטי כיתתי כפי שהוצע במחקר קרן ישראלית למדע, מאפייני השיח המתמטי הכיתתי של סטודנטיות דר' מיכל טבח ודר' טלי נחליאלי, 2013.

והכלי השני נלקח מתוך התלקיט - כלים לניהול וקידום ההוראה-למידה המכוונת לפרט "מִתְחַבְּרִים", 2009.

כלי לניתוח שיח מתמטי כיתתי

היבטי השיח	**מילים והשימוש בהן**	**מתווכים ויזואליים**	**נרטיבים מקובלים**	**רוטינות**
שיח מתמטי	המילים המתמטיות שבהן משתמשים בכיתה.	המתווכים שבהם משתמשים במתמטיקה.	ההיגדים המתמטיים הנאמרים בשיעור.	השגרות המתמטיות שמזהים בשיעורים.
שיח בין-אישי	המילים שבעזרתן היחיד ממצב את עצמו ביחס לאחרים ולמתמטיקה.	המתווכים שבעזרתם היחיד ממצב את עצמו ביחס לאחרים ולמתמטיקה.	הנרטיבים שבעזרתם היחיד ממצב את עצמו ביחס לאחרים ולמתמטיקה.	השגרות שבעזרתן היחיד ממצב את עצמו ביחס לאחרים ולמתמטיקה.
שיח פדגוגי	המילים שבעזרתן היחיד מארגן את התכנים כך שהלומדים יהיו משתתפים מרכזיים.	המתווכים שבעזרתן היחיד מארגן את התכנים כך שהלומדים יהיו משתתפים מרכזיים.	הנרטיבים שבעזרתם היחיד מארגן את התכנים כך שהלומדים יהיו משתתפים מרכזיים.	השגרות שבעזרתן היחיד מארגן את התכנים כך שהלומדים יהיו משתתפים מרכזיים.

(מאפייני השיח המתמטי הכיתתי של סטודנטיות, טבח ונחליאלי, 2013).

כלי לניהול וקידום ההוראה-למידה

דרכי התערבות	**תיאור**	**מה המורה צריך לדעת?**	**מה המורה צריך לדעת לעשות?**
המורה כמתווך	לפי ויגוצקי (2004) התיווך הוא סוג של חונכות, ושל עשייה משותפת של טירון ומומחה בשטח ההתפתחות הקרובה של הילד.	• לזהות ידע קודם של התלמיד ואת אפשרויות ההתקדמות שלו.	• להתבונן בתפקוד התלמיד לאבחן ולערוך מיפוי. • להדריך את הלומד ולתמוך בו, • לשמש כמאפשר המארגן את הסביבה הלימודית כך שתהיה תומכת בהתפתחות התלמיד, לנהל את תכנית הלימודים באופן דיפרנציאלי
המורה כמנחה	המנחה נושא באחריות כוללת לקבוצה: על תהליך העבודה בה ועל התכנון לבנות הקבוצה. בתהליך העבודה: עליו ליצור אקלים חיובי ולשמרו; לעזור למשתתפים לעבוד על נושאים משמעותיים להם, להתחבר זה לזה; לסכם דברים ולתת משוב; לאפשר לכל המשתתפים בקבוצה לבוא לידי ביטוי	• לזהות את צורכי הפרטים והקבוצה. •	• ליצור תנאי למידה הולמים להפיק תועלת, לצמוח ולהתפתח • להתבונן בחברים ובאינטראקציה ביניהם ולהאזין להם.
המורה כמאמן	התלמידים לומדים: (1) להגדיר תוצאה אליה הם שואפים להגיע (2) לבנות לעצמם את הדרך להצלחה בתחום שבחרו לקדם ולחזק (3) לבנות תכנית ולקבוע צעדים למימושה (4) להתאמן ולפעול כדי להשיג תוצאות	• להגדיר **ביחד עם** התלמיד/הקבוצה את התוצאה הנדרשת עבורו/עבורה.	• לאמן להשגת התוצאה. • להתבונן בתלמיד/בקבוצה להאזין לזהות נקודות חוזק רצונות ושאיפות ברמת יחיד/ קב' קטנה
המורה כחבר שותף בקבוצה: למידה כדיאלוג	בלמידה דיאלוגית גם המורה וגם התלמיד מלמדים ולומדים. הגילוי והחקירה חייבים להיות משותפים באופן דמוקרטי ושוויוני כדי לאפשר ולתת משמעות אישית ללמידה. בלמידה זו יש הדדיות, התכוונות, שוויוניות, אמפטיה רגשית וקוגניטיבית, גמישות בהחלפת עמדות, והערות לתרומה ההדדית שבלמידה.	• להכיר את חיי התלמידים ואת הרקע החברתי-תרבותי שלהם.	לנהל שיח מתוך שוויון. להתבונן ב..ולהאזין ל....

