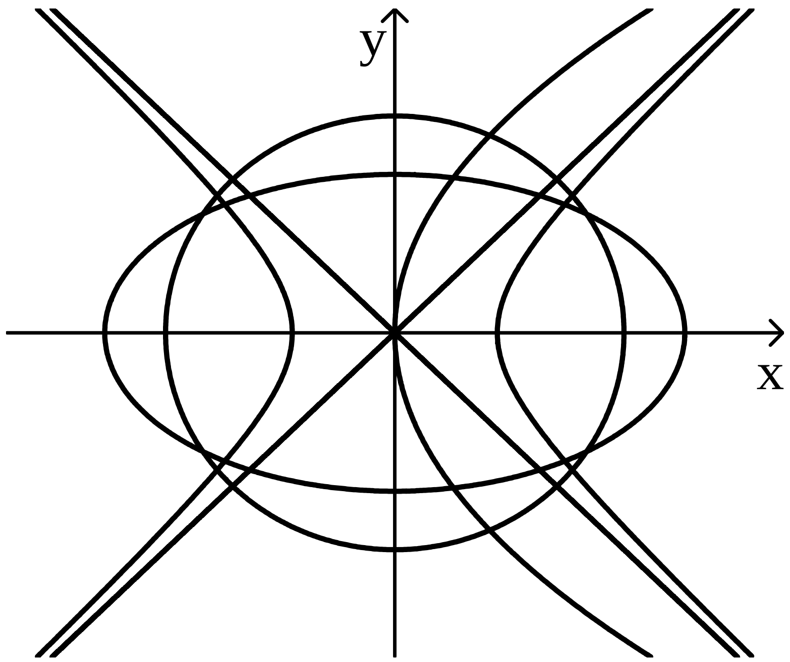
מתמטיקה לחטיבה העליונה
5 יחידות לימוד

גיאומטריה אנליטית



האוניברסיטה העברית בירושלים, המרכז להוראת המדעים

משרד החינוך, המזכירות הפדגוגית, האגף לתכנון ולפיתוח תכניות לימודים

מטה מל"מ המרכז הישראלי לחינוך מדעי - טכנולוגי ע"ש עמוס דה-שליט

המרכז הישראלי להוראת המדעים ע"ש עמוס דה שליט

תשס"ו 2006

מתמטיקה לחטיבה העליונה
5 יחידות לימוד

גיאומטריה אנליטית

כתיבה:
הספר מבוסס על הספר גיאומטריה אנליטית לחט״ע שנכתב על ידי חנה פרל ושולמית בוקסבוים והותאם לתכנית הצבירה (תכנים ותרגול) על ידי גנאדי ארנוביץ׳.

עריכה ותרגילים: גנאדי ארנוביץ

יוצא לאור במימון האגף לתכנון ופיתוח תכניות לימודים במשרד החינוך
ומטה מל״מ, המרכז לחינוך מדעי-טכנולוגי ע״ש עמוס דה-שליט

האוניברסיטה העברית בירושלים, המרכז להוראת המדעים

משרד החינוך, המזכירות הפדגוגית, האגף לתכנון ולפיתוח תכניות לימודים

מטה מל״מ, המרכז הישראלי לחינוך מדעי – טכנולוגי ע״ש עמוס דה-שליט

תשס״ו 2006

גף אישור ספרי לימוד
משרד החינוך התרבות והספורט
אישור מס׳ נ/4107

תוכן העניינים

גיאומטריה אנליטית

מבוא

גיאומטריה אנליטית הוא פרק מתמטי המשלב בתוכו שני נושאים : גיאומטריה ואלגברה.

בפרק זה נעסוק בגיאומטריה של המישור.
נכיר כלים המאפשרים טיפול אלגברי בבעיות גיאומטריות, ולהפך, טיפול גיאומטרי בבעיות אלגבריות. הבסיס לתרגום בין שפת האלגברה לשפת הגיאומטריה הוא הצגת הנקודה (מושג גיאומטרי) כזוג סדור של מספרים (מושג אלגברי). ההתאמה בין נקודות במישור עם מערכת צירים נתונה, לבין זוגות סדורים של מספרים, היא חד-חד ערכית : לכל נקודה מתאים זוג סדור אחד ויחיד, ולכל זוג סדור של מספרים מתאימה נקודה אחת ויחידה. באמצעות הזיהוי נקודה ≡ זוג סדור, נוכל להציג במישור ישרים ועקומות על ידי משוואות, שטחים ותחומים באמצעות אי-שיוויונים.
בהמשך הלימודים נטפל בגיאומטריה של המרחב. מזהים נקודה במרחב עם שלשה סדורה של מספרים. טיפול כזה עוזר לנו להתגבר על הקושי של המחשת בעיה תלת-מימדית באופן חזותי.
באמצעות גיאומטריה אנליטית אפשר לעסוק גם בגיאומטריה של יותר משלשה מימדים, כאשר מזהים נקודה במרחב כ n- יה סדורה של מספרים.
יסודות הגיאומטריה האנליטית הונחו על ידי המתמטיקאי והפילוסוף הצרפתי רנה דקרט (Rene Descartes), שהגה את הרעיון לתאר את נקודות המישור באמצעות מערכת צירים.
מערכת צירים שבה שני הצירים ניצבים זה לזה ולהם יחידות אורך שוות נקראת <u>מערכת קרטזית</u>, על שמו הלטיני של דקרט - Cartesius.

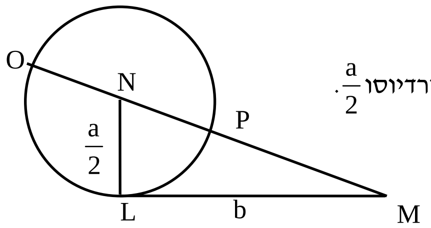
רֶנֶה דֶקַרְט (1650-1596)

פילוסוף ומתמטיקאי צרפתי. דקרט נולד למשפחה אריסטוקרטית אמידה. הוא היה ילד מוכשר, שכבר מגיל צעיר הרבה לשאול שאלות, על כן כינה אותו אביו "הפילוסוף הקטן שלי". בגיל שמונה נשלח ללמוד בבית הספר הישועי La Fleche. בגלל בריאותו הרופפת הרשו לו הנזירים לשכב במיטה בבוקר, בשעות ששאר הילדים למדו בכיתה. דקרט ניצל שעות אלה להרהורים ולקריאת ספרות קלאסית. בשנים 1616-1612 למד משפטים באוניברסיטה של פּוּאַטְיֶה, ואחר כך החליט לסייר בעולם. בפריס נקלע לחברת צעירים עשירים שעסקו במשחקי הימורים.

דקרט זכה במשחקים לעתים קרובות, הודות לתכנון מתמטי של צעדיו. שלב זה בחייו היה קצר ולאחריו הקדיש שנתיים ללימוד מתמטיקה. אחר כך התגייס לצבא, תחילה בהולנד ואחר כך בגרמניה. באותה תקופה, בזמנו החופשי, פיתח שיטה פילוסופית ואת הגיאומטריה האנליטית. דקרט גנז את ספרו הראשון, "העולם", כי חשש מרדיפות הכנסייה הקתולית (כמו שרדפה את גלילאו) . בשנת 1637 נענה להפצרות ידידו, ופרסם את "המשא על השיטה לניהול

נכון של ההגיון ולבקשת האמת במדע"; בספר זה, בהערת "הגיאומטריה", הציג דקרט את הרעיון הבסיסי: "כל בעיה גיאומטרית ניתנת להצגה במונחים כאלה שידיעת אורכם של קווים מסוימים מספקת לצורך בנייתה" - כלומר המטרה היא בנייה גיאומטרית, ולאו דווקא תרגום לשפת האלגברה. להלן דוגמה.

מציאת השורשים של משוואה ריבועית



"כדי לפתור את המשוואה $z^2 = az + b^2$ נבנה קטע LM שאורכו b.

בקצה L נבנה קטע NL, שאורכו $\frac{a}{2}$ וניצב ל-LM. נבנה מעגל שמרכזו N ורדיוסו $\frac{a}{2}$.

הישר המחבר את M ואת N חותך את המעגל בנקודות O ו- P. Z = OM

הוא הקטע המבוקש".

<u>הסבר</u>

על פי המשפט הגיאומטרי: מכפלת חותך למעגל בחלקו החיצוני שווה לריבוע המשיק, קיים

$$MO \cdot MP = ML^2$$

(ML משיק למעגל מכיוון שהוא ניצב ניצב לרדיוס NL בקצהו L).

$$OP = 2NL = a$$

לכן $MP = MO - OP = MO - a$

נציב ונקבל

$$MO \cdot (MO - a) = ML^2$$

נסמן $z = MO$:

$$z(z - a) = b^2$$

$$z^2 = az + b^2$$

כלומר $z = MO$ מקיים את המשוואה.

למשוואה $z^2 = az + b^2$ יש עוד פתרון שהוא שלילי, אולם דקרט התעלם ממנו כי הוא "לא אמיתי".

(הסבר מדוע יש למשוואה שצורתה $z^2 - az - b^2 = 0$ ו- $a > 0$, שני שורשים, אחד חיובי ואחד שלילי.)

האם גם הפתרון השלילי "נמצא" בסרטוט?

נראה כי הפתרון השלילי שווה בערכו המוחלט לאורך הקטע PM וסימנו שלילי.

נסמן $PM = x$, ואז $MO = x + a$

$$(x + a)x = b^2$$

$$(-x)^2 = a \cdot (-x) + b^2$$

כלומר $-PM = -x$ מקיים את המשוואה.

בתחום הפילוסופיה דקרט הטיל ספק שיטתי כדי לבסס רעיונות ברורים שמהם ניתן להסיק מסקנות תקפות. דקרט ניסח את המשפט הידוע "Cogito ergo sum" - "אני חושב משמע אני קיים". כלומר, אפשר להטיל ספק בכל דבר, אבל לא בעובדה שאני חושב; לכן אני קיים.

בשנת 1649 הזמינה אותו כריסטינה מלכת שבדיה לבוא לארצה ולשמש לה מדריך ומורה. דקרט נענה באי-רצון משום שהמלכה היתה אישה תובענית, שלא ידעה לאות, ודרשה מדקרט להתחיל את הלימודים בשעה חמש בבוקר. באחד הבקרים הצטנן, וכעבור זמן קצר מת.

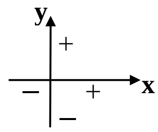
באותה תקופה המתמטיקאי הצרפתי פייר דה פרמה (Pierre de Fermat 1601-1665) פיתח חלק ניכר של הגיאומטריה האנליטית, באופן בלתי תלוי. ספרו פורסם רק בשנת 1679, ובו הוצג הנושא באופן שיטתי יותר מזה של דקרט; אבל בגלל האיחור בפרסום יש המייחסים את פיתוח הגיאומטרי האנליטית המודרנית לדקרט בלבד.

מן הראוי להעיר שהתקופה שבה חי דקרט היא אחת מהתקופות הבולטות בהתפתחות התרבות האנושית. נציין כמה אנשים יודעים שחיו באותה תקופה: שייקספיר, גלילאו, מילטון, המתמטיקאים פרמה ופסקל, הארוי, מגלה מערכת הדם וגילבט, מגלה האלקטרומגנטיות.

פרק 1 : הנקודה

1.1 הצגת נקודה במערכת צירים

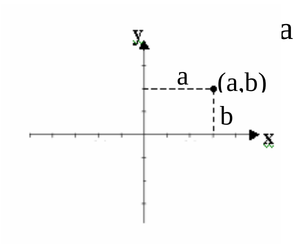
אחת מאבני היסוד של הגיאומטריה היא הנקודה. כדי לתאר נקודה במישור בשפה אלגברית, בוחרים מערכת צירים עם יחידה ולכל נקודה מתאימים זוג סדור של מספרים, כך שההתאמה היא חד-חד ערכית. כלומר : לכל נקודה מתאים זוג של מספרים אחד ויחיד, ולכל זוג מספרים מתאימה נקודה אחת ויחידה. אפשר לבחור כמערכת צירים כל שני ישרים נחתכים, ולקבוע את גודל היחידה ואת כיווני הצירים כרצוננו. מטעמי נוחות נהוג לבחור כצירים שני ישרים מאונכים זה לזה. מקובל לקבוע את כיווני הצירים כמתואר בסרטוט :



ולסמן את הציר האופקי באות x ואת הציר האנכי באות y.[1]

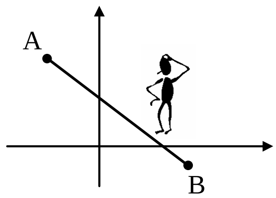
בספר זה נעסוק במערכת צירים **קרטזית**.

במערכת צירים קרטזית שני הצירים מאונכים זה לזה ואורך היחידות על שני הצירים **שווה**[2].



לכל נקודה מתאימים זוג סדור של מספרים (a,b) שבו השיעור הראשון a הוא המרחק מציר ה- y , והשיעור השני b הוא המרחק מהציר האופקי ציר ה- x. לכל נקודה מתאים זוג של מספרים אחד ויחיד, ולכל זוג מספרים מתאימה נקודה אחת ויחידה.

1.2 מרחק בין שתי נקודות (אורך של קטע)



במישור עם מערכת צירים נתונות שני נקודות A ו- B.

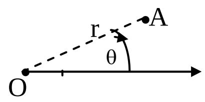
מהו אורך הקטע AB המחבר אותן?

נבחין בין שלשה מקרים אפשריים.

---

[1] זו לא הדרך היחידה לתאר נקודה במישור, יש דרכים נוספות. למשל על-ידי הצגה קוטבית.

במקום מערכת צירים קובעים קרן שראשיתה O וגודל יחידה.



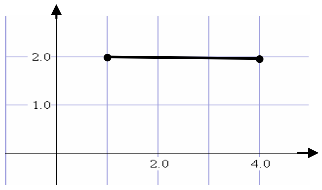
מתארים את מיקומה של נקודה A במישור על-ידי זוג המספרים (r,θ)

שבו r הוא מרחק הנקודה A מ- O ו- θ הזווית שבין הקרן הנתונה ל- OA. במקרה זה ההתאמה של נקודה לזוג מספרים איננה חד-חד ערכית כי גם הזוג $(r, \theta+2\pi)$ מתאר אותה נקודה.

[2] מערכת צירים שבה אורך היחידה על ציר x שונה מאורך היחידה על ציר y **איננה** נקראת מערכת קרטזית אלא מערכת מלבנית ומשתמשים בה לתיאורים גרפיים במקרים שבהם שיעורי ה- y של הנקודות שאותן רוצים לסרטט שונים בהרבה (קטנים או גדולים) משיעורי ה- x. רק במערכת צירים קרטזית הזוויות והאורכים הנמדדים בסרטוט שווים לאלה המחושבים.

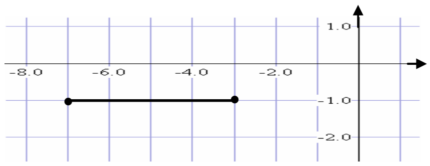
1. הקטע AB מקביל לציר ה- x.

<u>דוגמאות</u>



א. נתונות הנקודות $A(1,2)$, $B(4,2)$

המרחק ביניהן שווה להפרש שיעורי ה- x : $AB = 4 - 1 = 3$



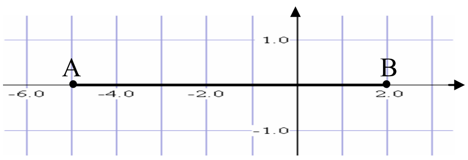
ב. הנקודות הנתונות הן $A(-3,-1)$, $B(-7,-1)$.

גם כאן המרחק בין A ל-B שווה להפרש שיעורי ה-x.

כשמחשבים הפרש זה מקבלים $-4 = -7-(-3)$.

מרחק הוא גודל חיובי, לכן המרחק הוא הערך המוחלט של הפרש שיעורי ה- x :

$$AB = |-7-(-3)| = 4$$



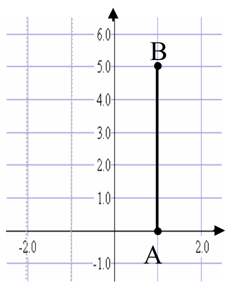
ג. נתונות הנקודות $A\ (2,0)$, $B\ (-5,0)$

המרחק ביניהן הוא $AB = |-5-2| = |-7| = 7$

באופן כללי :

המרחק בין שתי נקודות A וְ B $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_1)$ הנמצאות על קטע AB המקביל לציר ה-x שווה לערך המוחלט של הפרש שיעורי ה-x שלהן : $AB = \|x_2 - x_1\|$

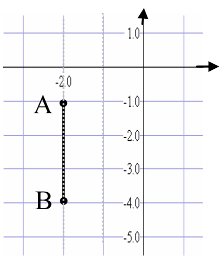
הערה : אין חשיבות לסדר כתיבת שיעורי הנקודות. המרחק בין הנקודות A וְ B נתון גם על ידי $AB = |x_1 - x_2|$ (מדוע?).



2. הקטע AB מקביל לציר ה-y.

<u>דוגמאות</u>

א. נתונות הנקודות $A(1,0)$, $B(1,5)$ המרחק AB שווה ל- $5 - 0 = 5$.



ב. המרחק בין הנקודות $A(-2,-1)$; $B\ (-2,-4)$

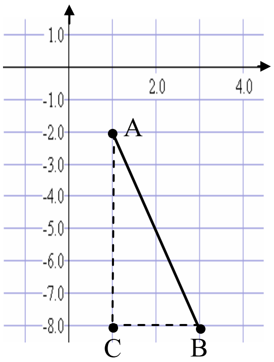
שווה ל- $|-4-(-1)| = |-4+1| = 3$

באופן כללי :

המרחק בין הנקודות $A(x_1,y_1), B(x_1,y_2)$, הנמצאות על ישר המקביל לציר ה-y, שווה לערך המוחלט של הפרש שיעורי ה- y שלהן : $AB = \|y_1 - y_2\|$

דוגמאות

א. נחשב את המרחק בין הנקודות $A(1,-2)$, $B(3,-8)$.



נעביר מקביל לציר ה-y דרך A, ומקביל לציר ה-x דרך B.

שני המקבילים נחתכים בנקודה C, ששיעוריה הם $(1,-8)$.

על-פי הדיון הקודם : $AC = |-8-(-2)| = 6$

$BC = |3-1| = 2$

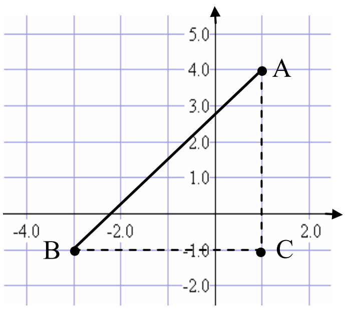
ABC הוא משולש ישר זווית, לכן $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$AB^2 = 6^2 + 2^2 = 36 + 4 = 40$

$AB = \sqrt{40} = \sqrt{4 \cdot 10} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{10}$

$AB = 2\sqrt{10}$

ב. נחשב את המרחק בין הנקודות $B(-3,-1)$, $A(1,4)$.



נעביר מקבילים באותה צורה כמו בדוגמה הקודמת.

המקבילים לציר ה-x דרך B ולציר ה-y דרך A

נחתכים בנקודה $C(1,-1)$.

$AC = |4-(-1)| = 5$

$BC = |-3-1| = 4$

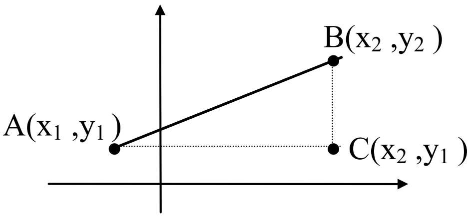
ABC הוא משולש ישר זווית לכן,

$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 5^2 + 4^2 = 25 + 16 = 41$

$AB = \sqrt{41}$

באופן כללי:

כדי לחשב את אורך הקטע AB המחבר את הנקודות $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, נעביר דרכן מקבילים לצירים הנחתכים בנקודה $C(x_2, y_1)$ (או (x_1, y_2))



ABC הוא משולש ישר זווית. לכן, על פי משפט פיתגורס :

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

הקטע AC מקביל לציר ה- x, לכן $AC = |x_2 - x_1|$

הקטע BC מקביל לציר ה- y, לכן $BC = |y_2 - y_1|$

נציב ונקבל

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

הערה:

א. הנוסחה נכונה גם אם $x_2 \le x_1$ או $y_2 \le y_1$.

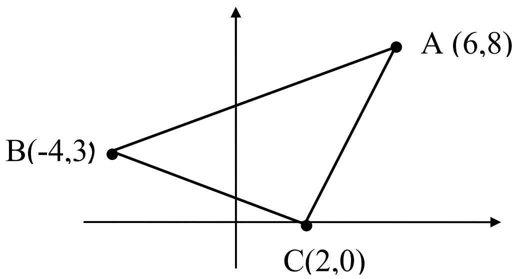
II. ריבוע הפרש השיעורים איננו שלילי לעולם.

III. הנוסחה כוללת גם את המקרה שהקטע הנתון מקביל לאחד הצירים (מדוע?).

<u>תרגיל</u>

א. הוכח כי המשולש ABC, שקדקודיו הם A (6,8), B(-4,3), C(2,0), הוא ישר זווית.

II. חשב את אורך התיכון ליתר של המשולש ABC.



<u>פתרון</u>

א. נחשב את ריבועי האורכים של צלעות המשולש:

$$AB^2 = (6-(-4))^2 + (8-3)^2 = 10^2 + 5^2 = 125$$

$$AC^2 = (2-6)^2 + (0-8)^2 = (-4)^2 + (-8)^2 = 16 + 64 = 80$$

$$BC^2 = (-4-2)^2 + (3-0)^2 = (-6)^2 + 3^2 = 36 + 9 = 45$$

נבדוק אם מתקיים תנאי משפט פיתגורס ההפוך: אם סכום ריבועי שתי צלעות של משולש שווה לריבוע הצלע השלישית, המשולש הוא ישר זווית.

$$AB^2 = 125$$

$$AC^2 + BC^2 = 80 + 45 = 125$$

כלומר $AC^2 + BC^2 = AB^2$

לכן המשולש ABC ישר זווית. הזווית הישרה היא הזווית שמול הצלע הגדולה של המשולש כלומר הזווית C.

ב. נחשב את אורך התיכון ליתר AB. נסמן ב-D את אמצע היתר AB.

ידוע המשפט: אורך התיכון ליתר של משולש ישר זווית שווה לחצי אורך היתר: $CD = \frac{1}{2}AB$.

קבלנו בחלק א':

$$AB^2 = 125$$

$$AB = \sqrt{125} = \sqrt{5 \cdot 25} = 5\sqrt{5}$$

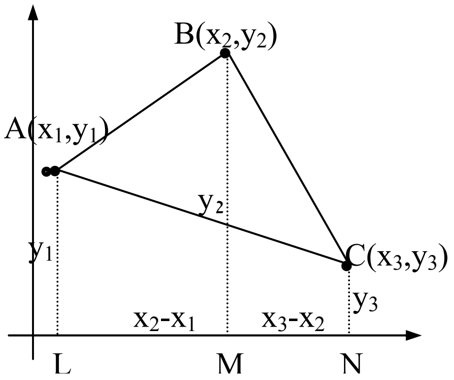
לכן
$$CD = \frac{1}{2}AB = \frac{5}{2}\sqrt{5}$$

1.3 מציאת שטח משולש ומצולע באמצעות קדקודיו

בפרקים הבאים נלמד כיצד אפשר לחשב שטח של משולש שקדקודיו נתונים באמצעות חישוב אורך של צלע במשולש והאורך של הגובה לצלע. כאן נראה איך אפשר לחשב שטח של משולש ומצולע שקדקודיהם נתונים ללא חישוב גבהים.

1. שטח משולש

יש לחשב את השטח של משולש ABC שקדקודיו הם: $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ (כמתואר בציור). נעביר מהקדקודים קטעים המאונכים לציר ה- x (ראו סרטוט). נחשב תחילה את שטחי הטרפזים ABML, BCNM ו- ACNL. כל אחד מהטרפזים הוא ישר זווית, לכן



$$S_{ABML} = \frac{y_1 + y_2}{2}(x_2 - x_1),$$

$$S_{BCNM} = \frac{y_2 + y_3}{2}(x_3 - x_2),$$

$$S_{ACNL} = \frac{y_1 + y_3}{2}(x_3 - x_1).$$

שטח המשולש המבוקש ABC הוא:

$$S_{ABC} = S_{ABML} + S_{BCNM} - S_{ACNL} =$$
$$\frac{y_1 + y_2}{2}(x_2 - x_1) + \frac{y_2 + y_3}{2}(x_3 - x_2) - \frac{y_1 + y_3}{2}(x_3 - x_1)$$

2. שטח מצולע

בדומה למקרה של משולש אפשר למצוא שטח של כל מצולע על פי קדקודיו. אם המצולע כולו מעל ציר ה- x, מספיק להעביר את האנכים מכל אחד מקדקודים כפי שעשינו במשולש.

אם יש קדקודים מתחת לציר ה- x נבנה קו ℓ המקביל לציר ה- x שעובר דרך הקדקוד ששעור ה- y שלו הוא הקטן ביותר, ואז נוריד אליו את האנכים משאר הקדקודים.

יתר הפעולות ישארו זהות למקרה של המשולש.

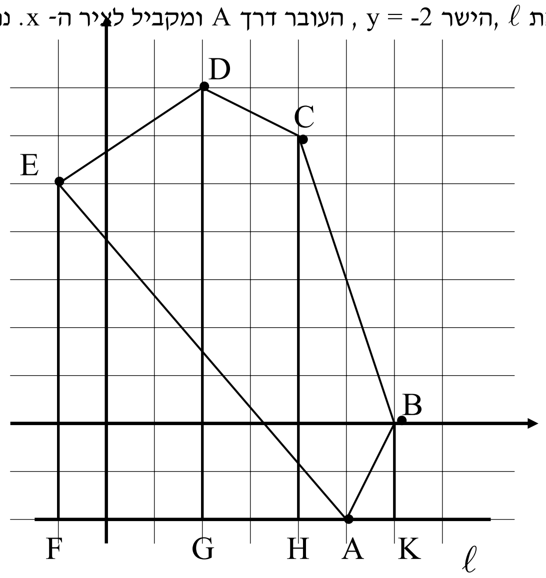
נדגים זאת בתרגיל הבא:

<u>תרגיל</u>

נתון מחומש שקדקודיו הם: $A(5,-2), \ B(6,0), \ C(4,6), \ D(2,7), \ E(-1,5)$. מצא את שטחו.

<u>פתרון</u>

קדקוד A נמצא מתחת לציר ה- x , לכן נבנה תחילה את ℓ, הישר $y = -2$, העובר דרך A ומקביל לציר ה- x. נוריד אנכים מהקדקודים הנותרים לישר ℓ. שטח של המחומש S ניתן לחישוב באופן הבא:



$$S = S_{EDGF} + S_{DCHG} + S_{CBKH} - S_{EFA} - S_{ABK}$$

נמצא את השטחים:

$$S_{EDGF} = \frac{EF + DG}{2} \cdot FG = \frac{7+9}{2} \cdot 3 = 24$$

$$S_{DCHG} = \frac{CH + DG}{2} \cdot HG = \frac{8+9}{2} \cdot 2 = 17$$

$$S_{CBKH} = \frac{CH + BK}{2} \cdot HK = \frac{8+2}{2} \cdot 2 = 10$$

$$S_{EFA} = \frac{EF \cdot FA}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$$

$$S_{ABK} = \frac{AK \cdot KB}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$$

לכן , השטח של המחומש שווה ל- 29.

תרגילים לפרק 1

1.2 מרחק בין שתי נקודות

1. מצא את המרחק בין הנקודות A ו - B

א. $A(7,-1)\ ,\ B(2,-1)$	ה. $A(1,3)\ ,\ B(-3,0)$	ט. $A(2,5)\ ,\ B(-1,3)$
ב. $A(1,-4)\ ,\ B(-3,-4)$	ו. $A(-3,4)\ ,\ B(-1,2.5)$	י. $A(a-2b,a-b)\ ,\ B(a+b,b-a)$
ג. $A(-6,0)\ ,\ B(-6,-1)$	ז. $A(-5,-3)\ ,\ B(1,-11)$	יא. $A(-b,a)\ ,\ B(a,-2b)$
ד. $A(0,-3)\ ,\ B(0,1)$	ח. $A(-10,3)\ B(14,10)$	יב. $A\left(b,-b+a\right),B\left(\frac{a-b}{2},-b\right)$

2. בחר זוג נקודות A ו-B, שהמרחק ביניהן הוא 13 יחידות, אם נתון :

א. A ו-B על ישר מקביל לציר ה-x.

ב. A ו-B על ישר מקביל לציר ה-y, ושתיהן ברביע הרביעי.

ג. A ו-B על ישר שעובר דרך הראשית.

ד. A ברביע השני, ו-B ברביע השלישי.

ה. A על ישר מקביל לציר ה-x ו-B על ישר מקביל לציר ה-y.

ו. A על הישר $y = 2x + 1$ ו-B על הישר $x + 2y = 7$.

3. מבין המשולשים הבאים אילו משולשים הם שווי שוקיים? (הוכח באופן אלגברי)

א. $A(4,3)\ ,\ B(-1,2)\ ,\ C(3,-2)$	ג. $A(3,4)\ ,\ B(-2,2)\ ,\ C(2,-2)$
ב. $A(4,3)\ ,\ B(-1,-2)\ ,\ C(-3,2)$	ד. $A(3,1)\ ,\ B(-5,-1)\ ,\ C(-3,5)$
ה. $A(1,-4)\ ,\ B(8,2)\ ,\ C(-1,0)$	

4. נתונים שני ישרים מקבילים : $y = 2x + 2\ ,\ y = 2x - 4$ וישר שלישי $2y - x = 1$ החותך אותם. מצא את המרחק בין שתי נקודות החיתוך.

5. נתונים שני ישרים מקבילים וישר שלישי החותך אותם :

$l_3: 3y + x = -1$ $\qquad$ $l_2: 5y - 3x = 3$ $\qquad$ $l_1: 3y + x = 3$

מצא את המרחק בין שתי נקודות החיתוך.

6. הוכח כי המשולשים שקדקודיהם נתונים להלן הם משולשים ישרי זווית.

א. $A(7,-1)\ ,\ B(-1,-3)\ ,\ C(-2,1)$

ב. $A(-1,-1)\ ,\ B(4,4)\ ,\ C(1,5)$

ג. $A(-4,2)\ ,\ B(-2,6)\ ,\ C(4,3)$

7. שני קדקודים סמוכים של ריבוע הם : $A(2,3)\ ,\ B(-1,5)$. מצא את שטחו של הריבוע.

8. שני קדקודים סמוכים של ריבוע הם : $A(3,6)\ ,\ B(-1,2)$. מצא את שטחו של הריבוע.

9. שני קדקודים נגדיים של ריבוע הם : $A(2,3)\ ,\ C(-1,5)$. מצא את שטחו של הריבוע.

10. שני קדקודים נגדיים של ריבוע הם : $A(2,1)\ ,\ C(4,-4)$. מצא את שטחו של הריבוע.

11. בחר קדקודים של ריבוע כך ש-

א. אורך הצלע 4 יחידות, ואחד הקדקודים בנקודה $(-1,-3)$.

ב. ארבעת הקדקודים נמצאים על הצירים.

ג. האלכסונים נחתכים על ציר ה-y, ואחד הקדקודים נמצא בראשית.

12. אורך צלע מעוין הוא 5 יחידות. בחר את קדקודיו כך ש-

א. אחד הקדקודים על ציר x, והצלעות מקבילות הצירים.

ב. אחד הקדקודים על ציר y, והצלעות אינן מקבילות הצירים.

13. נתונים קדקודיו של המרובע ABCD. בכל מקרה קבע אם הוא דלתון, מקבילית או מעוין. הוכח את קביעתך באופן אלגברי .

א. $A(1,6)$, $B(9,2)$, $C(6,2)$, $D(-2,6)$

ב. $A(-5,-2)$, $B(-3,0)$, $C(2,-2)$, $D(-3,-4)$

ג. $A(-6,1)$, $B(-4,6)$, $C(1,4)$, $D(-1,-1)$

14. הוכח כי המשולש שקדקודיו $A(-2,5)$, $B(-6,3)$, $C(-5,-4)$ חסום במעגל שמרכזו $O(-2,0)$.

15. הוכח כי המשולש שקדקודיו הם $A(2,3)$, $B(-2,1)$, $C(-1,-6)$ חסום במעגל שמרכזו $O(2,-2)$.

16. משולש ABC הוא משולש שווה שוקיים ($AC=AB$). מצא את x אם נתון :

$A(6,5)$,$B(1,9)$,$C(x,0)$ (שתי תשובות).

17. משולש ABC הוא משולש שווה שוקיים ($AC = AB$). מצא את x אם נתון :

$A(-1,-1)$, $B(-3,4)$, $C(x,1)$.

18. נתונים שלושה קדקודים של המרובע ABCD : $A(-5,-1)$, $B(-4,2)$, $C(2,4)$. מצא נקודה D עבורה :

א. המרובע ABCD הוא מקבילית. ב. המרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים.

19. מצא נקודה A ששיעורה השני הוא 1- , ומרחקה מהנקודה $B(3,3)$ שווה ל-5.

20. מצא נקודה A על הישר $x = 5$, אשר מרחקה מהנקודה $B(1,3)$ שווה ל-5.

21. מצא נקודה A ששיעורה השני הוא 5 , ומרחקה מהנקודה $B(2,0)$ שווה ל-13.

22. א. הראה כי חמש הנקודות $(5,0)$, $B(3,4)$, $C(-4,3)$, $D(\sqrt{10},\sqrt{15})$, $E(-3\sqrt{2},\sqrt{7})$

נמצאות במרחק שווה מהראשית.

ב. רשום תנאי שמקיימות כל הנקודות $P(x,y)$ הנמצאות באותו מרחק מהראשית כמו הנקודות הנתונות.

23. קדקודי משולש הם : $A(0,0)$, $B(b,0)$, $C(c,d)$. חשב את אורכי צלעותיו והראה כי אם $c = 0$, הצלע BC היא הגדולה במשולש. איזה משפט גיאומטרי מתקיים במקרה זה?

24. נתונות הנקודות $A(a_1,b_1)$ ו-$B(a_2,b_2)$. מזיזים כל אחת מהן 5 יחידות שמאלה ו-3 יחידות כלפי מעלה. הראה כי המרחק ביניהן לא משתנה לאחר ההזזה.

25. מצא נקודה ששיעור ה-x שלה חצי משיעור ה-y, ומרחקה מהנקודה $(4,7)$ שווה ל- $\sqrt{2}$.

תשובות

1. א. 5 ; ב. 4 ; ג. 1 ; ד. 4 ; ה. 5 ; ו. 2.5 ; ז. 10 ; ח. 25 ; ט. $\sqrt{13}$; י. $\sqrt{4a^2-8ab+13b^2}$;

יא. $\sqrt{2a^2+6ab+5b^2}$; יב. $\frac{\sqrt{5a^2-6ab+9b^2}}{2}$

3. א. כן ; ב. כן ; ג. לא ; ד. לא ; ה. כן 4. $\sqrt{20}$ 5. ≈1.666 7. 13 8. 32 9. 6.5

10. 14.5 13. א. מקבילית ; ב. דלתון ; ג. מעוין 16. 2 או 10 17. 4 או -6

18. א. (1,1) ; ב. (4.6,1.6) או (-1.4,-6.2) 19. (6,-1) או (0,-1) 20. (5,6) או (5,0)

21. (14,5) או (-10,5) 22. $x^2+y^2=25$ 23. א. $AB=b,\ AC=\sqrt{(b-c)^2+d^2}$

$BC=\sqrt{c^2+d^2}$, ; ב. היתר גדול מכל ניצב 25. (3,6) או (4.2,8.4)

1.3 שטחים של משולשים ומצולעים

1. חשב את שטחי המשולשים ששעורי קדקודיהם :

א. (5,-2) , (2,11), (-2,1)　　ג. (-1,2) , (3,-1) , (2,3)

ב. (2,-3) , (3,2) , (-2,5)　　ד. (3,2) , (1,4) , (0,0)

2. נתון משולש ששניים מקדקודיו הם (-3,-3) , (-2,1) ונקודת המפגש של התיכונים במשולש היא
(-1,-2) . מצא את שטחו של המשולש מבלי למצוא את הקדקוד השלישי.

3. נתון משולש ABC שקדקודיו הם A(2,2) , B(7,-3) , C(5,5). מצא באמצעות שטח המשולש את אורך הגובה מהקדקוד C לצלע AB.

4. נתון משולש ABC שקדקודיו הם A(2,1) , B(6,4) , C(3,3).מצא את הגובה מהקדקוד C לצלע AB.

5. בדוק באמצעות שטח המשולש האם הנקודות הבאות נמצאות על ישר אחד :

א. (1,-1) , (3,2) , (7,8)　　ב. (-1,0) , (2,3), (6,6)

6. מצא את שטחו של המרובע שקדקודיו הם (4,6) , (-3,5) , (-4,3) , (6,3).

7. קדקודי המחומש , לפי סדר, הם : (-4,-2) , (0,0) , (4,2) , (0,5) , (-3,2).
מצא את שטח המחומש.

8. שני קדקודים של משולש נמצאים בנקודות (8,-2) , (2,-2).שטחו של המשולש הוא 30. מצא את שעורי הקדקוד השלישי של המשולש כאשר ידוע כי הוא נמצא על ציר ה- y.

9. בטרפז ABCD נתון : A(1,5) ,B(4,6) , C(2,4) , D(0,0).
מצא את גובהו של הטרפז באמצעות שטחו.

תשובות

1. א. 41 ; ב. 14 ; ג. 6.5 ; ד. 5 2. 10.5 3. $3\sqrt{2}$ 4. 1 5. א. כן ; ב. לא 6. 17

7. 24.5 8. (0,8) , (0,-12) 9. $14/\sqrt{10}$.

פרק 2: הישר

2.1 תזכורת

בלימודים קודמים למדנו על ישרים ומשוואותיהם. הישרים היו משני סוגים:

א. ישרים בעלי שיפוע שמשוואתם היא: $y = mx + n$, כאשר m הוא שיפוע הישר ו- $(0,n)$ היא נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה-y.

ב. ישרים חסרי שיפוע המקבילים לציר y שמשוואתם היא: $x = k$. $|k|$ הוא המרחק של הישר מציר y, וסימנו של k קובע אם הישר נמצא מימין לציר ה-y או לשמאלו.

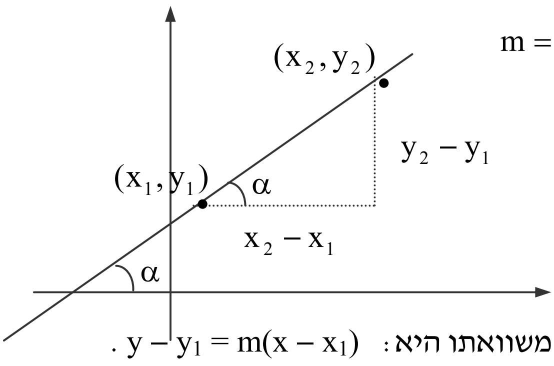
הגרף של המשוואה $ax + by = c$ כאשר $a \neq 0$ או $b \neq 0$, הוא תמיד קו ישר, ולכל קו ישר מתאימה משוואה מהצורה $ax + by = c$.

ההצגה $y = mx + n$ נקראת **ההצגה מפורשת** של קו ישר, וההצגה $ax + by = c$ נקראת **ההצגה התקנית** (או **הסתומה**) של קו ישר. מההצגה המפורשת רואים מיד את כיוון הישר ומצבו ביחס למערכת הצירים; והיא מצטיינת ביחידות התיאור: לכל קו ישר, שאינו מקביל לציר ה-y, יש הצגה מפורשת יחידה. ההצגה התקנית טובה גם לישרים שאין להם הצגה מפורשת אולם היא איננה מהווה תיאור יחיד. לדוגמה, המשוואות $2x + 3y = 6$ ו- $6x + 9y = 18$ הן הצגות תקניות של אותו ישר.

נזכיר בקצרה את תכונות הישר.

- כל נקודה על הישר שיעוריה מקיימים את משוואת הישר. ולהפך, כל נקודה אשר שיעוריה מקיימים את המשוואה (המפורשת או התקנית) נמצאת על הישר.
- כששיפוע הישר הוא חיובי, הישר עולה, כששיפוע הישר הוא שלילי, הישר יורד, וכשהשיפוע שווה ל- 0 , הישר מקביל לציר ה-x. גם הטענות ההפוכות נכונות: לישר עולה יש שיפוע חיובי ולישר יורד, שיפוע שלילי. ישר המקביל לציר ה-x שיפועו שווה ל-0.
- שני ישרים בעלי שיפוע הם מקבילים, אם ורק אם שיפועיהם שווים.
- כשנתונות שתי נקודות שונות (x_1,y_1) ו-(x_2,y_2) על ישר, שיפועו נתון על-ידי התבנית:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



- מתבנית זו רואים כי ישר ניתן לביטוי באמצעות הזווית שהישר יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה- x.

$$m = \tan\alpha$$

- ישר ששיפועו m והוא עובר בנקודה נתונה (x_1,y_1) , משוואתו היא: $y - y_1 = m(x - x_1)$.

• ישר העובר בשתי נקודות נתונות (x_1,y_1) ו- (x_2,y_2), משוואתו היא :

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\left(x - x_1\right)$$

2.2 תנאי ניצבות

נתונות משוואותיהם של שני ישרים l_1 ו- l_2. האם אפשר לדעת על פי המשוואות בלבד אם הישרים ניצבים זה לזה? וכן, כאשר נתונה משוואה של ישר אחד, האם אפשר למצוא משוואה של ישר הניצב לו?

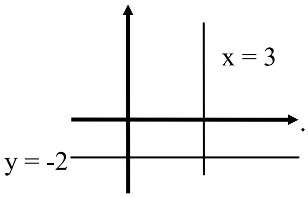
כדי לענות על שאלות אלו נחפש תנאי הכרחי ומספיק לכך ששני ישרים יהיו ניצבים זה לזה.

1. אם אחד הישרים מקביל לאחד הצירים, הישר השני ניצב לו אם ורק אם הוא מקביל לציר השני.

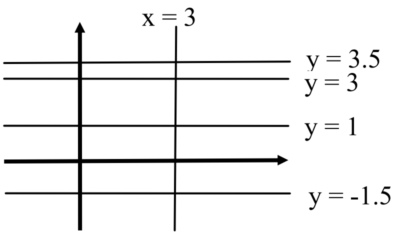
<u>דוגמאות</u>

א. הישר הראשון הוא l_1: x = 3 והישר השני l_2: y = -2.

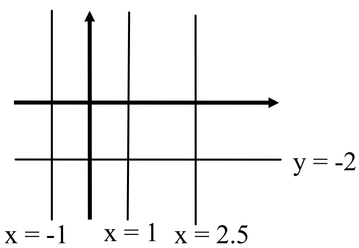
הישרים בודאי ניצבים זה לזה, כי l_1 מקביל לציר ה-y, ו l_1 מקביל לציר ה-x.



ב. כל ישר הניצב לישר l_1: x = 3 (המקביל לציר ה- y) צריך להקביל לציר ה-x , לכן יש משפחה של ישרים הניצבים ל-l_1 ומשוואת המשפחה הזו היא y = a.

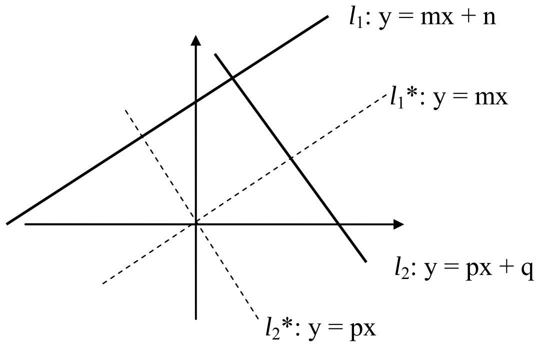


ג. כל ישר הניצב לישר l_2: y = -2 (המקביל לציר ה-x) צריך להקביל לציר ה-y. לכן המשוואה של משפחת הישרים הניצבים ל- l_2 היא x = b .



2. נתונים שני ישרים l_1 ו-l_2 הניצבים זה לזה ואינם מקבילים לאחד הצירים.

נרשום את משוואותיהם המפורשות ונסרטט גרפים מייצגים.

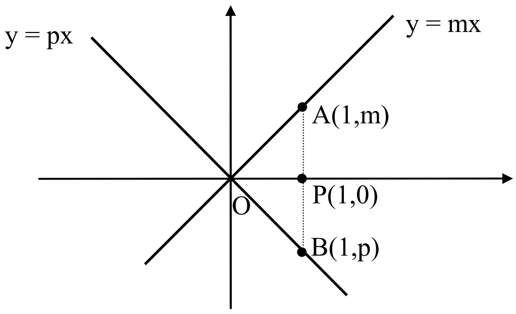


$$l_1: y = mx + n$$
$$l_2: y = px + q$$

הזווית בין שני הישרים איננה תלויה במיקומם במערכת הצירים אלא במצבם ההדדי. לכן כדי לפשט את המשוואות שבהן אנו עוסקים, נתבונן בישרים המקבילים להם העוברים דרך ראשית הצירים.

$$l_1^*: y = mx$$
$$l_2^*: y = px$$

l_1^* מקביל ל- l_1 ו- l_2^* מקביל ל- l_2. לכן גם l_1^* ניצב ל- l_2^*. במילים אחרות הזווית בין l_1 ל- l_2 איננה תלויה ב- n וב- q.



נבחר בנקודה P(1,0) של ציר ה- x ונעביר דרכה אנך לציר ה- x, החותך את שני הישרים בנקודות A ו- B. היות ששיעור ה- x של האנך הוא 1 נקבל כי נקודת החיתוך של האנך עם הישר l_1^* היא A(1,m), ונקודת החיתוך שלו עם הישר l_2^* היא B(1,p) (על ידי הצבת x = 1 במשוואות הישרים l_1^* ו- l_2^*).

מכיוון ש l_1^* ו- l_2^* ניצבים זה לזה, המשולש AOB הוא משולש ישר זווית, על פי משפט פיתגורס:

$$AB^2 = AO^2 + BO^2$$

נבטא עובדה זאת באמצעות שיעורי הנקודות A, B ו-O

AB מקביל לציר ה- y, לכן

$$AB^2 = (m - p)^2$$
$$AO^2 = (1 - 0)^2 + (m - 0)^2 = 1 + m^2$$
$$BO^2 = (1 - 0)^2 + (p - 0)^2 = 1 + p^2$$

נציב ונקבל:

$$(m - p)^2 = 1 + m^2 + 1 + p^2$$
$$m^2 - 2mp + p^2 = m^2 + p^2 + 2$$

$$-2mp = 2$$

$$mp = -1$$

מסקנה:

אם שני ישרים ניצבים זה לזה, אז מכפלת שיפועיהם שווה ל- 1-.

גם הכוון ההפוך נכון: אם מכפלת השיפועים של הישרים $l_1: y = mx + n$ ו- $l_2: y = px + q$ היא 1- , הישרים ניצבים זה לזה.

כדי להוכיח טענה זו יש לקרוא את ההוכחה האחרונה מהסוף להתחלה כדלקמן.

משוואות הישרים:

$$l_1: y = mx + n$$

$$l_2: y = px + q$$

ויש להוכיח ש- l_1* ניצב ל- l_2*.

$$\begin{aligned}
&mp = -1 \\
&-2mp = 2 \\
&m^2 + p^2 - 2mp = 2 + m^2 + p^2 \\
&m^2 - 2mp + p^2 = 1 + m^2 + 1 + p^2 \\
&(m-p)^2 = (1-0)^2 + (m-0)^2 + (1-0)^2 + (p-0)^2 \\
&AB^2 = (m-p)^2 \\
&AO^2 = (1-0)^2 + (m-0)^2 \\
&BO^2 = (1-0)^2 + (p-0)^2
\end{aligned}$$

לכן $AB^2 = AO^2 + BO^2$

ולפי המשפט ההפוך למשפט פיתגורס, $\angle AOB$ היא זווית ישרה, כלומר הישרים ניצבים זה לזה. לכן גם הישרים l_1 ו- l_2, שהם הזזות מקבילות של l_1* ו- l_2*, ניצבים זה לזה.

הוכחנו, אם כן, את המשפט:

שני ישרים שאינם מקבילים לצירים, ניצבים זה לזה, אם ורק אם מכפלת שיפועיהם היא 1- .

בדוק אם הישרים $\begin{cases} l_1: 2x + 3y = 5 \\ l_2: 3x - 2y = 7 \end{cases}$ ניצבים זה לזה.

<u>פתרון</u>

נרשום את המשוואות המפורשות של הישרים

$$l_1: y = \frac{-2x+5}{3} \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$$
$$l_2: y = \frac{3x-7}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$$

שיפוע l_1 הוא $-\frac{2}{3}$, ושיפוע l_2 הוא $\frac{3}{2}$. קיים: $\frac{-2}{3} \cdot \frac{3}{2} = -1$, לכן l_1 ו- l_2 ניצבים זה לזה.

<u>תרגיל 2</u>

מצא את משוואת הישר הניצב לישר $y = 2x - 7$ ועובר דרך הנקודה (5,-3).

<u>פתרון</u>

שיפוע הישר הנתון הוא 2, לכן שיפוע כל ישר הניצב לו הוא $-\frac{1}{2}$ (כי $2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$).

לכן משוואת הישר הניצב לישר הנתון ועובר דרך הנקודה (5,-3) היא:

$$y - (-3) = -\frac{1}{2}(x-5)$$
$$y + 3 = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$$
$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

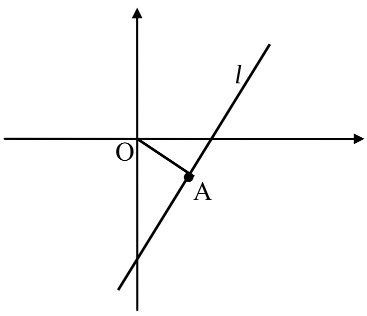
<u>תרגיל 3</u>

מצא את מרחק הישר l: $2x - y = 5$ מראשית הצירים.

<u>פתרון</u>

המרחק בין נקודה וישר הוא אורך האנך היורד מהנקודה לישר.

נעביר אנך מראשית הצירים לישר הנתון l, ונסמן את נקודה החיתוך ב- A. מרחק הישר l מראשית הצירים הוא הקטע OA.



המשוואה המפורשת של הישר הנתון היא $y = 2x - 5$, שיפועו הוא 2, לכן שיפוע האנך הוא $-\frac{1}{2}$.

הישר OA עובר דרך ראשית הצירים, לכן משוואתו היא $y = -\frac{1}{2}x$.

את שיעורי הנקודה A מקבלים על ידי התרת מערכת המשוואות

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ y = -\frac{1}{2}x \end{cases}$$

פתרון מערכת זו הוא $y = -1$, $x = 2$, לכן שיעורי הנקודה A הם (2,-1).

אורך הקטע OA:

$$OA = \sqrt{(2-0)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

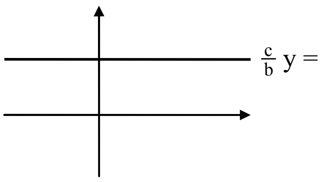
כלומר, מרחק הישר $y = 2x - 5$ מראשית הצירים שווה ל- $\sqrt{5}$.

בתרגיל האחרון חישבנו את המרחק של ישר מסוים מראשית הצירים. נפתור את הבעיה באופן כללי.

<u>תרגיל 4</u>

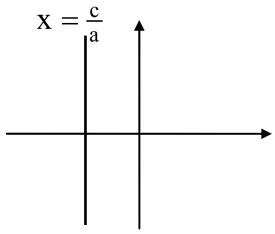
מצא את מרחק הישר l שמשוואתו $ax + by = c$ מראשית הצירים.

<u>פתרון</u>



א. אם $a = 0, b \neq 0$, המשוואה המפורשת של הישר היא $y = \frac{c}{b}$.

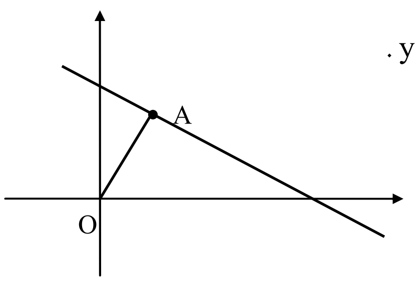
ישר זה מקביל לציר ה- x, לכן מרחקו מהראשית הוא $\left|\frac{c}{b}\right|$.



ב. אם $a \neq 0, b = 0$, משוואת הישר היא $x = \frac{c}{a}$. הישר מקביל לציר ה- y,

ומרחקו מראשית הצירים הוא $\left|\frac{c}{a}\right|$.

ג. אם $a \neq 0, b \neq 0$ משוואתו המפורשת של הישר היא $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$.



משוואת הישר הניצב לו ועובר דרך ראשית הצירים היא $y = \frac{b}{a}x$.

שיעורי הנקודה A, נקודת חיתוך שני הישרים, המתקבלים

על ידי פתרון מערכת המשוואות

$$\begin{cases} ax + by = c \\ y = \frac{b}{a}x \end{cases}$$

הם $\left(\frac{ac}{a^2+b^2}, \frac{bc}{a^2+b^2}\right)$ ומרחקה מהראשית הוא:

$$OA = \sqrt{\left(\frac{ac}{a^2+b^2} - 0\right)^2 + \left(\frac{bc}{a^2+b^2} - 0\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{ac}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(\frac{bc}{a^2+b^2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2c^2 + b^2c^2}{\left(a^2+b^2\right)^2}} = \sqrt{\frac{\left(a^2+b^2\right)c^2}{\left(a^2+b^2\right)^2}} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2+b^2}} = \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

(זכור: $\sqrt{c^2} = |c|$).

הוכחנו: מרחק הישר $ax + by = c$ מראשית הצירים שווה לערך המוחלט של האיבר החופשי,

מחולק בשורש הסכום של ריבועי המקדמים הקשורים.

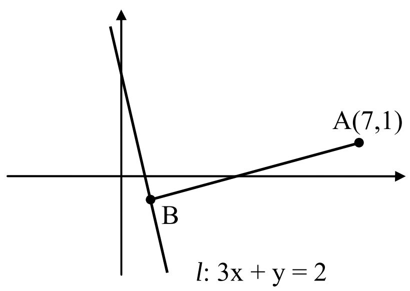
שים לב, נוסחה זו נכונה גם למקרים א ו-ב שבהם טיפלנו בנפרד. במקרה א, $a = 0$ לכן, על פי הנוסחה, מרחק הישר מהראשית הוא $\left|\frac{c}{b}\right| = \frac{|c|}{\sqrt{b^2}}$. ובמקרה ב, $b = 0$ לכן המרחק מהראשית הוא

$\left|\frac{c}{a}\right| = \frac{|c|}{\sqrt{a^2}}$.

<u>תרגיל 5</u>

חשב את מרחק הנקודה $A(7,1)$ מהישר l שמשוואתו $3x + y = 2$.

<u>פתרון</u>



דרך הנקודה A מעבירים אנך לישר הנתון l

משוואתו המפורשת של l היא: $y = -3x + 2$.

לכן שיפוע הישר AB הוא $\frac{1}{3}$.

AB עובר דרך $A(7,1)$, לכן משוואתו היא:

$$y - 1 = \frac{1}{3}(x - 7)$$
$$-x + 3y = -4$$

שיעורי הנקודה B מקבלים על ידי פתרון מערכת המשוואות

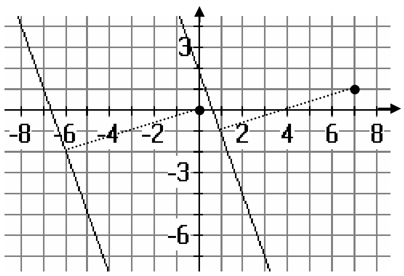
$$\begin{cases} 3x + y = 2 \\ -x + 3y = -4 \end{cases}$$

והם $x = 1, y = -1$.

אורך הקטע AB הוא מרחק הנקודה $A(7,1)$ מהישר הנתון. נחשב אותו:

$$AB = \sqrt{(1-7)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{10}$$
$$AB = 2\sqrt{10}$$

דרך נוספת לפתרון תרגיל זה היא באמצעות חישוב המרחק של ישר $ax + by = c$ מראשית הצירים (ראה תרגיל קודם).
מזיזים את הנקודה הנתונה A לראשית הצירים, ומזיזים את הישר בהתאם. עתה יש למצוא את המרחק של הישר המוזז מראשית הצירים. זו בדיוק הבעיה שפתרנו בתרגיל הקודם ואפשר להשתמש בנוסחה שהתקבלה.



כדי להזיז את הנקודה $A(7,1)$ לראשית הצירים, יש לבצע הזזה אופקית של 7 יחידות שמאלה, והזזה אנכית כלפי מטה ביחידה אחת. מפעילים הזזה זו גם על הישר הנתון $y = -3x + 2$

ומקבלים את המשוואה $y = -3(x + 7) + 2 - 1 = -3x - 20$.

נרשום משוואה זו בצורה $y + 3x = -20$ ונקבל על פי הנוסחה

$\frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ כי מרחק הישר מהראשית הוא $2\sqrt{10} = \frac{20}{\sqrt{10}} = \frac{20}{\sqrt{1+9}}$:.

תרגיל 6

א. הוכח כי המשולש ABC , שקדקודיו הם $A(6,8), B(-4,3), C(2,0)$ הוא ישר זווית.

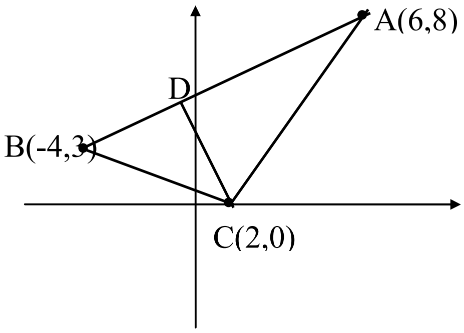
ב. חשב את אורך הגובה ליתר.

הנחיה כללית לפתרון תרגילים

בפתרון תרגילים בגיאומטריה אנליטית מומלץ לסרטט סרטוט מדויק במידת האפשר, על נייר משובץ, או במחשבון גרפי (במערכת צירים קרטזית). סרטוט מדויק בקנה מידה נכון יכול לכוון אותנו לפתרון, ומאפשר לנו לבדוק את התשובות המתקבלות.

פתרון

א. נחשב את שיפוע צלעות המשולש :



שיפוע AB : $\frac{8-3}{6-(-4)} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

שיפוע AC : $\frac{8-0}{6-2} = \frac{8}{4} = 2$

שיפוע BC : $\frac{3-0}{-4-2} = \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2}$

היות ש : $2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$ מקבלים כי $AC \perp BC$. כלומר ABC הוא משולש ישר זווית.

ב. הוכחנו בסעיף א כי $AC \perp BC$, לכן היתר של המשולש הוא AB.

מצאנו כי שיפוע AB הוא $\frac{1}{2}$, לכן השיפוע לגובה ל-AB הוא -2.

הגובה ל-AB עובר דרך הקדקוד $C(2,0)$, לכן משוואתו היא :

$$y - 0 = -2(x-2)$$
$$y = -2x + 4$$

שיפוע היתר AB הוא $\frac{1}{2}$, והוא עובר דרך הנקודה $A(6,8)$ לכן משוואתו היא :

$$y - 8 = \frac{1}{2}(x-6)$$
$$y = \frac{1}{2}x + 5$$

אם הנקודה D היא נקודת החיתוך של AB ו- CD, שיעוריה מקיימים :

$$\frac{1}{2}x + 5 = -2x + 4, \quad x = -\frac{2}{5}$$
$$y = -2 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) + 4, \quad y = 4\frac{4}{5}$$

לכן $D(-0.4,4.8)$.

ואורך הגובה CD: $CD=\sqrt{(-0.4-2)^2+(4.8-0)^2}=\sqrt{5.76+23.04}=5.37$

הערה: אפשר לחשב את אורך הגובה CD על-ידי חישוב מרחק הנקודה C מהישר AB כפי שעשינו בתרגיל הקודם.

נזיז את C לראשית על-ידי הזזה שמאלה ב-2 יחידות. משוואת הישר AB שהיא $y=\frac{1}{2}x+5$ הופכת לאחר ההזזה

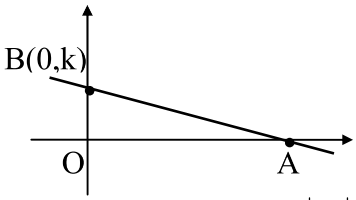
למשוואה $y=\frac{1}{2}(x+2)+5$. נרשום אותה בצורה $y-\frac{1}{2}x=6$, ועל פי נוסחת המרחק $\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ שקיבלנו בתרגיל

קודם נקבל כי אורך CD הוא: $\frac{6}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}}=5.37$.

<u>תרגיל 7</u>

רשום את משוואת משפחת הישרים המקיימים את התנאי: אורך הקטע שמקצה כל ישר על ציר x גדול פי 3 מאורך הקטע שהוא מקצה על ציר y.

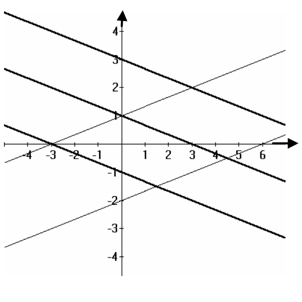
<u>פתרון</u>



נסרטט ישר אחד ממשפחה זו ונסמן את שיעורי הנקודה B על ציר y ב- $(0,k)$.

הישר חותך את ציר x בנקודה A המקיימת על פי תנאי הבעיה $OA=|3k|$.

לכן שיעורי הנקודה A הם: $(\pm 3k,0)$



שיפוע הישר העובר בנקודות A ו- B הוא $\frac{k-0}{0\pm 3k}=\pm\frac{1}{3}$

הוא עובר ב $B(0,k)$, לכן משוואתו היא $y-k=\pm\frac{1}{3}(x-0)$

כלומר $y=\pm\frac{1}{3}x+k$

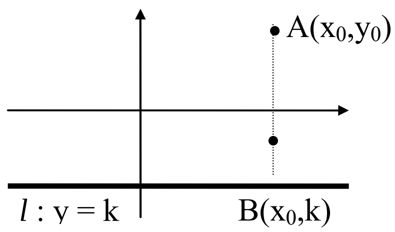
2.3 מרחק נקודה מישר

בסעיף הקודם חישבנו את המרחק של נקודה A מישר l בשלושה שלבים:

1. מציאת משוואת הישר המאונך ל- l ועובר דרך A (בעזרת תנאי הניצבות).
2. חישוב שיעורי נקודת החיתוך של האנך עם הישר הנתון l (על-ידי פתרון מערכת משוואות).
3. חישוב המרחק בין נקודת החיתוך והנקודה הנתונה A (בעזרת נוסחת המרחק).

בסעיף זה נכיר דרך נוספת, קצרה יותר, לחישוב המרחק d בין ישר l לנקודה $A(x_0,y_0)$.

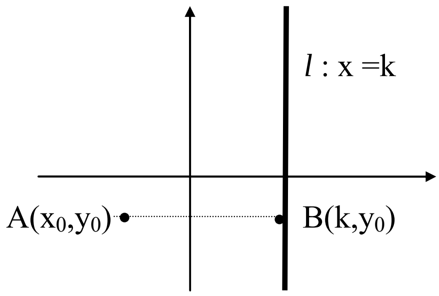
נבחין בין המקרים הבאים:



א. הישר l מקביל לציר x.

משוואת הישר במקרה זה צורתה $y = k$.

נקודת החיתוך של הישר l עם הישר העובר דרך A ומאונך לו היא $B(x_0,k)$, לכן המרחק d בין הישר l לנקודה $A(x_0,y_0)$ הוא $d = |y_0 - k|$.



ב. הישר l מקביל לציר y.

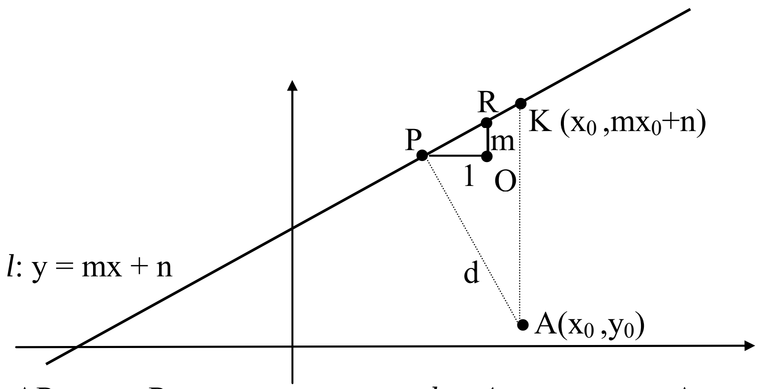
משוואת הישר במקרה זה היא מהצורה $x = k$.

והמרחק בין הישר l לנקודה $A(x_0,y_0)$ הוא $d = |x_0 - k|$ (ראה הסרטוט).

ג. הישר l איננו מקביל לאף אחד מהצירים.

נתונה הנקודה $A(x_0,y_0)$ והישר l שמשוואתו $y = mx + n$.

התבונן בסרטוט שלפניך:



- דרך הנקודה הנתונה A מעבירים אנך לישר l, שחותך אותו בנקודה P. הקטע AP הוא המרחק בין A ו-l. נסמן $AP = d$.
- דרך P מעבירים קטע PQ, שמקביל לציר x ואורכו יחידה אחת: $PQ = 1$.
- דרך Q מעבירים אנך ל-PQ, החותך את הישר l בנקודה R.

נתון כי שיפוע הישר l הוא m, לכן $\frac{RQ}{PQ} = m$. מכאן נובע כי $RQ = m$.

- דרך A מעבירים גם מקביל לציר y, החותך את l בנקודה K. שיעור ה-x של K הוא x_0, כשיעור ה-x של A, ושיעור ה-y שלה שווה ל- $mx_0 + n$ (נמק). לכן אורך הקטע AK שווה ל- $|mx_0 + n - y_0|$.

מכיוון שהמשולש PQR ישר זווית, הרי ש- $PR = \sqrt{PQ^2 + QR^2} = \sqrt{1 + m^2}$.

ΔAPK ו-ΔRPQ דומים כי $\angle PQR = \angle APK$ $(= 90^0)$

(מתאימות בין המקבילים RQ ו-KA) $\angle PRQ = \angle PKA$

לכן $$\frac{PA}{AK} = \frac{QP}{PR}$$

מציבים בפרופורציה את אורכי הקטעים שחישבנו (או סימנו) לעיל, ומקבלים

$$\frac{d}{|mx_0 + n - y_0|} = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$$

מכאן מקבלים כי מרחק הנקודה $A(x_0,y_0)$ מהישר $y = mx + n$ הוא

$$\boxed{d = \frac{|mx_0 + n - y_0|}{\sqrt{1+m^2}}}$$

שים לב, נוסחה זו נכונה גם למקרה שבו הישר מקביל לציר ה- x , כלומר $m = 0$.

אם משוואת הישר נתונה בצורה $Ax + By + C = 0$ ($B \neq 0$) עוברים למשוואת הישר המפורשת

$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{A}$, מציבים $n = -\frac{C}{B}$, $m = -\frac{A}{B}$ בנוסחה ומקבלים

$$d = \frac{\left|-\frac{A}{B}x_0 - \frac{C}{B} - y_0\right|}{\sqrt{1+\frac{A^2}{B^2}}} = \frac{\left|\frac{-Ax_0 - By_0 - C}{B}\right|}{\sqrt{\frac{B^2+A^2}{B^2}}} = \frac{\frac{1}{|B|}|-Ax_0 - By_0 - C|}{\frac{1}{|B|}\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

כלומר, מרחק הנקודה $A(x_0,y_0)$ מהישר $Ax + By + C = 0$ $(B \neq 0)$ הוא

$$\boxed{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}}$$

שים לב, נוסחה זו נכונה גם למקרים שבהם $A = 0$ או $B = 0$ (כלומר, הישר מקביל לאחד מהצירים) ולכן מספיק לזכור נוסחה זו לחישוב המרחק בכל המקרים.

את הנוסחה האחרונה אפשר לקבל גם מתוך התבנית $\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ המתארת את המרחק של ישר $ax + by = c$ מראשית הצירים (קיבלנו תבנית זו בפתרון תרגיל בסעיף 2.2). מזיזים את הנקודה הנתונה (x_0,y_0) לראשית , מבצעים אותה הזזה על הישר, ומחשבים את מרחק הישר המוזז מראשית הצירים על-ידי התבנית $\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, כאשר מציבים בה את הערכים המתאימים למשוואת הישר המוזז.

משוואת הישר לאחר ההזזה היא :

$$A(x + x_0) + B(y + y_0) + C = 0$$
$$Ax + By = -Ax_0 - By_0 - C$$

מרחק ישר זה מהראשית הוא $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ וזה גם המרחק של הישר $Ax + By + C = 0$ מהנקודה (x_0,y_0).

<u>הערה</u>

הנוסחה שלמדנו בסעיף זה נוחה לשימוש אך בחלק מן המקרים (ראה פרק 4) כדאי לכתוב אותה ללא ערך מוחלט במונה. על מנת לעשות זאת אנו חייבים לדעת את סימן הביטוי $Ax_0 + By_0 + C$ בתוך הערך המוחלט.

אם הסימן חיובי, אז הנוסחה למציאת המרחק תירשם $d=\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$ ואם הסימן הנ"ל שלילי, אז $d=-\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

נשים לב, שאם שתי נקודות (x_1,y_1) ו- (x_2,y_2) נמצאות באותו חצי מישור המתקבל על ידי ישר $Ax+By+C=0$, אז הביטויים Ax_1+By_1+C ו- Ax_2+By_2+C הם בעלי אותו סימן.

נבחין בין מקרים הבאים:

1. אם הישר אינו עובר דרך ראשית הצירים, אז נבחר (0,0) כנקודת הדגימה. זאת אומרת שאם (0,0) נמצאת באותו חצי מישור יחד עם (x_0,y_0), אז סימן של Ax_0+By_0+C הוא כמו הסימן של C. אם להיפך,(0,0) לא נמצאת באותו חצי מישור יחד עם (x_0,y_0), אז סימן של Ax_0+By_0+C הוא מנוגד לסימנה של C.
2. במידה וישר $Ax+By+C=0$ עובר דרך ראשית הצירים נשתמש בנקודה (0,1) כנקודת הדגימה. כל השאר כמו שהיה בסעיף 1.

דוגמאות

<u>תרגיל 1</u>

חשב את מרחק הנקודה A(7,1) מהישר 3x + y = 2.

<u>פתרון</u>

נרשום את המשוואה בצורה המפורשת y = -3x + 2 ונציב בנוסחה $d=\frac{|mx_0+n-y_0|}{\sqrt{1+m^2}}$

$$d=\frac{|-3\cdot 7+2-1|}{\sqrt{1+9}}=\frac{20}{\sqrt{10}}=2\sqrt{10}$$

<u>תרגיל 2</u>

חשב את המרחק של הישר ax +by = c , $b\neq 0$ מראשית הצירים.

<u>פתרון</u>

במקרה זה כדאי להעביר את משוואת הישר לצורה ax + by – c = 0 ולהשתמש בנוסחה השנייה. מקבלים $d=\frac{|a\cdot 0+b\cdot 0-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ כפי שקיבלנו בסעיף הקודם.

<u>תרגיל 3</u>

מצא את שתי נקודות על הישר 2y – x = 0 שהמרחק בין כל אחת מהן לבין הישר 4x – 3y + 2 = 0 הוא 2.

<u>פתרון</u>

כיוון שנקודות שייכות לישר 2y – x = 0, אז שיעורים שלהן אפשר לבטא באופן הבא (2t,t). נציב את הנקודה בנוסחת המרחק בין נקודה לישר ונשווה את המרחק ל- 2.

נקבל $2=\frac{|4(2t)-3t+2|}{\sqrt{4^2+3^2}}$. מכאן $|5t+2|=10$ ולכן ייתכנו שתי אפשרויות: 5t + 2 = 10 , t = 1.6 או 5t + 2 = -10 , t = -2.4.

הנקודות המבוקשות הן (3.2,1.6) או (-4.8,-2.4).

תרגיל 4

משולש ABC נמצא כולו ברביע הראשון ושטחו 4.5. משוואת אחת הצלעות היא $2x - 5y + 23 = 0$ ושניים מקדקודיו הם $A(1,5)$ ו- $B(3,4)$. מצא את הקדקוד השלישי.

פתרון

באמצעות ההצבה של שיעורי הנקודות במשוואת הישר הנתון, נקבע האם הנקודות הנתונות הן חלק ממנו. $2 \cdot 1 - 5 \cdot 5 + 23 = 0$ ומכאן A שייכת לישר הנתון. לגבי הנקודה B נקבל פסוק שקר ולכן הנקודוה מחוץ לישר.

המרחק בין נקודה B לישר זהו גובה לצלע AC ועל פי נוסחת המרחק הוא שווה ל-

$$h = \frac{|2 \cdot 3 - 5 \cdot 4 + 23|}{\sqrt{4+25}} = \frac{9}{\sqrt{29}}$$

על פי הנתונים , שטחו של המשולש הוא 4.5 , לכן $\frac{AC \cdot h}{2} = 4.5$, כלומר $AC = \frac{9}{h} = \sqrt{29}$.

עכשיו נמצא את הנקודה C. ברור כי הנקודה C שייכת לישר הנתון מכיון שהנקודה B מחוץ אליו.

זה אומר שניתן להציגה כנקודה כללית של הישר באופן הבא $(x,0.4x+4.6)$. באמצעות נוסחת המרחק בין שתי נקודות $\sqrt{(x-1)^2 + (0.4x + 4.6 - 5)^2} = \sqrt{29}$.

לכן,

$$(x-1)^2 + (0.4x - 0.4)^2 = 29$$
$$(x-1)^2 + 0.16(x-1)^2 = 29$$
$$(x-1)^2 = 25$$

מכאן, $x = 6$ או $x = -4$. נתון כי הנקודה C ברביע הראשון לכן $x = -4$ אינו מתאים.

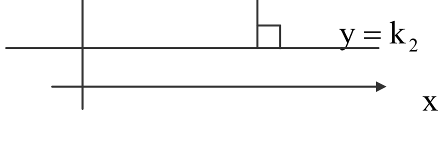
והנקוה C היא $(6,7)$.

2.4 מרחק בין שני ישרים מקבילים

בפרק זה נקבל נוסחה לחישוב המרחק בין שני ישרים נתונים שתהיה נוחה לשימוש לצורך פתרון יעיל של תרגילים.

הגדרה:

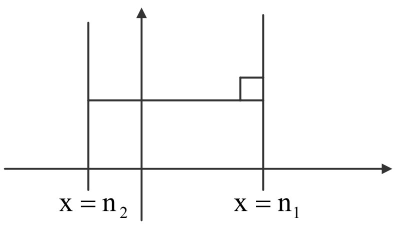
מרחק בין שני ישרים מקבילים הוא אורך הקטע המאונך לשני הישרים ומחבר נקודה על ישר אחד עם הנקודה על הישר השני.



1. אם נתונים שני ישרים מקבילים לציר ה-x שמשוואותיהם : $y = k_1$ ו- $y = k_2$,

אז המרחק ביניהם הוא $d = |k_2 - k_1|$.

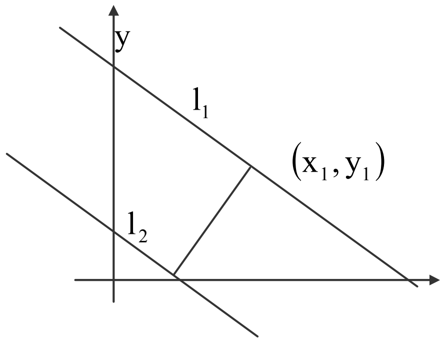
2. אם שני הישרים הנתונים מקבילים לציר ה- y : $x = n_1$ ו- $x = n_2$ אז המרחק ביניהם יהיה שווה ל- $d = |n_2 - n_1|$.



3. אם שני הישרים לא מקבילים לצירים :

$l_1: \ Ax + By + C_1 = 0$ ו- $l_2: \ Ax + By + C_2 = 0$

כאשר $B \neq 0$, נעזר בנוסחת המרחק בין נקודה לישר שלמדנו בפרק 2.3 . ניקח נקודה כלשהי (x_1, y_1) הנמצאת על הישר l_1. שיעורי הנקודה מקיימים את המשוואה של הישר , לכן



$Ax_1 + By_1 + C_1 = 0$ ומכאן $Ax_1 + By_1 = -C_1$.

המרחק בין (x_1, y_1) לבין l_2 הוא המרחק בין הישרים הנתונים שאנחנו מחפשים :

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

נשאר להציב במקום $Ax_1 + By_1$ את $-C_1$ ונקבל את הנוסחה הבאה למציאת המרחק בין שני ישרים מקבילים :

$$\boxed{d = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

דוגמאות

<u>תרגיל 1</u>

שתיים מצלעות הריבוע מונחות על הישרים $3x + 4y + 12 = 0$ ו- $3x + 4y - 6 = 0$.

מצא את שטח הריבוע.

<u>פתרון</u>

המרחק בין שתי הצלעות הוא אורך צלע הריבוע. על פי נוסחת המרחק בין ישרים מקבילים נקבל : $d = \frac{|12 - (-6)|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{18}{5}$. ובכך שטח הריבוע שווה ל- $S = \left(\frac{18}{5}\right)^2 = 12.96$.

<u>תרגיל 2</u>

מצא את משוואת הישר המקביל לשני הישרים המקבילים הבאים : $4x - 5y + 5 = 0$ ו- $4x - 5y + 7 = 0$ ונמצא במרחקים שווים מהם.

<u>פתרון</u>

אם הישר מקביל לשני הישרים המקבילים הנתונים אז הוא מהצורה $4x - 5y + C = 0$. הישר נמצא במרחקים שווים משני הישרים הנ״ל , לכן על פי נוסחת המרחק בין הישרים המקבילים נקבל את המשוואה הבאה :

$$\frac{|C-7|}{\sqrt{4^2+5^2}}=\frac{|C-5|}{\sqrt{4^2+5^2}}$$

מכאן $|C-5|=|C-7|$. למשוואה יש פתרון יחיד והוא $C=6$. לכן המשוואה שחיפשנו היא $4x-5y+6=0$.

<u>תרגיל 3</u>

שני ישרים מקבילים שהמרחק ביניהם הוא $\sqrt{20}$, עוברים דרך נקודות $(3,1)$ ו- $(-3,-1)$. מצא את המשוואות שלהם אם ידוע כי השיפוע שלהם הוא חיובי.

<u>פתרון</u>

לא ייתכן שהישרים מקבילים לציר ה- y מכיוון שאז המרחק היה שווה ל- 6 כפי שראינו בתחילת הפרק. לכן לישרים יש שיפוע. נסמן את השיפוע ב- m ונקבל כי משוואות הישרים הן: $y-1=m(x-3)$ ו- $y+1=m(x+3)$. נרשום את שתי המשוואות שקיבלנו בצורה התקנית בהתאמה:

$mx-y+1-3m=0$ ו- $mx-y+3m-1=0$. בעזרת נוסחת המרחק בין שני ישרים מקבילים נקבל את המשוואה:

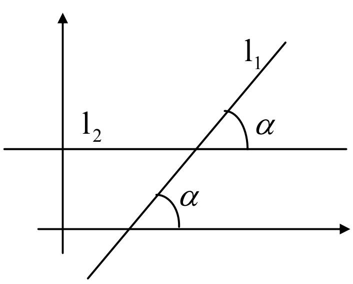
$$\frac{|1-3m-3m+1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{20}$$

או בצורה אחרת $(6m-2)^2=20(m^2+1)$.

לאחר פתיחת הסוגריים וכינוס איברים דומים מגיעים למשוואה הריבועית $2m^2-3m-2=0$, שלה יש שני פתרונות $m_1=2$ ו- $m_2=-\frac{1}{2}$. על פי הנתון השיפוע הוא חיובי לכן המשוואות הישרים הן: $2x-y+5=0$ ו- $2x-y-5=0$.

2.5 זווית בין שני ישרים

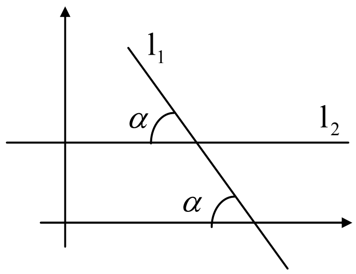
בפרק 2.2 למדנו תנאי ניצבות של שני ישרים . כאן נלמד כיצד לחשב זווית בין שני ישרים כלשהם. באופן כללי הזווית בין שני ישרים מוגדרת כזווית החדה ביניהם.



נתבונן בכמה מקרים.

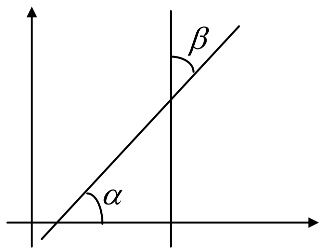
1. <u>אחד מהישרים מקביל לציר ה- x.</u>

אם נתון ישר $l_1: y=mx+n$ ‏($m\neq 0$) וישר $l_2: y=k$,
אז הזווית ביניהם שווה לזווית החדה בין הישר l_1 לבין ציר ה- x (ראה סרטוט).
כזכור, שיפוע הישר m שווה לטנגנס הזווית שהישר



יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה-x. שיפוע הישר יכול להיות חיובי או שלילי (ראה שרטוט) לכן על מנת לקבל את הזווית חדה בין הישרים נחשב את הזווית על ידי: $\tan\alpha = |m|$.

2. <u>אחד הישרים מקביל לציר ה- y</u>.



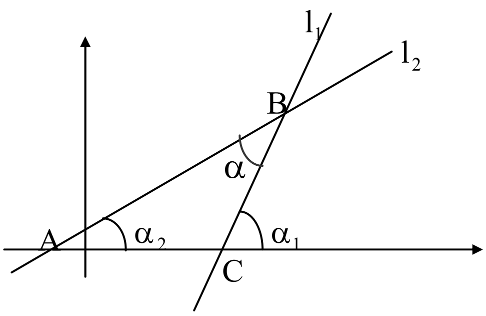
משוואת הישר מקביל לציר ה- y היא $x = a$,

ומשוואת הישר השני היא $y = mx + n$ $(m \neq 0)$.

מחשבים את הזווית ביניהם β באותו אופן כמו בסעיף 1,

כאשר $\beta = 90^\circ - \alpha$, לכן $\cot\beta = \tan\alpha = |m|$.

3. נניח עכשיו כי שני ישרים נחתכים l_1 ו-l_2 הם בעלי שיפועים m_1 ו- m_2 בהתאמה $(m_2 \neq m_1)$.



נסמן ב- α את הזווית בין שני הישרים האלה (ראה שרטוט). הישר l_1 יוצר זווית α_1 עם הכיוון החיובי של ציר ה- x ו הישר l_2 יוצר זווית α_2 עם הכיוון החיובי של ציר ה- x.

הזווית α_1 הינה זווית חיצונית למשולש ABC ולכן היא שווה לסכום של שתי זוויות במשולש שלא צמודות לה: $\alpha_1 = \alpha + \alpha_2$ ומכאן מקבלים כי $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$.

לכן, $\tan\alpha = \tan(\alpha_1 - \alpha_2) = \dfrac{\tan\alpha_1 - \tan\alpha_2}{1 + \tan\alpha_1 \cdot \tan\alpha_2}$.

נציב במשוואה זו $\tan\alpha_1 = m_1$ ו- $\tan\alpha_2 = m_2$

ונקבל:

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}}$$

הערך של $\tan\alpha$ המתקבל מחישוב זה יכול להיות חיובי או שלילי ובהתאם לכך נקבל את שהזווית α היא חדה או קהה. אם רוצים להבטיח שהזווית המתקבלת תהיה חדה (כפי שהגדרנו זווית בין שני ישרים) נחשב הערך המוחלט של הביטוי:

$$\boxed{\tan\alpha = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|}$$

<u>תרגיל 1</u>

חשב את גודל הזווית בין הישרים $2x - 3y + 7 = 0$ ו- $4x - 8y + 9 = 0$.

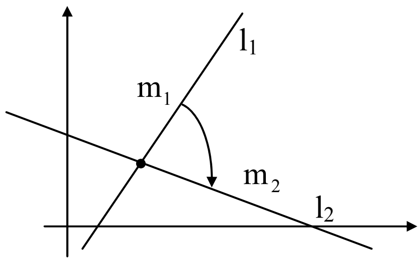
<u>פתרון</u>

השיפועים של הישרים הנתונים הם $\frac{2}{3}$ ו- $\frac{1}{2}$. לכן על פי הנוסחה:

$$\tan\alpha = \left|\frac{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}}\right| = \left|\frac{-\frac{1}{6}}{\frac{8}{6}}\right| = \frac{1}{8}$$

. לכן $\alpha \approx 7.13^\circ$.

4. ישנם מקרים בהם יש צורך למצוא זווית בין שני ישרים, שהיא לא בהכרח הזווית החדה. למשל, זווית קהה במשולש. בסעיף זה נלמד שיטה פשוטה לקביעת הזווית, כאשר נקבל אותה על ידי בחירה מתאימה של סדר השיפועים m_1 ו- m_2 בנוסחה שהתקבלה בסעיף 3. נתבונן בסרטוט:



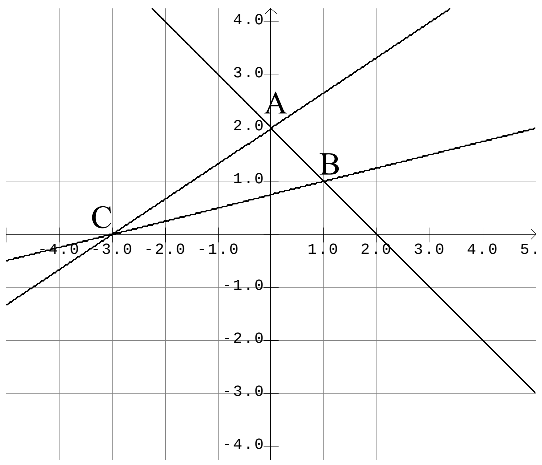
נסמן ב- m_1 את השיפוע של l_1 וב- m_2 את השיפוע של l_2, כאשר הסדר נקבע על פי כיוון סיבוב מחוגי השעון (כפי שמופיע בשרטוט), נחשב על ידי הנוסחה $\tan\alpha = \frac{m_1 - m_2}{1+m_1m_2}$ את גודל הזווית המבוקשת.

דוגמאות

<u>תרגיל 2</u>

מצא את הזוויות במשולש ABC שצלעותיו מונחות על הישרים $y = \frac{2}{3}x + 2$, $y = -x + 2$ ו- $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$.

(ראה סרטוט)



<u>פתרון</u>

נמצא בשלב ראשון את הזווית A. נלך בכיוון השעון ונסמן $m_1 = m_{AB}$ ו- $m_2 = m_{AC}$. לכן

$$\tan(\angle A) = \frac{-1-\frac{2}{3}}{1+(-1)\cdot\frac{2}{3}} = \frac{-\frac{5}{3}}{\frac{1}{3}} = -5$$

ומכאן $\angle A \approx 101.3^\circ$.

באותו אופן נחשב את הזווית C. הפעם $m_1 = m_{AC}$ ו- $m_2 = m_{CB}$ ולכן

$$\tan(\angle C) = \frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{4}}{1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}} = \frac{5}{14}$$

ו- $\angle C \approx 19.7^\circ$.

נשאר למצוא את הזווית B: $\angle B \approx 180^\circ - 101.3^\circ - 19.7^\circ = 59^\circ$.

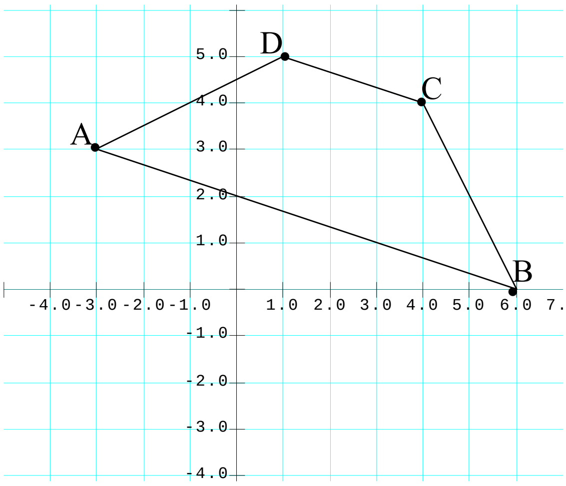
תרגיל 3

בטרפז שווה שוקיים $ABCD$ $(AB||CD)$ נתון:

$C(4,4)$, $B(6,0)$, $A(-3,3)$.

מצא את משוואת הצלע AD.

פתרון



הפתרון שאנחנו מציעים אינו הפתרון היחיד לבעיה. ישנן כמה אפשרויות לקבל את משוואת הצלע AD. כאן נציג דרך אחת.

נמצא קודם את השיפועים של הצלעות AB ו- CB.

$m_{AB}=\frac{0-3}{6-(-3)}=-\frac{1}{3}$, $m_{CB}=\frac{4-0}{4-6}=-2$.

זוויות הבסיס בטרפזשווה שוקיים שוות לכן $\angle CBA=\angle DAB$. נבטא שוויון זה בעזרת השיפועים של הישרים המתאימים.

נסמן ב- m את השיפוע של AD ונשתמש בנוסחת הזווית בין שני ישרים בשיטה שלמדנו בסעיף 4. מתקבלת המשוואה:

$$\frac{m-\left(-\frac{1}{3}\right)}{1+m\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{-\frac{1}{3}-(-2)}{1+(-2)\left(-\frac{1}{3}\right)}$$

פתרון המשוואה נותן

$\frac{m+\frac{1}{3}}{1-\frac{m}{3}}=1$, כלומר $m=\frac{1}{2}$. לכן משוואת הישר עליו מונחת צלע AD היא

$y-3=\frac{1}{2}(x+3)$, ובצורה מפורשת $y=\frac{1}{2}x+4.5$.

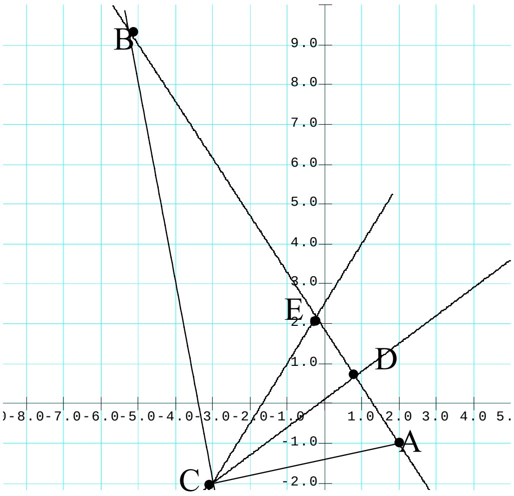
תרגיל 4

במשולש ABC נתונים $A(2,-1)$, משוואת הגובה מהקדקוד C היא $7x-10y+1=0$ ומשוואת חוצה הזווית C היא $3x-2y+5=0$. מצא את המשוואות של צלעות המשולש.