(מתוך תלקיט - כלים לניהול וקידום ההוראה-למידה המכוונת לפרט "מִתְחַבְּרִים", 2009)

לסיכום,

אם מתמטיקה היא שיח אזי יש ללמד אותה כאומנות התקשורת ולמידתה היא, על-כן, חלק בלתי נפרד מפיתוח אוריינות לשונית (ספרד, 2011).

ולבסוף-

אי אפשר ללמד אדם דבר, ניתן רק לעזור לו לגלות זאת מתוך עצמו (Galileo Galilei).

המאמרים הבאים בסדרה יעסקו:

בניתוח טקסט מתמטי עלפי שלושת רכיבי המתמטיקה כשפה.

מה בין אוריינות השפה והאוריינות המתמטית.

מקורות מידע

אהרוני, ר (2004). חשבון להורים, ספר למבוגרים על מתמטיקה של ילדים, הוצאת שוקן

אתר מפמ"ר- טיפוח אוריינות מתמטית בכיתות ז'-ט' (2004-2005)
תכנית מוארת-טיפוח אוריינות מתמטית בכיתות ז'-ט' (נצפה באתר נובמבר 2014)

וויקיפדיה, ערך מושגים במתמטיקה מושגים במתמטיקה (נצפה באתר אוקטובר 2014)

טבח, מ ונחליאלי, ט (2013). מאפייני השיח המתמטי הכיתתי של סטודנטיות, מחקר קרן ישראלית למדע (446/10).

מילון אוקספורד (1993). מהדורה חדשה תל אביב: קרנרמן-לוני כהן.

משרד החינוך המזכירות הפדגוגית אתר מזכירות פדגוגית-סדר חשיבה גבוה (נצפה באתר אוקטובר 2014)

"מִתְחַבְּרִים" (2009). כלים לניהול וקידום הלמידה המכוונת לפרט ולקבוצה הקטנה לאור השלבים בהתפתחות קבוצה-לומדת ע"פ המודל של טוקמן וגיורא אילון, תלקיט פותח במרכז פסג"ה קירית שמונה מתחברים-כלים לניהול וקידום הלמידה (נצפה באתר נובמבר 2014)

ספרד, א' (2003). למידת מתמטיקה כשינוי של שיח, מצגת יום העיון למורי המורים והמדריכים בתכנית ההתמקצעות.

ספרד, א (2011). אוריינות לשונית ואוריינות מתמטית – מה הקשר? מצגת יום עיון על אוריינות כללית ותחומית בחטיבת הביניים אוריינות לשונית ואוריינות מתמטית- מה הקשר? (נצפה באתר אוקטובר 2014)

עמיר, ד (2011). שפת המתמטיקה, על"ה 34, תשס"ה 2005, עמודים 5-9.

פילוסוף, ד (2007). הקשר בין ליקויי שפה ומתמטיקה-חינוך מיוחד וליקויי למידה. מס"ע מכון מופת

פירסט, א (2012). קשר בין מדעי המוח, לבין תהליכי למידה והוראה. מכון ויצמן למדע רחובות.

רגב, ח ומרגולין, א (2013). שיח מתמטי בסביבות משתנות: תלמידים מפתחים מושגים מתמטיים בקבוצה. גליון מספר חזק מס' 23 (תשע"ג, ינואר 2013).

שטרנברג , מ (1970). Mimesis and Motivation: The Two Faces of Fictional Coherence גיליון 33 של כתב העת Poetics Today.

תכנית לימודים מתמטיקה לכיתות א-ו בכל המגזרים (2006). משרד החינוך התרבות והספורט המזכירות הפדגוגית, האגף לתכנון ולפיתוח תכניות לימודים. ירושלים הוצאת "מעלות".

De lange, J., Blum, W., Dossey, J., Marciniak, Z., Niss, M., and Shimizu, Y. (2006). Mathematical literacy In: Assesing Scientific, Reading and Mathematical Literacy: A Famework for PISA 2006, (71-114), OECD 2006

Grossman, P., & McDonald, M. (2008). Back to the future: Directions for research in teaching and teacher education. *American Educational Research Journal*, *45*(1), 184-205.

Hiebert, J., Morris, A.K. & Glass, B. (2003). Learning to learn to teach: An"experiment" model for teaching and teacher preparation in mathematics Journal of mathematics teacher education, 6, 201-222.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). Adding it Up. Helping children learn mathematics. Washington, DC: National Academy Press.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. American Educational Research Journal, 27, 29-63.

Leikin, R., & Levav-Waynberg, A. (2007). Exploring mathematics teacher knowledge to explain the gap between theory-based recommendations and school practice in the use of connecting tasks. Educational Studies in Mathematics, 66, 349-371.

Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *Journal of Learning Science*, *16(4),* 1-47.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing.* New York: Cambridge University Press.

Steele D.F. (1999). Learning Mathematical Language in the Zone of Proximal Development Teaching children mathematics, Vol. 6, No.1, September 1999, pp. 38-42.

Wikibooks - מבוא למתמטיקה אוניברסיטאית, ניסוחים במתמטיקה והסבר להם
מבוא למתמטיקה אוניברסיטאית-ניסוחים מדויקים המתמטיקה וההסבר להם