פתרון

נמצא את הקדקוד C, שהוא חיתוך של הישרים הנתונים.

$$\begin{cases}3x-2y+5=0\\7x-10y+1=0\end{cases}$$



פתרון מערכת המשוואות מביא לנקודה (-3,-2).

נחשב את השיפוע של הצלע AC :

$$m_{AC} = \frac{-2-(-1)}{-3-2} = \frac{1}{5}$$

ממשוואת חוצה הזווית C נמצא כי השיפוע

של CE הוא $\frac{3}{2}$. נסמן ב- m את השיפוע

של CB. הזווית בין חוצה הזווית C לבין

שוקיים של הזווית C אינה עולה על 90°, כלומר

אפשר להשתמש בנוסחת הזווית בין שני ישרים

הכוללת ערך מוחלט ולבטא את העובדה ש- CE הוא חוצה זווית:

$$\left|\frac{m-1.5}{1+1.5m}\right| = \left|\frac{1.5-\frac{1}{5}}{1+1.5\cdot\frac{1}{5}}\right|$$

$$\left|\frac{m-1.5}{1+1.5m}\right| = \frac{1.3}{1.3} = 1$$

נשאר לפתור שתי המשוואות שמתקבלות מהמשוואה האחרונה:

$$\frac{m-1.5}{1+1.5m} = -1 \quad \text{או} \quad \frac{m-1.5}{1+1.5m} = 1$$

הפתרונות הם בהתאמה -5 = m ו- 0.2 = m. אבל השיפוע 0.2 הוא שיפועה של הצלע AC, לכן $m_{BC} = -5$. משוואת הצלע BC היא $y + 2 = -5(x + 3)$ או בצורה תקנית $y + 5x + 17 = 0$.

השיפוע של הישר AB מתקבל מתנאי ניצבות של CD ו- AB. $m_{AB} = \frac{-10}{7}$, לכן משוואת הישר AB

היא $y+1 = -\frac{10}{7}(x-2)$, כלומר $10x + 7y - 13 = 0$.

2.6 משוואות חוצה הזויות שבין שני ישרים

בסעיף קודם חיפשנו זווית בין שני ישרים . המטרה של סעיף זה היא למצוא את המשוואות של חוצי הזויות בין שני ישרים נתונים .

חשוב לציין כי קיימים שני חוצי זוויות בין שני ישרים. קל מאוד להוכיח (באופן גיאומטרי) שהם ניצבים זה לזה (הוכיחו זאת!).

אם הישרים הנתונים הם $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ ו- $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ והם אינם מקבילים זה לזה, אזי כל נקודה (x,y) הנמצאת על חוצה הזווית היא במרחקים שווים משוקי הזווית, כלומר:

$$\frac{|A_1x + B_1y + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|A_2x + B_2y + C_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

את המשוואה שקיבלנו אפשר להציג על ידי שתי משוואות הבאות:

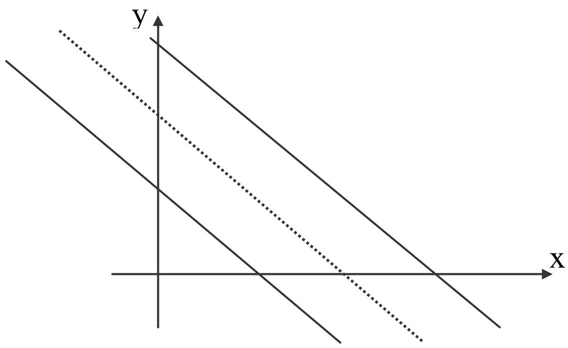
$$(\mathrm{I})\quad \frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^{\,2}+B_2^{\,2}}}=\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^{\,2}+B_1^{\,2}}}\quad \text{או} \quad (\mathrm{II})\quad \frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^{\,2}+B_2^{\,2}}}=-\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^{\,2}+B_1^{\,2}}}$$

כל אחת מהשוואות מייצגת חוצה זווית בין הישרים הנתונים.

אם הישרים מקבילים, אפשר להציגם על ידי שתי המשוואות: $Ax+By+C_1=0$ ו- $Ax+By+C_2=0$. מכאן המשוואה (I) של חוצה הזווית נותנת $C_1=C_2$ וזה אומר שהישרים מתלכדים זה לזה ולכן אין משמעות לחוצה הזווית. המשוואה (II) נותנת $\frac{Ax+By+C_2}{\sqrt{A^2+B^2}}=-\frac{Ax+By+C_1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ ולכן, $Ax+By+C_1=-(Ax+By+C_2)$. מהמשוואה האחרונה מתקבלת המשוואה הבאה:

$$Ax+By+\frac{C_1+C_2}{2}=0$$ והיא משוואת <u>המקביל האמצעי</u> של שני הישרים הנתונים.

<u>הערה</u>: המקביל האמצעי הוא ישר שמקביל לשני ישרים מקבילים ונמצא במרחקים שווים מהם (ראו סרטוט).



<u>תרגיל 1</u>

מצא את המשוואות של חוצי הזוויות בין הישרים: $4x+7y=10$ ו- $8x+y+17=0$.

<u>פתרון</u>

ממשוואות חוצי הזוויות מקבלים:

$$\frac{8x+y+17}{\sqrt{8^2+1^2}}=\frac{4x+7y-10}{\sqrt{4^2+7^2}}\quad \text{או}\quad \frac{8x+y+17}{\sqrt{8^2+1^2}}=-\frac{4x+7y-10}{\sqrt{4^2+7^2}}$$

המשוואה הראשונה נותנת $4x-6y+27=0$ והמשוואה השנייה $12x+8y+7=0$.

<u>תרגיל 2</u>

מצא נקודה על הישר $y=x$, הנמצאת במרחק שווה מהישרים $11x+3y-41=0$ ו- $7x+9y-49=0$.

<u>פתרון</u>

הנקודות הנמצאות במרחקים שווים מהישרים הן על חוצי הזוויות. לכן בשלב הראשון נמצא את המשוואות של חוצי הזוויות:

$$\frac{7x+9y-49}{\sqrt{7^2+9^2}}=\frac{11x+3y-41}{\sqrt{11^2+3^2}}\quad \text{או}\quad \frac{7x+9y-49}{\sqrt{7^2+9^2}}=-\frac{11x+3y-41}{\sqrt{11^2+3^2}}.$$

המשוואה הראשונה לאחר פישוט נותנת $2x - 3y + 4 = 0$, והמשוואה השנייה $9x + 6y - 45 = 0$.
נשאר רק למצוא נקודות החיתוך של חוצי הזוויות עם הישר הנתון. הנקודות מתקבלות מפתרון ל מערכות המשוואות :

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4 = 0 \\ y = x \end{cases} \quad \text{ו-} \quad \begin{cases} 9x + 6y - 45 = 0 \\ y = x \end{cases}$$

והן $(4,4)$ ו- $(3,3)$.

תרגיל 3

נתונים הישרים $9x + 8y + k - 9 = 0$ ו- $12x - y - 21 = 0$. משוואת אחד מחוצי הזוית בין שני הישרים היא $3x + y - 5 = 0$. מצא את k.

פתרון

המשוואות של חוצי הזוויות הן

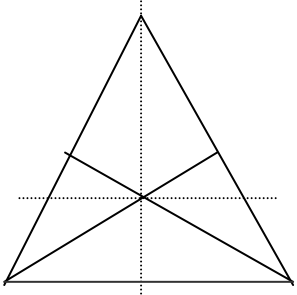
$$\frac{9x+8y+k-9}{\sqrt{145}} = \frac{12x-y-21}{\sqrt{145}} \quad \text{ו-} \quad -\frac{9x+8y+k-9}{\sqrt{145}} = \frac{12x-y-21}{\sqrt{145}}.$$

לאחר פישוט וכינוס איברים דומים נקבל שתי המשוואות הבאות : $21x + 7y + k - 30 = 0$ ו- $3x - 9y = k + 12$. המשוואה השנייה אינה מתאימה לחוצה הזווית מהנתון. נחלק את המשוואה הראשונה ב- 7 ונקבל $3x + y + \frac{k-30}{7} = 0$. מכאן $\frac{k-30}{7} = -5$, כלומר $k = -5$.

תרגיל 4

במשולש שווה שוקיים ABC ($AC = AB$) משוואות התיכונים לשוקיים הן : $y = 3x - 30$, $x + 3y - 20 = 0$.

מצא את שיפוע הבסיס אם נתון כי הוא חיובי.



פתרון

בסיס של משולש שווה שוקיים מקביל לאחד מחוצי הזווית שבין הישרים עליהם מונחים תיכונים לשוקי המשולש, ולכן בעלי אותו שיפוע. נמצא את חוצי הזוויות מהמשוואות שנלמדו קודם ונקבל :

$$\frac{x+3y-20}{\sqrt{10}} = \frac{3x-y-30}{\sqrt{10}} \quad \text{או} \quad -\frac{x+3y-20}{\sqrt{10}} = \frac{3x-y-30}{\sqrt{10}}$$

המשוואה הראשונה היא $2x - 4y = 10$ ולכן לישר יש שיפוע חיובי 0.5. המשוואה השנייה $4x + 2y = 50$ ולישר יש שיפוע שלילי. מהנתון מקבלים כי שיפוע הבסיס הוא 0.5 .

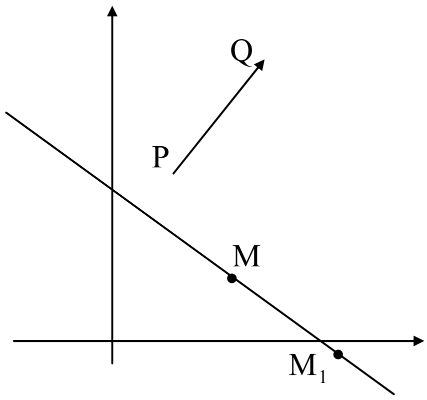
2.7 הגישה הווקטורית לקבלת נוסחאות בגיאומטריה אנליטית

הפרק הזה הוא פרק העשרה ומיועד לתלמידים שכבר למדו מושגים בסיסיים בווקטורים בגישה האלגברית.

בפרקים קודמים הוצגו הוכחות אלגבריות של תכונות הישרים כגון: ניצבות הישרים, מרחק בין נקודה לישר ובין ישרים מקבילים, זוויות בין ישרים וכן הלאה. קיימות שיטות אחרות להוכחת התכונות הנ"ל ואחת מהן היא באמצעות ווקטורים. המטרה כאן היא לא לתת את כל ההוכחות שהיו לפני כן, אלא כמה דוגמאות בלבד.

1. משוואת הישר

בפרקים הקודמים למדנו כי על מנת לקבל משוואת הישר צריך נקודה ושיפוע או שתי נקודות על הישר. בסעיף זה נגדיר ישר באופן שונה.



הישר יהיה מוגדר היטב (באופן יחיד) גם אם תהיה נתונה נקודה עליו $M_1(x_1, y_1)$ והווקטור $\overrightarrow{PQ}$ הניצב לישר (יש ישר אחד בלבד שעובר דרך נקודה נתונה ומאונך לווקטור נתון). הווקטור $\overrightarrow{PQ}$ יכול להיות בעל אורך כלשהו ומתחיל בכל נקודה במישור. נניח כי שיעורי הווקטור $\overrightarrow{PQ}$ הם (A,B) (הצגה אלגברית שלו). ננסה לקבל משוואת הישר מהנתונים שהגדרנו. אם $M(x,y)$ נקודה על הישר, אז הווקטור $\overrightarrow{M_1M}$ ניצב ל- $\overrightarrow{PQ}$ ולכן המכפלה הסקלרית שלהם שווה ל- 0. $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1, y - y_1)$ ומכאן נובע:

$$\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{PQ} = (x - x_1, y - y_1)(A,B) = A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0 .$$

התנאי האחרון מתקיים לכל נקודה $M(x,y)$ על הישר ואינו מתקיים לאף נקודה חיצונית. לכן $A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$ היא משוואת הישר המבוקש. נשאר רק לפתוח סוגריים ולקבל $Ax + By + C = 0$, כאשר $-Ax_1 - By_1 = C$, וזאת בדיוק המשוואה התקנית של הישר.

מהאמור לעיל נובע כי אם נתונה המשוואה התקנית של הישר במישור $Ax + By + C = 0$, אז המקדמים A ו- B מגדירים שיעורי הווקטור (A,B) שניצב לישר.

2. ניצבות ישרים

נתונים שני ישרים בעלי שיפועים m_1 ו- m_2:

$$l_1 : \quad y = m_1 x + n_1$$
$$l_1 : \quad y = m_2 x + n_2$$

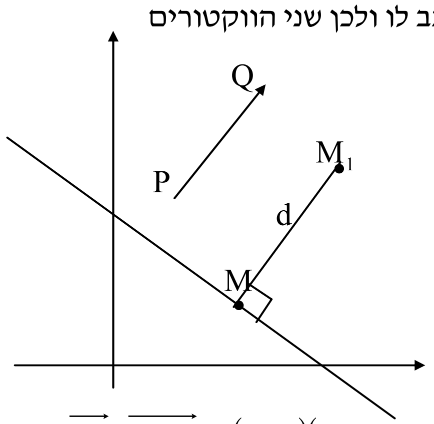
על ידי מעבר להצגה התקנית של הישרים נקבל $m_1x - y + n_1 = 0$ ו- $m_2x - y + n_2 = 0$ ולכן על פי סעיף 1 , הווקטורים הניצבים לישרים הללו הם $(m_1,-1)$ ו-$(m_2,-1)$. אם זווית בין שני הישרים שווה ל- 90° (הישרים מאונכים זה לזה), גם הזווית שבין האנכים שלהם תהיה שווה ל- 90°, כלומר המכפלה הסקלרית שלהם שווה ל- 0.

$$(m_1,-1)(m_2,-1) = 0$$
$$m_1m_2 + 1 = 0$$

זאת אומרת $m_1m_2 = -1$.

3. <u>המרחק בין נקודה לישר</u>.

נתונה נקודה $M_1(x_1, y_1)$ וישר $Ax + By + C = 0$. נסמן ב- $M(x,y)$ את נקודת החיתוך של האנך מ- M_1 אל הישר הנתון. אורך הווקטור $\overrightarrow{MM_1}$ הוא המרחק המבוקש d בין M_1 לישר . על פי סעיף 1 הווקטור $\overrightarrow{PQ} = (A,B)$ ניצב לישר נתון, אך גם ווקטור $\overrightarrow{MM_1}$ ניצב לו ולכן שני הווקטורים קוליניאריים. הזווית ביניהם היא 0° או 180°. במילים אחרות, תיתכן אחת מבין שתי אפשרויות הבאות:



$$(I)\begin{cases} \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{MM_1} = \left|\overrightarrow{PQ}\right|\cdot d\cdot\cos 0^\circ = \left|\overrightarrow{PQ}\right|\cdot d \\ \text{או}\quad \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{MM_1} = \left|\overrightarrow{PQ}\right|\cdot d\cdot\cos 180^\circ = -\left|\overrightarrow{PQ}\right|\cdot d \end{cases}$$

מצד שני, הווקטור $\overrightarrow{MM_1}$ הוא $(x_1 - x \quad, y_1 - y)$

ו- $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{MM_1} = (A,B)(x_1 - x, y_1 - y) = A(x_1 - x) + B(y_1 - y) = Ax_1 + By_1 + (-Ax - By)$

הנקודה M נמצאת על הישר הנתון , ולכן $- Ax - By = C$ ומכאן מקבלים כי $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{MM_1} = Ax_1 + By_1 + C$. בהתאם ל- (I) מקבלים כי

$$\pm d\cdot\left|\overrightarrow{PQ}\right| = Ax_1 + By_1 + C$$

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\left|\overrightarrow{PQ}\right|} = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

תרגילים לפרק 2

2.1 הקו הישר (תרגילי חזרה)

1. אמת או שקר?

א. הנקודה $(3,1)$ נמצאת על הישר $y = -3x + 8$.

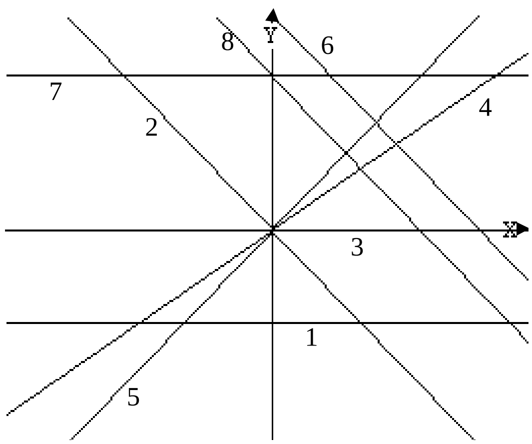
ב. הישר $y = -x + 5$ עובר דרך הנקודה $(-1,4)$.

ג. הישרים $y = -5x + 1$ ו- $y = 5x + 1$ מקבילים זה לזה.

ד. הישר $y = -3$ מקביל לציר ה- x.

ה. הישר $x = -3$ מקביל לציר ה- x.

2. התאם את המשוואות לישרים שבסרטוט.



א. $y = 2x$

ב. $y = 3x$

ג. $y = -3x$

ד. $y = 5$

ה. $y = -3x + 5$

ו. $y = -3x + 7$

ז. $y = -3$

ח. $y = 0$

3. מצא את שיפוע הישר:

א. $y = -0.1x$

ב. $2y + x = 0$

ג. $y – x + 5 = 0$

ד. $3x + 2y = -1$

ה. $x = -5$

ו. $x + 3 = 0$

ז. $y + 5 = 0$

ח. $y – 5 = 3$

ט. $x + y = 0$

4. מצא את שיפוע הישר:

א. $ax + y – b = 0$

ב. $ax + by + 1 = 0$

ג. $m^2x + my + 1 = 0$

ד. $x + py + p = 0$

ה. $x = t(y + 1)$

ו. $x – a^2y = ab$

5. חשב את שיפוע הישר העובר דרך זוג הנקודות

א. $(3,4)$, $(4,6)$

ב. $(3,0)$, $(0,2)$

ג. $(-9,10)$, $(1,8)$

ד. $(-2,7)$, $(-2,-8)$

ה. $(3,7)$, $(-8,7)$

ו. $(2m,m + 1)$, $(m,1)$

6. אמת או שקר?

א. הישר $y = 6x – 9$ עובר דרך הנקודה $(0,-9)$.

ב. הישרים $y = 2x + 3$ ו- $y = 2x – 3$ חותכים את ציר ה- y באותה נקודה.

ג. הישרים $y = 2x + 3$ ו- $y = 2x - 3$ מקבילים.

ד. הישר $y = -9x$ עובר דרך הראשית.

ה. הישרים $y = 3x + 5$ ו- $y = 2x + 6$ נחתכים בנקודה $(1,8)$.

ו. הישרים $y = \frac{1}{2}x$ ו- $y = \frac{1}{2}x + 5$ מקבילים.

ז. הישרים $y = 5x$ ו- $y = -5x$ מקבילים.

ח. הישרים $y = 7$ ו- $y = 5$ מקבילים.

ט. הישרים $y = -1$ ו- $x = 2$ מאונכים זה לזה.

7. מצא את שיפוע הישר העובר דרך זוג הנקודות:

א. $(3,0)$, $(1,-1)$ ב. $(0,-2)$, $(5,0)$ ג. $(2,2)$, $(2,7)$

8. נתונות שלש הנקודות $A(4,-3)$,$B(0,5)$,$C(-5,15)$. חשב את שיפוע הישרים AB ו- BC ,

9. נתונות שלוש הנקודות. מה צריך להיות ערך הפרמטר על מנת ששלושתן תהיינה על ישר אחד?

א. $A(1,-2)$, $B(2,3)$, $C(4,c)$

ב. $A(2,2)$, $B(3,-1)$, $C(0,c)$

ג. $A(a,2)$, $B(-0.5,3.5)$, $C(-3,6)$

ד. $A(1,a)$, $B(2,5)$, $C(0,-3)$

ה. $A(4,0)$, $B(b,-1)$, $C(3,1)$

ו. $A(2,-2)$, $B(-4,b)$, $C(7,-7)$

ז. $A(3,m)$, $B(m,-1)$, $C(4,2)$

10. נתונות הנקודות $A(1,3)$ ו-$B(2,-5)$. בחר נקודה C על הישר AB כך ש-

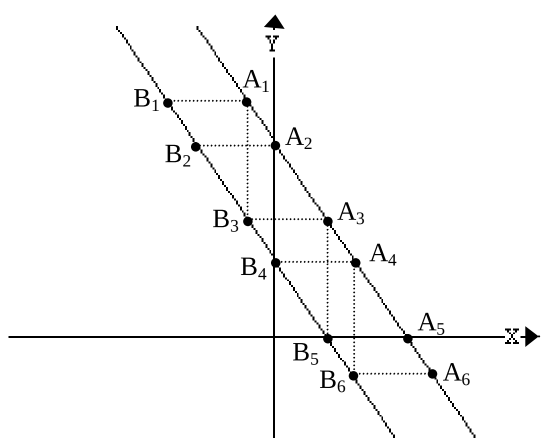
א. C נמצאת בין A ו-B.

ב. C נמצאת מחוץ לקטע AB, מעבר ל-A.

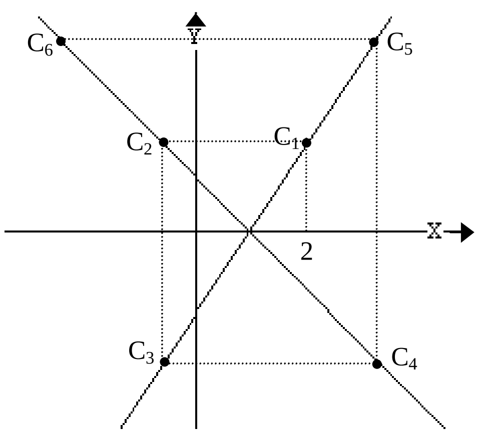
ג. C נמצאת מחוץ לקטע AB, מעבר ל-B.

11. לפניך גרפים של פונקציות נתונות . מצא את שיעורי הנקודות המסומנות.

א. $y = -2x + 2$, $y = -2x + 6$



ב. $y = 3x - 3$, $y = -2x + 2$



12. האם המרובע ABCD הוא מקבילית? אם כן, נמק מדוע. אם לא, שנה את אחד השיעורים של אחת הנקודות, על מנת שתתקבל מקבילית.

א. $A(2,4)\ ,\ B(4,3)\ ,\ C(3,2)\ ,\ D(1,3)$

ב. $A(1,3)\ ,\ B(2,6)\ ,\ C(3,0)\ ,\ D(1,-6)$

13. כל הישרים שלהלן, פרט לאחד, מקבילים ביניהם. מצא ישר זה, ונמק.

א. $y = \frac{2}{3}x - 1$

ב. $y = \frac{2}{3}x + 7$

ג. $2x - 3y = 2$

ד. $6y - 4x - 3 = 0$

ה. $6x + 9y - 1 = 0$

ו. הישר המחבר את הנקודות $(5,-1)$ ו- $(2,-3)$

14. מצא את שיפוע הישר המחבר

א. את ראשית הצירים והנקודה $(-3,4)$.

ב. את ראשית הצירים והנקודה (a,b).

ג. את נקודות $(m,m+1)$ ו- $(m+2,m+3)$.

ד. את הנקודות $(m, \frac{m}{2})$ ו- $\left(1,\frac{1}{2}\right)$

15. רשום את משוואת הישר

א. ששיפועו 3 וחותך את ציר ה-y בנקודה $(0,7)$.

ב. ששיפועו $-\frac{1}{4}$ וחותך את ציר ה-x בנקודה $(-9,0)$.

ג. המקביל לציר ה-x ועובר דרך הנקודה $(0,7)$.

ד. ששיפועו 2 ועובר דרך ראשית הצירים .

ה. המקביל לציר ה-y ועובר דרך הנקודה $(-1,4)$.

ו. העובר דרך הנקודה $(-3,-2)$, ויוצר זווית של 45^{o} עם הכוון החיובי של ציר ה-x.

ז. העובר דרך הנקודה $(2,-5)$, ויוצר זווית של 135^{o} עם הכוון החיובי של ציר ה-x.

16. מצא את משוואת הישר

א. העובר דרך הנקודה $(2,-5)$ ומקביל לישר $y = 3x + 5$.

ב. העובר דרך הנקודה $(3,9)$ ומקביל לישר $x = -2$.

ג. העובר דרך הנקודה $(3,-2)$ ומקביל לישר $y = 0$.

17. מצא את משוואת הישר העובר דרך זוג הנקודות:

א. $(2,5)\ ,\ (6,2)$

ב. $(-2,-4)\ ,\ (3,1)$

ג. $(3,-1)\ ,\ (3,2)$

ד. $(6,a)\ ,\ (5,b)$

ה. $(-3,0)\ ,\ (0,0)$

ו. $(-3,-4)\ ,\ (m,m)$

18. בחר ישר אחד שעובר דרך $A(1,3)$ וישר שני דרך $B(2,-5)$, אם נתון:

א. הישרים מקבילים.

ב. הישרים ניצבים זה לזה.

ג. הישרים נחתכים בנקודה על ציר ה-x.

ד. הישרים נחתכים ברביע השלישי.

19. א. רשום משוואות של שלושה ישרים שעוברים דרך הראשית.
ב. רשום את המשוואה הפרמטרית של הישרים בעלי שיפוע שעוברים דרך הראשית.
ג. רשום משוואה פרמטרית של הישרים שעוברים דרך הראשית.
ד. כתוב משוואות של שלושה ישרים שעוברים דרך הנקודה (0,-5).
ה. כתוב את המשוואה הפרמטרית של הישרים בעלי שיפוע שעוברים דרך הנקודה (0,-5).
ו. כתוב משוואה פרמטרית של הישרים שעוברים דרך הנקודה (0,-5).
ז. מהי משוואת הישר העובר דרך הנקודה (m,m) ושיפועו p?

20. ישר מחבר את הנקודות (3,4) ו- (18,19). מצא את נקודות החיתוך שלו עם הצירים.

21. נתונות הנקודות $A(1,5)$, $B(3,6)$, $C(6,3)$.
א. מצא את שיעורי הנקודה D כך שהמרובע ABCD יהיה מקבילית (סרטט!) .
ב. מצא את משוואות צלעות המקבילית שקיבלת.
ג. מצא את משוואות האלכסונים AC ו- BD.

22. נתון הישר $2x + y = 0$.
רשום את משוואותיהם של הישרים המקבילים לו ועוברים דרך הנקודות הנתונות:
א. (-3,-1) ב. (-3,6) ג. (a,b)

23. חשב את שיפוע הישר (אם יש לו), ואת נקודת החיתוך שלו עם ציר ה-y (אם היא קיימת):

א. $x + 2y = 7 - 3y$	ד. $3x - 2y = 0$	ז. $0\cdot x + 6y = 9$
ב. $x + y - 2 = 0$	ה. $3x + 4y + 8 = x - y + 9$	ח. $3x + 4y = 18 - 2y$
ג. $0\cdot x - 3y - 9 = 0$	ו. $x + 2y = y - x + 7$	ט. $3x + 0\cdot y = 2$

24. נתון הישר $2x - 3y = 6$. מצא את המרחק בין נקודות החיתוך של הישר עם הצירים.

25. חשב את המרחק של הנקודה (-1,3) מנקודת החיתוך של הישר $3x + 4y = 9$ עם ציר ה-x .

26. חשב את המרחק של הנקודה (4,3) מנקודת החיתוך של הישר $3x + 4y = 16$ עם ציר ה-y .

27. מצא על הישר $4x - 3y = 5$ נקודות שמרחקיהן מציר ה-x הוא 3 .

28. מצא על הישר $y = 2x - 4$ נקודה שמרחקה מהנקודה (-1,4) שווה למרחקה מהנקודה (-2,2)

29. על הישר $2x - 3y + 3 = 0$ מצא נקודה שמרחקה מהנקודה (1,4) שווה למרחקה מהנקודה (2,1).

30. על הישר $2x - y - 1 = 0$ מצא נקודה שמרחקה מהנקודות (1,1) ו-(4,2).

31. מצא לאילו ערכים של m המשוואה הבאה מייצגת ישרים
א. מקבילים לציר ה-x ב. מקבילים לציר ה-y.

1. $(k^2 - 1)x + (k^2 - 6k - 7) = 4$ 2. $(k^2 - 81)x + (k^2 - 10k + 9) = 7$

תשובות לפרק 2.1

1. אמת: ד 2. א. -4; ב. -5 ; ג. -2 ; ד. -7 ; ה. -8 ; ו. -6 ; ז. -1 ; ח. -3

3. א. -0.1 ; ב. -0.5 ; ג. 1 ; ד. -1.5 ; ה. אין ; ו. אין ; ז. 0 ; ח. 0 ; ט. -1

4. א. $-a$; ב. $-\frac{a}{b}$; ג. $-m$; ד. $-\frac{1}{p}$; ה. $\frac{1}{t}$; ו. $\frac{1}{a^2}$

5. א. 2 ; ב. $-\frac{2}{3}$; ג. -0.2 ; ד. אין ; ה. 0 ; ו. 1   6. אמת: א, ג, ד, ה, ו, ח, ט

7. א. $\frac{1}{2}$; ב. $\frac{2}{5}$; ג. אין   8. -2, שלוש הנקודות על ישר אחד

9. א. 13 ; ב. 8 ; ג. 1 ; ד. 1 ; ה. 5 ; ו. 4 ; ז. 5 או 1

11. א. $A_1(-1,8)$, $B_1(-3,8)$, $A_2(0,6)$, $B_2(-2,6)$, $A_3(1,4)$, $B_3(-1,4)$, $A_4(2,2)$, $B_4(0,2)$
$A_5(3,0)$, $B_5(1,0)$, $A_6(4,-2)$, $B_6(2,-2)$
ב. $C_1(2,3)$, $C_2(-0.5,3)$, $C_3(-0.5,-4.5)$, $C_4(3.25,-4.5)$, $C_5(3.25,6.75)$, $C_6(-2.375,6.75)$

12. א. כן ; ב. לא 13. ה 14. א. $-\frac{4}{3}$; ב. $\frac{b}{a}$; ג. 1 ; ד. $\frac{1}{2}$

15. א. $y = 3x + 7$; ב. $x + 4y + 9 = 0$; ג. $y = 7$; ד. $y = 2x$; ה. $x = -1$; ו. $y = x + 1$;
ז. $x + y + 3 = 0$

16. א. $y = 3x - 11$; ב. $x = 3$; ג. $y = -2$

17. א. $3x + 4y = 26$; ב. $y = x - 2$; ג. $x = 3$; ד. $y = (a - b)x - 5a + 6b$; ה. $y = 0$;
ו. $(m + 4)x - (m + 3)y = m$

19. ב. $y = ax$; ג. $ax + by = 0$; ה. $y = ax - 5$; ו. $mx - y = 5$; ז. $y = px - m(p - 1)$

20. $(0,1)$, $(-1,0)$

21. א. $(4,2)$; ב. $AB: x - 2y + 9 = 0$, $BC: x + y = 9$, $CD: x - 2y = 0$, $DA: x + y = 6$
ג. $BD: 4x + y = 18$, $AC: 2x + 5y = 27$

22. א. $y = -2x - 7$; ב. $y = -2x$; ג. $y = -2x + 2a + b$

23. א. $m = -0.2$, $n = 1.4$; ב. $m = -1$, $n = 2$; ג. $m = 0$, $n = -3$; ד. $m = 1.5$, $n = 0$;
ה. $m = -0.4$, $n = 0.2$; ו. $m = -2$, $n = 7$; ז. $m = 0$, $n = 1.5$; ח. $m = -0.5$, $n = 3$; ט. אין

24. $\sqrt{13}$ 25. 5 26. $\sqrt{17}$ 27. $(3.5,3)$ או $(-1,-3)$ 28. $(2.5,1)$ 29. $(3,3)$ 30. $(2,3)$

31. 1. א. ± 1, ב. אין 2. א. -9 , ב. 1

2.2 תנאי ניצבות

1. האם זוגות הישרים הבאים מאונכים זה לזה? נמק!

א. $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -\frac{1}{2}x + 1 \end{cases}$ ג. $\begin{cases} 2x - 4y = 5 \\ 6x + 3y = 4 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} y = -3x + 2 \\ y = 3x - \frac{1}{2} \end{cases}$ ד. $\begin{cases} -2x + y = 1 \\ -2x - y = 2 \end{cases}$

2. מצא את המשוואה של ישר העובר דרך הנקודה (3,1) ומאונך לישר $y = -0.4x + 3$.

3. א. הישרים $y = 2m + 5$ ו- $x - 5y = 3$ מאונכים זה לזה. מצא את m.

ב. נתונים הישרים $y = (1 - 2m)x + 2m$ ו- $y - mx = 1$. בשביל אילו ערכים של הפרמטר m הישרים מאונכים זה לזה?

4. התאם לכל אחד מהישרים הבאים את הישרים שמאונכים לו :

א. $y = 2x - 3$

ב. $y = 3x + 4$

ג. $y = -2x - 1$

ד. $y = x - \frac{2}{3}$

ה. $y = -x + 4$

ו. $x + 1\frac{1}{3}y = -1$

ז. $\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y =$

ח. $2x + 4y = 6$

ט. $x - y = 3$

י. $3x - y = 5$

5. איזה מרובע מבין המרובעים שקדקודיהם נתונים להלן הוא מלבן?

א. A(-3,5), B(-3,-3), C(7,-3), D(7,5)

ב. A(-3,5), B(-3, 3), C(5,7), D(7,7)

ג. A(3,4), B(-2,2), C(3,6), D(7,-4)

ד. A(6,3), B(0,1), C(2,-5), D(8,-3)

ה. A(4,2), B(3,4), C(-1,2), D(1,-2)

6. בחרו ארבע נקודות שישמשו כקדקודים של מלבן, אם ידוע כי :

א. אחת מהן היא הראשית, ואחת מצלעות המלבן נמצאת על הישר $y = x$.

ב. שניים מהקדקודים נמצאים ברביע השני, ואלכסוני המלבן נחתכים בראשית הצירים.

ג. אחת הנקודות על ציר ה-x, ושניה על ציר ה-y.

ד. אחד הקדקודים על הישר $y = 3x$, ושני על הישר $y = -3x$.

7. מצא את המשוואה של ישר העובר דרך הנקודה (-2,5) ומאונך לישר $y = 3x - 4$.

8. מצא את המשוואה של ישר העובר דרך הנקודה (5,-3) ומאונך לישר $5x - y + 1 = 0$.

9. מהי משוואת הישר העובר דרך הנקודה (1,-2) ומאונך לישר המחבר את הנקודות (2,-3) ו- (1,-4).

10. הצג את משפחת הישרים המאונכים לישר $y = 2x - 7$ על ידי משוואה פרמטרית.

11. מבין המשולשים שקדקודיהם נתונים להלן, איזה משולש הוא ישר זווית? לכל אחד מהמשולשים ישרי הזווית רשום את קדקוד הזווית הישרה.

א. C(2,2) B(0,6) A(-2,0)

ב. C(-2,-3) B(-1,3) A(7,6)

ג. C(-7,4) B(-1,2) A(-9,-2)

ד. C(1,1) B(2,-3) A(10,-1)

ה. C(12,5) B(5,6) A(4,0)

שניים מקדקודיו של משולש ישר זווית הם : $A(2,3)$, $B(10,9)$. ערך ה-y של הקדקוד C הוא 1.
מצא את ערך ה-x של הקדקוד C בכל אחד מהמקרים הבאים :

א. קדקוד הזווית הישרה הוא A.

ב. קדקוד הזווית הישרה הוא B.

ג. קדקוד הזווית הישרה הוא C.

13. שניים מקדקודיו של משולש ישר זווית הם : $A(2,10)$, $B(8,7)$. ערך ה-x של הקדקוד C הוא -1. מצא את ערך ה-y של הקדקוד C במקרים הבאים :

א. קדקוד הזווית הישרה הוא A.

ב. קדקוד הזווית הישרה הוא B.

ג. קדקוד הזווית הישרה הוא C.

14. בחרו את הקדקודים של משולש ישר זווית כאשר

א. קדקוד הזווית הישרה נמצא על ציר ה-x.

ב. קדקוד אחת הזוויות החדות נמצא על ציר ה-y.

ג. אחד מניצבי המשולש מקביל לאחד הצירים, ואחד הקדקודים מונח על הישר $y = 2x + 1$, ברביע הראשון.

ד. אחד הקדקודים מונח על הישר $y = 2x + 1$ ברביע השלישי, והצלעות אינן מקבילות לצירים.

15. א. נתונות הנקודות $A(6,3)$ ו-$B(-1,-2)$. מצא נקודה C על ציר ה-y כך שהזווית ACB תהיה ישרה. כמה פתרונות לשאלה?

ב. נתונות הנקודות $A(-1,3)$ ו-$B(10,8)$. מצא נקודה C על ציר ה-x כך שהזווית ACB תהיה ישרה.

16. צלעות משולש נמצאות על הישרים $l_1: y = 3x - 4$, $l_2: y= -0.3x + 1$, $l_3: y = - 1/3\ x$.
האם המשולש ישר זווית? אם כן ציין בין איזה שני ישרים נמצאת הזווית הישרה.

17. צלעות משולש נמצאות על הישרים $l_1: 4x - y = 10$, $l_2: x - 4y = 11$, $l_3: 3x + 2y = 12$.
האם המשולש ישר זווית? אם כן ציין בין איזה שני ישרים נמצאת הזווית הישרה.

18. קדקודי המשולש ABC הם : $A(-1,5)$, $B(3,-7)$, $C(-3,4)$.

א. כתוב את משוואות שלושת הגבהים של המשולש.

ב. מצא את נקודת המפגש של הגבהים.

19. מצא את נקודת המפגש של הגבהים במשולש שקדקודיו הם $(6,5)$, $(5,-2)$, $(-3,2)$.

20. נתון משולש שקדקודיו הם $A(a,0)$, $B(b,c)$, $C(0,0)$. מצא את משוואת הגובה לצלע BC.

21. שלושה מקדקודי המלבן ABCD הם : $A(8,4)$,$B(4,3)$,$C(6,-5)$. מצא את הקדקוד הרביעי.

22. שני קדקודים של המלבן ABCD נמצאים בנקודות: $B(0,2)$, $A(-1,1)$. משוואת אחד האלכסונים היא: $y = -2x + 2$. מצא את שאר קדקודי המלבן.

23. שני קדקודים נגדיים של המלבן ABCD נמצאים בנקודות: $A(1,1)$, $C(-2,-3)$. המשוואה של אחת מצלעות המלבן היא: $2y - x + 4 = 0$. מצא את שאר קדקודי המלבן.

24. שלושה קדקודים של הריבוע ABCD הם: $C(5,-1)$, $B(4,3)$, $A(8,4)$. מהי משוואת אלכסון BD?

25. הנקודה A מונחת על הישר $2x - 3y = 6$. האנך מ-A לציר ה-x יוצר, עם הישר ועם ציר ה-x, משולש ישר זווית ששטחו 3. מצא את שיעורי A.

26. ABC הוא משולש ישר זווית ושווה שוקיים. C הוא קדקוד הזווית הישרה, ושיעורי קצות הבסיס הם $(2,-2)$ ו-$(14,-6)$. מצא את שיעורי הקדקוד C.

27. במקבילית נתונה ABCD, משוואות הגבהים היוצאים מהקדקוד A הן $y = 2x + 1$ ו-$y = -x - 5$. שיעורי הקדקוד C הם $(4,6)$. מצא את שאר הקדקודים.

28. האנכים האמצעיים לצלעות AC ו-BC של המשולש ABC מונחים על הישרים $2x + y = 7$ ו-$3x - 2y = 0$. משוואת הצלע AB היא $3y - x = 3$. מהי משוואת האנך האמצעי לצלע AB?

29. משוואות הגבהים לצלעות AB ו-AC של המשולש ABC הן $y = x - 4$ ו-$x = 2$, ושיעורי הקדקוד A הם $(3,1)$.

א. מהי משוואת הגובה לצלע BC?

ב. מצא את שיעורי הקדקודים B ו-C.

30. משוואות שתי צלעות במשולש הן $y + 4x = 11$ ו- $2y = x - 5$. מפגש הגבהים הוא בנקודה $(4,1)$. מצא את הקדקודים של המשולש.

31. שני הקדקודים במשולש הם $(4,0)$, $(-4,-4)$. משוואות הגבהים היוצאים מהם $7y = x - 4$, $3x - y + 8 = 0$.מצא את הקדקוד השלישי.

32. בטרפז ABCD ($AB \perp AD$) נתון: $A(3,8)$, $B(-1,5)$, $C(-2,-2)$. מצא את הקדקוד הרביעי.

33. משוואת אחת מצלעות ריבוע היא $x - 2y - 1 = 0$ ואחד מקדקודיו הוא בנקודה $(0,2)$. מצא את שאר הקדקודים (יש שני מקרים).

תשובות לפרק 2.2

1. א. כן ; ב. לא ; ג. כן ; ד. לא 2. $y=2.5x - 6.5$ 3. א. -2.5 ; ב. 1 או -0.5

4. (א , ח) , (ב , ו) , (י , ו) , (ג, ז) , (ד , ה) , (ט , ה) . 5. א, ד 7. $x + 3y = 13$

8. $x + 5y = -10$ 9. $y = - x - 1$ 10. $x + 2y = n$ 11. א. C ; ג. C ; ד. B

12. א. 3.5 ; ב. 16 ; ג. 6 13. א. 4 ; ב. -11 ; ג. לא יתכן 15. $(0,-3)$, $(0,4)$; ב. $(2,0)$, $(7,0)$

16. l_1, l_3 17. לא 18. א. $x - 3y + 15 = 0$, $2x + y + 1 = 0$, $x - 11y + 61 = 0$; ב. $\left(-\frac{18}{7}, \frac{29}{7}\right)$

19. (-4,1) 20. bx + cy = ab 21. (10,-4) 22. C(2,-2) , D(3,-1) 23. (2,-1) , (-3,-1)

24. 3x + 5y = 27 25. (6,2) או (0,-2) 26. (10,2) או (6,-10) 27. (6,5) , (-4,-2) , (-2,-3)

28. y = -3x + 9 29. א. y = 3x – 8 ; ב. (5,1) , (2,2) 30. (3,-1) , (1,7) , (10,2.5)

31. (-5,3) 32. (6,4) 33. (3,1) , (1,0) , (2,3) או (-2,1) , (-1,-1) , (1,0)

2.3 מרחק נקודה מישר

1. בכל אחד מהסעיפים שלהלן נתונים נקודה P וישר l. חשב את מרחק ביניהם:

א. l: y = 3 , P(3,-4)

ב. l: x + 5 = 0 , P(-2,0)

ג. l: x + 2y = 6 , P(1,0)

ד. l: y = 2x + 5 , P(4,3)

ה. l: x + 3y = 9 , P(2,-1)

ו. l: 3x + 4y = 1 , P(2,5)

2. חשב את שטח המשולש שקדקודיו הם:

א. A(-2,5) , B(5,1) , C(-1,-2)

ב. A(-1,3) , B(-6,-2) , C(1,-3)

3. נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD. בדוק איזה סוג מרובע הוא וחשב את שטחו.

א. A(-2,-3) , B(-4,3) , C(2,5) , D(4,-1).

ב. A(-4,4) , B(4,6) , C(1,1) , D(-7,-1).

ג. A(-2,9) , B(5,2) , C(0,-3) , D(-7,4).

4. בחר לפי התנאים הבאים:

א. שני שיעוריה שווים, ומרחקה מציר ה-x שווה ל-2.

ב. נמצאת על הישר y = x, ומרחקה מהישר y = 3 שווה ל-10.

ג. שיעוריה מספרים נגדיים, ומרחקה מהישר x + 2 = 3 שווה ל-3.

ד. נמצאת על הישר y = 1 - x, ומרחקה מהישר y = -5 שווה ל-2.

5. הבסיס של משולש שווה-שוקיים נמצא על ישר נתון l, ואורכו 4 יחידות אורך. שטח המשולש הוא 10 יחידות שטח. ענה על הסעיפים שלהלן כאשר:

(1) l: y = 2 (2) l: x = -1 (3) l: x + y = 0

א. כמה משולשים כאלה יש? נמק את תשובתך ומצא היכן נמצאים קדקודי הראש שלהם.

ב. אם נקבע את אחד מקדקודי הבסיס, מהו מספר המשולשים המתאימים לתנאים?

6. AC הוא האלכסון הראשי של הדלתון ABCD, ששטחו 16 יחידות שטח. היכן נמצאים הקדקודים B ו-D, כאשר נתון:

א. A(1,0) , C(9,0) ב. A(0,-3) , C(0,1) ג. A(4,0) , C(0,3)

7. שטח המשולש ABC שווה ל-2.5 יחידות שטח. נתון: $A(1,-2)$, $B(2,1)$. היכן נמצא הקדקוד C?

8. נתון הישר $y = x + 1$.

א. מצא על ציר ה-y נקודה שמרחקה מהישר הנתון שווה ל- $4\sqrt{2}$.

ב. מצא על ציר ה-x נקודה שמרחקה מהישר הנתון שווה ל- $2\sqrt{2}$.

ג. מצא על ציר הישר $y = 4$ נקודה שמרחקה מהישר הנתון שווה ל- $\sqrt{0.5}$.

9. נתון הישר $3x + 4y = 1$. מצא נקודה שמרחקה מהישר שווה ל-5 יחידות , ונמצאת

א. על ציר y.

ב. על ציר x.

ג. על הישר $y = 6$.

ד. על הישר $x + y = 2$.

10. מצא נקודה על הישר $y + x + 2 = 0$ שמרחקה מהישר $y = -3x + 10$ הוא $\sqrt{40}$.

11. נתון הישר $3x + 4y = 1$. בחר נקודה שמרחקה מהישר שווה ל-5 יחידות, ונמצאת

א. ברביע הראשון. ב. ברביע השני. ג. ד. ברביע הרביעי.

12. בחר שלושה ישרים שמרחק כל אחד מהם מהראשית שווה ל-10 יחידות.

13. מצא את משוואת הישר העובר בנקודה $(1,1)$ אם נתון כי מרחקו מראשית הצירים שווה ל- $\sqrt{5}$.

14. מצא את משוואת הישר העובר בנקודה $(2,2)$ ומרחקו מהנקודה $(1,-1)$ הוא $2\sqrt{2}$.

15. מצא את משוואתו של הישר המקביל לישר $y = 3x + 18$ ונמצא במרחק $\sqrt{10}$ מהנקודה $(5,4)$.

16. מצא את משוואת הישר המקביל לישר $3x + 4y + 50 = 0$ ומרחקו מהנקודה $(9,4)$ הוא 7.

17. מצא את משוואת הישר המאונך לישר $x + 3y = 13$ ומרחקו מהנקודה $(5,4)$ הוא $\sqrt{10}$.

18. אלכסונו של ריבוע מונח על הישר $3x + 2y = -3$. אחד מקדקודי הריבוע נמצא בנקודה $(5,4)$.

חשב את שטח הריבוע.

19. אחת מצלעות של מלבן נמצאת על הישר $x – 2y + 6 = 0$. הנקודות $(1,1)$ ו- $(7,4)$ הן קדקודי

המלבן. מצא את שטחו של המלבן.

20. משוואת הישר עליו מונח בסיס של משולש שווה שוקיים היא $y = 0.75x – 1.25$. קדקוד הראש

של המשולש הוא $(6,-3)$. בסיסו של המשולש שווה באורכו לגובהו לבסיס. מצא את הישרים

עליהם מונחות שוקי המשולש.

21. נתונים שני קדקודים של משולש (5,0) ו- (2,4). הקדקוד השלישי נמצא ברביע הראשון על הישר $y - 2x + 20 = 0$. שטחו של המשולש הוא 25. מצא את הקדקוד הנוסף של המשולש.

22. הישר $ax - 3y + 9 = 0$ נמצא במרחק 3 מהנקודה (0,8). מצא את a.

23. מצא נקודה על הישר $x + y + 5 = 0$, הנמצאת במרחקים שווים מהישרים $x - 12y - 44 = 0$ ו- $9x - 8y + 4 = 0$.

24. קצוות של היתר במשולש ישר זווית הם (2,2) ו- (7,-3). מצא את קדקוד של הזווית הישרה אם נתון כי היא נמצאת מתחת ליתר ושטחו של המשולש הוא 10.

25. משוואת אחת מצלעות ריבוע היא $3y = 12-x$ ונקודת החיתוך של האלכסונים היא (0,2). מצא את משוואות שאר הצלעות של הריבוע.

26. שני קדקודי בסיס במשולש שווה שוקיים נמצאים בנקודות (-2,6) ו- (10,2). שטח המשולש הוא 20. מצא את הקדקוד השלישי של המשולש.

27. מצא נקודה שמרחקה מכל אחד מהישרים הנתונים $4y - 3x + 1 = 0$ ו- $3x + 4y - 1 = 0$ הוא 0.2.

תשובות לפרק 2.3

1. א. 7 ; ב. 3 ; ג. $\sqrt{5}$; ד. $2\sqrt{5}$; ה. $\sqrt{10}$; ו. 5 2. א. 22.5 ; ב. 20
3. א. ריבוע , 40 ; ב. מקבילית, 34 ; ג. 70
4. א. (-2,-2) או (2,2) ; ב. (-7,-7) או (13,13) ; ג. (1,-1) או (-5,5) ; ד. (8,-7) או (4,-3)
5. א. על הישר (1) $y = 7$ או $y = -3$; (2) $x = -6$ או $x = 4$; (3) $y = -x \pm 5\sqrt{2}$; ב. ארבעה
6. א. על הישרים $y = \pm 2$; ב. על הישרים $x = \pm 4$; ג. על הישרים $3x + 4y = 12 \pm 16$
7. על הישרים $y = 3x$ או $y = 3x - 10$
8. א. (0,9) או (0,-7) ; ב. (-5,0) או (3,0) ; ג. (4,4) או (2,4)
9. א. (0,-6) , (0,6.5) ; ב. 8) , (-8,0) $\frac{2}{3}$,0) ; ג. (-16,6) , (2/3,6) ; ד. (-18,20) , (32,-30)
10. (16,-18) , (-4,2) 13. $y = 2x - 5$, $y = -x + 2$ 14. $y + x = 4$, $7y - x = 12$
15. $y = 3x - 1$, $y = 3x - 21$ 16. $3x + 4y - 8 = 0$, $3x + 4y - 78 = 0$
17. $y = 3x - 1$, $y = 3x - 21$ 18. 104 19. 15 20. $2y + x = 0$, $2y + 11x = 60$

21. $(13,6)$ 22. ± 4 23. $(-2,-3)$, $(-7,2)$ 24. $(1,-1)$, $(4,-4)$

25. $x + 3y = 0$, $3x - y + 8 = 0$, $3x - y - 4 = 0$ 26. $(5,7)$, $(3,1)$

27. $\left(\frac{2}{3},0\right)$, $\left(\frac{1}{3},\pm\frac{1}{4}\right)$, $(0,0)$.

2.4 מרחק בין ישרים מקבילים

1. מצא את המרחק בין זוגות ישרים מקבילים:

א. $x + 7y - 8 = 0$ ו- $x + 7y - 4 = 0$

ב. $3x + 4y - 1 = 0$ ו- $6x + 8y + 18 = 0$

ג. $x - \sqrt{3}y + 4 = 0$ ו- $x - \sqrt{3}y = 12$

2. נתון ישר שמשוואתו היא $2x + 6y - 5 = 0$. מצא את משוואות הישרים המקבילים לישר הנתון ונמצאים במרחק $\sqrt{10}$ ממנו.

3. נתונים ישרים מקבילים $2x - 3y + 1 = 0$ ו- $2x - 3y + 10 = 0$. מצא את משוואתו של הישר המקביל לישרים הנ"ל אם מרחקו מהישר הראשון גדול פי 2 ממרחקו מהישר השני בהתאמה.

4. מצא את משוואת הישר המקביל לישרים $5x + 6y + 3 = 0$ ו- $5x + 6y + 25 = 0$ ונמצא במרחק שווה משניהם.

5. שתיים מצלעות ריבוע מונחות על הישרים $6x + 8y - 6 = 0$ ו- $3x + 4y + 12 = 0$.
מצא את שטח הריבוע.

6. בריבוע בעל אורך צלע 5 נתון כי שתיים מצלעותיו מונחות על הישרים $3x - 4y + 23 = 0$ ו- $4x + 3y - 11 = 0$. מצא את משוואות שאר הצלעות של הריבוע אם נתון כי הנקודה $(2,4)$ נמצאת בתוכו.

7. גובהו של מעוין היא $\sqrt{20}$. משוואות שתיים מצלעותיו הן $y + 2x - 1 = 0$ ו- $x + 2y - 8 = 0$. מצא את המשוואות של הצלעות האחרות של המעוין אם הנקודה $(2,0)$ נמצאת בתוך המעוין.

8. נתון טרפז שווה שוקיים שמשוואת הישר עליו מונח הבסיס הגדול שלו היא $x - 2y - 12 = 0$ ואחת השוקיים מונחת על הישר $y = 4x + 8$. מצא את המשוואות של הצלעות האחרות של הטרפז אם נתון כי גובהו הוא $\sqrt{20}$ וקדקוד אחד של הבסיס הקטן שלו נמצא על ציר ה- y.

9. משוואות של שני ישרים מקבילים $5x + 12y + k = 0$ ו- $5x + 12y + 3k-4 = 0$.
מצא את k אם נתון כי המרחק ביניהם הוא 2.

10. מצא משוואות של שני ישרים מקבילים בעלי שיפוע חיובי, שאחד מהם עובר דרך הנקודה $(3,5)$ והאחר דרך הנקודה $(1,9)$ והמרחק ביניהם הוא $\sqrt{10}$.

תשובות לפרק 2.4

1. א. $\frac{4}{\sqrt{50}}$ ב. 2 ג. 8 .2 $2x + 6y + 15 = 0$ ו- $2x + 6y - 25 = 0$

.3 $2x - 3y + 7 = 0$ ו- $2x - 3y + 19 = 0$ .4 $5x + 6y + 14 = 0$ .5 $\frac{81}{25}$

.6 $4x + 3y - 36 = 0$, $3x - 4y - 2 = 0$ .7 $y + 2x - 11 = 0$, $2y + x + 2 = 0$

.8 $x - 2y - 2 = 0$, $8x + 19y = -19$ .9 15 ו- -11 .10 $y = 3x - 4$, $y = 3x + 6$

2.5,2.6 זווית בין שני ישרים ומשוואת חוצה זווית

1. מצא את הזווית החדה בין זוגות הישרים הבאים:

א. $y = 3x + 17$ ו- $2y - x = 17$

ב. $y = 2x - 5$ ו- $y = -2x - 2$

ג. $y = -0.75x + 5$ ו- $7x + 3y = 0$

ד. $y - x\sqrt{3} + 9 = 0$ ו- $y + x\sqrt{3} + 5 = 0$

2. מצא את זוויותיו של המשולש שצלעותיו מונחות על הישרים $x + 6y - 5 = 0$, $x + y - 5 = 0$, $2x - 3y + 5 = 0$.

3. חשב את טנגנס הזווית החדה בין הישרים $y = \frac{2b-a}{2a+b}x + d$, $y = \frac{a+b}{a-b}x + c$.

4. מצא את משוואות של שני ישרים , העוברים דרך נקודה (2,-1) ויוצרים זווית α עם הישר $y - x = 4$, אם נתון כי $\tan\alpha = \frac{1}{3}$.

5. מצא את משוואות הישרים העוברים דרך ראשית הצירים ויוצרים זווית בת 45° עם הישר $2x - y + 7 = 0$.

6. מצא משוואות הישרים העוברים דרך ראשית ויוצרים זווית בת 60° עם הישר $y = \frac{x}{\sqrt{3}} + 4$.

7. משוואת אחת משוקי זווית היא $3x - 4y + 20 = 0$ ומשוואת חוצה הזווית היא $2x - y = 0$.
מצא את השוק השנייה.

8. משוואת אחת משוקי זווית היא $x - 2y + 12 = 0$ ומשוואת חוצה הזווית היא $x - y + 3 = 0$.
מצא את השוק השנייה.

9. במשולש שווה שוקיים הבסיס מונח על הישר $x + y - 3 = 0$ ואחת השוקיים על היש $2y - x + 1= 0$. הנקודה (-1,1) נמצאת על השוק השנייה. מצא את המשוואה של השוק השנייה.

10. בטרפז שווה שוקיים $ABCD$ $\left(AB\right|\left|CD\right)$ נתון $A(-7,5)$, $B(2,2)$, $C(0,6)$. מצא את משוואת הצלע AD ואת הקדקוד D.

11. שיעורי הקדקוד A במשולש ABC הם $(2,-1)$. משוואת הגובה היורד מקדקוד C היא $7x - 10y + 1 = 0$, משוואת חוצה הזווית C היא $3x - 2y + 5 = 0$. מצא את המשוואות הצלעות של המשולש.

12. משוואת אחת מצלעות של משולש היא $3x - 4y + 6 = 0$ ומשוואות חוצי זוויות שלידה $2x - y - 6 = 0$ ו- $x + 7y + 27 = 0$. מצא את הקדקוד שמול הצלע הנתונה.

13. אחד מקדקודים של ריבוע הוא בנקודה $(0,-2)$.משוואת אלכסון הריבוע היא $y = 2x + 3$. מצא את המשוואות הצלעות של הריבוע.

14. שני קדקודים של משולש ABC ששטחו 15 הם $A(1,2)$ ו- $B(6,7)$. הזווית C היא בת 45°. מצא את הקדקוד C אם ידוע כי הוא מעל לצלע AB.

15. מצא את הנקודה על הישר $y = -x + 8$ שממנה רואים את הקטע שקצותיו $(4,2)$ ו- $(7,3)$ בזווית 45°.

16. מצא לאילו ערכים של m הישר $y - 2x = 0$ יוצר זווית בת 45° עם הישר $y = mx$.

בתרגילים הבאים כדאי להשתמש בנוסחת חוצה זווית בין שני ישרים , אך אפשר לפותרם גם באמצאות נוסחת הזווית בין שני ישרים.

17. על ישר החוצה את הזווית בין שני ישרים $y = 2x$ ו- $x - 2y + 12 = 0$, מצא נקודה שמרחקה מהקדקוד הזווית הוא $\sqrt{2}$.

18. נתון משולש ABC ששני הקדקודים שלו $C(0,0)$ ו- $B(3,0)$. משוואת חוצה הזווית A היא $x - y - 2 = 0$. מצא את הקדקוד A.

19. הישרים שהמשוואות שלהם $4x + 3y = 0$, $12x - 5y = 0$, $y = 15$ יוצרים משולש. מהם שיעורי מרכז המעגל החסום במשולש.

20. משוואות של שתי שוקיים של זווית חדה במשולש הן $y = x + 3$ ו- $7x + y = 19$. מצא את משוואת חוצה הזווית .

21. משוואות של שתי שוקיים של זווית קהה הן $3y - x = 3$ ו- $y - 3x = 9$. מצא את משוואת חוצה הזווית.

תשובות לסעיפים 2.5-2.6

1. א. 45° ב. 53.13° ג. 29.9° ד. 60° 2. 43.15° , 35.53° , 101.31° 3. 3

$y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$, $x = 0$ .6 $3y - x = 0$, $3x + y = 0$ .5 $2x - y - 5 = 0$, $2y - x + 4 = 0$ .4

$10x + 7y = 13$, .11 (-3,7) , $x - 2y + 17 = 0$ .10 $y = 2x + 3$ .9 $2x - y - 3 = 0$ .8 $x = 4$ .7

(6,-19) .12 $5x + y + 17 = 0$, $x - 5y = 7$

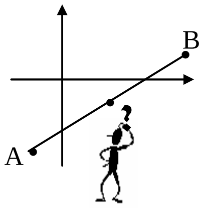
$x - 3y - 6 = 0$, $3x + y + 12 = 0$, $x - 3y + 4 = 0$, $3x + y + 2 = 0$ .13

$1 - y = 3x$ .20 (-1.25,10) .19 (4,2) .18 1/3 , -3 .16 (8,0) , (3,5) .15 (4,11) , (-3,4) .14

$y + x + 3 = 0$ .21

פרק 3 : חלוקת קטע ביחס

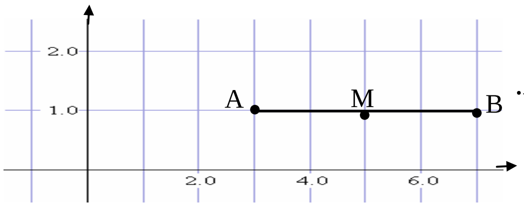
3.1 אמצע של קטע



כיצד מחשבים את שיעורי נקודת האמצע של קטע AB, הנתון במערכת צירים?

נטפל תחילה בשני מקרים פשוטים :

1. הקטע AB מקביל לציר ה- x, כלומר שיעורי ה- y של הנקודות A ו- B שווים.



<u>דוגמאות</u>

א. נתון קטע AB ששיעורי קצותיו הם : B(7,1), A(3,1).

מצא את שיעורי נקודת האמצע M .

<u>פתרון</u>

משוואת הישר AB , המקביל לציר ה- x היא $y = 1$, לכן שיעור ה-y של הנקודה M , הנמצאת עליו, הוא 1.

M(x,y) היא אמצע הקטע AB לכן $AM = MB$

למדנו כי אורכו של קטע המקביל לציר ה- x שווה לערך המוחלט של הפרש שיעורי ה-x.

במקרה זה : $AM = x - 3$ (כי $x > 3$)

$BM = 7 - x$ (כי $x < 7$)

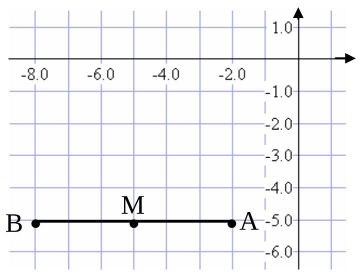
לכן : $x - 3 = 7 - x$

$x = 5$

שיעורי הנקודה M הם (5,1).

שים לב, $\frac{3+7}{2} = 5$ כלומר שיעור ה-x של הנקודה M הוא ממוצע שיעורי ה-x של A ו- B.

ב. נתונות הנקודות B(-8,-5), A(-2,-5). מצא את שיעורי אמצע הקטע AB.



<u>פתרון</u>

נסמן ב- M(x,y) את אמצע הקטע AB.

שיעור ה- y של הנקודה M הוא -5 .

$AM = -2 - x$

$MB = x - (-8)$

קיים $AM = MB$

לכן $-2 - x = x - (-8)$

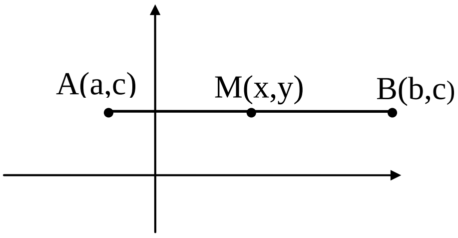
$x = -5$

לכן שיעורי M הם (-5,-5).

גם בדוגמה הזאת שיעור ה-x של אמצע הקטע הוא הממוצע של שיעורי ה-x של הקצוות :

$$-5 = \frac{-8-2}{2}$$

נמצא את שיעורי נקודת האמצע M של קטע AB, המקביל לציר ה-x כאשר שיעורי קצותיו הם A(a,c),B(b,c) (B הקצה הימני כלומר b > a).



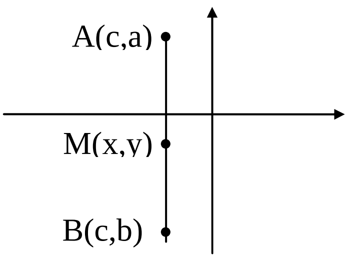
M נמצאת על AB, לכן שיעור ה-y שלה הוא c.

על סמך הדוגמאות הקודמות נשער כי שיעור

ה- x של M הוא ממוצע שיעורי ה-x של הקצוות $\frac{a+b}{2}$. ואמנם

$$AM = x - a$$
$$BM = b - x$$
$$AM = BM$$
$$x - a = b - x$$
$$2x = a + b$$
$$x = \frac{a+b}{2}$$

כלומר, שיעורי אמצע הקטע הם $M(\frac{a+b}{2}, c)$



2. הקטע AB מקביל לציר y.

נתון קטע מקביל לציר y שקצותיו הם A(c,b) ו- B(c,a), a > b.

יש לחשב את שיעורי אמצע הקטע M(x,y).

מקרה זה דומה למקרה הקודם אלא שכאן שיעורי ה-x של הנקודות שווים ויש לחשב את שיעור ה- y. M נמצאת על AB לכן x = c (לכל הנקודות על ישר מקביל לציר y יש אותו שיעור x).

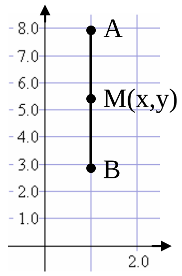
על פי המקרה הקודם נצפה כי שיעור ה- y של אמצע הקטע יהיה $y = \frac{a+b}{2}$ ואמנם :

$$AM = a - y$$
$$BM = y - b$$
$$AM = BM$$

לכן $a - y = y - b$

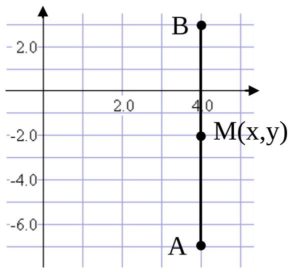
$$y = \frac{a+b}{2}$$

<u>דוגמאות:</u>



א. שיעורי אמצע הקטע AB שבו A (1,8) ו- B (1,3)

הם $x = 1$, $y = \frac{8+3}{2} = 5\frac{1}{2}$.



ב. שיעורי אמצע הקטע שקצותיו הם A (4,-7), B(4,3)

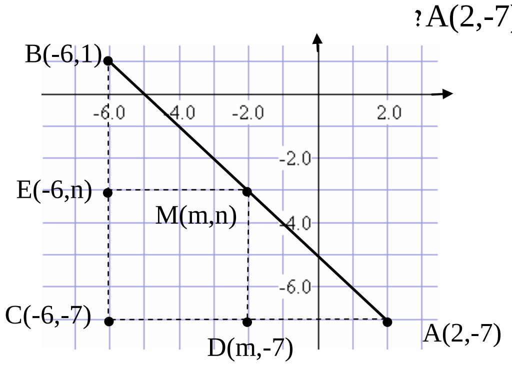
הם $x = 4$, $y = \frac{3-7}{2} = -2$.

3. הקטע AB איננו מקביל לאחד הצירים.

בעזרת התוצאות שקיבלנו נוכל עתה לחשב את שיעורי האמצע של קטע שאיננו מקביל לאחד הצירים. נתחיל בדוגמה.

<u>דוגמה</u>

מהם שיעורי האמצע של קטע שקצותיו הם A(2,-7) , B(-6,1)?



נסמן ב-M(m,n) את אמצע הקטע.

נעביר מקבילים לציר ה-y דרך B ודרך M,

ומקביל לציר x דרך A, החותך את שני המקבילים

לציר ה-y בנקודות C(-6,-7) ו- D(m,-7) בהתאמה,

כמתואר בסרטוט.

הקטע MD חוצה את AB ומקביל ל-BC לכן MD הוא קטע אמצעים במשולש ABC ומשום כך הוא חוצה את הצלע AC. כלומר, הנקודה D היא אמצע AC.

AC מקביל לציר x לכן שיעור ה- x של D הוא m:
$$m = \frac{2+(-6)}{2} = -2$$

m = -2 הוא גם שיעור ה-x של הנקודה M.

בדרך דומה נחשב את שיעור ה- y של M.

דרך M נעביר מקביל לציר x החותך את BC בנקודה E (ראה הסרטוט).

שיעורי הנקודה E הם (-6,n) ו- ME קטע אמצעים במשולש ABC (מדוע?)

לכן E היא נקודת האמצע של הצלע BC המקבילה לציר y ולכן שיעור ה- y שלה הוא:

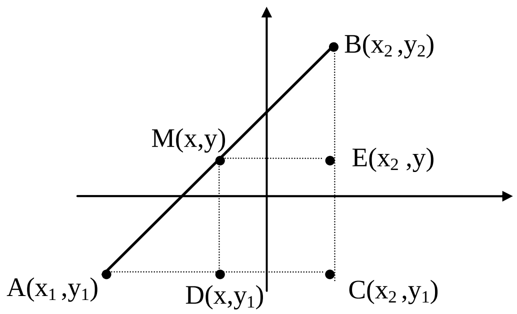
$$n = \frac{1+(-7)}{2} = -3$$

n = -3 הוא גם שיעור ה- y של M לכן שיעורי הנקודה M הם (-2,-3).

המקרה הכללי

מהם שיעורי נקודת האמצע של קטע שקצותיו הן הנקודות $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$?

נסמן את אמצע הקטע על-ידי $M(x,y)$ וכמו בדוגמה הקודמת נסרטט את הסרטוט המתואר להלן



BC ו- MD מקבילים לציר ה-y. AC ו-ME מקבילים לציר ה-x. C נקודת החיתוך של BC ו- AC. שיעורי הנקודות D , C , E הם: $E(x_2,y)$, $C(x_2,y_1)$, $D(x,y_1)$.

MD הוא קטע אמצעים במשולש ABC (חוצה את AB ומקביל ל-BC), לכן הנקודה D היא אמצע הקטע AC(המקביל לציר x), ולכן שיעור ה-x של הנקודה D הוא: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

E היא אמצע הקטע BC (מדוע?) לכן שיעור ה- y שלה הוא: $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

השיעורים שחישבנו הם גם שיעורי נקודת אמצע הקטע $M(x,y)$.

<u>מסקנה</u>

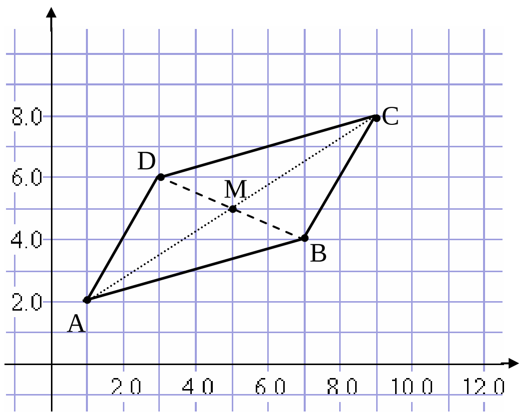
שיעורי אמצע קטע $M(x,y)$ שקצותיו הם $A(x_1,y_1)$ ו- $B(x_2,y_2)$, הם $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$

שים לב, נוסחה זו מתאימה גם למקרים שבהם הישר AB מקביל לאחד הצירים.

<u>תרגיל 1</u>

הנקודות $A(1,2)$, $B(7,4)$, $C(9,8)$ הן שלושה קדקודים של המקבילית ABCD .

מצא את שיעורי הנקודה D.



<u>פתרון</u>

נסמן ב- (x_D,y_D) את שיעורי הקודקוד D. כדי למצוא את שיעוריו נעזר במשפט הגיאומטרי: אם אלכסוני מרובע חוצים זה את זה, המרובע הוא מקבילית.

נסמן ב- $M(x_M,y_M)$ את שיעורי אמצע האלכסון AC. כפי שראינו שיעורי M הם

$$x_M = \frac{1+9}{2} = 5 \ , \ y_M = \frac{2+8}{2} = 5$$

כדי שהמרובע ABCD יהיה מקבילית מספיק לדרוש שהנקודה M תהיה גם אמצע האלכסון AC.

כלומר שיעורי D צריכים לקיים את התנאים:

$$\begin{cases} \frac{x_D+7}{2} = x_M \\ \frac{y_D+4}{2} = y_M \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x_D+7}{2} = 5 \\ \frac{y_D+4}{2} = 5 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} x_D = 2\cdot 5 - 7 = 3 \\ y_D = 2\cdot 5 - 4 = 6 \end{cases}$$ לכן שיעורי D הם (3,6).

קיימת דרך נוספת לפתרון הבעיה, המסתמכת על הגדרת המקבילית כמרובע בעל שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות.

כדי שהמרובע ABCD יהיה מקבילית צריך להתקיים: $AB || CD$ ו- $AD || BC$.

שיפוע הישר AB העובר בנקודות A(1,2) ו- B(7,4) הוא $\frac{4-2}{7-1} = \frac{1}{3}$. לכן גם שיפוע CD צריך להיות שווה $\frac{1}{3}$. הישר CD עובר בנקודה C(9,8) לכן משוואתו היא

$$y - 8 = \frac{1}{3}(x-9)$$

$$y = \frac{1}{3}x + 5$$

שיפוע הישר AD צריך להיות שווה לשיפוע BC. שיפוע הישר BC הוא $\frac{8-4}{9-7} = 2$ לכן גם שיפוע AD שווה ל-2 והוא עובר בנקודה A(1,2). לכן משוואתו היא:

$$y - 2 = 2(x-1)$$

$$y = 2x$$

שיעורי נקודת החיתוך D מתקבלים על-ידי התרת מערכת המשוואות

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + 5 \\ y = 2x \end{cases}$$

פתרון המערכת נותן כי שיעורי D הם (3,6).

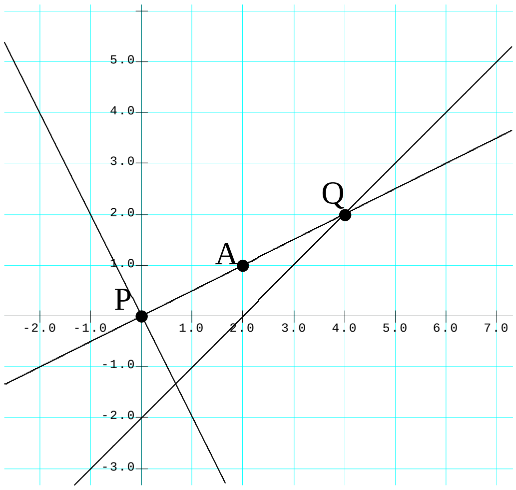
<u>תרגיל 2</u>

ישר העובר דרך הנקודה A(2,1) חותך את הישרים $2x + y = 0$ ו- $x - y - 2 = 0$. קטע הישר,העובר דרך הנקודה A ואשר קצותיו הן נקודות החיתוך , נחצה על ידי הנקודה A.

מצא את משוואת הישר.

<u>פתרון</u>

נסמן קצוות של הקטע המבוקש ב- P ו- Q.



כיוון שהנקודה P שייכת לישר $2x + y = 0$ שיעוריה הם $(x_1, -2x_1)$. באותו אופן שיעוריה של הנקודה Q הם $(x_2, x_2 - 2)$. על פי הנתונים, הנקודה A היא אמצע הקטע בין P ו- Q ולכן על פי נוסחת אמצע הקטע מתקבלת מערכת המשוואות:

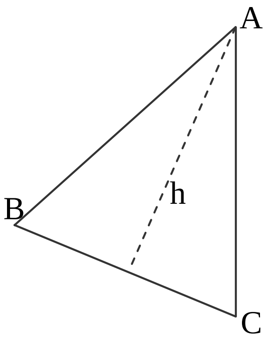
$$\begin{cases} \dfrac{x_1 + x_2}{2} = 2 \\ \dfrac{-2x_1 + x_2 - 2}{2} = 1 \end{cases}$$

פתרון מערכת זו הוא $x_2 = 4$, $x_1 = 0$. פירוש הדבר כי הנקודה Q היא (4,2), והנקודה P היא (0,0). הישר המבוקש עובר דרך שתי הנקודות שקיבלנו לכן משוואתו היא $y = \frac{1}{2}x$.

<u>תרגיל 3</u>

במשולש שווה שוקיים ABC קדקודי הבסיס הם C(3,0) ו- B(-7,2). הקדקוד השלישי של המשולש נמצא ברביע השני. שטח המשולש שווה ל- 26.

מצא את שיעורי הקדקוד A.



<u>פתרון</u>

אורך בסיס המשולש הוא: $BC = \sqrt{(3-(-7))^2 + (0-2)^2} = \sqrt{104}$.

נסמן את הגובה ל- BC ב- h. שטח המשולש הוא

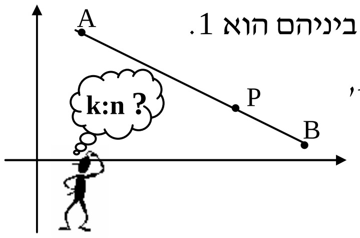
$$S = \frac{BC \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{104} \cdot h}{2} = 26$$

לכן הגובה h שווה ל- $\sqrt{26}$. הקדקוד A נמצא על האנך האמצעי לבסיס המשולש, נמצא את משוואתו. אמצע צלע הבסיס הוא הנקודה $\left(\frac{3+(-7)}{2}, \frac{0+2}{2}\right) = (-2,1)$.

שיפוע הישר BC הוא: $m_{BC} = \frac{2-0}{-7-3} = -\frac{1}{5}$. לכן שיפוע האנך האמצעי המבוקש הוא 5. כלומר משוואת האנך האמצעי היא $y = 5x + 11$. הקדקוד A נמצא על האנך האמצעי ולכן אפשר להציגו באמצעות הנקודה הכללית $(x_A, 5x_A + 11)$. המרחק בין הנקודה (-2,1) לבין A הוא $\sqrt{(x_A + 2)^2 + (5x_A + 10)^2} = \sqrt{26}$. פתרונות של המשוואה הם $x_1 = -3$, $x_2 = -1$. הנקודות האפשריות בהן יכול להיות קדקוד A הן (-1,6) ו- (-3,-4). נשאר לבחור נקודה שנמצאת ברביע השני והיא (-1,6).

3.2 חלוקת קטע ביחס נתון

בסעיף הקודם למדנו כיצד לחשב את שיעורי נקודת האמצע M של קטע נתון AB. נקודת האמצע M מחלקת את AB לשני קטעים שווים, כלומר לשני קטעים שהיחס ביניהם הוא 1.



נדון כעת בשאלה: מהם שיעוריה של נקודה P הנמצאת על הישר AB, ומחלקת את הקטע AB לשני קטעים AP ו-PB, שהיחס ביניהם שווה למספר נתון k:n?

אם הנקודה P נמצאת על הקטע AB נאמר כי P מחלקת את הקטע **חלוקה פנימית**.

אם P לא נמצאת על הקטע AB אלא בהמשכו, נאמר כי זאת **חלוקה חיצונית**.

3.2.1 חלוקה פנימית

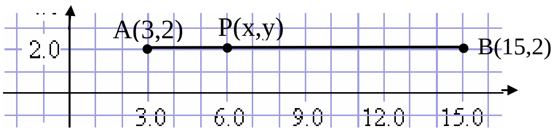
בכל הדיון שלהלן הנקודה P היא נקודה בקטע AB ומחלקת אותו חלוקה פנימית.

נתחיל עם שני מקרים פרטיים פשוטים, שבהם הקטע הנתון מקביל לאחד הצירים.

1. <u>הקטע AB מקביל לציר ה-x</u>

<u>דוגמאות</u>

א. יש למצוא את השיעורים של נקודה P המחלקת קטע AB שקצותיו הםA(3,2) ו-B(15,2) ביחס של 1:3.



<u>פתרון</u>

נסמן את שיעורי הנקודה P על-ידי (x,y).

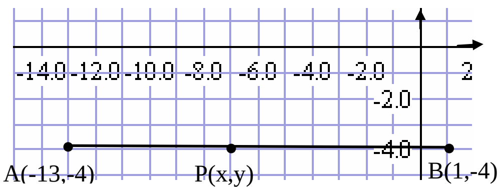
הנקודה P נמצאת על AB לכן y = 2.

משמעות העובדה שהנקודה P מחלקת את AB ביחס 1:3 היא שיחס אורכי הקטעים AP ו- BP הוא $\frac{AP}{PB}=\frac{1}{3}$. AP = x – 3 ו- PB = 15 – x, לכן $\frac{1}{3}=\frac{x-3}{15-x}$ ופתרון המשוואה הוא x = 6.

שיעורי הנקודה P הם (6,2).

הערה: אפשר לפתור את הבעיה גם בדרך מעט שונה. משמעות העובדה שהנקודה P מחלקת את AB ביחס 1:3 היא שאורכו של AP הוא $\frac{1}{4}$ מהאורך של AB כלומר, $x-3=\frac{1}{4}(15-3)$, לכן x = 6.

ב. מהם שיעורי הנקודה P המחלקת את AB לפי היחס 3:4, כאשר שיעורי קצות הקטע הם A(-13,-4) ו-B(1,-4)?



<u>פתרון</u>

הנקודה P(x,y) נמצאת על הקטע AB המקביל לציר ה-x, לכן y = -4. לפי הנתון $\frac{AP}{PB}=\frac{3}{4}$, לכן $\frac{3}{4}=\frac{x+13}{1-x}$. פתרון המשוואה הוא x = -7.

לכן שיעורי הנקודה P הם (-7,-4).

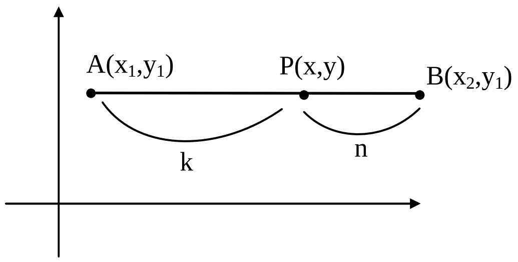
הערה : גם כאן אפשר לפתור בדרך מעט שונה. מהעובדה ש-P מחלקת את AB לפי היחס 3:4

אפשר להסיק כי אורך הקטע AP הוא $\frac{3}{7}$ מאורך הקטע AB כלומר, $AP = \frac{3}{7}AB$.

$AP = x + 13$, $AB = 14$, לכן $x + 13 = \frac{3}{7} \cdot 14$, והפתרון $x = -7$.

הכללה :

כדי למצוא את שיעורי הנקודה $P(x,y)$, שמחלקת קטע AB ביחס של k:n , כאשר שיעורי הקצוות הם $A(x_1,y_1)$ ו-$B(x_2,y_1)$. רושמים :



$$AP: PB = k:n$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{k}{n}$$

$$n(x - x_1) = k(x_2 - x)$$

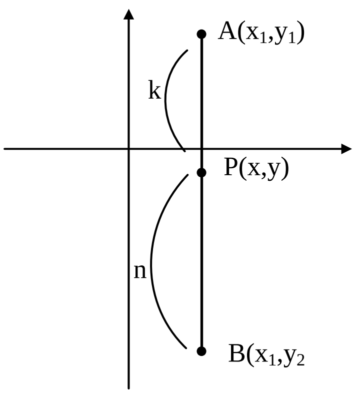
$$(n + k)x = nx_1 + kx_2$$

$$x = \frac{nx_1 + kx_2}{n + k}$$

קבלנו כי שיעורי הנקודה P הם . $\left(\frac{nx_1 + kx_2}{n + k}, y_1\right)$

2. הקטע AB מקביל לציר ה-y

אם הנקודה P שעל הקטע AB מחלקת אותו לפי היחס k:n, כלומר אם $AP:PB = k:n$, אז



$$\frac{y_1 - y}{y - y_2} = \frac{k}{n}$$

$$n(y_1 - y) = k(y - y_2)$$

ואחרי פישוט מקבלים $y = \frac{ny_1 + ky_2}{n + k}$

לכן שיעורי P הם $\left(x_1, \frac{ny_1 + ky_2}{n + k}\right)$.

תרגיל 1

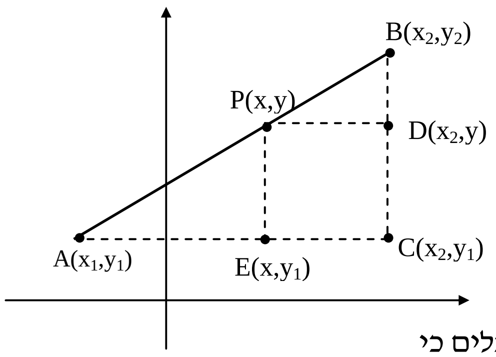
נתון קטע AB שקצותיו הם $A(5,-3)$ ו-$B(18,-3)$. מצא את שיעורי הנקודה P הנמצאת על הקטע ומחלקת אותו לפי היחס 10:3, בשלוש דרכים :

א. על ידי חישוב AP:PB ב. על ידי חישוב AP:AB ג. באמצעות התבנית שקיבלנו לעיל. וודא את שוויון התוצאות.

3. המקרה הכללי : AB איננו מקביל לאחד הצירים

נטפל במקרה זה בגישה דומה לדרך בה מצאנו אמצע של קטע שאינו מקביל לאחד הצירים.

נתון קטע AB ששיעורי קצותיו הם $A(x_1,y_1)$ ו-$B(x_2,y_2)$.



יש למצוא את שיעורי הנקודה $P(x,y)$ המחלקת אותו לשני קטעים AP ו-PB שהיחס ביניהם הוא $AP:PB = k:n$.

נעביר דרך A מקביל לציר ה-x, ודרך B מקביל לציר ה-y. המקבילים נחתכים בנקודה $C(x_2,y_1)$.

כמו כן נעביר דרך P מקבילים לצירים, החותכים את BC ואת AC בנקודות $D(x_2,y)$ ו-$E(x,y_1)$ בהתאמה.

מלימודי הגיאומטריה (משפט תאלס ודמיון משולשים) מקבלים כי

$$AP:PB = AE:EC = CD:DB$$

נתון כי $AP:PB = k:n$ לכן

$$AE:EC = k:n \qquad\qquad CD:DB = k:n$$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x} = \frac{k}{n} \qquad\qquad \frac{y-y_1}{y_2-y} = \frac{k}{n}$$

$$n(x-x_1) = k(x_2-x) \qquad\qquad n(y-y_1) = k(y_2-y)$$

$$x(n+k) = nx_1 + kx_2 \qquad\qquad y(n+k) = ny_1 + ky_2$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

שיעורי E הם $\left(\frac{nx_1+kx_2}{n+k}, y_1\right)$ שיעורי D הם $\left(x_2, \frac{ny_1+ky_2}{n+k}\right)$

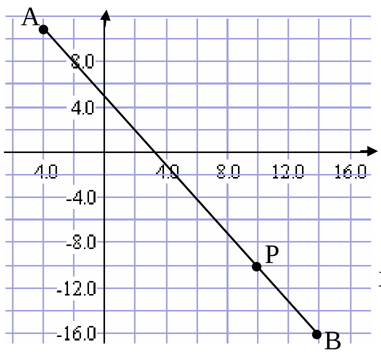
מכאן ברור כי שיעורי הנקודה P, המחלקת את AB חלוקה פנימית לפי היחס k:n, הם

$$\boxed{P\left(\frac{nx_1+kx_2}{n+k}, \frac{ny_1+ky_2}{n+k}\right)}$$

<u>תרגיל 2</u>

מהם שיעורי הנקודה P שמחלקת את הקטע AB ביחס של 7:2, כאשר $A(-4,11)$ ו-$B(14,-16)$?

<u>פתרון</u>



ראינו כי שיעורי P הם $\left(\frac{nx_1+kx_2}{n+k}, \frac{ny_1+ky_2}{n+k}\right)$.

נציב: $k = 7$, $n = 2$, $x_1 = -4$, $y_1 = 11$, $x_2 = 14$, $y_2 = -16$,

ונקבל: $x = \frac{2\cdot(-4)+7\cdot 14}{2+7} = 10$, $y = \frac{2\cdot 11+7\cdot(-16)}{2+7} = -10$

מצאנו, אם כן, כי שיעורי P הם $(10,-10)$.

נחשב עתה את אורכי הקטעים AP ו-PB, ונבדוק את התוצאה.

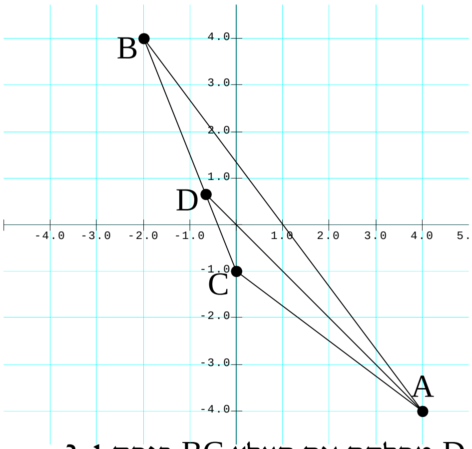
$$AP^2 = (10-(-4))^2 + (-10-11)^2 = 637 = 49\cdot 13 \qquad \Rightarrow \qquad AP = 7\sqrt{13}$$

$$PB^2 = (14 - 10)^2 + (-16 - (-10))^2 = 52 = 4 \cdot 13 \quad \Rightarrow \quad PB = 2\sqrt{13}$$

ואמנם $AP:PB = 7:2$

<u>תרגיל 3</u>

קדקודיו של משולש נמצאים בנקודות $C(0,-1)$, $B(-2,4)$, $A(4,-4)$. מצא את אורך חוצה הזווית A.



<u>פתרון</u>

נשתמש במשפט:חוצה זווית במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית לשני קטעים פרופורציוניים לשתי הצלעות הכולאות את הזווית (בהתאמה).

נחשב קודם את AB ו- AC.

$$AB = \sqrt{(4-(-2))^2 + (-4-4)^2} = \sqrt{100} = 10$$

$$AC = \sqrt{4^2 + (-4-(-1))^2} = \sqrt{25} = 5$$

על פי המשפט נקבל $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{1}$. לכן הנקודה D מחלקת את הצלע BC ביחס $2:1$.

כדי לקבל את שיעורי הנקודה D נציב את הנתונים בנוסחת חלוקת קטע ביחס נתון:

$$y_D = \frac{4 \cdot 1 + (-1) \cdot 2}{1+2} = \frac{2}{3} \quad , x_D = \frac{-2 \cdot 1 + 0 \cdot 2}{1+2} = -\frac{2}{3}$$

עכשיו נחשב את המרחק בין A ל- D

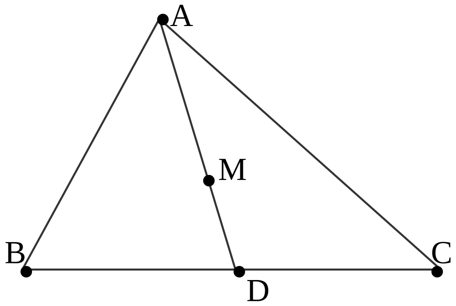
$$AD = \sqrt{\left(4-\left(-\frac{2}{3}\right)\right)^2 + \left(-4-\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{14}{3}\sqrt{2}$$

<u>תרגיל 4</u>

קדקודי משולש נמצאים בנקודות $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$.

הוכח כי נקודת החיתוך של הקווים התיכוניים של המשולש

היא $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$



<u>פתרון</u>

לצורך פתרון של התרגיל נשתמש בתכונה הגיאומטרית של נקודת המפגש של התיכונים במשולש: הנקודה מחלקת כל אחד מהתיכונים ביחס $2:1$, כאשר הקטע הארוך צמוד לקודקוד המשולש.

נסמן ב- D את אמצע הצלע BC. שיעורי הנקודה D הם: $D\left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right)$.

נקודת מפגש התיכונים M מחלקת את הקטע AD ביחס $2:1$, כלומר $\frac{AM}{MD}=\frac{2}{1}$.

על פי הנוסחה של חלוקת קטע ביחס נתון נקבל את השיעורים של M :

$$M\left(\frac{x_1\cdot 1+\frac{x_2+x_3}{2}\cdot 2}{1+2},\frac{y_1\cdot 1+\frac{y_2+y_3}{2}\cdot 2}{1+2}\right)=\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

<u>הערות</u> :

- נקודת המפגש של תיכונים במשולש נקראת **מרכז הכובד של המשולש**
- הנוסחה שהתקבלה בתרגיל האחרון שימושית מאוד בחלק מן התרגילים. נדגים זאת בתרגיל הבא.

<u>תרגיל 5</u>

במשולש ABC הצלעות AC ו- AB מונחות על הישרים $7y = 3x + 46$ ו- $y = -3x + 10$ בהתאמה. נקודת המפגש של התיכונים במשולש היא $(-1,5)$. מצא את קדקודי המשולש.

<u>פתרון</u>

את הקדקוד A אפשר למצוא על ידי פתרון מערכת המשוואות $\begin{cases} y=-3x+10 \\ 7y=3x+46 \end{cases}$ והוא $(1,7)$.

הנקודה B היא חלק מהישר AB ולכן ניתן להציגה כנקודה כללית $(b,-3b + 10)$. באותו אופן הנקודה C היא חלק מהישר AC והצגתה הכללית היא $\left(c,\frac{3c+46}{7}\right)$. מנוסחת מרכז הכובד מקבלים:

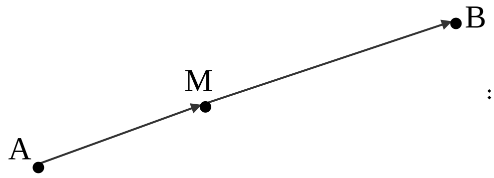
$$\begin{cases} \frac{b+c+1}{3}=-1 \\ \frac{(-3b+10)+\left(\frac{3c+46}{7}\right)+7}{3}=5 \end{cases}$$

נפתור את המערכת שקיבלנו ונקבל $b = 2$ ו- $c = -6$, לכן הנקודות המבוקשות הן $B(2,4)$, $C(-6,4)$.

<u>הערה</u> :

בסעיף 2.7 ראינו שקיים קשר בין גיאומטריה אנליטית לווקטורים.
כאן נלמד כיצד אפשר למצוא נקודה שמחלקת את הקטע ביחס נתון באמצעות ווקטורים.

נתונות נקודות $A(x_1,y_1)$ ו- $B(x_2,y_2)$. נקודה $M(x,y)$ על הקטע AB מחלקת את הקטע ביחס $k:l$, כלומר מקיימת את התנאי:



$l>0$, $k>0$, $\frac{AM}{MB}=\frac{k}{l}$.

התנאי האחרון אפשר לרשום בצורה ווקטורית:

$\overrightarrow{AB}\cdot\frac{k}{k+l}=\overrightarrow{AM}$ (ראו סרטוט).

נציב את שיעורי הווקטורים במשוואה ונקבל: $(x-x_1,y-y_1)=\frac{k}{k+l}(x_2-x_1,y_2-y_1)$.

כלומר, $x-x_1=\frac{k}{k+l}(x_2-x_1)$ ו- $y-y_1=\frac{k}{k+l}(y_2-y_1)$.

פירוש הדבר כי $M\left(\frac{l\cdot x_1+k\cdot x_2}{l+k},\frac{l\cdot y_1+k\cdot y_2}{l+k}\right)$.

<u>דוגמה</u>

מהם שיעורי הנקודה M שמחלקת את הקטע AB ביחס של 6:4, כאשר A(-4,6) ו-B(4,12)?

<u>פתרון</u>

נסמן שיעורי הנקודה M ב- (x,y). אז $\overrightarrow{AM}=(x+4,y-6)$. לפי נתון, $\overrightarrow{AM}=\frac{6}{10}\overrightarrow{AB}$, כלומר,

$(x+4,y-6)=\frac{6}{10}(8,6)$. לכן $x+4=4.8$ ו- $y-6=3.6$. הנקודה M היא (0.8,9.6).

3.1.2 חלוקה חיצונית

בכל המקרים בהם עסקנו עד כה הנקודה P הייתה נקודה על הקטע AB, כלומר היא חלקה את הקטע חלוקה פנימית לפי היחס הנתון.

עתה נדון במקרה שהנקודה P נמצאת על הישר AB, אבל לא על הקטע AB. חלוקה זו נקראת **חלוקה חיצונית**.

<u>דוגמאות</u>

א. מצא את שיעורי הנקודה P המחלקת קטע AB, שקצותיו הם A(-3,6) ו- B(2,-2) ,

חלוקה חיצונית ביחס של AP:PB = 2:1.

P מחלקת את AB חלוקה חיצונית לכן P נמצאת מחוץ לקטע AB.כדי לקבוע אם P נמצאת משמאל ל- A או מימין ל- B יש להתבונן ביחס הנתון.

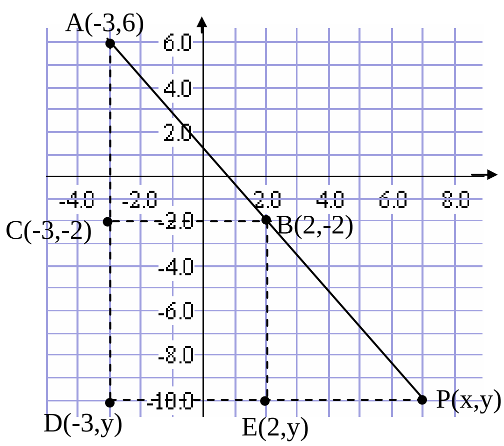
במקרה דנן רואים כי AP > PB, לכן P(x,y) נמצאת על הישר AB מעבר ל-B.

התבונן בסרטוט:

כמו במקרה של חלוקה פנימית מעבירים מקבילים לצירים דרך A, B ו- P.

הסבר כיצד התקבלו שיעורי נקודות החיתוך C, D ו-E.

לפי משפט תאלס:



AP:PB = DP:PE = 2:1 AP:PB = AD:DC = 2:1

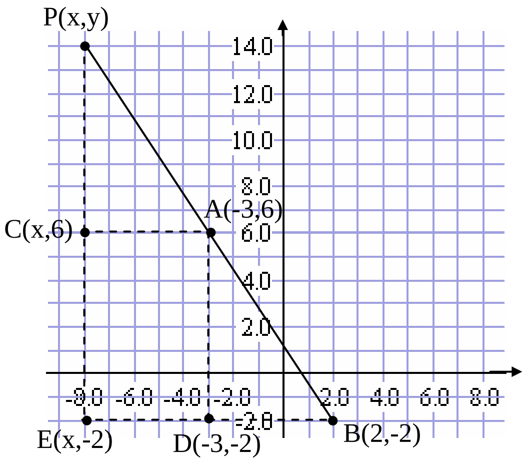
$$\frac{x+3}{x-2}=2 \qquad\qquad \frac{6-y}{-2-y}=2$$
$$x+3=2x-4 \qquad\qquad 6-y=-4-2y$$
$$x=7 \qquad\qquad y=-10$$

לכן הנקודה P(7,-10) מחלקת את AB חלוקה חיצונית לפי היחס 2:1.

ב. נתון: A(-3,6) ו-B(2,-2). מצא את שיעורי הנקודה P(x,y) המחלקת את הקטע AB חלוקה חיצונית ביחס
$AP:PB = 1:2$.

P מחוץ ל- AB ו- $AP < PB$, לכן P נמצאת על הישר AB מעבר ל-A.

$$AP:PB = DE:EB = 1:2$$
$$\frac{-3-x}{2-x}=\frac{1}{2}$$
$$-6-2x=2-x$$
$$x=-8$$
$$AP:PB = CP:PE = 1:2$$
$$\frac{y-6}{y+2}=\frac{1}{2}$$
$$2y-12=y+2$$
$$y=14$$

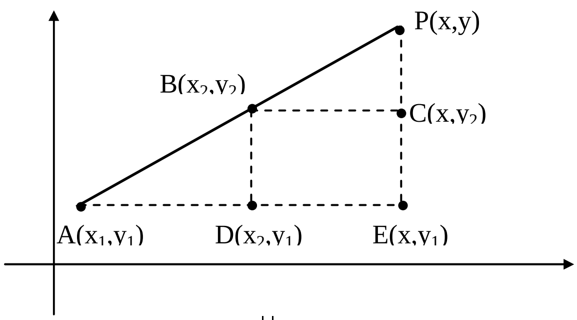


לכן שיעורי P הם (-8,14).

באופן כללי:

מהם שיעורי הנקודה P אם נתון כי P(x,y) מחלקת קטע AB, ששיעורי קצותיו הם $A(x_1,y_1)$ ו-$B(x_2,y_2)$, חלוקה חיצונית ביחס של $AP:PB = k:n$ (כלומר $AP:PB = k:n$).

נעביר דרך A , B ו-P מקבילים לצירים, וגם דרך נקודות החיתוך המתקבלות כמתואר בסרטוט.



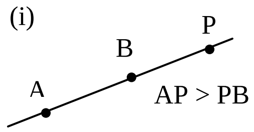
$$AE \,||\, BC \qquad\qquad BD \,||\, PE$$
$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$
$$AP:PB = EP:PC = k:n \qquad\qquad AP:PB = AE:ED = k:n$$
$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$
$$\frac{y-y_1}{y-y_2}=\frac{k}{n} \qquad\qquad \frac{x-x_1}{x-x_2}=\frac{k}{n}$$
$$n(y-y_1)=k(y-y_2) \qquad\qquad n(x-x_1)=k(x-x_2)$$
$$(n-k)y = ny_1-ky_2 \qquad\qquad (n-k)x = nx_1-kx_2$$
$$y=\frac{ny_1-ky_2}{n-k} \qquad\qquad x=\frac{nx_1-kx_2}{n-k}$$

לכן שיעורי הנקודה P, המחלקת את AB חלוקה חיצונית ביחס k:n, הם

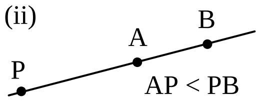
$$\boxed{P\left(\frac{nx_1-kx_2}{n-k},\frac{ny_1-ky_2}{n-k}\right)}$$

<u>הערה</u>

בדוגמאות שבהן חישבנו את שיעורי נקודה P המחלקת קטע AB חלוקה חיצונית ביחס נתון, מיקמנו את הנקודה P ביחס ל-A ו-B על-פי השיקול האם היחס AP:PB גדול או קטן מ-1.



כאשר היחס גדול מ-1, כלומר AP > PB, מכיוון ש-P נמצאת מחוץ לקטע, הרי ש-P מימין ל-B .



כאשר היחס קטן מ-1, כלומר AP < PB הרי ש-P משמאל ל-A .

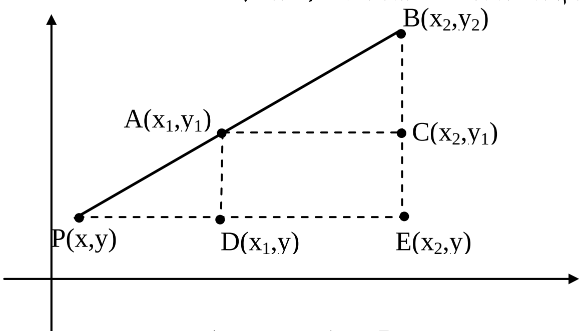
הסרטוט שבעזרתו פתרנו את המקרה הכללי התאים למקרה שהיחס k:n גדול מ-1 (איור i).

האם הנחה זאת משפיעה על התוצאה?

כדי להיווכח שלא, חשב את שיעורי P

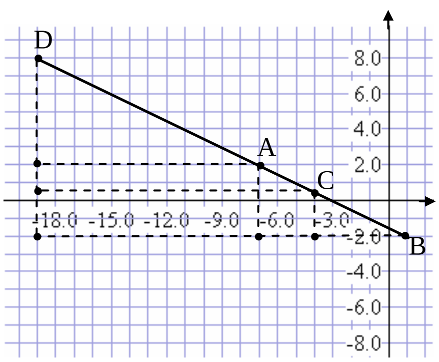
כאשר $\frac{k}{n} < 1$.

להלן הסרטוט המתאים.



אם הנקודה C מחלקת קטע נתון AB חלוקה פנימית ביחס m:n, והנקודה D מחלקת אותו חלוקה חיצונית באותו יחס, נאמר כי C ו-D מחלקות את AB **חלוקה הרמונית** לפי היחס m:n.

<u>דוגמה</u> : נתון A(-7,2) ו-B(1,-2). הוכח כי הנקודות C(-4,0.5) ו-D(-19,8) מחלקות את AB חלוקה הרמונית ביחס 3:5 .



<u>תרגיל</u> : בדוגמה האחרונה, מצא באיזה יחס מחלקות הנקודות A ו-B את הקטע CD.

הדרכה : קל לראות את היחסים הנדרשים בסרטוט.

דוגמה זו מעוררת את השאלה :

אם C ו-D מחלקות קטע AB חלוקה הרמונית ביחס k:n האם A ו-B מחלקות את CD חלוקה הרמונית? ואם כן, באיזה יחס?

נשאיר לקורא לפתור בעיה זו.

תרגילים לפרק 3

3.1 אמצע של קטע

1. מצא את אמצע הקטע המחבר את הנקודות A ו-B :

א. $A(-2,6)$, $B(4,-4)$ ה. $A(2a, 3b)$, $B(-3, 7b)$

ב. $A(1,-6)$, $B(7,2)$ ו. $A(2a-1,0)$, $B(2a+1, 4b)$

ג. $A(3,5)$, $B(15,10)$ ז. $A(a-b, a+b)$, $B(a+b, b-a)$

ד. $A(-7,6)$, $B(-2,-6)$ ח. $A(a-2, a+1)$, $B(2-a, 3a+5)$ז

2. הנקודות A ו-B נמצאות על הישר $5x - 3y = 10$. שיעור ה-x של A הוא -1 ושיעור ה-y של B שווה ל-5. חשב את שיעורי אמצע הקטע AB.

3. אמצע הקטע AB הוא $C(-3,5)$ נתונים שעורי הנקודה A , מצא את שעורי הנקודה B.

א. $A(1,-2)$ ב. $A(-3,10)$ ג. $A(-7,-5)$ ד. $A(3,11)$

4. אמצע הקטע AB הוא $C(2a, -7b)$. שיעורי הנקודה A הם $(5a + 1, 2b - 2)$. מצא את שעורי הנקודה B.

5. נתונה הנקודה $P(3,-2)$. בחר שתי נקודות A ו-B כך ש-P הוא אמצע הקטע AB ומתקיים :

א. הקטע AB מקביל לציר ה-x.

ב. הקטע AB מקביל לציר ה-y.

ג. A נמצאת על הישר $y = 2x - 8$, ברביע הראשון.

ד. B נמצאת ברביע השלישי.

ה. A ברביע השני, על הישר $x + y = 1$.

ו. A ברביע הראשון ו-B ברביע השני.

6. מצא את משוואת האנך האמצעי לקטע AB כאשר נתון : $A(1,2)$, $B(5,-4)$.

7. מצא את משוואת האנך האמצעי לקטע AB כאשר נתון : $A(-2,5)$, $B(8,-9)$.

8. מצא את משוואת התיכון לצלע AB במשולש ABC, שקדקודיו : $A(7,-2)$, $B(-3,4)$, $C(1,2)$.

9. נתון משולש ABC שקדקודיו הם : $A(1,-3)$, $B(-5,3)$, $C(3,7)$.

א. מצא את המשוואות של שלושת התיכונים של המשולש.

ב. מצא את נקודת מפגש התיכונים.

ג. הראה כי נקודת חיתוך התיכונים מחלקת כל תיכון לשני קטעים שאחד מהם, הסמוך לקדקוד, גדול פי שתיים מהשני.

10. נתון משולש שקדקודיו הם : $A(1,-3)$, $B(-5,3)$, $C(3,7)$.

א. מצא את משוואות האנכים האמצעיים של המשולש.

ב. הראה כי שלושתם נחתכים בנקודה אחת וחשב את שיעורי נקודת החיתוך.

ג. הוכח כי נקודת חיתוך האנכים האמצעיים נמצאת במרחק שווה מקדקודי המשולש.

11. נתון מרובע ABCD שקדקודיו הם: $A(-5,9)$, $B(4,12)$, $C(8,8)$, $D(-7,3)$.

א. הוכח כי המרובע ABCD הוא טרפז.

ב. מצא את המשוואה של קטע האמצעים של המרובע ABCD.

ג. הוכח כי קטע האמצעים שמצאת בסעיף ב' חוצה גם את האלכסון BD.

12. נתון מרובע ABCD שקדקודיו הם: $A(0,6)$, $B(6,4)$, $C(8,-2)$, $D(2,0)$.

א. איזה מרובע הוא המרובע הנתון? הוכח!

ב. מצא את נקודת החיתוך של אלכסוני המרובע.

ג. הראה כי נקודת חיתוך האלכסונים חוצה כל אחד מהאלכסונים.

ד. הראה כי האלכסונים מאונכים זה לזה.

13. קדקודי המרובע ABCD הם: $D(10,0)$, $C(0,-14)$, $B(-4,2)$, $A(2,6)$.

א. מצא את אמצעי הצלעות של המרובע.

ב. הוכח כי אמצעי הצלעות הם קדקודים של מקבילית.

14. הוכח כי אמצעי הצלעות של כל מרובע הם קדקודים של מקבילית.

15. קדקודי המשולש ABC הם: $C(c,d)$, $B(b,0)$, $A(a,0)$. הראה כי הישר המחבר את אמצעי הצלעות AC ו-BC מקביל לציר ה-x.

16. קדקודי המשולש ABC הם: $C(c,d)$, $B(b,f)$, $A(a,e)$.

הראה כי הישר המחבר את אמצעי הצלעות AC ו-BC מקביל לצלע AB.

17. קדקודי המשולש ABC הם: $C(-1,2)$, $B(1,-4)$, $A(4,7)$. מצא את נקודת החיתוך של התיכון לצלע BC עם קטע האמצעים המקביל ל-BC.

18. במשולש ABC נתון: $B(-2,5)$, $A(1,6)$. אמצע הצלע BC הוא הנקודה $D(2,3)$. מצא את אמצע הצלע AC.

19. בחר קדקודים של משולש שבו ראשית הצירים והנקודה $K(1,7)$ הן אמצעים של צלעות.

20. אמצעי הצלעות של משולש נתון הם: $R(5,4)$, $Q(3,8)$, $P(-2,3)$. מצא את קדקודי המשולש.

21. אמצעי הצלעות של משולש נתון הם: $R(3,4)$, $Q(0,7)$, $P(2,3)$. מצא את קדקודי המשולש.

22. במקבילית ABCD נתונים שני קדקודים סמוכים $A(-4,2)$ ו-$B(4,-2)$, ונקודת מפגש האלכסונים $O(3.5,1.5)$. מצא את שני הקדקודים האחרים של המקבילית.

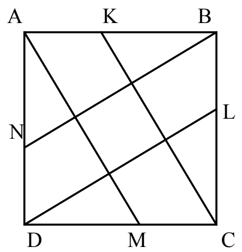
23. במקבילית ABCD נתונים שני קדקודים סמוכים $C(1,5)$ ו-$D(6,7)$, ונקודת מפגש האלכסונים $M(2,4)$. מצא את שני הקדקודים האחרים של המקבילית.

24. בריבוע ABCD נתונים שני קדקודים סמוכים: $A(-7,-1)$ ו-$B(-3,5)$. מצא את נקודת מפגש האלכסונים (שתי תשובות).

25. בריבוע ABCD נתונים קדקודים הנגדיים: $A(1,4)$ ו-$C(4,-5)$. מצא את שאר הקדקודים.

26. הנקודות $M(2,0)$, $L(0,2)$ הן אמצעי שתי צלעות סמוכות של ריבוע. נמק מדוע צלעות הריבוע מקבילות לצירים, ומצא את שיעורי הקדקודים.

27. אמצעי שתי צלעות נגדיות של ריבוע נמצאות בנקודות $(1,-1)$, $(-1,1)$. מצא את משוואות הצלעות האלה ואת שטח הריבוע.
28. מצא קדקודים של ריבוע כך ש-
א. אלכסוניו נחתכים בראשית הצירים, וצלעותיו אינן מקבילות לצירים.
ב. אחד האלכסונים נמצא על הישר $y = 2$.
ג. אחד האלכסונים מקביל לציר x ונמצא ברביע הרביעי.
29. בחר קדקודי מעוין כך ש-
א. אחד האלכסונים נמצא על הישר $x = 1$, ואחד הקדקודים על הישר $y = -2x$.
ב. האלכסונים נחתכים בנקודה $(1,3)$.
ג. האלכסונים נחתכים ברביע השני, ואחד מהם מקביל לישר $y = x$.
30. בדלתון ABCD נתונים שלושה קדקודים: $A(-2,2)$, $B(-1,-1)$, $C(6,-2)$. מצא D.
31. אלכסוני דלתון נחתכים בנקודה $(1,-1)$. משוואת האלכסון הראשי היא $x + y = 0$. בחר קדקודים מתאימים.
32. שתי צלעות של מקבילית מונחות על הישרים $x - 5y + 19 = 0$, $y = 2x + 2$. אחד האלכסונים מונח על הישר $4x + 7y - 86 = 0$. מצא את קדקודי המקבילית.
33. אחד מקדקודי הריבוע נמצא בנקודה $(4,-2)$. אחד האלכסונים מונח על הישר $x + 2y = 10$.
א. מצא את קדקודי הריבוע.
ב. מצא את אורך צלעו של הריבוע.
34. קדקודי המשולש ABC הם: $A(1,-7)$, $B(3,1)$, $C(-10,0)$.
א. מצא את משוואת הגובה לצלע AB.
ב. מצא את משוואת התיכון לצלע AB.
ג. מה תוכל להסיק על המשולש ABC על פי הסעיפים א ו-ב?



35. הנקודות K, L, M, N הן אמצעי צלעות המרובע ABCD.
הוכח כי הישרים AM, BN, CK, DL יוצרים ריבוע, וחשב פי כמה גדול שטח הריבוע הנתון משטח הריבוע שנוצר.
36. נתון משולש ABC שבו $B(-3,0)$. משוואת התיכון לצלע BC היא $6x + 5y = 10$ ומשוואת התיכון לצלע AB היא $y = 3x - 5$.
מצא את שיעורי הנקודות A ו-C.
הדרכה: סמן את שיעורי הקדקוד A על ידי פרמטרים, והבע באמצעותם את שיעורי אמצע הצלע AB. הצב את שיעורי הנקודות במשוואות המתאימות.
37. שטחו של משולש שווה שוקיים הוא 6.25, וקדקודי בסיסו $B(2,-3)$, $C(-4,5)$. מצא את A.
38. במשולש ABC הקדקוד B הוא $(1,-2)$. משוואת התיכון מקדקוד A היא $x - y + 1 = 0$, המשוואה של הצלע AC היא $x - 5y + 21 = 0$. מצא את הקדקודים A ו- C.
39. נתונים ישרים $y = 2x + 6$ ו- $y = -0.5x + 3.5$. מצא את משוואת הישר החותך את הישרים

הנתונים בנקודות שאמצע הקטע ביניהם הוא (0,1).

40. נקודות A(-3,1) ו- C(5,7) הן קודקודים נגדיים של מעוין ABCD. אורך האלכסון BD הוא 20. מצא את הקדקודים B ו- D.

41. משוואת התיכון ומשוואת הגובה במשולש היוצאים מאותו קדקוד הן בהתאמה $3x + 2y – 8 = 0$ ו- $3x + y = 4$. אחד הקדקודים של המשולש הוא בנקודה (-1,0). מצא את שאר הקדקודים של המשולש.

42. במשולש שווה שוקיים משוואת התיכון לשוק היא $x – 3y + 7 = 0$. משוואת האנך האמצעי לבסיס המשולש היא $2x – y – 6 = 0$. קדקוד הראש של המשולש הוא (7,8). מצא את משוואות צלעות של המשולש.

43. במשולש ABC נתון C(0,-5). משוואת חוצה זווית B היא $2x + y = 0$ ומשוואת התיכון היוצא מקדקוד B היא $3x + 2y – 1 = 0$. מצא את הקדקוד A.

44. במשולש ABC, אחד הקדקודים הוא C(2,1). משוואת חוצה זווית B היא $2x – y = 8$ ומשוואת התיכון לצלע BC היא $17y – 11x = 83$.

מצא את A.

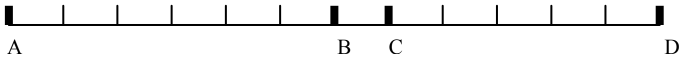
תשובות לפרק 3.1

1. א. (1,1) ; ב. (4,-2) ; ג. (9,7.5) ; ד. (-4.5,0) ; ה. (-0.5a,5b) ; ו. (2a,2b); ז. (a,b); ח. (0,2a-2)
2. (2,0) 3. א. (-7,12) ; ב. (-3,0) ; ג. (1,15) ; ד. (-9,-1) 4. (-1 – a, -16b + 2)
6. $2x – 3y = 9$ 7. $5x – 7y = 29$ 8. $y = - x + 3$ 9. א. $y = -4x + 1$; ב. $\left(-\frac{1}{3},2\frac{1}{3}\right)$ $y = 1.4x + 2.8$, $7y + x = 16$ 10. א. $y = - 2x + 3$, $y= - 0.2x + 2.4$; ב. $\left(\frac{1}{3},2\frac{1}{3}\right)$ $y = x + 2$ 11. ב. $x – 3y + 8 = 0$ 12. א. מעוין ; ב. (4,2)
13. א. (6,3) , (5,-7) , (-2,-6) , (-1,4) 17. (2,3) 18. (3.5,3.5) 20. (-4,-2) , (10,0) , (0,8)
21. (1,6) , (5,-2) , (-1,8) 22. C(11,1) , D(3,5) 23. A(3,3) , B(-2,1) 24. (-2,0) או (-8,4) 25. (7,1) , (-2,-2) 26. (-2,-2) , (-2,2) , (2,-2) , (2,2) 27. $y = x \pm 2$ 30. (1,3)
32. (1,4) , (11,6) , (4,10) , (14,12) 33. א. (10,0) , (8,6) , (2,4) ; ב. $2\sqrt{10}$
34. א. $x + 4y + 10 = 0$; ב. $x + 4y + 10 = 0$; ג. המשולש שווה שוקיים 35. פי 5
36. A(5,-4) , C(3,4) 37. (0,1.75) או (-2,0.25) 38. A(4,5), C(-1,4)
39. $x – 3y + 3 = 0$ 40. (7,-4), (-5,12) 41. (5,2) , (0,4) 42. $x – y + 1 = 0$, $7x – y – 41 = 0$, $x + 2y – 8 = 0$ 43. (10,-9) 44. (11,4)

3.2 חלוקה ביחס

3.2.1 חלוקה פנימית (בכל התרגילים של סעיף זה החלוקה היא פנימית.)

1. I. נתון

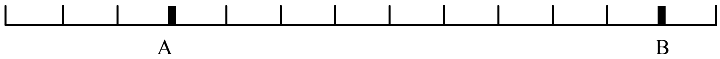


מצא את היחסים:

א. AB:BC   ג. DC:CA   ה. BC:CD

ב. AB:BD   ד. CB:BA   ו. AC:CD

II. נתון



הוסף לסרטוט נקודה P כך ש-

א. P מחלקת את הקטע AB חלוקה פנימית ביחס 2:1.

ב. P מחלקת את הקטע AB חלוקה פנימית ביחס 1:2.

ג. P מחלקת את הקטע BA חלוקה פנימית ביחס 7:2.

ד. A מחלקת את הקטע PB חלוקה פנימית ביחס 1:3.

ה. B מחלקת את הקטע AP חלוקה פנימית ביחס 9:1.

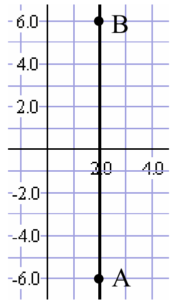
ו. A מחלקת את הקטע PB חלוקה פנימית ביחס 2:9.

ז. P מחלקת את הקטע AB חלוקה פנימית ביחס 4:5.

ח. P מחלקת את הקטע BA חלוקה פנימית ביחס 5:4.

2. להלן מסורטט קטע AB במערכת צירים. מצא בכל סרטוט שיעורי נקודה P המחלקת את AB ביחסים הנתונים. פתור בעזרת הסרטוט, אין צורך להיעזר בנוסחאות.

I.



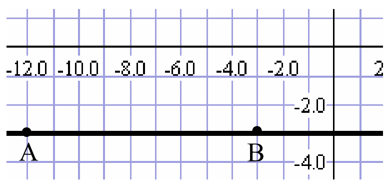
1:5

2:1

1:1

1:3

II.



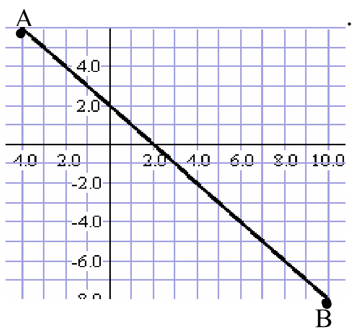
א. 1:1

ב. 1:2

ג. 2:7

ד. 2:1

III.



א. 1:1

ב. 1:6

ג. 5:2

ד. 3:4

3. הנקודה C מחלקת את הקטע AB לפי היחס AC:BC = 2:3. מצא את שיעוריה אם קצות הקטע הנתון הם:

א. $A(-7,3)$, $B(3,8)$ ב. $A(0,12)$, $B(5,2)$ ג. $A(4,-1)$, $B(-1,-16)$

4. הנקודה C מחלקת את הקטע AB לפי היחס $AC:CB = 4:1$. נתונים שיעורי הנקודות A ו-C.מצא את B.

א. $A(2,2)$, $C(6,10)$ ב. $A(-10,-4)$, $C(2,0)$ ג. $A(11,15)$, $C(3,7)$

5. הנקודה C מחלקת את הקטע AB לפי היחס $AC:CB = 3:7$. נתונים שיעורי הנקודות B ו-C. מצא את A.

א. $C(-5,0)$, $B(2,7)$ ב. $C(4,-1)$, $B(-10,6)$ ג. $C(-1,0)$, $B(20,14)$

6. נתונות הנקודות $A(1,4)$, $B(6,-6)$, $C(3,0)$. וודא כי הן נמצאות על ישר אחד, ומצא את היחס שבו מחלקת C את הקטע AB.

7. כיצד אפשר לקבל את הנוסחה למציאת אמצע קטע מתוך הנוסחה הכללית של מציאת נקודה שמחלקת קטע ביחס נתון?

8. נתונה הנקודה $P(3,-2)$. בחר שתי נקודות A ו-B כך ש-P מחלקת את הקטע AB ביחס $1:2$, ומתקיים:

א. הקטע AB מקביל לציר ה-x.

ב. הקטע AB מקביל לציר ה-y.

ג. A נמצאת על הישר $y = 2x - 8$.

ד. B נמצאת ברביע השלישי.

ה. A נמצאת ברביע השני, על הישר $x + y = 1$.

ו. A ברביע הראשון ו-B ברביע הרביעי.

9. נתון משולש ABC שקדקודיו הם $A(4,9)$, $B(-2,3)$, $C(10,-3)$.

א. הראה כי שלושת תיכוני המשולש נפגשים בנקודה אחת, ומצא את שיעוריה.

ב. באיזה יחס מחלקת הנקודה שמצאת את כל אחד מהתיכונים?

10. נתון משולש ABC שקדקודיו הם $A(0,-1)$, $B(4,11)$, $C(14,-1)$.

א. הראה כי שלושת תיכוני המשולש נפגשים בנקודה אחת, ומצא את שיעוריה.

ב. באיזה יחס מחלקת הנקודה שמצאת את כל אחד מהתיכונים?

11. הוכח בדרך אנליטית את המשפט:

שלושת התיכונים של משולש נחתכים בנקודה אחת, שמחלקת כל תיכון לפי היחס $2 : 1$.

(העבר את ציר ה-x דרך שניים מקדקודי המשולש, ואת ציר ה-y דרך הקדקוד השלישי.)

12. נתונים שניים מקדקודי המשולש ABC, והנקודה M שבה נפגשים התיכונים. מצא את שיעורי הקדקוד בשלישי.

א. $A(1,6)$, $C(-5,-2)$, $M(1,-2)$ ב. $B(-8,-10)$, $C(-4,-2)$, $M(-2,-6)$

13. מצא את משוואת חוצה הזווית A במשולש ABC, כאשר נתון: $A(1,1)$, $B(4,5)$, $C(7,-7)$.

הדרכה: היעזר במשפט "חוצה זווית במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית לשני קטעים שהיחס ביניהם הוא כיחס הצלעות הסמוכות".

14. הנקודות $A(2,-2)$ ו-$D(-1,7)$ הן קצות התיכון AD במשולש ABC. מצא את נקודת החיתוך של התיכונים, ובחר שתי נקודות B ו-C שיכולות לשמש כקדקודים של המשולש.

15. אחד התיכונים של משולש נמצא על הישר $y = x$. התיכונים נחתכים בנקודה $(2,2)$. בחר שלושה קדקודים מתאימים.

16. שניים מתיכוני משולש נמצאים על הישרים $y = x + 2$ ו-$y = 3$. בחר קדקודים מתאימים.

17. במשולש ABC, הקדקוד A הוא $A(4,-1)$ ומשוואות התיכונים היוצאים מהקדקודים B ו- C הם בהתאמה $x - 4y + 6 = 0$ ו- $x + 3y = 8$. מצא את הקדקודים B ו- C.

18. במשולש ABC הקדקוד A הוא $(2,-5)$ ותיכונים היוצאים מהקדקודים B ו- C הם $4x + 5y = 0$ ו- $x - 3y = 0$. מצא את שאר הקדקודים של המשולש.

19. משוואת אחת מצלעות של משולש $y + 7y = 8$. אחד הקדקודים הוא בנקודה $(5,3)$ ושיעור ה- x של נקודת המפגש התיכונים הוא 2.

א. מצא את נקודת המפגש של תיכונים

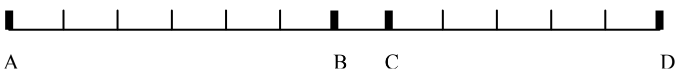
ב. מצא את שאר הקדקודים של המשולש אם הוא שווה שוקיים וקדקוד הראש שלו מעל בסיסו.

20. קדקודי המשולש ABC הם $A(2,6)$, $B(-2,-2)$, $C(10,-6)$. מצא על הצלע BC נקודה D עבורה שטח המשולש ABD גדול פי 3 משטח המשולש ADC.

21. נתון משולש שווה שוקיים ABC $(AB = AC)$. משוואות התיכונים לשוקיים AB ו- AC הן בהתאמה $5x + y - 26 = 0$ ו- $x + 5y - 18 = 0$. נתון כי הנקודה $(8,-6)$ נמצאת על הישר עליו מונח בסיסו של המשולש. מצא את הקדקודים של המשולש.

3.2.2 חלוקה חיצונית

22. I. נתון הסרטוט:



מצא את היחסים הבאים:

א. $AC:CB$ ג. $DB:BC$ ה. $BA:AC$

ב. $AD:DC$ ד. $DA:AB$ ו. $DA:AC$

II. הוסף לסרטוט

נקודה P כך ש-

א. P מחלקת את הקטע AB חלוקה חיצונית לפי היחס $10:1$.

ב. P מחלקת את הקטע AB חלוקה חיצונית לפי היחס $1:4$.

ג. A מחלקת את הקטע BP חלוקה חיצונית לפי היחס $9:10$.

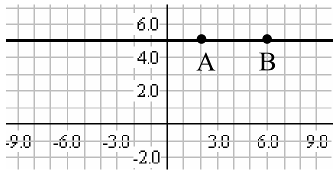
ד. A מחלקת את הקטע PB חלוקה חיצונית לפי היחס $5:9$.

ה. B מחלקת את הקטע AP חלוקה חיצונית לפי היחס $2 :3$.

ו. B מחלקת את הקטע AP חלוקה חיצונית לפי היחס $9:10$.

23. להלן מסורטט קטע AB במערכת צירים. מצא בכל סרטוט שיעורי נקודה P המחלקת את AB חלוקה חיצונית ביחסים הנתונים. פתור בעזרת הסרטוט, אין צורך להיעזר בנוסחאות.

I.

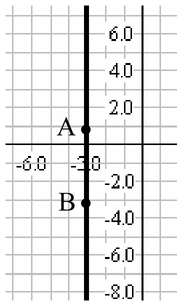


א. 3:1

ב. 1:2

ג. 3:5

II.

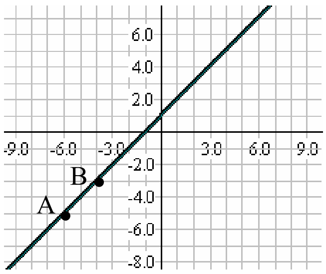


א. 2:1

ב. 1:2

ג. 3:2

III.



א. 4:3

ב. 2:1

ג. 3:2

24. הנקודות A ו-B נמצאות על הישר $y = 4$. שיעורי ה-x שלהן שווים ל-2- ו-14 בהתאמה. הנקודה P מחלקת את הקטע AB חלוקה פנימית לפי היחס 5:3, והנקודה Q מחלקת אותו חלוקה חיצונית לפי היחס 1:9. מצא את שיעורי אמצע הקטע PQ.

25. נתונות הנקודות $A(0,5)$ ו-$B(2,3)$. בחר נקודה C שמחלקת את הקטע AB חלוקה חיצונית ביחס הגדול מ-1, ונקודה D שמחלקת אותו חלוקה חיצונית ביחס קטן מ-1. ציין בכל מקרה את היחס שבחרת.

26. הנקודה D מחלקת את הקטע AB חלוקה חיצונית לפי היחס $AD:DB = 2:3$. מצא את שיעוריה אם נתונים שיעורי קצות הקטע:

א. $A(-7,3)$, $B(3,8)$ ב. $A(0,12)$, $B(5,2)$ ג. $A(4,-1)$, $B(-1,-16)$

27. הנקודה D מחלקת את הקטע AB חלוקה חיצונית לפי היחס $AD:DB = 4:1$. נתונים שיעורי הנקודות A ו-D. מצא את B.

א. $A(2,2)$, $D(8\frac{1}{3},15\frac{1}{3})$ ב. $A(-10,-4)$, $D(10,2\frac{2}{3})$ ג. $A(11,15)$, $D(-2\frac{1}{3},1\frac{2}{3})$

28. הנקודה D מחלקת את הקטע AB חלוקה חיצונית ביחס $AD:DB = 3:7$. נתונים שיעורי הנקודות B ו-D. מצא את A.

א. $B(2,7)$, $D(-15.5,-10.5)$ ב. $B(-10,6)$, $D(25,-11.5)$ ג. $B(20,14)$, $D(-32.5,-21)$

29. נתונות הנקודות $A(1,4)$, $B(6,-6)$, $C(3,0)$.

א. באיזה יחס מחלקת הנקודה A את הקטע BC?

ב. באיזה יחס מחלקת הנקודה B את הקטע AC?

30. מצא את משוואת חוצה הזווית החיצונית הצמודה לזווית A במשולש ABC, כאשר נתון: $A(1,1)$, $B(4,5)$, $C(7,-7)$.

הדרכה: היעזר במשפט: חוצה זווית חיצונית במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית חלוקה חיצונית לשני קטעים שהיחס ביניהם הוא כיחס הצלעות הסמוכות.

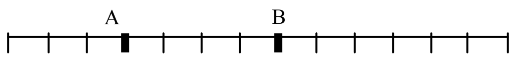
31. בשאלה 48 מצאת את חוצה הזווית A במשולש ABC שבו: $A(1,1)$, $B(4,5)$, $C(7,-7)$.
ובשאלה 60 מצאת את חוצה הזווית החיצונית הצמודה לה.
בדוק מהי הזווית בין שני החוצים. איזה משפט גיאומטרי מתקיים כאן?

32. הנקודה D מחלקת את הקטע AB חלוקה חיצונית לפי היחס $AD:DB = m:n$. ציין את מיקומה של הנקודה D ביחס לנקודות A ו-B, כאשר:

א. $m > n$ ב. $m < n$ ג. $m = n$ ד. $m = 0$

3.2.1 חלוקה הרמונית

33. נתון הסרטוט



בכל אחד מהמקרים הבאים הוסף לסרטוט נקודות P ו-Q המקיימות:

א. P ו-Q מחלקות את הקטע AB חלוקה הרמונית ביחס $3:1$.

ב. P ו-Q מחלקות את הקטע AB חלוקה הרמונית לפי היחס $1:3$.

ג. A ו-B מחלקות את הקטע PQ חלוקה הרמונית לפי היחס $2:1$.

ד. A ו-B מחלקות את הקטע PQ חלוקה הרמונית לפי היחס $1:2$.

34. הנקודות A ו-B נמצאות על הישר $x = 3$. שיעורי ה-y שלהן שווים בהתאמה ל-2 ו-5 בהתאמה. הנקודות C ו-D מחלקות את הקטע AB חלוקה הרמונית לפי היחס $2 : 1$.
חשב את אורך הקטע CD.

35. נתונות הנקודות $A(1,2)$ ו-$B(5,6)$. הנקודות C ו-D מחלקות את הקטע AB חלוקה הרמונית לפי היחס $3:1$. מצא את הנקודה M שהיא אמצע הקטע AB, וחשב באיזה יחס מחלקת M את הקטע AB.

36. הנקודות $C(0,5)$ ו-$D(-3,0)$ מחלקות את הקטע AB חלוקה הרמונית. בחר נקודות A ו-B מתאימות, וציין את היחס.

37. התבונן בצמדי השאלות: 38 ו-56, 39 ו-57, 40 ו-58. לכל זוג שאלות נסח את התשובות שקיבלת תוך שימוש במושג "חלוקה הרמונית".

38. קדקודי המשולש ABC הם: $A(0,0)$, $B(4,3)$, $C(12,-3)$.

א. מצא את משוואת חוצה הזווית B. (הסתמך על המשפט: חוצה זווית במשולש מחלק את הצלע שממול הזווית ביחס של הצלעות הכולאות אותה.)

ב. ומצא את משוואת חוצה הזווית החיצונית הצמודה ל-B. (הסתמך על המשפט: חוצי שתי זוויות צמודות ניצבים זה לזה.)

ג. חוצה הזווית הפנימית B חותך את הצלע AC בנקודה K, וחוצה הזווית החיצונית הצמודה ל-B חותך את הצלע AC בנקודה M. מצא את שיעורי הנקודות K ו-M.

ד. באיזה יחס מחלקות הנקודות K ו-M את הצלע AC?

39. נתונים שניים מקדקודי המשולש ABC: $A(1,5)$, $C(16,-1)$. חוצה הזווית C חותך את

הצלע AB בנקודה K(4,-1).

א. מצא את משוואת חוצה הזווית החיצונית הצמודה ל-C.

ב. חוצה הזווית החיצונית C חותך את המשך הצלע AB בנקודה L. מצא את שיעוריה.

ג. מהם שיעורי הקדקוד B?

תשובות לפרק 3.2

3.2.1 חלוקה פנימית

1. א. 6:1 ; ב. 1:1 ; ג. 5:7 ; ד. 1:6 ; ה. 1:5 ; ו. 7:5   3. א. (-3,5) ; ב. (2,8) ; ג. (2,-7)

4. א. (7,12) ; ב. (5,1) ; ג. (1,5)   5. א. (-8,-3) ; ב. (10,-4) ; ג. (-10,-6)   6. 2:3

9. א. (4,3) ; ב. 2:1   10. א. (6,3) ; ב. 2:1   11. א. B(7,-10) ; ב. A(6,-6)   13. y = 1

14. (0,4)   17. C(-4,4), B(6,3)   18. (-5,4), (3,1)   19. א. (2,4)   ב. (0,8) , (1,1)

20. (7,-5)   21. (10,8) , (-2,4),(6,-4)

3.2.2 חלוקה חיצונית

22. א. 7:1 ; ב. 12:5 ; ג. 6:1 ; ד. 2:1 ; ה. 6:7 ; ו. 12:7   24. (2,4)   26. א. (-27,-7) ;

ב. (-10,32) ; ג. (14,29)   27. א. (7,12) ; ב. (5,1) ; ג. (1,5)   28. א. (-8,-3) ; ב. (10,-4) ;

ג. (-10,-6)   29. א. 5:2 ; ב. 5:3   30. x = 1   31. ישרה

32. א. מעבר ל-B ; ב. מעבר ל-A ; ג. לא יתכן ; ד. מתלכדת עם A

3.2.3 חלוקה הרמונית

34. 4   35. (5.5,6.5) , חלוקה חיצונית 9:1   38. א. x = 4 ; ב. y = 3 ; ג. M(-12,3) , K(4,-1)

; ד. חלוקה הרמונית לפי היחס 1:2   39. א. x = 16 ; ב. (16,-25) ; ג. (6,-5)

פרק 4: הוכחות אנליטיות של תכונות גיאומטריות

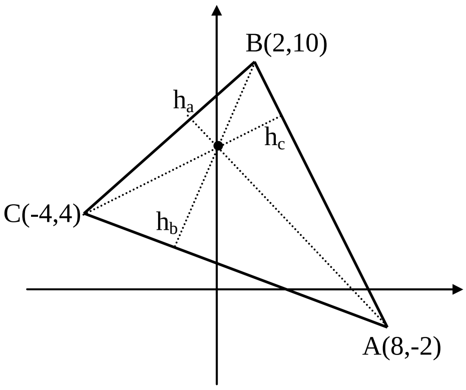
בסעיף זה נאמת באמצעות טכניקות של גיאומטריה אנליטית, תכונות גיאומטריות ידועות.
בחלק מהמקרים נסתפק בדוגמאות ובחלק נביא הוכחות כלליות.

<u>דוגמאות</u>

1. נתון משולש ABC שקדקודיו הם: A(8,-2) , B(2,10) , C(-4, 4). מצא את נקודת החיתוך של גבהיו והראה כי כולם נפגשים בנקודה אחת.

<u>פתרון</u>

נסרטט את המשולש במערכת צירים.



נחשב את משוואות הגבהים.

א. הגובה h_c מ- C ל-AB

שיפוע AB הוא: $\frac{10-(-2)}{2-8}=\frac{12}{-6}=-2$

לכן שיפוע הגובה h_c הוא $\frac{1}{2}$. הגובה עובר בנקודה C(-4,4) לכן משוואתו היא

$$y-4=\frac{1}{2}(x+4)$$
$$y=\frac{1}{2}x+6$$

ב. הגובה h_b מ- B ל-AC.

שיפוע AC הוא $\frac{4-(-2)}{-4-8}=-\frac{1}{2}$ לכן שיפוע הגובה הוא 2. מכיוון שגובה זה עובר בנקודה B(2,10) משוואתו היא

$$y-10=2(x-2)$$
$$y=2x+6$$

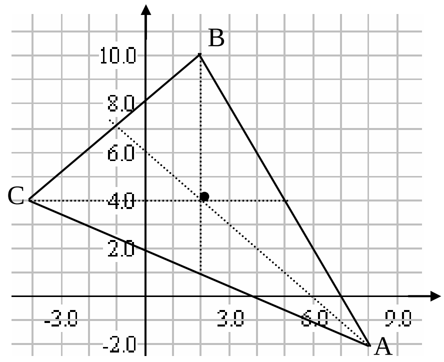
ג. הגובה h_a מ- A ל-BC.

שיפוע BC הוא 1 לכן שיפוע הגובה הוא 1-. שיעורי הנקודה A הם (8,-2), לכן המשוואה של h_a היא

$$y+2=-1(x-8)$$
$$y=-x+6$$

ממשוואות שלושת הגבהים רואים כי כולם חותכים את ציר ה-y בנקודה (0,6), כלומר שלושתם נפגשים בנקודה אחת.

2. מצא את נקודת חיתוך התיכונים של המשולש ABC שקדקודיו הם: A(8,-2) , B(2,10) , C(-4,4) והראה כי הם נפגשים בנקודה אחת.



<u>פתרון</u>

תיכון במשולש הוא קטע המחבר אמצע של צלע עם הקדקוד שממולה.

א. משוואת התיכון m_a (מ-A ל-BC)

שיעורי אמצע הצלע BC:

$$x = \frac{2+(-4)}{2} = -1 \quad , \quad y = \frac{10+4}{2} = 7$$

שיעורי הנקודה A הם (8,-2) לכן שיפוע m_a הוא $\frac{-2-7}{8-(-1)} = -1$ ומשוואתו y = -x + 6 (בדוק).

ב. משוואת התיכון m_c (מ-C ל-AB)

באותה דרך שחישבנו את משוואת התיכון m_a מחשבים את משוואת m_c.

שיעורי אמצע הצלע AB הם (5,4) ושיעורי הנקודה C הם (-4,4) לכן שיפוע התיכון הוא 0 ומשוואתו y = 4 (בדוק זאת).

ג. משוואת m_b (התיכון מ-B ל-AC)

אמצע AC היא הנקודה (2,1) ושיעורי הנקודה B הם (2,10). שיעורי ה-x של שתי הנקודות שווים כלומר, התיכון הוא ישר המקביל לציר y, ומשוואתו x = 2 .

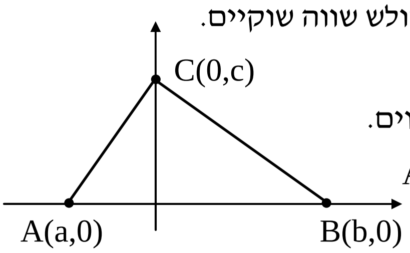
התיכונים m_c ו- m_b נחתכים בנקודה (2,4) וכשמציבים ערכים אלה במשוואת התיכון m_a: y = -x +6 מקבלים כי הערכים מקיימים את המשוואה: 4 = -2 + 6, כלומר נקודה זו נמצאת גם על התיכון השלישי.

מסקנה: שלושת תיכוני המשולש הנתון נחתכים בנקודה אחת.

<u>תרגיל 1</u>

הראה כי נקודת מפגש התיכונים M מחלקת את כל אחד מתיכוני המשולש ביחס 2:1, כאשר הקטע הגדול סמוך לקדקוד.

3. הוכח את המשפט: משולש ששניים מתיכוניו שווים הוא משולש שווה שוקיים.



<u>הוכחה</u>

נסמן ב-A וב-B את הקדקודים שמהם יוצאים התיכונים השווים.

נבחר מערכת צירים שבה הישר AB מונח על ה- x והאנך ל-AB דרך C הוא ציר y (ראה סרטוט).

במערכת צירים זו שיעורי הקדקודים הם : $A(a,0)$, $B(b,0)$, $C(0,c)$.

עלינו להראות כי מהעובדה שהתיכונים m_a ו-m_b שווים נובע ש $AB = AC$, כלומר $a = -b$.

חישוב אורך התיכונים :

שיעורי אמצע הצלע BC הם $(\frac{b}{2},\frac{c}{2})$ ושיעורי A הם $(a,0)$. לכן ריבוע אורך התיכון לצלע BC הוא

$$m_a{}^2 = (\frac{b}{2}-a)^2 + (\frac{c}{2})^2$$

שיעורי אמצע הצלע AC הם $(\frac{a}{2},\frac{c}{2})$ ושיעורי B הם $(b,0)$. לכן ריבוע אורך התיכון לצלע AC הוא

$$m_b{}^2 = (\frac{a}{2}-b)^2 + (\frac{c}{2})^2$$

על-פי הנתון $m_a = m_b$ לכן גם $m_a{}^2 = m_b{}^2$ כלומר

$$(\frac{b}{2}-a)^2 + (\frac{c}{2})^2 \quad = \quad (\frac{a}{2}-b)^2 + (\frac{c}{2})^2$$

נפתח סוגריים ונפשט

$$\frac{b^2}{4} - ab + a^2 + \frac{c^2}{4} = \frac{a^2}{4} - ab + b^2 + \frac{c^2}{4}$$

$$\frac{3}{4}a^2 = \frac{3}{4}b^2$$

$$a^2 = b^2$$

$a \neq b$ כי הנקודות A ו- B לא מתלכדות לכן $a = -b$

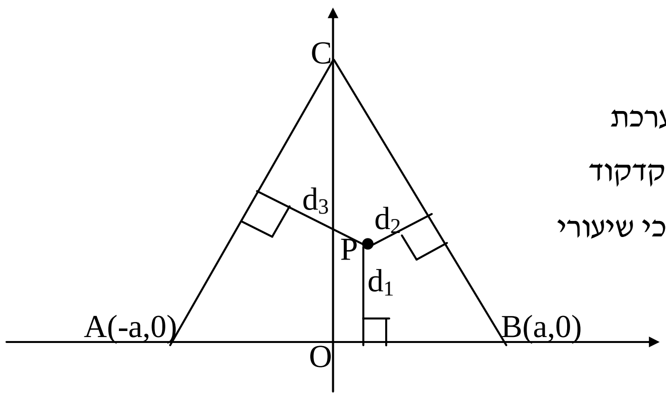
<u>תרגיל 2*</u> : הוכח בעזרת המשולש שבתרגיל זה כי שלושת הגבהים במשולש נפגשים בנקודה אחת.

<u>תרגיל 3</u>

הוכח בשיטות של גיאומטריה אנליטית שסכום מרחקיה של נקודה , הנמצאת בתוך משולש שווה צלעות, מהצלעות שווה לגובה המשולש.

<u>הוכחה</u> :

בלי הגבלת הכלליות נמקם את המשולש במערכת צירים כך שצלע אחת מונחת על ציר ה- x והקדקוד שמול הצלע על ציר ה- y (ראה סרטוט).נניח כי שיעורי של הנקודה A הם $(-a,0)$ ושל הנקודה B הם $(a,0)$ והנקודה הפנימית P היא (p,q) .



כל זוויותיו של המשולש הם $60°$ לכן את גובה המשולש אפשר למצוא במשולש ישר הזווית AOC :

$$\tan 60^\circ = \frac{h}{a} \quad \Rightarrow \quad h = a\sqrt{3}$$

באמצעות זוויות המשולש נקבל גם שיפועים של הישרים AC ו- BC : $m_{AC} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$, $m_{BC} = \tan(180^\circ - 60^\circ) = -\sqrt{3}$, לכן משוואות הישרים עליהם מונחות הצלעות האלו הם בהתאמה $y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}a$ ו- $y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}a$. על מנת להשתמש בנוסחת המרחק בין P לצלעות המשולש נרשום את המשוואות בצורה התקנית $\sqrt{3}x - y + \sqrt{3}a = 0$ ו- $\sqrt{3}x + y - \sqrt{3}a = 0$. נסמן את מרחקיה של P מהצלעות של המשולש ב- d_1, d_2, d_3 ונחשב אותם :

$$d_1 = q$$
$$d_2 = \frac{\left|\sqrt{3}p - q + \sqrt{3}a\right|}{\sqrt{3+1}}$$
$$d_3 = \frac{\left|\sqrt{3}p + q - \sqrt{3}a\right|}{\sqrt{3+1}}$$

הנקודה P פנימית במשולש ונמצאת מתחת לישרים AC ו- BC, כלומר הנקודה P וראשית הצירים (0,0) הן באותו חצי מישור ביחס לישרים AC ו- BC. בהערה בפרק 2.3 התייחסנו לאפשרות לרשום נוסחת המרחק בין נקודה לישר ללא ערך מוחלט. כיוון ש- $\sqrt{3}\cdot 0 + \sqrt{3}\cdot a - 0 > 0$ ו- $\sqrt{3}\cdot 0 + 0 - \sqrt{3}a < 0$, נקבל $\sqrt{3}p + \sqrt{3}a - q > 0$ ו- $\sqrt{3}p + q - \sqrt{3}a < 0$. פירוש הדבר, אפשר לרשום את המרחקים מהצלעות ללא ערך מוחלט באופן הבא : $d_3 = -\frac{\sqrt{3}p + q - \sqrt{3}a}{2}$, $d_2 = \frac{\sqrt{3}p - q + \sqrt{3}a}{2}$.

נחבר את כל המרחקים ביחד ונקבל

$d_1 + d_2 + d_3 = q + \frac{\sqrt{3}p - q + \sqrt{3}a}{2} + \left(-\frac{\sqrt{3}p + q - \sqrt{3}a}{2}\right) = \sqrt{3}a$,מה שהיה צריך להוכיח.

תרגילים לפרק 4

הוכחות אנליטיות של תכונות גיאומטריות

הוכח את המשפטים הבאים בדרך אנליטית. לשם כך בחר מערכת צירים מתאימה.

1. הוכח את משפט פיתגורס: סכום ריבועי הניצבים של משולש ישר זווית שווה לריבוע היתר.
2. הוכח: ריבוע הגובה ליתר במשולש ישר זווית שווה למכפלת היטלי הניצבים על היתר.
3. הוכח את המשפט: משולש שבו אחד הגבהים הוא גם תיכון, הוא משולש שווה שוקיים.

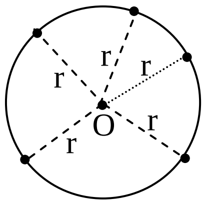
   הדרכה: בחר מערכת צירים כך שאחת הצלעות תהיה על ציר ה-x והגובה המורד עליה יהיה על ציר ה-y.
4. הוכח: משולש שבו האנך האמצעי לאחת הצלעות הוא גם תיכון, הוא משולש שווה שוקיים.
5. הוכח: אלכסוני מלבן שווים זה לזה.
6. הוכח: אחד האלכסונים של דלתון הוא האנך האמצעי של האלכסון השני.
7. הוכח: אלכסוני מקבילית חוצים זה את זה.
8. הוכח: מרובע שאלכסוניו חוצים זה את זה הוא מקבילית.
9. BM הוא תיכון לצלע AC של המשולש ABC. מאריכים את BM כאורכו עד לנקודה D ($BD = 2BM$). הוכח כי המרובע $ABCD$ הוא מקבילית.
10. הוכח כי אלכסוני מעוין מאונכים זה לזה.
11. הוכח: מרובע שאלכסוניו ניצבים זה לזה וחוצים זה את זה הוא מעוין.
12. הוכח: קטע המחבר את אמצעי שתי צלעות במשולש, מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.
13. הוכח: קטע החוצה את אחת מצלעות משולש ומקביל לצלע השניה, חוצה גם את הצלע השלישית.
14. הוכח: קטע אמצעים במשולש חוצה כל קטע שמחבר נקודה על הצלע המקבילה לו, עם הקדקוד שמולה.
15. נתון משולש ABC. הנקודות M ו-N מחלקות את הצלעות AB ו-AC לפי היחס $m:n$ ($AM:MB = AN:NC = m:n$). מחברים את הקדקוד A עם נקודה P שעל הצלע BC.

    הוכח כי הישר MN מחלק את הקטע AP לפי היחס $m:n$.
16. נתון משולש ABC. הנקודה M מחלקת את הצלע AB לפי היחס $AM:MB = m:n$.

    הישר המקביל ל-BC ועובר דרך M, חותך את AC בנקודה N. הוכח כי $AN:NC = m:n$.
17. נתון משולש ABC. ישר המקביל לצלע BC חותך את AB בנקודה M ואת AC בנקודה N.

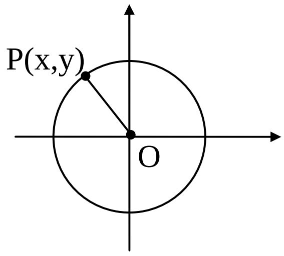
    הוכח: $AM:AB = AN:AC = MN:AB$.
18. הוכח: שלושת האנכים האמצעיים לצלעות משולש נפגשים בנקודה אחת.
19. הוכח: התיכון ליתר במשולש ישר זווית שווה למחצית היתר.
20. נתון משולש. הוכח: נקודת החיתוך של שלושת האנכים האמצעיים, נקודת החיתוך של שלושת הגבהים ונקודת החיתוך של שלושת התיכונים, נמצאות על ישר אחד.
21. סכום מרחקיה של נקודה , הנמצאת בבסיסו של המשולש שווה שוקיים שווה לגובה לשוק.

פרק 5: המעגל



הגדרה: המעגל הוא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות במישור הנמצאות במרחק שווה מנקודה קבועה הנקראת **מרכז**. המרחק הקבוע נקרא **רדיוס** (מחוג).

5.1 מעגל שמרכזו ראשית הצירים



במעגל שמרכזו ראשית הצירים O ורדיוסו r, מרחק כל אחת מנקודות המעגל מהמרכז O שווה ל- r. בתרגום לאלגברה:

אם P(x,y) היא נקודה המייצגת את נקודות המעגל הרי ש-

$PO = r$ כלומר $\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = r$

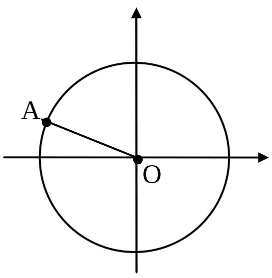
לכן משוואת המעגל היא

$$\boxed{x^2+y^2=r^2}$$

<u>תרגיל 1</u>

מצא את משוואת המעגל סביב ראשית הצירים, העובר בנקודה A(-7,2).

<u>פתרון</u>



רדיוס המעגל שווה למרחק הנקודה A ממרכז המעגל שהוא ראשית הצירים (0,0).

$r^2 = AO^2 = (-7-0)^2 + (2-0)^2 = 49 + 4 = 53$

לכן משוואת המעגל היא $x^2 + y^2 = 53$

המצב ההדדי בין נקודה ומעגל

מהו המצב ההדדי בין נקודה P(a,b) ובין מעגל $x^2 + y^2 = r^2$?

א. P(a,b) נמצאת **על** המעגל אם ורק אם שיעוריה מקיימים את משוואת המעגל $a^2 + b^2 = r^2$.

ב. הנקודה P(a,b) נמצאת **בתוך** המעגל אם ורק אם מרחקה ממרכז המעגל קטן מהרדיוס, כלומר $a^2 + b^2 < r^2$.

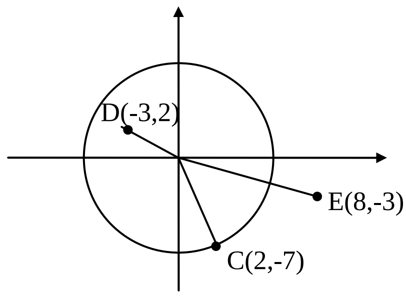
ג. הנקודה P(a,b) נמצאת **מחוץ** למעגל אם ורק אם מרחקה ממרכז המעגל גדול מהרדיוס, כלומר $a^2 + b^2 > r^2$.

<u>דוגמאות</u>

א. הנקודה C(2,-7) נמצאת על המעגל שמשוואתו היא $x^2 + y^2 = 53$ כי $2^2 + (-7)^2 = 53$.

ב. הנקודה D(-3,2) נמצאת בתוך המעגל שמשוואתו היא $x^2 + y^2 = 53$ כי $(-3)^2 + 2^2 = 13 < 53$.

ג. הנקודה E(8,-3) נמצאת מחוץ למעגל שמשוואתו היא $x^2 + y^2 = 53$ כי $8^2 + (-3)^2 = 73 > 53$.

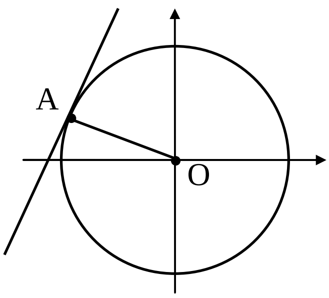


משיק העובר בנקודה נתונה הנמצאת על המעגל

<u>תרגיל 2</u>

הנקודה $A(-7,2)$ נמצאת על המעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 = 53$. מצא את משוואת המשיק למעגל העובר ב- A.

<u>פתרון</u>



המשיק למעגל, העובר ב-A ניצב לרדיוס AO. שיפוע AO הוא $\frac{2-0}{-7-0} = -\frac{2}{7}$, לכן שיפוע המשיק הוא $\frac{7}{2}$.

המשיק עובר בנקודה $A(-7,2)$ לכן משוואתו היא

$$y - 2 = \frac{7}{2}(x+7)$$

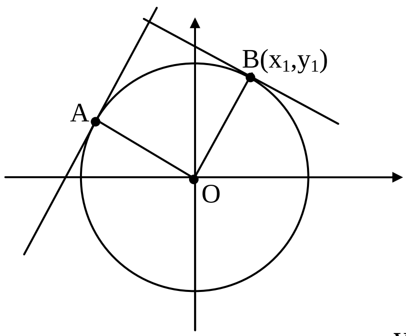
$$2y - 4 = 7x + 49$$

$$7x - 2y = -53$$

<u>תרגיל 3</u>

הישר $7x - 2y = -53$ משיק למעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 = 53$. מצא את משוואת המשיק למעגל, הניצב למשיק הנתון.

<u>פתרון</u>



שיפוע המשיק הנתון הוא $\frac{7}{2}$, לכן שיפוע משיק הניצב לו הוא $-\frac{2}{7}$. נסמן ב- $B(x_1,y_1)$ את נקודת ההשקה שלו. משוואת המשיק המבוקש היא $y - y_1 = -\frac{2}{7}(x - x_1)$

משיק זה ניצב לרדיוס BO, ששיפועו $\frac{y_1}{x_1}$, לכן $\frac{y_1}{x_1}\cdot(-\frac{2}{7}) = -1$.

$B(x_1,y_1)$ היא נקודה על המעגל, לכן שיעוריה מקיימים את המשוואה $x^2 + y^2 = 53$.

נמצא את שיעורי הנקודה B על-ידי התרת מערכת המשוואות

$$\begin{cases} {x_1}^2 + {y_1}^2 = 53 \\ -\frac{2y_1}{7x_1} = -1 \end{cases}$$

מהמשוואה השניה מקבלים $y_1 = \frac{7x_1}{2}$. מציבים ערך זה במשוואה הראשונה

$$x_1^{\ 2} + (\frac{7x_1}{2})^2 = 53$$

$$4x_1^{\ 2} + 49x_1^{\ 2} = 212$$

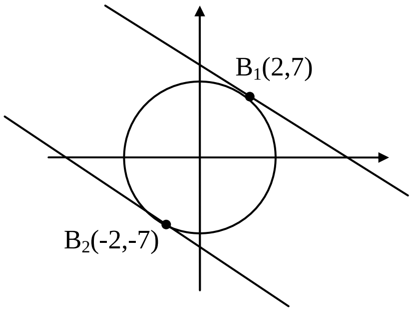
$$53x_1^{\ 2} = 212$$

$$x_1^{\ 2} = 4$$

$$x_1 = \pm 2$$

לכן $y_1 = \pm 7$

קיבלנו שתי נקודות השקה המתאימות לתנאי הבעיה: $B_1(2,7)$ ו- $B_2(-2,-7)$.



משוואת המשיק דרך B_1: $y - 7 = -\frac{2}{7}(x - 2)$

$$2x + 7y = 53$$

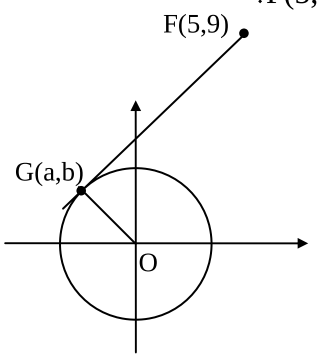
משוואת המשיק דרך B_2: $y + 7 = -\frac{2}{7}(x + 2)$

$$2x + 7y = -53$$

משיק למעגל העובר בנקודה נתונה מחוץ למעגל

<u>תרגיל 4</u>

מצא את משוואת המשיק למעגל $x^2 + y^2 = 53$ העובר בנקודה $F(5,9)$.



<u>פתרון</u>

נבדוק תחילה היכן נמצאת הנקודה $F(5,9)$ ביחס למעגל.

$5^2 + 9^2 = 25 + 81 > 53$ ' לכן F נמצאת מחוץ למעגל.

נסמן ב- $G(a,b)$ את נקודת ההשקה.

שיעורי G מקיימים שני תנאים:

א. $a^2 + b^2 = 53$ (כי G נמצאת על המעגל.)

ב. $\frac{b-9}{a-5} \cdot \frac{b}{a} = -1$ (המשיק GF מאונך לרדיוס GO, לכן מכפלת שיפועיהם שווה ל- 1-.)

שים לב, שיפוע GF הוא $\frac{b-9}{a-5}$ ושיפוע GO הוא $\frac{b}{a}$.

נתיר את מערכת המשוואות בשיטת ההצבה. נפשט תחילה את המשוואה השנייה ונבודד ממנה את b.

$$\frac{b^2 - 9b}{a^2 - 5a} = -1$$

$$b^2 - 9b = -a^2 + 5a$$

$$\underbrace{a^2+b^2}_{53} = 5a + 9b$$

$$53 = 5a + 9b$$

$$b = \frac{53-5a}{9}$$

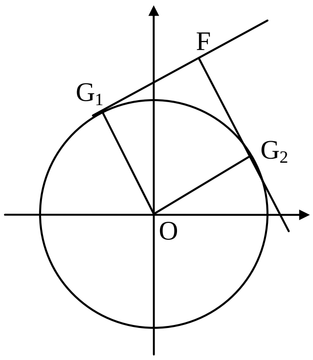
את b נציב במשוואה הראשונה

$$a^2 + \left(\frac{53-5a}{9}\right)^2 = 53$$

$$81a^2 + 2809 - 530a + 25a^2 = 4293$$

$$106a^2 - 530a - 1484 = 0 \quad / :106$$

$$a^2 - 5a - 14 = 0$$



פתרונות משוואה זו הם $a = 7$ או $a = -2$. לכן $b = 2$ או $b = 7$.

מקבלים שתי נקודות השקה אפשריות: $G_1(7,2)$ ו- $G_2(-2,7)$.

משוואות המשיקים:

שיפוע הרדיוס OG_1 הוא $\frac{2}{7}$ לכן שיפוע המשיק דרך G_1 הוא $-\frac{7}{2}$

ומשוואתו $y - 2 = -\frac{7}{2}(x-7)$

$$7x + 2y = 53$$

שיפוע הרדיוס OG_2 הוא $-\frac{7}{2}$ לכן שיפוע המשיק דרך G_2 הוא $\frac{2}{7}$ ומשוואתו

$$y - 7 = \frac{2}{7}(x + 2)$$

$$2x - 7y = -53$$

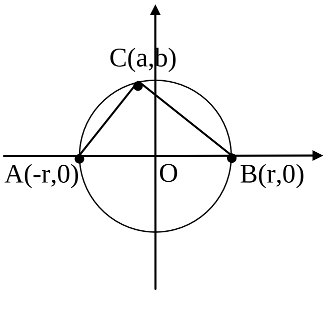
<u>הערה</u>

בסעיף זה השתמשנו בניצבות של הרדיוס והמשיק בנקודת ההשקה בלבד. בסעיף 5.3 נלמד כיצד אפשר למצוא משוואות המשיקים בדרך קצרה יותר.

<u>תרגיל 5</u>

הוכח באמצעים אנליטיים את המשפט: זווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה.

<u>הוכחה</u>



נתון מעגל שרדיוסו r ומרכזו O. במעגל נתון קוטר AB ונקודה C על היקפו. נוכיח כי הזווית $\angle ACB$, הנשענת על הקוטר AB, היא זווית ישרה. לשם כך נבנה מערכת צירים נוחה, שבה ראשית הצירים היא מרכז המעגל O והישר AB מונח על ציר ה-x. במערכת צירים זו שיעורי הנקודות A, B, C הם: $A(-r,0)$, $B(r,0)$, $C(a,b)$ ומשוואת המעגל $x^2 + y^2 = r^2$.

הנקודה C נמצאת על המעגל לכן שיעוריה מקיימים את משוואתו: $a^2 + b^2 = r^2$

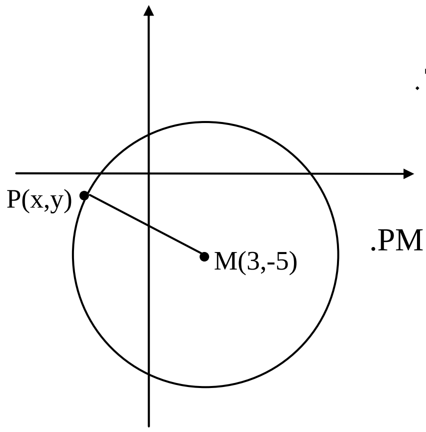
שיפוע המיתר AC הוא $\frac{b}{a+r} = \frac{b-0}{a-(-r)}$ ושיפוע המיתר BC הוא $\frac{b}{a-r} = \frac{b-0}{a-r}$.

מכפלת השיפועים: $\frac{b}{a+r} \cdot \frac{b}{a-r} = \frac{b^2}{(a+r)(a-r)} = \frac{b^2}{a^2-r^2}$

$a^2 + b^2 = r^2 \Leftarrow a^2 - r^2 = -b^2 \Leftarrow \frac{b^2}{a^2-r^2} = \frac{b^2}{-b^2} = -1$.

כלומר מכפלת השיפועים היא 1- , לכן המיתרים ניצבים זה לזה והזווית $\angle ACB$ ישרה.

6.2 מעגל כללי



<u>תרגיל 1</u>

מצא את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה M(3,-5) ורדיוסו 7.

<u>פתרון</u>

כל נקודות המעגל נמצאות במרחק של 7 יחידות מהמרכז M,

לכן אם P(x,y) נקודה המייצגת את נקודות המעגל כי אז PM = 7.

$$PM = \sqrt{(x-3)^2 + (y+5)^2} = 7$$

$$(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 49$$

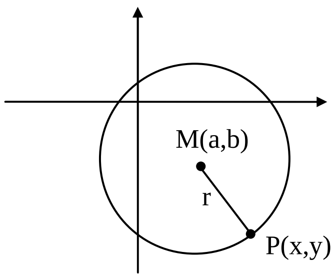
באופן כללי:

מהי משוואת המעגל שמרכזו M(a,b) ורדיוסו r?

נקודה P(x,y) נמצאת על המעגל אם ורק אם מרחקה מהמרכז M שווה לרדיוס

$$PM = r$$

$$PM = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$



נעלה בריבוע את אגפי שתי המשוואות

$$PM^2 = r^2$$

$$PM^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$$

לכן משוואת המעגל היא

$$\boxed{(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2}$$

<u>דוגמאות</u>

א. משוואת המעגל שמרכזו (-1,3) ורדיוסו 4 היא $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 16$.

ב. המשוואה $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$ מתארת מעגל שמרכזו (1,-2) ורדיוסו 3.

ננתח את משוואת המעגל $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. נפתח סוגריים ונסדר את המשוואה:

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$$

$$x^2 - 2ax + y^2 - 2by = r^2 - a^2 - b^2$$

משוואה זו היא משוואה ריבועית בשני משתנים שצורתה $x^2 + Bx + y^2 + Cy = D$, כלומר

1. אין במשוואה "איבר מעורב" xy.
2. המקדמים של x^2 ושל y^2 שווים ל- 1.

האם נוכל לשער כי כל משוואה שיש לה צורה כזו (או משוואה שעל-ידי ביצוע פעולות מותרות עליה אפשר להגיע לצורה זו) היא משוואה המתארת מעגל?

הערה: שים לב, מכל משוואה ריבועית בשני משתנים, שבה המקדמים של x^2 ושל y^2 **שווים** ואין בה איבר מעורב xy, אפשר להגיע למשוואה שצורתה $x^2 + Bx + y^2 + Cy = D$ על-ידי חילוק המשוואה במקדם השווה. אין חשיבות לערך המקדמים אלא לשוויון ביניהם.

לפני המשך הדיון נרענן את הזיכרון ונזכיר את הטכניקה של "השלמה לריבוע" אותה הכרנו בפרק הדן במשוואה הריבועית.

- נתונה התבנית הריבועית $x^2 - 6x + 9$ נפרק אותה לגורמים באמצעות הנוסחה $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$$

שים לב, המספר בתוך הסוגריים שבאגף הימני שווה למחצית המקדם של x שבאגף השמאלי, ובעל אותו סימן.

- כדי לפרק לגורמים את התבנית $3x^2 + 30x + 75$ מוציאים תחילה גורם משותף ואחר כך ממשיכים באותה דרך כמקודם: $3x^2 + 30x + 75 = 3(x^2 + 10x + 25) = 3(x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 25) = 3(x + 5)^2$

אם נתונה תבנית ממעלה שנייה שאיננה ריבוע מלא, נוכל "להשלים אותה לריבוע" כמתואר להלן על-ידי הדוגמאות.

- נתונה התבנית $x^2 - 6x + 4$. כדי לקבל "ריבוע מלא" האיבר החופשי צריך להיות 9. נוסיף לתבנית 9 ונחסר 5 כדי לקבל 4, כפי שרשום בתבנית. נרשום

$$x^2 - 6x + 4 = x^2 - 6x + 9 - 5 = (x - 3)^2 - 5$$

באופן דומה נשלים לריבוע את התבניות הבאות:

- $x^2 + 4x - 25 = x^2 + 4x + 4 - 29 = (x + 2)^2 - 29$
- $x^2 - 8x + 9 = x^2 - 8x + 16 - 7 = (x - 4)^2 - 7$
- $x^2 + x - 1 = x^2 + x + \frac{1}{4} - 1\frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 1\frac{1}{4}$

נחזור לשאלה האם כל תבנית ריבועית בשני משתנים, שאין בה איבר מעורב xy, והמקדמים של x^2 ושל y^2 שווים מתארת מעגל?

נבדוק תחילה מספר דוגמאות.

א. מהי קבוצת האמת של המשוואה $3x^2 + 3y^2 - 24x + 30y = 24$?

<u>פתרון</u>

נחלק את המשוואה ב-3 ונשנה את סדר המחוברים: $x^2 - 8x + y^2 + 10y = 8$

נשלים לריבוע את התבניות ממעלה שנייה ב- x וב-y:

$$x^2 - 8x = (x^2 - 8x + 16) - 16 = (x - 4)^2 - 16$$

$$y^2 + 10y = (y^2 + 10y + 25) - 25 = (y + 5)^2 - 25$$

נציב תוצאות אלה במשוואה הנתונה ונקבל

$$(x-4)^2-16+(y+5)^2-25=8$$

$$(x-4)^2+(y+5)^2=49$$

קבוצת האמת של המשוואה היא מעגל שמרכזו (4, - 5) ורדיוסו 7.

ב. מהי קבוצת האמת של המשוואה $x^2+4x+y^2-6y+13=0$?

כמו בדוגמה הקודמת נשלים לריבוע את התבניות ב-x וב-y.

$$x^2+4x+y^2-6y+13=(x^2+4x+4)-4+(y^2-6y+9)-9+13=0$$

מכנסים איברים ומקבלים: $(x+2)^2+(y-3)^2=0$

האגף השמאלי של המשוואה הוא סכום של שני ריבועים. ריבוע של מספר ממשי איננו שלילי לעולם, לכן סכום של שני ריבועים שווה לאפס רק אם כל אחד מהמחוברים הוא 0. כלומר, $(x+2)^2=0$ וגם $(y-3)^2=0 \Leftarrow x=-2\,,\ y=3$. לכן קבוצת האמת של המשוואה מכילה רק את הנקודה (-2,3).

ג. מהי קבוצת האמת של המשוואה $6x-x^2-y^2-12y=100$?

<u>פתרון</u>

נכפיל את שני אגפי המשוואה ב-(-1) ונשנה את סדר המחוברים: $x^2-6x+y^2+12y=-100$

כמקודם, נשלים לריבוע את התבנית ב- x וב- y ונקבל

$$(x^2-6x+9)-9+(y^2+12y+36)-36=-100$$

$$(x-3)^2+(y+6)^2=-55$$

קבוצת האמת ריקה כי אין מספר ממשי שריבועו שלילי.

בדקנו שלוש משוואות בשני משתנים שאין בהן איבר מעורב xy והמקדמים של x^2 ושל y^2 שווים וראינו כי הן מייצגות מעגל, נקודה או שקבוצת האמת ריקה. האם אלה הן שלוש האפשרויות היחידות?

לשם פשטות נניח כי המקדם המשותף של x^2 ו- y^2 הוא 1 (זו איננה הנחה מגבילה כי אם המקדמים של x^2 ו- y^2 אינם שווים ל-1 אפשר לחלק את שני אגפי המשוואה במקדם המשותף ולקבל משוואה שבה המקדם המשותף שווה ל-1). ונרשום את המשוואה בצורה

$$x^2+ax+y^2+by=c$$

נשלים את המשוואה לריבוע על-ידי הוספת $\frac{a^2}{4}$ ו- $\frac{b^2}{4}$ לשני האגפים.

$$x^2+ax+\frac{a^2}{4}+y^2+by+\frac{b^2}{4}=c+\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}$$

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{4c+a^2+b^2}{4}$$

נתבונן באגף ימין של המשוואה האחרונה. המקרים האפשריים הם:

.1 $4c + a^2 + b^2 > 0$

במקרה זה האגף הימני הוא חיובי ולכן הוא יכול לייצג ריבוע של מספר חיובי - רדיוס המעגל.

לפנינו משוואת מעגל שמרכזו בנקודה $\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)$ ורדיוסו $\frac{\sqrt{4c+a^2+b^2}}{2}$.

.2 $4c + a^2 + b^2 = 0$

סכום ריבועים שווה לאפס רק אם כל אחד מהמחוברים שווה לאפס לכן

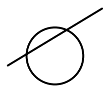
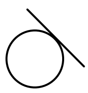
$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 = \left(y+\frac{b}{2}\right)^2 = 0$$

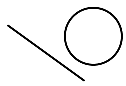
קבוצת האמת מכילה רק את הנקודה $\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)$.

.3 $4c + a^2 + b^2 < 0$

סכום הריבועים איננו יכול להיות שלילי, לכן קבוצת האמת של המשוואה היא ריקה.

המצב ההדדי של ישר ומעגל

לישר ולמעגל יכולות להיות שתי נקודות משותפות  , נקודה אחת משותפת 

או אף נקודה משותפת  .

<u>דוגמה א</u>

.1 מהו המצב ההדדי של המעגל $x^2 - 2x + y^2 + 4y = 0$ והישר $x + 2y = 7$?

.2 חשב את המרחק בין הישר $x + 2y = 7$ ובין מרכז המעגל $x^2 - 2x + y^2 + 4y = 0$.

<u>פתרון</u>

.1 כדי לענות על השאלה יש לפתור את מערכת המשוואות הכוללת את משוואת הישר ומשוואת המעגל ולבדוק את מספר הפתרונות.

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 + 4y = 0 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$$

מהמשוואה השנייה מקבלים $x = 7 - 2y$.

מציבים במשוואה הראשונה $(7 - 2y)^2 - 2(7 - 2y) + y^2 + 4y = 0$

לאחר פתיחת סוגריים, כינוס איברים וצמצום מקבלים $y^2 - 4y + 7 = 0$

הדיסקרמיננטה של משוואה זו היא שלילית: $4^2 - 4\cdot 7 < 0$ לכן אין פתרון למערכת המשוואות ולכן אין לישר ולמעגל נקודה משותפת.

.2 כדי לחשב את המרחק בין הישר $x + 2y = 7$ ובין מרכז המעגל $x^2 - 2x + y^2 + 4y = 0$

נחשב תחילה את שיעורי מרכז המעגל, על-ידי השלמה לריבוע:

$$x^2 - 2x + y^2 + 4y = 0$$

$$(x^2 - 2x + 1) - 1 + (y^2 + 4y + 4) - 4 = 0$$

$$(x-1)^2+(y+2)^2=5$$

מרכז המעגל הוא $(1,-2)$ ורדיוסו $\sqrt{5}$.

על פי נוסחת המרחק עבור המרכז $M(1,-2)$ והישר הנתון $x+2y=7$. נקבל

$$d=\frac{|1\cdot 1+2\cdot(-2)-7|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=\frac{2\cdot 5}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$$

<u>דוגמה ב</u>

1. רשום את משוואת המעגל שמרכזו $M(-3,2)$ וריוסו 5.
2. מהו המצב ההדדי של מעגל זה ושל הישר $3x-4y=8$.
3. חשב את המרחק בין הישר ומרכז המעגל.

<u>פתרון</u>

1. משוואת המעגל היא $(x+3)^2+(y-2)^2=25$
2. כדי לבדוק את המצב ההדדי בין הישר והמעגל נפתור את מערכת המשוואות

$$\begin{cases}(x+3)^2+(y-2)^2=25\\ 3x-4y=8\end{cases}$$

נבודד את x במשוואה השנייה $x=\frac{4y+8}{3}$ ונציב במשוואה הראשונה.

$$\left(\frac{4y+8}{3}+3\right)^2+(y-2)^2=25$$

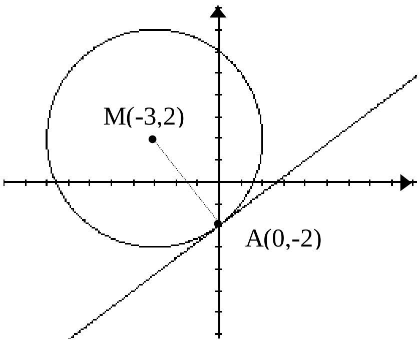
על-ידי פתיחת סוגריים וכינוס איברים מקבלים את המשוואה $y^2+4y+4=0$

$(y+2)^2=0$

למשוואה זו פתרון יחיד $y=-2$. ערך ה-x המתאים הוא $x=0$.

מסקנה: למעגל ולישר יש נקודה משותפת יחידה $(0,-2)$,

לכן הישר משיק למעגל.



3. המרחק של ישר המשיק למעגל, ממרכז המעגל שווה לאורך הרדיוס ולכן שווה ל-5.

<u>דוגמה ג</u>

מהו המצב ההדדי של הישר $2x-5y=2$ ושל המעגל $(x-1)^2+y^2=29$?

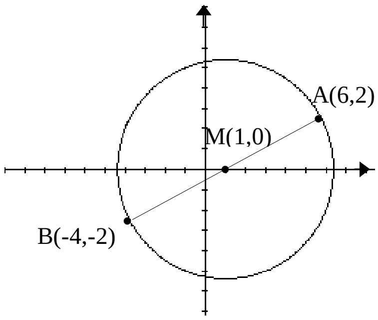
<u>פתרון</u>

למערכת המשוואות

$$\begin{cases}2x-5y=2\\ (x-1)^2+y^2=29\end{cases}$$

יש שני פתרונות: $x_1=6$, $y_1=2$ ו- $x_2=-4$, $y_2=-2$. פירוש הדבר כי למעגל ולישר יש שתי נקודות חיתוך $A(6,2)$ ו- $B(-4,-2)$.

במקרה שלפנינו יש לקטע AB תכונה נוספת : הוא קוטר של המעגל. כדי להוכיח זאת נראה כי מרכז המעגל $M(1,0)$ הוא אמצע הקטע AB.



$$x_M = \frac{6-4}{2} = 1 \quad , \quad y_M = \frac{2-2}{2} = 0$$

<u>דוגמה ד</u>

מהו המצב ההדדי בין הישר $y = 2x$ ובין המעגל $x^2 + 2ax + y^2 = 3a^2$?

<u>פתרון</u>

המשוואה $x^2 + 2ax + y^2 = 3a^2$ מייצגת משפחה חד פרמטרית של מעגלים.

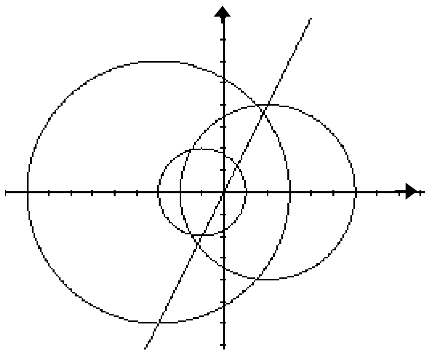
על-ידי השלמה לריבוע מקבלים

$$x^2 + 2ax + a^2 + y^2 = 3a^2 + a^2$$

$$(x + a)^2 + y^2 = 4a^2$$

לכל $a \neq 0$ המשוואה מייצגת מעגל שמרכזו בנקודה $(-a,0)$ ורדיוסו $2|a|$.

נסרטט מספר נציגים :



- $a = 1$ מרכז המעגל $(-1,0)$ ורדיוסו 2
- $a = 3$ מרכז המעגל $(-3,0)$ ורדיוסו 6
- $a = -2$ מרכז המעגל $(2,0)$ ורדיוסו 4

מהסרטוט נראה כי לישר $y = 2x$ ולכל מעגל מהמשפחה יש שתי נקודות חיתוך. כדי להוכיח זאת ולמצוא את שיעורי נקודות החיתוך נתיר את מערכת המשוואות

$$\begin{cases} (x+a)^2 + y^2 = 4a^2 \\ y = 2x \end{cases}$$

על-ידי הצבה מקבלים

$$(x + a)^2 + (2x)^2 = 4a^2$$

$$5x^2 + 2ax - 3a^2 = 0$$

למשוואה זו שני פתרונות

$$x = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-3a^2)}}{10} = \frac{-2a \pm 8a}{10} = \begin{cases} -a \\ \frac{3}{5}a \end{cases}$$

ואכן לישר ולמעגל שתי נקודות חיתוך : $\left(-a,-2a\right), \left(\frac{3}{5}a, \frac{6}{5}a\right)$.

דוגמה ה

מצא את משוואת משפחת הישרים המשיקים למעגל $x^2 + y^2 = 9$.

פתרון

הישר $y = mx + n$ ישיק למעגל אם למערכת המשוואות הבאות יש פתרון יחיד.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y = mx + n \end{cases}$$

על-ידי הצבה מקבלים $x^2 + (mx + n)^2 = 9$

$$(m^2 + 1)x^2 + 2mnx + n^2 - 9 = 0$$

כדי שלמשוואה זו יהיה פתרון יחיד הדיסקרמיננטה צריכה להיות שווה לאפס.

$$(2mn)^2 - 4(m^2 + 1)(n^2 - 9) = 0$$

$$9m^2 - n^2 + 9 = 0$$

$$n^2 = 9(m^2 + 1)$$

$$n = \pm 3\sqrt{m^2 + 1}$$

לכן משוואות המשיקים ששיפועיהם הוא m הן $y = mx \pm 3\sqrt{m^2 + 1}$.

למעגל הנתון יש שני משיקים נוספים, המקבילים לציר ה-y: $x = 3$ ו- $x = -3$.

אם נדרוש שהמשיק יקיים תנאי נוסף, נקבל משוואות משיק ללא פרמטר.

דוגמאות

1. מצא את משוואות המשיקים למעגל $x^2 + y^2 = 9$ ששיפועם שווה ל-2.

נציב $m = 2$ במשוואת המשיק ונקבל $y = 2x \pm 3\sqrt{5}$.

2. מצא את משוואות המשיקים החותכים את ציר ה-y בנקודה $(0,6)$.

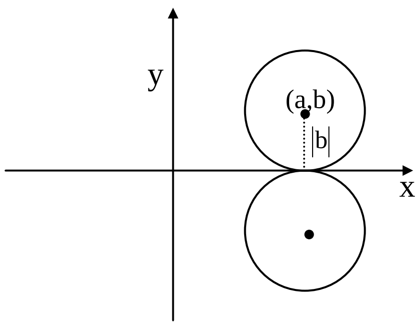
נציב $n = 6$ במשוואה $n^2 = 9(m^2 + 1)$, ונקבל $m = \pm\sqrt{3}$. לכן משוואות המשיקים הן $y = \pm\sqrt{3}x + 6$.

5.3 השקה של ישר ומעגל

כפי שראינו בסעיף הקודם אפשר למצוא את משוואת המשיק למעגל בנקודה עליו באמצעות תנאי ניצבות של המשיק והרדיוס בנקודת ההשקה. המטרה של סעיף זה היא יותר רחבה: לדון בדרכים נוספות למצוא את משוואת המשיק למעגל העוברים בנקודה נתונה על המעגל או בנקודה נתונה הנמצאת מחוץ למעגל, וכמו כן לפתור בעיה הפוכה והיא למצוא את משוואות המעגלים שאחד התנאים הנתונים הוא שמעגלים משיקים לישר נתון.

לצורך אירגון, נחלק את הסעיף לכמה תת סעיפים.

5.3.1 מעגל משיק לצירים



א. השקה לציר ה- x.

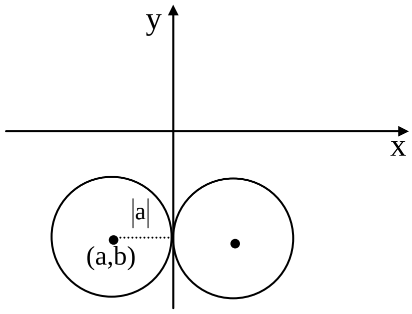
המעגל שמשוואתו $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

משיק לציר ה- x אם ורק אם רדיוסו של המעגל

שווה באורכו ל- $|b|$, זאת אומרת משוואתו היא

$$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$$

ב. <u>השקה לציר ה- y</u>.



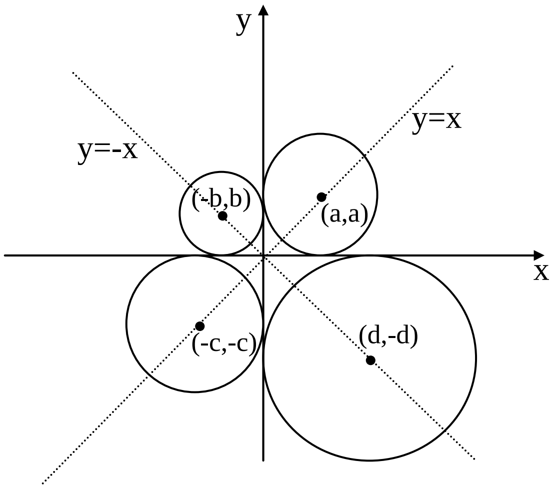
המעגל שמשוואתו $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

משיק לציר ה- x אם ורק אם רדיוסו של המעגל

שווה באורכו ל- $|a|$, זאת אומרת משוואתו היא

$$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$$

ג. <u>השקה לשני הצירים</u>.



מעגל משיק לשני הצירים אם ורק אם

הוא מאופיין על ידי התנאים הבאים:

- מרכזו נמצא במרחקים שווים משני הצירים ולכן הוא מונח על אחד מחוצי הזווית בין שני הצירים $y = x$ או $y = -x$.

- המעגל משיק לציר x ולציר y (מקיים את שני התנאים א' וב' לעיל).

ייתכנו אפשרויות הבאות לגבי משוואת המעגל

במקרה זה ($d>0$,$c>0$,$b>0$,$a>0$):

(1) $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$ (3) $(x+c)^2+(y+c)^2=c^2$

(2) $(x+b)^2+(y-b)^2=b^2$ (4) $(x-d)^2+(y+d)^2=d^2$

<u>תרגיל 1</u>

מצא את משוואת המעגל המשיק לציר ה- x, אם נתון שמרכזו נמצא ברביע הראשון על הישר $y = 0.5x + 4$ ורדיוסו 10.

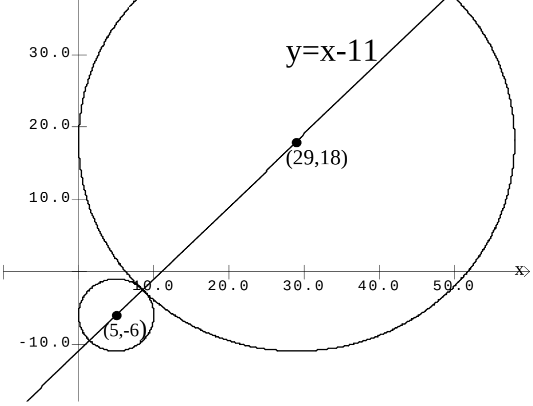
<u>פתרון</u>

ראינו , כי אם המעגל משיק לציר ה- x שיעור ה- y של מרכז המעגל שווה באורכו לרדיוס המעגל.

לכן מהעובדה שמרכזו ברביע הראשון נובע כי ערך ה- y הוא 10. זאת אומרת

$0.5x + 4 = 10$ או $x = 12$. לכן המרכז הוא $(12,10)$ ומשוואת המעגל

$(x-12)^2+(y-10)^2=100$.



<u>תרגיל 2</u>

מצא את משוואת המעגל שמרכזו על הישר

$y = x - 11$ והוא עובר דרך הנקודה $(8,-2)$

ומשיק לציר ה- y.

<u>פתרון</u>

מרכז המעגל הוא על הישר הנתון ולכן ניתן לסמנו

על ידי $(a,a-11)$.המעגל משיק לציר ה- y

ולכן רדיוסו הוא $|a|$. המרחק בין מרכז המעגל לבין הנקודה (8,-2) גם הוא שווה לרדיוס,

ומכאן נוכל לרשום את המשוואה הבאה: $|a| = \sqrt{(a-8)^2 + (a-11-(-2))^2}$. נעלה שני

אגפים בריבוע (המעבר הוא שקול מכיוון ששני הצדדים

של המשוואה חיוביים). נקבל אחרי כינוס איברים דומים את המשוואה הריבועית:

$a^2 - 34a + 145 = 0$ שפתרונותיה הם 5 ו- 29. משוואות של שני המעגלים המתקבלים הם:

$(x-5)^2 + (y+6)^2 = 25$ ו- $(x-29)^2 + (y-18)^2 = 841$ (ראה סרטוט להדגמה).

5.3.2 משוואת המשיק למעגל בנקודה שעל המעגל

נתונים מעגל שמשוואתו $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ ונקודה (x_1, y_1) עליו. שיפוע הרדיוס העובר בנקודה (x_1, y_1) הוא $\frac{y_1 - b}{x_1 - a}$, לכן שיפוע המשיק בנקודה (x_1, y_1) הוא $-\frac{x_1 - a}{y_1 - b}$. פירוש הדבר שמשוואת המשיק בנקודה הנתונה היא $y - y_1 = -\frac{x_1 - a}{y_1 - b}(x - x_1)$ או בצורה אחרת

$(y - y_1)(y_1 - b) + (x - x_1)(x_1 - a) = 0$.[1]

נרשום את המשוואה באופן הבא: $(y - b + b - y_1)(y_1 - b) + (x - a + a - x_1)(x_1 - a) = 0$. על ידי פתיחת הסוגריים נגיע למשוואה $(y-b)(y_1-b) + (x-a)(x_1-a) = (y_1-b)^2 + (x_1-a)^2$. החלק הימני של המשוואה שווה ל- R^2 מכיוון שהנקודה (x_1, y_1) נמצאת על המעגל ולכן מקיימת את משוואתו.

משוואת המשיק למעגל $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ בנקודה (x_1, y_1) שעליו היא:

$$(x-a)(x_1-a) + (y-b)(y_1-b) = R^2$$

<u>תרגיל 3</u>

מצא את הזווית שבין הישרים המשיקים למעגל $(x-4)^2 + (y-8)^2 = 17$ בנקודות (8,9) ו- (5,4).

<u>פתרון</u>

שתי הנקודות הנתונות מקיימות משוואת המעגל ולכן אפשר למצוא את משוואות המשיקים בהן בעזרת הנוסחה לעיל. נציב קודם את הנקודה (8,9) ונקבל $(8-4)(x-4) + (9-8)(y-8) = 17$,

---

[1] חשוב להדגיש כי אם $y_1 - b = 0$, אז נקודות ההשקה יהיו $(a \pm R, b)$, כלומר המשיקים יהיו מקבילים לציר ה- y ואין להם שיפוע. במקרה זה משוואות המשיקים הם $x = a \pm R$.

זאת אומרת $4x+y=41$. באותו אופן נציב את הנקודה $(5,4)$ בנוסחה ונגיע למשוואת המשיק השני $x-4y+11=0$. השיפועים של שני הישרים שקיבלנו הם בהתאמה -4 ו- $\frac{1}{4}$. מכפלתם היא -1 לכן הישרים מאונכים זה לזה.

<u>הערה</u>

במקרה פרטי, כאשר מרכז המעגל הוא בראשית הצירים ומשוואתו הקנונית $x^2+y^2=R^2$, הנוסחה שלמדנו תהיה פשוטה יותר

$$\boxed{xx_1+yy_1=R^2}$$

<u>הערה</u>

בתחילת הסעיף מצאנו את השיפוע המשיק למעגל $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ בנקודה (x_1,y_1) בעזרת משפט גיאומטרי על ניצבות רדיוס ומשיק בנקודת ההשקה. אפשר למצוא את השיפוע גם באמצעות חשבון דיפרנציאלי, כאשר שיפוע המשיק לגרף של פונקציה שווה לערך נגזרתה של הפונקציה בנקודה $x=x_1$. דרך הנקודה (x_1,y_1) עובר גרף של פונקציה שכולו נמצא על המעגל. אם הנקודה (x_1,y_1) היא על המחצית העליונה של המעגל אז הפונקציה היא $y=b+\sqrt{R^2-(x-a)^2}$, ואם הנקודה היא על המחצית התחתונה, אז הפונקציה תהיה $y=b-\sqrt{R^2-(x-a)^2}$. נסמן את הפונקציה המתאימה ב- $y=f(x)$. עבור הפונקציה מתקיימת הזהות: $(x-a)^2+(f(x)-b)^2=R^2$. נגזור את שני אגפיה של הזהות ונקבל $2(x-a)+2(f(x)-b)f'(x)=0$. על ידי הצבה של $x=x_1$ ו- $y_1=f(x_1)$ נמצא את ערך הנגזרת של הפונקציה f בנקודה x_1: $f'(x_1)=-\frac{x_1-a}{y_1-b}$. לכן שיפוע המשיק לגרף הפונקציה הוא $m=-\frac{x_1-a}{y_1-b}$.

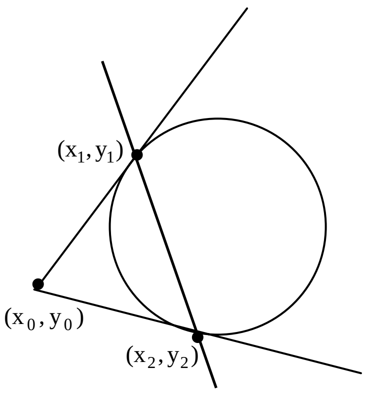
5.3.3 משוואת המיתר בין שתי נקודות השקה

בסעיף זה נלמד כיצד ניתן למצוא את משוואת המיתר בין נקודות ההשקה של הישרים היוצאים מאותה נקודה מחוץ למעגל.

<u>משפט</u>

המשוואה $(x-a)(x_0-a)+(y-b)(y_0-b)=R^2$ היא משוואת המיתר המחבר את נקודות ההשקה של המשיקים היוצאים מנקודה (x_0,y_0) שמחוץ למעגל $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

<u>הוכחה</u>



נניח כי המשיקים שיוצאים מ- (x_0,y_0) אל המעגל משיקים בו בנקודות (x_1,y_1) ו- (x_2,y_2) (ראו סרטוט). על פי נוסחת המשיק למעגל בנקודה שעליו, נוכל לרשום את משוואות המשיקים בנקודות אלו בהתאמה:

$$(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)=R^2$$

ו- $(x-a)(x_2-a)+(y-b)(y_2-b)=R^2$.

הישרים הנ"ל יוצאים מהנקודה (x_0,y_0) ולכן הצבת שיעורי הנקודה

במשוואות המשיקים הרשומים לעיל מביאה לפסוקי אמת הבאים:

(1) $(x_0-a)(x_1-a)+(y_0-b)(y_1-b)=R^2$ ו- (2) $(x_0-a)(x_2-a)+(y_0-b)(y_2-b)=R^2$.

נתבונן כעת במשוואת הישר $(x-a)(x_0-a)+(y-b)(y_0-b)=R^2$. אם נציב בה את הנקודות (x_1,y_1) ו- (x_2,y_2) נקבל פסוקי אמת (1) ו- (2). זאת אומרת שהנקודות האלו נמצאות על הישר $(x-a)(x_0-a)+(y-b)(y_0-b)=R^2$ ולכן הישר מחבר אותן, מה שהיה צריך להוכיח.

<u>תרגיל</u>

נתון מעגל שמשוואתו $(x-4)^2+(y+5)^2=36$. מהנקודה $(2,5)$ יוצאים משיקים למעגל . מצא את המרחק בין הנקודה $(2,5)$ לבין המיתר שמחבר את נקודות ההשקה.

<u>פתרון</u>

את משוואת המיתר אפשר למצוא על ידי הנוסחה שלמדנו והיא $(2-4)(x-4)+(5+5)(y+5)=36$. לאחר פתיחת סוגריים המשוואה מקבלת את הצורה הכללית הבאה $x-5y-11=0$. המרחק בין המיתר לבין הנקודה $(2,5)$ הוא

$$d=\frac{|2-5\cdot 5-11|}{\sqrt{1+25}}=\frac{34}{\sqrt{26}}$$

5.3.4 המשיקים למעגל מהנקודה מחוץ למעגל ותנאי השקה של ישר המשיק למעגל

בסעיף 5.2 כבר התייחסנו לשלושה מצבים הדדיים בין ישר ומעגל. על מנת למצוא מהו המצב ההדדי, חיפשנו את מספר נקודות החיתוך של ישר ומעגל נתונים. בסעיף הנוכחי נמצא תנאי פשוט לקביעת מצב ההשקה של ישר למעגל.

אם ישר משיק למעגל בנקודה מסוימת אז רדיוסו מאונך למשיק בנקודה הזאת. זאת אומרת שאורך האנך היוצא ממרכז המעגל למשיק שווה לרדיוס המעגל ולכן מרחקו של המרכז מהמשיק שווה לרדיוס. גם ההיפך הוא נכון: אם המרחק בין מרכז המעגל לישר מסוים שווה לרדיוס, אז הישר הוא משיק למעגל (הוכיחו זאת!).

בכך למעשה קיבלנו **תנאי בהשקה** של ישר ומעגל. נרשום אותו באופן אלגברי.

<u>טענה</u>

נתון מעגל $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ ונתון ישר בצורתו התקנית $Ax+By+C=0$, הישר ישיק למעגל אם ורק אם יתקיים השיוויון:

$$\boxed{\frac{|A\cdot a+B\cdot b+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=R}$$

<u>הערה</u>

השיוויון הוא תוצאת נוסחת המרחק בין נקודה לישר

אם משוואת המעגל הוא קנונית, אז תנאי ההשקה יהיה $R = \frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ או בצורה אחרת $C^2 = R^2(A^2+B^2)$.

באמצעות תנאי ההשקה שלמדנו, אפשר לפתור תרגילים מכמה סוגים כגון:

- בדיקה קלה אם ישר משיק למעגל
- מציאת משוואת משיק למעגל מנקודה נתונה
- מציאת משיקים למעגל בעלי שיפוע נתון

ועוד סוגים נוספים. נדגים שימוש בתנאי ההשקה בכמה דוגמאות.

<u>תרגיל 1</u>

מצא את משוואת המשיק למעגל $(x+2)^2+(y-2)^2=10$ העובר דרך הנקודה (4,-6).

<u>פתרון</u>

נניח כי הישר שאותו אנו מחפשים הוא בעל שיפוע m. משוואתו היא $y + 6 = m(x - 4)$ או בצורה תקנית $mx - y - 6 - 4m = 0$. אם הישר משיק למעגל הוא מקיים את תנאי ההשקה ולכן

$\sqrt{10} = \frac{|-2m-2-6-4m|}{\sqrt{m^2+1}}$. לאחר העלאה בריבוע וכינוס איברים דומים מקבלים את

המשוואה הריבועית: $13m^2+48m+27=0$. פתרונותיה הם $m_1 = -\frac{9}{13}$ ו- $m_2 = -3$.

משוואות שני ישרים משיקים הן $3x + y - 6 = 0$ ו- $9x + 13y + 42 = 0$.

<u>הערה</u>

כזכור, למעגל יש שני משיקים שיוצאים מכל נקודה הנמצאת מחוץ למעגל. בתרגיל הקודם ראינו כי השלב האחרון במציאת המשיקים היה הפתרון של משוואה ריבועית. במקרה זה היו למשוואה שני פתרונות שונים שנתנו לנו שני משיקים היוצאים מהנקודה הנתונה.

יכולות להיות שלוש אפשרויות אחרות:

- למשוואה הריבועית יש **שני פתרונות זהים**. מקרה זה אפשרי כאשר הנקודה שדרכה מעבירים משיקים נמצאת **על המעגל** .
- המשוואה **אינה ריבועית**. במקרה זה פתרון המשוואה הוא השיפוע של אחד המשיקים, כאשר המשיק השני אינו בעל שיפוע (כלומר, מקביל לציר ה- y).
- למשוואה **אין פתרונות** . במקרה זה הנקודה נמצאת בתוך המעגל.

הדוגמאות הבאות ימחישו אפשרויות אלו .

<u>תרגיל 2</u>

מצא את משוואת המשיק למעגל $(x+2)^2+(y-2)^2=10$ העובר דרך הנקודה (1,3).

<u>פתרון</u>

על ידי הצבת שיעורי הנקודה במשוואת המעגל רואים מיד אם הנקודה נמצאת על המעגל. במקרה זה אפשר למצוא את המשוואה בעזרת הנוסחה. המטרה כאן היא להמחיש את ההערה ולכן נפתור את התרגיל באמצעות תנאי ההשקה. נניח כי m הוא שיפוע המשיק. משוואתו תהיה

$y-3=m(x-1)$ או בצורה התקנית $mx - y + 3 - m = 0$. על פי תנאי ההשקה

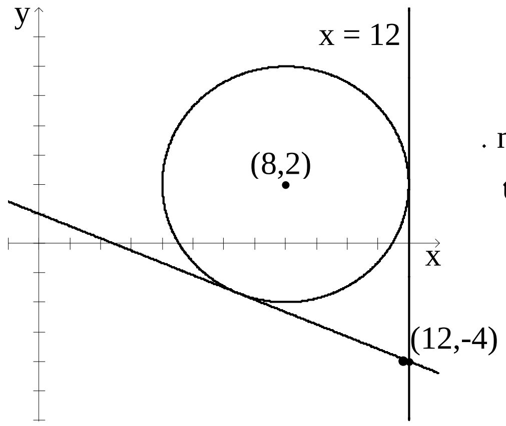
$\frac{|-2m-2+3-m|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{10}$. ממשוואה זו מגיעים למשוואה $m^2+6m+9=0$ שיש לה שני

פתרונות זהים $m = -3$. משוואת המשיק היא $-3x - y + 6 = 0$.

תרגיל 3

מצא את משוואות המשיקים למעגל $(x-8)^2+(y-2)^2=16$ העוברים דרך הנקודה (12,-4).

פתרון



נפעל על פי אותה דרך.

נניח כי m הוא שיפוע המשיק ונקבל כי משוואה

התקנית של המשיק תהיה $mx - y - 12m - 4 = 0$.

לאחר הפעלת תנאי ההשקה וכינוס איברים דומים

מגיעים למשוואה שאיננה משוואה ריבועית

$12m = -5$.מכאן מסיקים כי משיק אחד הוא

$5x + 12y - 12 = 0$ והמשיק השני הוא $x = 12$

ומקביל לציר ה-y (ראו סרטוט).

תרגיל 4

שתי צלעות משולש מונחות על הישרים שמשוואותיהם $x + 7y + 6 = 0$ ו- $x + y - 6 = 0$.

מצא את משוואת המעגל החסום במשולש אם נתון כי מרכזו נמצא על חלקו החיובי של ציר ה- y.

פתרון

מרכז המעגל החסום במשולש הוא נקודת המפגש של חוצי הזויות של המשולש, וכל נקודה על חוצה זווית נמצאת במרחקים שווים מצלעות המשולש. נסמן את מרכז המעגל ב- (0,t) (כי נתון שהוא נמצא על ציר ה- y). נרשום כי המרחק מהנקודה (0,t) משתי צלעות נתונות שווה ונקבל את

המשוואה: $\frac{|t-6|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|7t+6|}{\sqrt{1^2+7^2}}$

מהמשוואה מתקבל כי $|7t+6| = 5|t-6|$, כלומר $7t+6=5(t-6)$ או $7t+6=-5(t-6)$.

הפתרונות של שתי המשוואות האלו הם $t = 2$ או $t = -18$. צוין בתרגיל כי מרכז המעגל נמצא על חלקו החיובי של ציר ה- y לכן הוא בנקודה (0,2). נשאר לחשב את הרדיוס שהוא המרחק בין הנקודה שמצאנו לבין אחת הצלעות הנתונות.

$$R = \frac{|7\cdot 2+6|}{\sqrt{50}} = \frac{20}{\sqrt{50}} = \sqrt{8}$$

תשובה: משוואת המעגל היא $x^2+(y-2)^2=8$

5.4 משפחות של מעגלים העוברים בנקודות החיתוך של שני מעגלים נתונים.

נושא זה הוא חומר העשרה ומיועד לקריאה עצמית למעונינים בלבד.

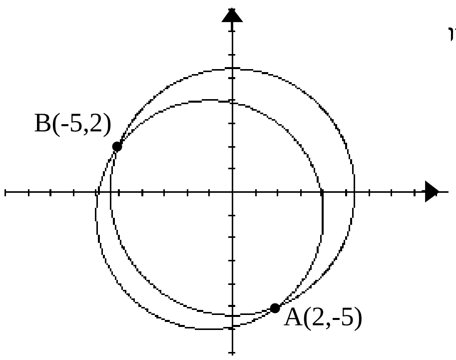
<u>בעיה</u>

א. מהן נקודות החיתוך של המעגלים

.1 $x^2 + y^2 = 29$ .2 $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 23 = 0$

ב. מצא את כל המעגלים העוברים דרך נקודות החיתוך של שני המעגלים הנתונים ב-א.

<u>פתרון</u>



א. כדי למצוא את נקודות החיתוך נפתור את מערכת המשוואות בשיטת הו

ממשוואה 2 מקבלים: $\underbrace{x^2 + y^2}_{29} + 2x + 2y - 23 = 0$

$29 + 2x + 2y - 23 = 0$

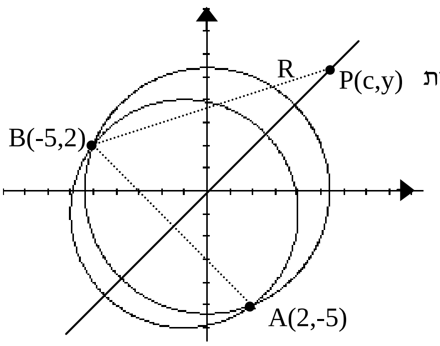
$y = -x - 3$

נציב במשוואה 1: $x^2 + (-x - 3)^2 = 29$

נפשט: $x^2 + 3x - 10 = 0$

שורשי המשוואה הם: $x_1 = -5$ ו- $x_2 = 2$

ושיעורי ה- y המתאימים הם: $y_1 = 2$ ו- $y_2 = -5$. לכן נקודות החיתוך של המעגלים הן: (-5,2) , (2,-5).



ב. אפשר למצוא את כל המעגלים העוברים דרך נקודות החיתוך A(2,-5) ו-B(-5,2) של שני המעגלים הנתונים, בהסתמך על תכונות מרכז מעגל נמצא במרחק שווה מכל נקודותיו. במיוחד מרכזו של כל מעגל העובר דרך הנקודות A ו-B נמצא במרחק שווה מ-A ומ-B. ידוע לנו כי המקום הגיאומטרי של הנקודות הנמצאות במרחק שווה משתי נקודות נתונות הוא האנך האמצעי של הקטע המחבר אותן.

לכן מרכזו של כל אחד מהמעגלים העוברים דרך הנקודות A ו-B נמצא על האנך האמצעי של הקטע AB.

על מנת למצוא את כל המעגלים העוברים דרך A ו-B יש, אם כן, לבצע את השלבים הבאים:

1. למצוא את משוואת האנך האמצעי של AB.

   כל מרכזי המעגלים העוברים בנקודות A ו-B נמצאים על ישר זה.

2. נסמן ב-c את שיעור ה-x של נקודה כלשהי P על האנך האמצעי ונבטא את שיעור ה-y שלה באמצעות c. P היא מרכז של מעגל, ולכל מעגל מתאים ערך מסוים של הפרמטר c.

3. רדיוס המעגל הוא המרחק בין A (או B) ובין P ועל כן יש לחשב אותו.

4. עתה כבר אפשר לרשום את משוואת המעגל שמרכזו P, ועובר דרך A (ו-B).

   מתקבלת משוואה פרמטרית (בפרמטר c) המייצגת את משפחת המעגלים הממלאים את תנאי הבעיה.

<u>דוגמה</u>

וודא כי המעגל $x^2 + x + y^2 + y = 26$ עובר דרך A ו-B, ומצא את ערך הפרמטר c המתאים לו.

נציג כאן דרך שונה לפתרון שאלה זאת, המסתמכת על תכונות אלגבריות.
נתבונן במשוואה הפרמטרית שהיא צירוף ליניארי של משוואות שני המעגלים

$$\alpha\,(x^2 + y^2 - 29) + \beta(x^2 + y^2 + 2x + 2y - 23) = 0$$

שבה לפחות אחד משני הפרמטרים α ו-β שונה מאפס.

- אם $\beta = 0$ בהכרח $\alpha \neq 0$ ומתקבלת משוואה השקולה למשוואה 1 שקבוצת האמת שלה היא המעגל הראשון.
- אם $\alpha = 0$ בהכרח $\beta \neq 0$ והמשוואה המתקבלת שקולה למשוואה 2 שקבוצת האמת שלה היא המעגל השני.
- שיעורי הנקודה $A(2,-5)$ מקיימים את המשוואות 1 ו- 2 ולכן הם מקיימים את המשוואה הפרמטרית. אם נציב את שיעורי הנקודה במשוואה נקבל $\alpha\cdot 0 + \beta\cdot 0 = 0$.
- מאותה סיבה גם שיעורי הנקודה $B(-5,2)$ מקיימים את המשוואה הפרמטרית.
- אם שני הפרמטרים שונים מ- 0 , נחלק את המשוואה הפרמטרים ב- α על מנת לקבל משוואה חד-פרמטרית הנוחה יותר לניתוח.

$$x^2 + y^2 - 29 + \frac{\beta}{\alpha}\left(x^2 + y^2 + 2x + 2y - 23\right) = 0$$

נסמן $\frac{\beta}{\alpha} = \gamma$ ונקבל $x^2 + y^2 - 29 + \gamma\left(x^2 + y^2 + 2x + 2y - 23\right) = 0$

נפתח סוגריים ונכנס איברים דומים:

$$(1+\gamma)x^2 + 2\gamma x + (1+\gamma)y^2 + 2\gamma y - (29 + 23\gamma) = 0$$

לכל $\gamma \neq -1$ זו משוואה ריבועית בשני משתנים שבה המקדמים של x^2 ו- y^2 שווים ואין "איבר מעורב" xy ,
ומכיוון שקבוצת האמת שלה מכילה לפחות שתי נקודות הרי שזו משוואה של מעגל.
על-פי מה שצוין לעיל, מעגל זה עובר בנקודות A ו- B.

- גם הכיוון ההפוך נכון. כלומר, כל מעגל העובר בנקודות $(2,-5)$, $(5,-2)$ משוואתו היא מהצורה

$$\alpha\,(x^2 + y^2 - 29) + \beta(x^2 + y^2 + 2x + 2y - 23) = 0$$

לא נוכיח טענה זאת כאן, אולם נמחיש אותה על ידי דוגמה:
המעגל $x^2 + x + y^2 + y = 26$ עובר דרך $A(2,-5)$ ו-$B(-5,2)$, ומשוואתו מתקבלת כצירוף ליניארי של משוואות שני המעגלים הנתונים, כאשר בוחרים $\alpha = \beta$ (בדוק!).

<u>הערה</u>
ברור כי שתי הנקודות A ו-B הנ"ל יכולות להתקבל כנקודות החיתוך של **כל** שני מעגלים של המשפחה. נבחר בזוג אחר של מעגלים שנחתכים בנקודות A ו-B:

מציבים $\gamma = 1$ במשוואה $(1+\gamma)x^2 + 2\gamma x + (1+\gamma)y^2 + 2\gamma y - (29 + 23\gamma) = 0$,
ומקבלים $x^2 + x + y^2 + y = 26$.

מציבים $\gamma = 2$ במשוואה $(1+\gamma)x^2 + 2\gamma x + (1+\gamma)y^2 + 2\gamma y - (29 + 23\gamma) = 0$,

ומקבלים $x^2 + \frac{4}{3}x + y^2 + \frac{4}{3}y - 25 = 0$.

על ידי צירוף ליניארי של שתי המשוואות האחרונות וצמצום ב-α, מתקבלת המשוואה החד-פרמטרית:

$$(1+\gamma)x^2 + \left(\frac{4}{3} + \gamma\right)x + (1+\gamma)y^2 + \left(\frac{4}{3} + \gamma\right)y - (26\gamma + 25) = 0 \ .$$

כאשר מציבים בה $\gamma = -\frac{4}{3}$ מקבלים את משוואת המעגל הנתון הראשון $x^2 + y^2 - 29 = 0$.

משוואת המעגל הנתון השני $x^2 + 2x + y^2 + 2y - 23 = 0$ מתקבלת על ידי ההצבה $\gamma = -\frac{2}{3}$.

השלם את חישובי הביניים והראה את נכונות הטענות הנ"ל.

__מסקנה__

המשוואה הפרמטרית $\alpha\,(x^2 + y^2 - 29) + \beta(x^2 + y^2 + 2x + 2y - 23) = 0$ שבה לפחות אחד משני הפרמטרים α ו-β שונה מאפס ו- $\alpha \neq -\beta$, מייצגת משפחת מעגלים העוברים בנקודות $A(2,-5)$ ו- $B(-5,2)$.

הערה: אם $\alpha = -\beta$, כלומר אם $\gamma = -1$, מתקבלת המשוואה $-2x - 2y - 6 = 0$ או $x + y + 3 = 0$. זו משוואת הישר העובר בנקודות A ו- B.

__תרגיל__

א. רשום את משוואות המעגלים המתקבלים על-ידי ההצבה $\gamma = 3$ ו- $\gamma = -2$.

ב. מצא את המרכז ואת הרדיוס של כל מעגל.

ג. וודא כי כל אחד משני המעגלים עובר בנקודות $A(2,-5)$ ו- $B(-5,2)$.

__בעיה__

נתונות משוואות של שני מעגלים נחתכים

1. $x^2 + y^2 - 6x + y + 3 = 0$ 2. $x^2 + y^2 + 4y - 21 = 0$

מצא, מבלי לחשב את נקודות החיתוך של המעגלים, את

א. משוואת הישר העובר בנקודות החיתוך.

ב. משוואת המעגל העובר בנקודות החיתוך ובנקודה $C(-9,-9)$.

__פתרון__

א. ראינו קודם כי המשוואה של משפחת המעגלים העוברים בנקודות החיתוך של שני המעגלים הנתונים היא

$$\alpha(x^2 + y^2 - 6x + y + 3) + \beta(x^2 + y^2 + 4y - 21) = 0$$

ראינו גם כי כאשר $\alpha = -\beta$ מתקבלת משוואת הישר העובר בנקודות החיתוך. כדי למצוא את משוואת הישר נבחר עבור הפרמטרים ערכים המקיימים $\alpha = -\beta$ ונוחים לחישוב: $\alpha = 1$, $\beta = -1$. מקבלים

$$x^2 + y^2 - 6x + y + 3 - (x^2 + y^2 + 4y - 21) = 0$$

ועל-ידי פישוט: $y = -2x + 8$

זו משוואת הישר העובר בנקודות החיתוך של שני המעגלים הנתונים.

ב. הנקודה $C(-9,-9)$ לא נמצאת על אף אחד משני המעגלים הנתונים (בדוק זאת!).

נרשום את המשוואה הפרמטרית של משפחת המעגלים העוברים בנקודות החיתוך עם הפרמטר γ ($\gamma = \frac{\beta}{\alpha}$)

$$x^2 + y^2 - 6x + y + 3 + \gamma(x^2 + y^2 + 4y - 21) = 0$$

כדי שהנקודה C תמצא על מעגל זה שיעוריה צריכים לקיים את המשוואה. נציב במשוואה זא את שיעורי הנקודה C ונחשב את הערך של γ שעבורו המשוואה מתקיימת.

$$(-9)^2 + (-9)^2 - 6(-9) + (-9) + 3 + \gamma[(-9)^2 + (-9)^2 + 4(-9) - 21] = 0$$

$$\gamma = -2$$

עתה מציבים ערך זה במשוואה הפרמטרית ומקבלים:

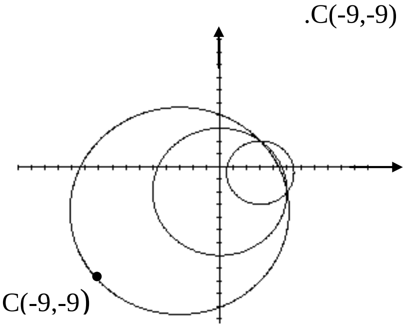
$$x^2 + y^2 - 6x + y + 3 - 2(x^2 + y^2 + 4y - 21) = 0$$

$$x^2 + y^2 + 6x + 7y = 45$$

ועל-ידי השלמה לריבוע: $(x+3)^2 + \left(y + 3\frac{1}{2}\right)^2 = 66\frac{1}{4}$. זאת משוואת המעגל שמרכזו היא הנקודה $\left(-3, -3\frac{1}{2}\right)$

ורדיוסו $\sqrt{66\frac{1}{4}}$. מעגל זה עובר בנקודות החיתוך של המעגלים הנתונים $x^2 + y^2 - 6x + y + 3 = 0$ ו-

$x^2 + y^2 + 4x - 21 = 0$ ובנקודה $C(-9,-9)$.



באופן כללי

נתונות משוואותיהם של שני מעגלים הנחתכים בשתי נקודות A ו- B.

1. $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 2. $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$

משוואת משפחת המעגלים העוברים בנקודות A ו- B היא המשוואה הפרמטרית

$$\alpha(x^2 + y^2 + ax + by + c) + \beta(x^2 + y^2 + dx + ey + f) = 0$$

כאשר לפחות אחד משני הפרמטרים α ו- β איננו אפס ו- $\alpha \neq -\beta$.

הסבר:

א. כשמציבים את השיעורים של כל אחת מהנקודות A ו- B במשוואת המעגל הראשון מתקבל פסוק אמת. וכן מתקבל פסוק אמת אם מציבים את השיעורים במשוואת המעגל השני. לכן הצבת השיעורים של A (או של B) במשוואה שהיא צירוף ליניארי של המשוואות 1 ו- 2 תתן גם היא פסוק אמת. כלומר הגרף של משוואה כזאת עובר בנקודות A ו- B.

ב. כל בחירה של זוג פרמטרים α ו- β שלא שניהם שווים לאפס ושאינם מספרים נגדיים, נותנת משוואה ריבועית בשני משתנים שבה המקדמים של x^2 ו- y^2 שווים ואין בה איבר מעורב xy. קבוצת האמת של המשוואה איננה ריקה (כי היא מכילה את הנקודות A ו-B) ואיננה מצטמצמת לנקודה אחת בלבד, לכן זוהי משוואת מעגל.

ג. אפשר להוכיח כי כל מעגל העובר בנקודת החיתוך של שני המעגלים הנתונים משוואתו היא מהצורה $\alpha(x^2 + y^2 + ax + by + c) + \beta(x^2 + y^2 + dx + ey + f) = 0$.

תרגילים לפרק 5

5.1 מעגל שמרכזו בראשית הצירים

1. נתון המעגל $x^2 + y^2 = 10$.

אמת או שקר?

א. מרכז המעגל נמצא בראשית הצירים.

ב. רדיוס המעגל שווה ל-10.

ג. הנקודה (3,1) נמצאת על המעגל.

ד. הנקודה (0,0) נמצאת על המעגל.

ה. קיימת על המעגל נקודה ששיעורה הראשון הוא $x = -2$.

ו. קיימות על המעגל שתי נקודות ששיעורן הראשון הוא $x = -2$.

ח. קיימת על המעגל נקודה ששיעורה השני הוא $y = 4$.

ט. הנקודה $\left(\sqrt{5},-\sqrt{5}\right)$ נמצאת על המעגל.

י. על המעגל אין נקודה ששיעורה הראשון גדול מ-3.

2. א. כתוב את המשוואה של מעגל שמרכזו בראשית הצירים ורדיוסו 5.

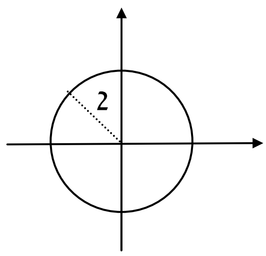
ב. כתוב את המשוואה של מעגל שמרכזו בראשית הצירים ורדיוסו 4.

3. כתוב את המשוואה של מעגל שמרכזו בראשית הצירים והוא עובר בנקודה:

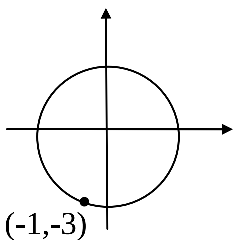
א. (1,2)   ב. (-1,2)   ג. (5,-2)   ד. (-2,-4)

4. רשום את משוואות המעגלים שבסרטוט:

א.



ב.



5. נתון המעגל $x^2 + y^2 = 16$. קבע לגבי כל אחת מהנקודות הבאות אם היא בתוך המעגל, מחוץ למעגל או על המעגל: A(2,2) , B(3,3) , C(-2,-4) , D(4,0) , E(-1,3).

6. נתון המעגל $x^2 + y^2 = 11$.

א. מהו רדיוס המעגל והיכן מרכזו?

ב. מצא את נקודות החיתוך של המעגל עם הצירים.

ג. קבע לגבי כל אחת מהנקודות הבאות אם היא על המעגל, בתוכו או מחוצה לו:

A(2,3) , B(0,11) , C(-2,-1) , D(-1,3.6) , E(0,0).

7. נתון המעגל $x^2 + y^2 = 20$. בחר שתי נקודות שנמצאות בתוך המעגל, שתי נקודות עליו ושתי נקודות מחוץ למעגל. הסבר כיצד בחרת כל נקודה.

8. נתון המעגל $x^2 + y^2 = 25$.

א. האם הנקודה (2,5) נמצאת על המעגל? אם כן מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה זו.

ב. האם הנקודה (3,4) נמצאת על המעגל? אם כן מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה זו.

9. נתון המעגל $x^2 + y^2 = 17$.

א. האם הנקודה (2,2) נמצאת על המעגל? אם כן מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה זו.

ב. האם הנקודה (1,4) נמצאת על המעגל? אם כן מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה זו.

10. רשום משוואות של שלושה ישרים החותכים את המעגל $x^2 + y^2 = 25$. נמק את בחירתך, ובדוק את תשובותיך.

11. מצא משוואות של שלושה ישרים זרים למעגל $x^2 + y^2 = 36$. נמק את בחירתך, ובדוק את תשובותיך.

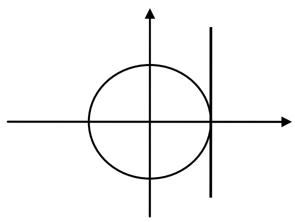
12. רשום משוואה של מעגל שמרכזו בראשית הצירים ומשיק לישר:

א. $x = 3$ ב. $y = -2$ ג. $x = -1$

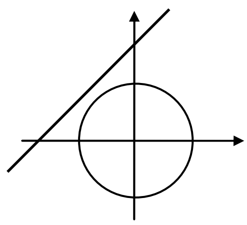
13. הישר $y = -x$ חותך בשתי נקודות את המעגל שמרכזו בראשית הצירים ורדיוסו 6. חשב את אורך המיתר המחבר אותן.

14. מצא משוואות של ישרים ומעגלים שיכולות לתאר את הגרפים הבאים:

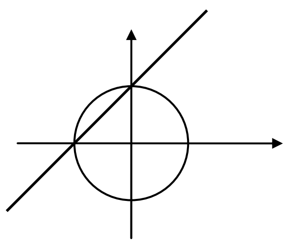
א.



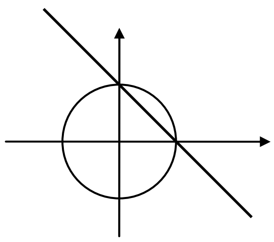
ב.



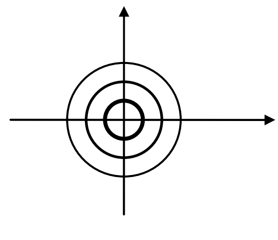
ג.



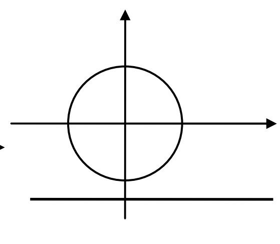
ד.



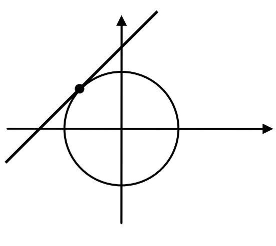
ה.



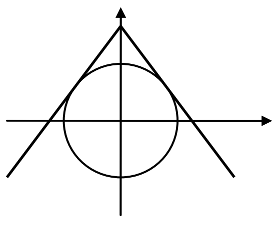
ו.



ז.



ח.



15. נתון המעגל $x^2 + y^2 = 25$. בחר ארבע נקודות A, B, C, D כך ש-

א. המרובע ABCD הוא ריבוע החסום במעגל.

ב. המרובע ABCD הוא ריבוע שחוסם את המעגל.

ג. המרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים החסום במעגל.

ד. המרובע ABCD הוא מעוין שחוסם את המעגל.

16. א. הישר $y = 2x$ חותך את המעגל $x^2 + y^2 = 20$ בנקודות A ו B. הנקודה C(-2,4) נמצאת על המעגל. מצא את שטח המשולש ABC.

ב. מצא את נקודות החיתוך של הישר $y = -0.5x + 1$ והמעגל $x^2 + y^2 = 4$. הראה כי אחת מהן היא גם נקודת חיתוך של המעגל עם ציר ה-x.

ג. נתון המעגל $x^2 + y^2 = 25$ והישר $y = x - 5$. מהם שיעורי נקודות החיתוך שלהם? הראה כי נקודות אלה הן גם נקודות חיתוך של המעגל עם הצירים, וחשב את אורך המיתר הנוצר.

ד. מצא את אורך המיתר המתקבל מחיתוך המעגל $x^2 + y^2 = 40$ והישר $2y + x = 10$.
האם מיתר זה הוא קוטר? נמק!

17. הישרים $2x - 3y = 0$ ו- $2x + 3y = 0$ חותכים את המעגל $x^2 + y^2 = 52$ בארבע נקודות.

א. מצא את המשוואות של המשיקים למעגל בנקודות אלו.

ב. מהו המרובע שנוצר על ידי ארבעת המשיקים? הוכח.

5.2 המשוואה הכללית של המעגל

18. נתון המעגל $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 4$.

אמת או שקר?

א. רדיוס המעגל הוא 4.

ב. מרכז המעגל הוא בנקודה $(-2,5)$.

ג. הנקודה $(-2,7)$ נמצאת על המעגל.

ד. המעגל חותך את ציר y ב- $y = 3$ ו-$y = 7$.

ה. ציר x זר למעגל.

ז. הישר $y = 6$ חותך את המעגל בשתי נקודות.

ח. הישר $x - 2y + 12 = 0$ הוא קוטר במעגל.

19. מצא את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה M ורדיוסו שווה ל-R.

א. $M(2,3)$, $R=4$ ג. $M(6,0)$, $R=9$

ב. $M(-2,5)$, $R=5$ ד. $M(0,-3)$, $R=7$

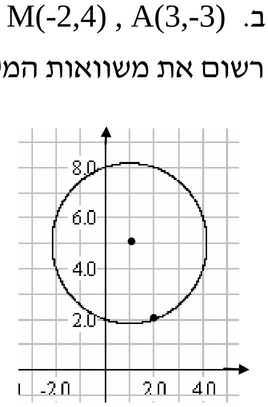
20. מצא את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה M ועובר דרך הנקודה A:

א. $M(1,1)$, $A(2,4)$ ג. $M(-3,-1)$, $A(4,-2)$

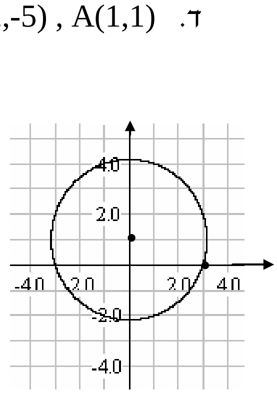
ב. $M(-2,4)$, $A(3,-3)$ ד. $M(2,-5)$, $A(1,1)$

21. רשום את משוואות המעגלים:

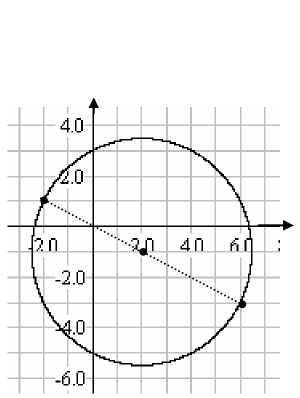
א.



ב.



ג.



22. מצא את משוואת המעגל על פי הנתונים הבאים:

א. מרכז המעגל נמצא על ציר y והמעגל עובר בנקודות $(2,3)$, $(-2,1)$.

ב. מרכז המעגל נמצא על ציר x והמעגל עובר בנקודות $(2,3)$, $(-2,1)$.

ג. מרכז המעגל נמצא על הישר $y = 2x$ והמעגל עובר בנקודות $(1,1)$, $(-2,4)$.

ד. מרכז המעגל נמצא על ציר x, אורך מחוגו שווה ל- $\sqrt{20}$, והמעגל עובר בנקודה $(1,-2)$.

23. רשום משוואת מעגל שנמצא כולו:

א. ברביע השני.

ב. ברביע השלישי.

ג. מימין לציר x.

24. מצא את אורך הרדיוס ואת המרכז של המעגלים הבאים:

א. $x^2 - 2x + y^2 + 1 = 4$

ב. $x^2 - 6x + y^2 + 2y + 5 = 0$

ג. $x^2 - 5x + y^2 + 4y = 2$

ד. $x^2 + 6x + y^2 - 3y - 1 = 0$

ה. $x^2 + 4x + y^2 - 10y - 7 = 0$

ו. $x^2 - 6x + y^2 + 4 = 0$

ז. $2x^2 + 8x + 2y^2 - 6y = 28$

ח. $4x^2 - 12x + 4y^2 + 8y = 12$

25. נתון המעגל $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$.

א. מצא את רדיוס המעגל ואת מרכזו.

ב. מצא את משוואת קוטר המעגל העובר דרך הראשית, ואת נקודות המעגל הנמצאות על קוטר זה.

26. א. מצא נקודה על הישר $x + 3y = 10$ המקיימת: שיעור ה-y שלה גדול פי 3 משיעור ה-x.

ב. מזיזים את המעגל $x^2 + y^2 = 25$ כך שמרכזו עובר לנקודה שמצאת ב-א'.
מהי משוואת המעגל המתקבל?

27. מזיזים מעגל קנוני שרדיוסו 4, יחידה אחת למעלה ושתי יחידות ימינה. מצא:

א. את שיעורי מרכז המעגל לאחר ההזזה.

ב. את משוואת המעגל המתקבל.

28. הזיזו את המעגל $x^2 + y^2 = 65$ שבע יחידות כלפי מעלה ויחידה אחת שמאלה.

א. כתוב את משוואת המעגל שמתקבל.

ב. מצא את נקודות חיתוך המעגל המתקבל עם הצירים.

29. א. מצא נקודה A שמרחקיה מהנקודות $B(4,5)$ ו-$C(1,2)$ שווים ל-3.

ב. רשום את משוואת המעגל שמרכזו ב-A ועובר דרך הנקודות B ו-C.

30. אילו מבין התבניות הבאות מייצגת מעגל? עבור כל תבנית המייצגת מעגל, מצא את הרדיוס ואת מרכז המעגל. אם התבנית אינה מייצגת מעגל, הסבר מדוע.

א. $x^2 - 2x + y + 6 = 0$

ב. $x^2 + 2x + y^2 - 2y - 7 = 0$

ג. $x^2 - 4x + y^2 - 6y + 17 = 0$

ד. $x^2 - 6x + y^2 - 4y + 9 = 0$

ה. $4x^2 + 24x + 4y^2 - 12y - 19 = 0$

31. האם התבנית $x^2 - 2mx + y^2 + 4y + 3 = 0$ מייצגת מעגל לכל m? נמק.

32. נתונה התבנית $x^2 - 2mx + y^2 + 4y + 8 = 0$.

א. עבור אילו ערכים של m התבנית מייצגת מעגל?

ב. עבור אילו ערכים של m התבנית מייצגת נקודה?

ג. עבור אילו ערכים של m התבנית מייצגת קבוצה ריקה?

33. נתונה המשוואה $x^2 + y^2 - 2mx + 2(m-1)y - 1 + 2m^2 = 0$. מצא עבור איזה ערך של הפרמטר m:

א. המשוואה מייצגת מעגל.

ב. המשוואה מייצגת מעגל מנוון (כלומר נקודה).

ג. המשוואה לא מייצגת מעגל.

ד. מעגל שמרכזו נמצא על ציר x.

ה. מעגל שמרכזו נמצא על ציר y.

ו. מעגל שמרכזו נמצא בראשית הצירים.

34. נתונה המשוואה $x^2 + y^2 - 2mx + 4my = 0$ (m פרמטר, x ו-y משתנים).

א. נמק מדוע המשוואה מייצגת מעגל לכל ערך שונה מ-0 של הפרמטר m.

ב. מחברים את נקודות חיתוך המעגל עם הצירים. חשב את שטח המצולע שמתקבל.

35. מצא את המקום הגיאומטרי של הנקודות שריבוע מרחקן מהראשית שווה למרחקן מציר y. זהה את צורת המקום הגיאומטרי.

נקודות חיתוך, מצב הדדי

בחלק מהשאלות הבאות מומלץ להסתמך על משפטים גיאומטריים מוכרים, כגון:

- זווית היקפית במעגל היא ישרה אם ורק אם היא נשענת על קוטר.
- מרכז מעגל נמצא על האנך האמצעי של כל אחד ממיתריו.

36. באילו נקודות נחתכים הצירים עם כל אחד מהמעגלים הנתונים?

א. $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 10$

ב. $(x-1)^2 + (y+4)^2 = 1$

ג. $(x+4)^2 + (y+7)^2 = 4$

ד. $x^2 + (y-2)^2 = 9$

ה. $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 1$

ו. $(x+3)^2 + (y+1)^2 = 2$

37. חשב את אורכי הקטעים שמקצה כל אחד מהמעגלים הנתונים על הצירים:

א. $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 10$

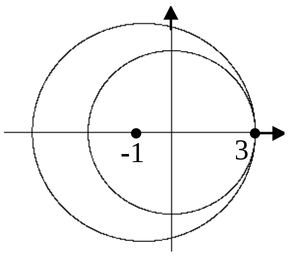
ב. $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 17$

ג. $(x-3)^2 + (y+3)^2 = 13$

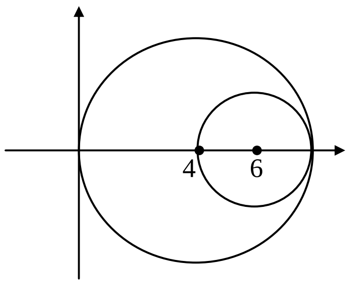
ד. $(x-4\frac{1}{16})^2 + (y-2)^2 = 1\frac{3}{4}$

38. המעגלים שבסרטוט משיקים זה לזה מבפנים, ומרכזיהם על ציר ה-x. רשום את המשוואות המתאימות.

א.



ב.

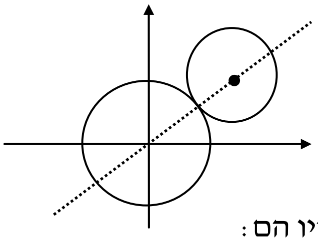


39. נתון מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו 5, ומעגל שני שמרכזו בנקודה (6,0) ורדיוסו $\sqrt{13}$.

א. מצא את נקודות חיתוך שני המעגלים.

ב. הוכח כי הקטע המחבר את מרכזי המעגלים מאונך למיתר המשותף שלהם וחוצה אותו.

40. משוואת אחד המעגלים שבסרטוט היא $x^2 + y^2 = 25$. המעגל השני משיק לו, מרכזו נמצא על הישר $y = x$, ורדיוסו שווה ל-3. מצא את מרכזו.



41. מצא את משוואת המעגל החוסם את המשולש שקדקודיו הם :

א. A(3,3) , B(0,5) , C(5,0).

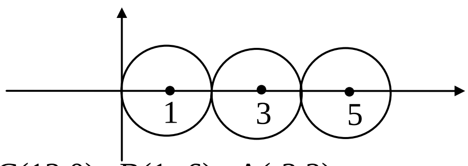
ב. A(2,1) ,B(3,4) ,C(9,2).

ג. C(-4,3) ,B(-3,-2) ,A(2,3).

ד. C(-3,-1) ,B(3,-1) ,A(-2,-2).

שרטט את המשולש ואת המעגל, בכל אחד מהסעיפים.

42. שלושת המעגלים שבסרטוט משיקים זה לזה. כתוב את משוואותיהם.



43. נתון משולש שקדקודיו הם : A(-3,2) , B(1,-6) , C(13,0). הנקודות P, N, M הן אמצעי הצלעות AB , BC , AC בהתאמה. כתוב את משוואת המעגל שקוטרו BP, והראה כי מעגל זה עובר דרך הנקודות M ו-N.

44. נתונים המעגלים $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 25$ ו- $(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 25$.

א. חשב את אורך המיתר המשותף לשני המעגלים.

ב. הראה כי קטע המרכזים (כלומר הקטע המחבר את מרכזי המעגלים הנתונים) קטן מסכום הרדיוסים.

ג. הוכח כי קטע המרכזים חוצה את המיתר המשותף, ומאונך לו.

45. המשולש ABC חסום במעגל שקוטרו BC. נתונים שיעורי שניים מקדקודיו : A(-1,2) ו-B(-4,3). מצא את משוואת הישר AC.

46. נתונות הנקודות A(5,3) ו-B(3,7).

א. מצא נקודה M הנמצאת על הישר $y = 1$, ומרחקיה מ-A ומ-B שווים.

ב. רשום את משוואת המעגל שעובר דרך A ו-B, ומרכזו ב-M.

47. מצא את משוואתו של קוטר במעגל $x^2 + 2x + y^2 - 2y - 7 = 0$, המקביל לישר $2x - y = 3$.

48. נתונים המעגל $x^2 - 4x + y^2 - 4y - 2 = 0$ והנקודה $A(1,5)$.

א. בדוק אם הנקודה A נמצאת על המעגל.

ב. נתון כי ABCD הוא ריבוע החסום במעגל. מצא את שאר הקדקודים.

49. הנקודות $A(3,3)$ ו-$B(-3,1)$ הן קדקודים סמוכים של מלבן ABCD, החסום במעגל $x^2 - x + y^2 - y - 12 = 0$. מצא את שני הקדקודים האחרים של המלבן.

50. המלבן ABCD חסום במעגל $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$. נתון: $A(1,5)$, $B(-6,-2)$.

א. מצא את שני הקדקודים הנוספים של המלבן.

ב. חשב את שטח המלבן.

51. נתונה המשוואה: $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$. וודא כי זאת משוואת מעגל ומצא:

א. את נקודות החיתוך של המעגל עם צירי השיעורים.

ב. נקודות על המעגל הנמצאות במרחקים שווים מצירי השיעורים.

ג. נקודות על המעגל ששיעורן השני הוא 1.

52. מהו המצב ההדדי בין המעגל $x^2 - 4x + y^2 - 6y = 0$ לבין כל אחד מהישרים הבאים:

א. $2x + 2y = 5$	ג. $2x - 4y = 8$	ה. $y - x = 10$
ב. $3y + 2x = 26$	ד. $2x + 3y = 26$	ו. $y = 2x - 2$

53. רשום משוואת מעגל שחותך את הישר $x + y = 5$ בנקודות A ו-B, אם נתון:

א. המיתר AB נמצא ברביע הראשון.

ב. שיעור ה-x של A הוא 2, ושיער ה-y של B הוא 5.

ג. A נמצאת על הישר $y = 4x$, ו-B נמצאת ברביע הרביעי.

54. נתונים שני מעגלים: מרכז המעגל האחד בנקודה $(-1,-1)$ ורדיוסו $\sqrt{2}$, ומרכז המעגל השני בנקודה $(2,0)$ ורדיוסו 1. מה מצבם ההדדי?

55. נתון המעגל $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 8$. מצא מעגל שמקיים:

א. המעגל נמצא ברביע הראשון ומשיק למעגל הנתון.

ב. המעגל חותך את המעגל הנתון בשתי נקודות ברביע הרביעי.

ג. המעגל משיק למעגל הנתון, ונמצא בתוכו.

56. מצא ואפיין את המקום הגיאומטרי של הנקודות D שמהן רואים את הקטע AB בזווית בת 90^o (כלומר נקודות עבורן מתקיים $\angle ADB = 90°$), כאשר:

א. $A(1,1)$, $B(-5,3)$ ב. $A(4,1)$, $B(-2,3)$

57. כמה פתרונות יש למערכות המשוואות הבאות? חשב אותם וסרטט גרף מתאים.

א. $\begin{cases} x^2+y^2=16 \\ y-x=4 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} (x+1)^2+y^2=5 \\ x-2y=3 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} x^2+y^2=36 \\ y=x-6 \end{cases}$

ד. $\begin{cases} x^2+(y+2)^2=29 \\ 2x-5y-10=0 \end{cases}$

מהן נקודות החיתוך של זוגות המעגלים הנתונים?

58. קבע את מספר הפתרונות של מערכות המשוואות הבאות ומצא אותם. שרטט גרף מתאים.

א. $\begin{cases} (x-6)^2+y^2=25 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} (x-3)^2+(y-2)^2=9 \\ (x-3)^2+(y+5)^2=16 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} (x+3)^2+y^2=36 \\ x^2+y^2=9 \end{cases}$

ד. $\begin{cases} (x+2)^2+(y-1)^2=4 \\ x^2+y^2=49 \end{cases}$

ה. $\begin{cases} (x-6)^2+y^2=36 \\ (x-9)^2+y^2=9 \end{cases}$

ו. $\begin{cases} (x-4)^2+y^2=4 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$

ז. $\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ (x+3)^2+y^2=36 \end{cases}$

ח. $\begin{cases} (x-2)^2+(y-1)^2=4 \\ (x-1)^2+(y-2)^2=16 \end{cases}$

59. נתון המעגל $(x-4)^2+(y+3)^2=25$. רשום קדקודים של מלבן חסום במעגל, כאשר:

א. צלעות המלבן מקבילות לצירים.

ב. אחד האלכסונים מקביל לציר ה-y.

ג. שני האלכסונים מקבילים לצירים. איזה מלבן מתקבל במקרה זה?

60. נתון המעגל $x^2+y^2=1$. מצא שלושה מעגלים משיקים לו, שרדיוס כל אחד מהם שווה ל-5.

61. רשום משוואות של זוג מעגלים עבור כל אחד מהמקרים הבאים:

א. המעגלים זרים

ב. המעגלים משיקים מבחוץ

ג. המעגלים נחתכים

ד. המעגלים משיקים מבפנים

ה. מעגל אחד בתוך השני והמעגלים אינם נחתכים.

בכל מקרה השווה בין סכום אורכי הרדיוסים והמרחק שבין מרכזי המעגלים. מהי מסקנתך?

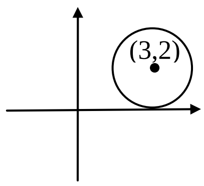
5.3 השקה של ישר למעגל

5.3.1 מעגל שמשיק לצירים

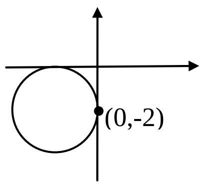
62. מצא את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה (6,3) ומשיק לציר ה- x.

63. רשום את משוואות המעגלים המתוארים בסרטוטים

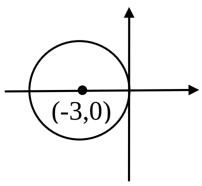
א.



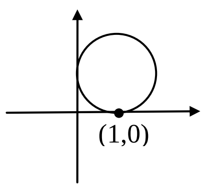
ב.



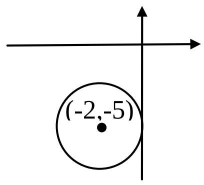
ג.



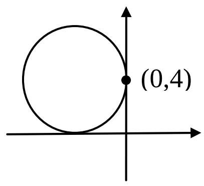
ד.



ה.



ו.



64. מצא משוואה של מעגל המשיק לציר ה-y בנקודה (0,2) ועובר דרך הנקודה

א. (-8,-6)   ב. (-8,6)

רמז : מהו שיעור ה-y של המרכז?

65. מצא משוואה של מעגל המשיק לציר ה-x בנקודה (-4,0) ועובר דרך הנקודה (1,1).

66. מצא את משוואות המעגלים המשיקים לשני הצירים ועוברים דרך הנקודה (1,2).

67. מצא את משוואות המעגלים שהרדיוס שלהם הוא 2 והם משיקים לציר ה- y כאשר מרכזיהם על הישר $x - y + 3 = 0$.

68.מצא את משוואת המעגל שרדיוסו , משיק לציר ה- y ולישר $y = 9$, וכולו נמצא ברביע הראשון.

69. מצא את משוואות המשיקים למעגל $(x+4)^2 + (y-5)^2 = 49$, המקבילים לצירים.

70. א. מצא את משוואות שני מעגלים העוברים דרך הנקודה B(1,8) ומשיקים כל אחד לשני הצירים.

ב. תהי A מרכז המעגל הקטן מבין שני המעגלים שמצאת ב- א'. חשב את שטח המשולש ABO כאשר O היא ראשית הצירים.

71. מצא את משוואות של שני המעגלים שמרכזיהם על הישר $3x - y - 10 = 0$ ומשיקים לשני הצירים.

72. מצא את משוואתו של המעגל העובר דרך הנקודות (1,-1) ו- (0,-2) ונוגע בציר ה- x.

73. שני מעגלים עוברים דרך הנקודה A(1,5) ומשיקים לציר ה- y וגם לישר $y = -3$.

א. מצא את מרכזיהם של המעגלים.

ב. האם המעגל שקוטרו הוא קטע שמחבר את מרכזי המעגלים שמצאת ב- א', עובר דרך A? נמק.

5.3.2 משוואת המשיק בנקודה על המעגל

74. נתון המעגל $x^2 + y^2 = 13$.

א. מצא את המשוואות של המשיקים למעגל בנקודות: $A(2,3), B(-2,3), C(2,-3), D(-2,-3)$

ב. ארבעת המשיקים שמצאת בסעיף א יוצרים מרובע. איזה מרובע התקבל? הוכח את השערתך, ומצא את שטח המרובע.

75. נתונים המעגל $x^2 + y^2 = 34$ ונקודה $A(3,5)$ עליו. המשיק למעגל בנקודה A חותך את ציר x בנקודה B. מצא את שטח המשולש OAB (O - ראשית הצירים).

76. נתונים המעגל $x^2 + y^2 = 25$ ונקודה $A(4,3)$.

א. וודא כי הנקודה A נמצאת על המעגל, ומצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה A.

ב. מצא את נקודת החיתוך B של המשיק עם ציר x.

ג. מצא את שטח המשולש ABO (O- ראשית הצירים).

77. וודא כי הנקודות הנתונות להלן נמצאות על המעגל $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 4$, ומצא את משוואת המשיק למעגל דרך כל אחת מהן:

א. $(5,0)$ ב. $(5,-4)$ ג. $(7,-2)$ ד. $(3,-2)$

78. מצא את משוואות המשיקים למעגל $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$ דרך הנקודות

א. $(3,0)$ ב. $(-4,7)$ ג. $(2,-1)$ ד. $(-5,6)$

79. א. הנקודה $A(-1,5)$ נמצאת על מעגל שמרכזו $M(-2,2)$. מצא את משוואת המשיק ב-A.

ב. מצא את משוואת המשיק למעגל שמרכזו $M(5,-2)$, כאשר נקודת ההשקה היא $A(3,0)$.

80. מצא את משוואת המשיק למעגל הנתון בנקודה הנתונה A, וכן משוואה של משיק נוסף למעגל, המקביל למשיק שמצאת:

א. $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 10$ בנקודה $A(1,4)$.

ב. $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = R^2$ בנקודה $A(-1,1)$ שעליו (חשב תחילה את רדיוס המעגל).

81. מצא את משוואת המשיק למעגל, על פי התנאי הנתון.

א. משיק למעגל $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 9 = 0$ אם ידוע כי שיעור ה-x של נקודת ההשקה גדול פי 2 משיעור ה-y שלה.

ב. משיק למעגל $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 2$, כאשר שיעור ה-x של נקודת ההשקה הוא 2-.

ג. משיק למעגל $x^2 - 2x + y^2 + 6y = 24$, אם נתון כי שיעור ה-y של נקודת ההשקה הוא 2

82. מצא את משוואת המשיק למעגל $2x^2 + 2y^2 + 4x - 12y - 30 = 0$ בנקודה A הנמצאת על המעגל, ברביע השלישי, אם נתון כי שיעור ה-x שלה גדול פי 4 משיעור ה-y.

83. הוכח כי המשיקים למעגל $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 2$ בנקודות $(3,4)$ ו- $(5,6)$ מקבילים זה לזה. מצא את המרחק ביניהם.

5.3.3 משוואת המיתר בין נקודות ההשקה (העשרה)

84. מהנקודה (5,8) יוצאים שני משיקים למעגל $x^2 + y^2 = 16$. מצא את משוואת המיתר בין נקודות ההשקה.

85. מראשית הצירים יוצאים משיקים למעגל $x^2 + y^2 - 4x - 14y - 49 = 0$. מצא את משוואת המיתר המחבר את נקודות ההשקה.

86. מצא את אורך המיתר המחבר את נקודות ההשקה של המשיקים היוצאים מהנקודה (6,2) אל המעגל $x^2 + y^2 = 20$.

87. מהנקודה (8,-4) יוצאים שני משיקים למעגל שמרכזו בראשית הצירים. מצא את רדיוס המעגל אם משוואת הישר עליו מונח המיתר בין שתי נקודות ההשקה הוא $2x - y - 9 = 0$.

88. מהנקודה (6,2) יוצאים שני משיקים למעגל שמשוואתו קנונית. מצא את רדיוסו של המעגל אם משוואת המיתר המחבר את נקודות ההשקה היא $3x + y - 8 = 0$.

89. מצא את שטח המשולש הנוצר על ידי המשיקים היוצאים מראשית הצירים אל המעגל $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 4$ ועל ידי המיתר המחבר את נקודות ההשקה.

5.3.4 משיק מנקודה מחוץ למעגל <u>ותרגילי סיכום</u>

90. משיק למעגל $x^2 + y^2 = 40$ מקביל לישר $x + 3y = 18$.
א. מצא את משוואת המשיק (שתי תשובות).
ב. מצא את נקודות ההשקה.
ג. חשב את המרחק בין הנקודות שמצאת בסעיף ב'.

91. נתון המעגל $x^2 + y^2 = 20$. דרך הנקודות: (4,2) , (-4,2) , (4,-2) , (-4,-2) עוברים משיקים למעגל. חשב את שטח המרובע שנוצר על ידי המשיקים.

92. מצא את משוואות המשיקים למעגל $x^2 + y^2 = 10$, המקבילים לישר $x + 3y = 5$.

93. מצא את משוואות המשיקים למעגל $x^2 + y^2 = 34$, המאונכים לישר $5x - 3y = 3$.

94. מצא את משוואות המשיקים למעגל $x^2 + y^2 - 12x - 4y - 96 = 0$ המקבילים לישר $y = -\frac{5}{3}x + \frac{10}{3}$.

95. נתון המעגל $x^2 + y^2 - 2x - 14y + 32 = 0$. מצא משוואות המשיקים למעגל העוברים דרך ראשית הצירים.

96. א. רשום את משוואת המעגל הקנוני שרדיוסו $\sqrt{10}$. אילו מבין כל הישרים ששיפועם שווה ל-3 משיקים למעגל, ואילו חותכים את המעגל?
ב. רשום את משוואת המעגל הקנוני שעובר בנקודה (-1,-3). מבין כל הישרים שעוברים דרך הנקודה (0,10), אילו מהם משיקים למעגל, ואילו חותכים את המעגל?
ג. רשום את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה (1,0) ורדיוסו 5. מבין כל הישרים המקבילים לישר $x + y = 0$, אילו מהם משיקים למעגל, ואילו זרים למעגל?
הדרכה: מספר נקודות החיתוך הוא כמספר פתרונות מערכת המשוואות המתאימה. עליך לקבוע את ערכי הפרמטר שעבורם סימן הדיסקרימיננטה הוא הדרוש.

97. מצא את משוואות המשיקים למעגל $(x-3)^2+(y+1)^2=17$, המאונכים לישר $y-4x=5$.

98. מצא את משוואות המשיקים למעגל $(x-1)^2+(y+2)^2=37$, המאונכים לישר $x-6y=10$.

99. נתונים המעגל $x^2+(y+4)^2=R^2$ והמשיק שלו $-2x+3y=1$. מצא את רדיוס המעגל ואת נקודת ההשקה.

100. נתונים המעגל $(x-2)^2+y^2=1$ והישר $y=mx$.

א. מצא את m, אם ידוע כי הישר משיק למעגל.

ב. חשב את שיעורי נקודת המגע.

ג. וודא כי הרדיוס לנקודת המגע מאונך למשיק.

ד. בשביל אילו ערכים של m הישר חותך את המעגל בשתי נקודות?

101. נתון משולש ABC שצלעותיו על הישרים $3x+4y=28$, $3x-4y=28$, $4x+3y=-21$.

א. הראה כי הנקודה (1,0) נמצאת במרחקים שווים מצלעות המשולש.

ב. מצא את המעגל החסום במשולש (כלומר המעגל שמשיק לצלעות המשולש).

102. א. הוכח כי הישר $3x+2y=16$ משיק למעגל $(x-1)^2+y^2=13$, ומצא את נקודת ההשקה.

ב. הראה כי הישר $8x-6y+14=0$ עובר דרך מרכז המעגל $(x-2)^2+(y-5)^2=100$, ומצא את משוואות המשיקים המקבילים לו.

ג. הוכח כי שני המעגלים $x^2+y^2=25$ ו-$(x-12)^2+(y-9)^2=100$ משיקים זה לזה, מצא את משוואת המשיק בנקודת ההשקה, והראה כי המרחק בין מרכזי המעגלים שווה לסכום הרדיוסים.

ד. דרך הנקודות A(4,2) ו-B(-3,1) העבירו משיקים למעגל $(x-1)^2+(y+2)^2=25$. מצא את שיעורי נקודת החיתוך C של שני המשיקים, והראה כי קטעי המשיק AC ו-BC שווים זה לזה.

103. נתונות משוואת מעגל ומשוואה פרמטרית של ישר:

(1) המעגל $x^2+2x+y^2-2y+1=0$ והישר $y=2x+n+3$.

(2) המעגל $x^2-6x+y^2-2y=10$ והישר $y=mx+17$.

מצא עבור איזה ערכים של הפרמטר הישר

א. משיק למעגל.

ב. חותך את המעגל.

ג. זר למעגל (אין לישר נקודה משותפת עם המעגל).

104. נתון המעגל $(x+5)^2+(y+2)^2=37$.

א. בדוק את מיקום הנקודה A(0,-9) ביחס למעגל, ומצא את משוואות המשיקים למעגל העוברים דרכה.

ב. חשב את אורך המיתר המחבר את נקודות ההשקה.

105. הראה כי המעגלים $(x-3)^2 + y^2 = 9$ ו- $x^2 + (y-2)^2 = 4$ נחתכים בזווית ישרה.

106. מצא את משוואת המעגל המשיק לשני הישרים $2x + y + 15 = 0$ ו- $2x + y - 5 = 0$,
כאשר אחת מנקודות ההשקה היא (2,1).

107. מצא את משוואת המעגל שמרכזו ברביע השני, המשיק לישר $y + 3x - 13 = 0$ בנקודה (5,-2) וגם משיק לישר $x + 3y - 3 = 0$.

108. מצא את משוואת המעגל שמרכזו על ציר ה-x מימין לציר ה- y, המשיק לציר ה- y ולישר $4x - 3y + 1 = 0$.

109. א. מצא את המשיקים למעגל $x^2 + 2x + y^2 - 4y + 1 = 0$ המאונכים לישר $4x + 3y = 0$.
ב. מצא את המשיקים למעגל הנ"ל היוצרים עם המשיקים שמצאת ב- א' ריבוע.

110. מצא את משוואת המעגל החסום במשולש שצלעותיו הן $3x + 4y = 0$, $3x - 4y + 16 = 0$, $x = 4$.

111. מעגל שמרכזו ברביע הראשון משיק לציר ה- x בנקודה D(3,0) ומשיק גם לישר $3x - 4y + 36 = 0$.
א. מצא את משוואת המעגל הנ"ל.
ב. המעגל שמצאת בסעיף א' חסום במשולש שווה שוקיים. בסיסו של המשולש נמצא על ציר ה- x ושוק אחת על הישר $3x - 4y + 36 = 0$. מצא את משוואתה של השוק השנייה.

112. מרכזו של המעגל נמצא ברביע השלישי. המעגל משיק לישרים $2x - y - 2 = 0$ ו- $x + 2y + 9 = 0$ ועובר דרך ראשית הצירים. מצא את משוואת המעגל.

113. מעגל משיק לישרים $x + y + 13 = 0$ וגם לישר $7x - y - 5 = 0$ בנקודה (1,2). מצא את משוואת המעגל. הבחן בין שני מקרים.

114. המעגל $5x^2 + 10x + 5y^2 - 13 = 0$ חסום בריבוע אשר אחת מצלעותיו נמצאת על הישר $x + 3y - 5 = 0$. מצא את שאר צלעות הריבוע.

115. מצא באיזו זווית רואים את המעגל $(x-7)^2 + (y-4)^2 = 40$ מהנקודה (12,9).

116. ריבוע שאחד מקדקודיו נמצא בנקודה (7,6) חוסם מעגל שמשוואתו $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 41 - k$.
א. מצא את k
ב. מצא את משוואות צלעות הריבוע.

117. מצא את משוואת המעגל שמרכזו ברביע השני ורדיוסו 2 והוא משיק לישרים $3x + 4y = 0$ ו- $4x + 3y = 0$.

118. א. דרך הנקודה A(25,25) עוברים משיקים למעגל $x^2 + y^2 = 25$. מצא את משוואותיהם.
ב. הראה כי הנקודה A נמצאת במרחק שווה מנקודות ההשקה.

119. א. מהן משוואות המשיקים למעגל $x^2 + y^2 = 20$ העוברים בנקודה $A(-2,-6)$?

ב. חשב את שטח המרובע שקדקודיו הם A, שתי נקודות ההשקה ומרכז המעגל.

120. נתונים המעגלים $x^2 + y^2 = 5$ ו-$x^2 + y^2 = 25$. מעבירים משיק למעגל הפנימי דרך הנקודה $A(1,2)$. משיק זה חותך את המעגל החיצוני בנקודות B ו-C. חשב את אורך המיתר BC.

121. מעגל שמרכזו בראשית חותך את ציר ה-x בנקודות A ו-C, ואת ציר ה-y בנקודות B ו-D.

א. איזה סוג מרובע הוא ABCD?

ב. נתון כי שטחו של ABCD הוא 4. מהי משוואת המעגל?

122. מעגל שמרכזו על הישר $y = 2x - 1$ עובר דרך הנקודה $(2,8)$, ומשיק לישר $x - 3y + 2 = 0$.

א. מצא את המרכז של המעגל אם הוא ברביע הראשון.

ב. מצא את משוואת המעגל.

123. מצא את משוואת המעגל שכולו ברביע הראשון אם הוא עובר דרך הנקודות $(8,15)$, $(4,3)$ ומשיק לישר $x + y = 27$.

124. המעגלים $x^2 + y^2 = R^2$ ו- $x^2 + y^2 + 5y + 5 = 0$ נחתכים בזווית ישרה. מצא את R.

125. המשיק היוצא מהנקודה $(2,-9)$ למעגל שמרכזו $(-3,7)$ הוא בעל אורך 9. מצא את רדיוסו של המעגל.

126. הוכח כי אורך המשיק היוצא מראשית הצירים למעגל $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ הוא $\sqrt{c}$ ($c>0$).

127. שני מעגלים $x^2 + y^2 = R^2$ ו- $(x-6)^2 + (y-8)^2 = 36$ משיקים מבחוץ. מצא את רדיוס המעגל הראשון.

128. מצא את משוואת הישר המשיק למעגל $x^2 + y^2 = 20$ ויוצר עם הכיוונים החיוביים של הצירים משולש ששטחו 25.

129. במשולש ABC משוואת הצלע AB היא $-7x + y - 22 = 0$. הקדקוד C הוא $(6,0)$ ומרכז המעגל החסום בו הוא $(0,2)$. מצא את שאר הצלעות של המשולש.

130. במשולש ABC נתון $A(-3,2)$, $B(1,-2)$. משוואת חוצה זווית C היא $y = 3x + 5$ ורדיוסו של המעגל הוא $\sqrt{2}$.

א. מצא את מרכז המעגל אם הוא נמצא מעל הישר AB.

ב. מצא את C.

תשובות לפרק 5

5.1 מעגל שמרכזו בראשית הצירים

1. אמת: א, ג, ה, ו, ט   2. א. $x^2 + y^2 = 25$ ב. $x^2 + y^2 = 16$

3. א. $x^2 + y^2 = 5$ ב. $x^2 + y^2 = 5$ ג. $x^2 + y^2 = 29$ ד. $x^2 + y^2 = 20$

4. א. $x^2+y^2=4$; ב. $x^2+y^2=10$ 5. בתוך: A, E ; בחוץ: C, B ; על: D

6. א. $R = \sqrt{11}$, (0,0) ; ב. $\left(\pm\sqrt{11},0\right), \left(0,\pm\sqrt{11}\right)$ ג. בתוך: C, E ; בחוץ: A, D ; על: B

8. א. לא ; ב. $3x + 4y = 25$ 9. א. לא ; ב. $x + 4y = 17$

12. א. $x^2 + y^2 = 9$; ב. $x^2 + y^2 = 4$; ג. $x^2 + y^2 = 1$ 13. 12   16. 16

17. א. $-6x - 4y = 52$, $-6x + 4y = 52$, $6x - 4y = 52$, $6x + 4y = 52$; ב. מעוין

5.2 המשוואה הכללית של המעגל

18. אמת: ב, ג, ה, ו, ח

19. א. $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$; ב. $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 25$; ג. $(x - 6)^2 + y^2 = 81$;
ד. $x^2 + (y + 3)^2 = 49$

20. א. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 10$ ב. $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 74$ ג. $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 50$
ד. $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 37$

21. א. $(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 10$; ב. $x^2 + (y - 1)^2 = 10$; ג. $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 20$

22. א. $x^2 + (y - 2)^2 = 5$; ב. $(x - 1)^2 + y^2 = 10$; ג. $(x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 29$;
ד. $(x - 5)^2 + y^2 = 20$ או $(x + 3)^2 + y^2 = 20$

24. א. (1,0) , 2 ; ב. $\sqrt{5}$ (3,-1) , ; ג. (2.5,-2) , 3.5 ; ד. (-3,1.5) , 3.5 ; ה. (-2,5) , 6 ;
ו. $\sqrt{5}$ (3,0) , ; ז. (-2,1.5) , 4.5 ; ח. (1.5,-1) , 2.5

25. (1,2) , 3 ; ב. $\left(1 \pm \frac{3}{\sqrt{5}}, 2 \pm \frac{6}{\sqrt{5}}\right)$, $y = 2x$

26. א. (1,3) ; ב. $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$

27. א. (2,1) ; ב. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$

28. א. $(x + 1)^2 + (y - 7)^2 = 65$; ב. (3,0) , (-5,0) , (0,-1) , (0,15)

29. א. (1,5) או (4,2) ; ב. $(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 9$ או $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 9$

30. ב. (-1,1) , 3 ; ד. (3,2) , 2 ; ה. (-3,1.5) , 4   31. כן

32. א. $m < -2$, $m > 2$; ב. $m = \pm 2$; ג. $-2 < m < 2$

33. א. $m < 1$; ב. $m = 1$; ג. $m > 1$; ד. 1 (מעגל מנוון) ; ה. 0 ; ו. אין

34. ב. $4m^2$

35. מעגל שמרכזו (0.5,0) ורדיוסו 0.5

36. א. (0,3) , (0,1) , $(3+\sqrt{6},0)$, $(3-\sqrt{6},0)$; ב. (0,-4) ; ג. אין ;
ד. $(\sqrt{5},0),(-\sqrt{5},0)$, (0,-1) , (0,5) ; ה. (3,0) ; ו. (-2,0) , (-4,0)

37. א. 6 , 2 ; ב. 4 , $2\sqrt{2}$; ג. 4 , 4 ; ד. 2 , 0.5

38. א. $x^2 + y^2 = 9$, $(x + 1)^2 + y^2 = 16$ ב. $(x - 6)^2 + y^2 = 4$, $(x - 4)^2 + y^2 = 16$

39. א. (4,-3) , (4,3) 40. $\left(4\sqrt{2},4\sqrt{2}\right)$

41. א. $(x + 3.5)^2 + (y + 3.5)^2 = 84.5$; ב. $(x - 5.5)^2 + (y - 1.5)^2 = 12.5$;
ג. $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 13$; ד. $x^2 + (y - 1)^2 = 13$

42. $(x - 5)^2 + y^2 = 1$, $(x - 3)^2 + y^2 = 1$, $(x - 1)^2 + y^2 = 1$

43. $(x - 3)^2 + (y + 2.5)^2 = 16.25$ 44. $2\sqrt{5}$ 45. $y = 3x + 5$

46. א. (-4,1) ; ב. $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 85$

47. $y = 2x + 3$ 48. B (5,3) , C (3,-1) , D (-1,1) 49. (4,0) , (-2,-2)

50. א. (2,4) , (-5,-3) ; ב. 14

51. א. (0,0) , (-6,0) , (0,8) ; ב. (1,1) , (0,0) , (-7,7) ; ג. (1,1) , (-7,1)

52. חותכים: א, ג, ו ; משיקים: ב, ד ; זר: ה 54. זרים

56. א. מעגל $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 10$ ב. מעגל $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 10$

57. א. (0,4) , (-4,0) ; ב. (-1.4,-2.2) , (1,-1) ; ג. (6,0) , (0,-6) ; ד. (5,0) , (-5,-4)

58. א. (3,4) ; ב. (3,-1) ; ג. (3,0) ; ד. אין ; ה. (12,0) ; ו. (2,0) ; ז. (3,0) ; ח. אין

59. ג. ריבוע, (-1,-3) , (9,-3) , (4,-8) , (4,2)

5.3 השקה של ישר למעגל

5.3.1 מעגל שמשיק לצירים

62. $(x-6)^2 + (y-3)^2 = 9$

63. א. $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$; ב. $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$; ג. $(x + 3)^2 + y^2 = 9$;
ד. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$; ה. $(x + 2)^2 + (y + 5)^2 = 4$; ו. $(x + 4)^2 + (y - 4)^2 = 16$

64. א. $(x + 8)^2 + (y - 2)^2 = 64$; ב. $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 25$

65. $(x + 4)^2 + (y - 13)^2 = 169$

66. $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$ ו- $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$

67. $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$ ו- $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 4$

68. $(x-5)^2 + (y-14)^2 = 25$ 69. x = 3 , x = -11 , y = 12 , y = -2

70. א. $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$, $(x-13)^2 + (y-13)^2 = 169$ ב. 17.5

71. $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$, $(x-2.5)^2 + (y+2.5)^2 = 6.25$

72. $x^2+(y+1)^2=1, (x-4)^2+(y+5)^2=25$ 73. א. (5,2), (13,10) ב. לא

5.3.2 משוואת המשיק בנקודה על המעגל

74. א. $x + 3y = 13$, $-2x + 3y = 13$, $2x - 3y = 13$, $-2x - 3y = 13$; ב. מעוין, $56\frac{1}{3}$

75. $28\frac{1}{3}$ 76. א. $4x + 3y = 25$; ב. (6.25,0) ; ג. 9.375

77. א. $y = 0$; ב. $y = -4$; ג. $x = 7$; ד. $x = 3$

78. $4x - 3y = 12$; ב. $3x - 4y + 40 = 0$; ג. $3x - 4y = 10$; ד. $4x - 3y + 38 = 0$

79. א. $x + 3y = 14$; ב. $y = x - 3$

80. א. $x - 3y = 9$, $3y - x = 11$; ב. $x - 2y + 3 = 0$, $x - 2y + 23 = 0$

81. א. $y = x - 1$ או $7y = x + 9$; ב. $y = x + 5$ או $x + y + 1 = 0$;

ג. $3x + 5y = 22$ או $3x - 5y + 16 = 0$

82. $3x - 4y = -16$ 91. $x + 4y = 16$, $x + 4y = -18$ 92. $6x + y + 33 = 0$, $6x + y = 41$

83. ב. $2\sqrt{2}$

5.3.3 משוואת המיתר בין נקודות ההשקה (העשרה)

84. $5x + 8y = 16$ 85. $2x + 7y = 49$ 86. $\sqrt{40}$ 87. 6 88. 4 89. 12.48

5.3.4 משיק מנקודה מחוץ למעגל <u>ותרגילי סיכום</u>

90. א. $x + 3y = 20$, $-x - 3y = 20$; ב. (2,6) , (-2,-6) ; ג. $4\sqrt{10}$ 91. 100

92. $x + 3y = 10$, $x + 3y = -10$ 93. $3x + 5y = 34$, $3x + 5y = -34$

94. $5x + 3y = 104$ ו- $5x + 3y = -32$ 95. $y = x$, $31x + 17y = 0$

96. א. $x^2 + y^2 = 10$, $y = 3x + n$: משיקים $n = \pm 10$, חותכים $-10 < n < 10$

ב. $x^2 + y^2 = 10$, $y = mx + 10$: משיקים $m = \pm 3$, חותכים $m > 3$ או $m < -3$

ג. $x^2 - 2x + y^2 = 24$, $x + y = n$: משיקים $n = 1 \pm 5\sqrt{2}$, זרים $n > 1 + 2\sqrt{5}$ או

$n < 1 - 5\sqrt{2}$

97. $x + 4y = 16$, $x + 4y = -18$ 98. $6x + y + 33 = 0$, $6x + y = 41$

99. $\sqrt{13}$, (-2,-1) 100. א. $\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$; ב. $\left(1\frac{1}{2}, \frac{\pm\sqrt{3}}{2}\right)$; ד. $-\frac{1}{\sqrt{3}} < m < \frac{1}{\sqrt{3}}$

101. $x^2 - 2x + y^2 - 24 = 0$

102. א. (4,2) ; ב. $4x - 3y = -57$; $4x - 3y = 43$; ג. $4x + 3y = 25$; ד. (0, 5)

103. (1) א. $n = \pm\sqrt{5}$; ב. $-\sqrt{5} < n < \sqrt{5}$; ג. $n < -\sqrt{5}$ או $n > \sqrt{5}$

(2) א. $m = 10\frac{8}{11}$ או $m = -2$; ב. $m > 10\frac{8}{11}$ או $m < -2$; ג. $-2 < m < 10\frac{8}{11}$

104. א. $x + 6y + 54 = 0$, $6x - y - 9 = 0$; ב. $\sqrt{74}$

106. $(x+2)^2+(y+1)^2=20$ 107. $(x-2)^2+(y+3)^2=10$

108. $(x-1)^2+y^2=1$

109. א. $3x-4y+1=0$, $3x-4y+21=0$ ב. $4x+3y-12=0$, $4x+3y+8=$

110. $(x-1.5)^2+(y-2)^2=6.25$ 111. א. $(x-3)^2+(y-5)^2=25$

ב. $3x+4y-54=0$

112. $(x+2)^2+(y+1)^2=5$

113. $(x-29)^2+(y+2)^2=800$ ו- $(x+6)^2+(y-3)^2=50$

114. $x+3y+7=0$, $3x-y+9=0$, $3x-y-3=0$ 115. 126.9°

116. א. $k=36$ ב. $x+2y=19$, $x+2y=9$, $2x-y+2=0$, $2x-y-8=0$

117. $(x+10)^2+(y+10)^2=4$ 118. א. $-3x+4y=25$, $4x-3y=25$

119. א. $2x+y=-10$, $x-2y=10$; ב. 20 120. $4\sqrt{5}$

121. א. ריבוע ; ב. $x^2+y^2=4$ 122. א. $(3,5)$ ב. $(x-3)^2+(y-5)^2=10$

123. $(x-9)^2+(y-8)^2=50$ 124. $\sqrt{5}$ 125. $10\sqrt{2}$ 127. 4

128. $y=-0.5x+5$ או $y=-2x+10$ 129. $x+y-6=0$, $x-7y-6=0$

130. א. $(-1,2)$ ב. $(0,5)$

פרק 6 : האליפסה

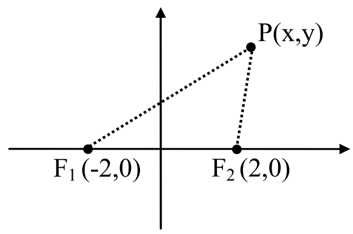
6.1 האליפסה כמקום גיאומטרי

האליפסה, כמו המעגל, מתקבלת כמקום גיאומטרי.

<u>דוגמה</u>

מצא את המקום הגיאומטרי של הנקודות שסכום מרחקיהן מהנקודות $F_1(-2,0)$ ו- $F_2(2,0)$ הוא 8.

<u>פתרון</u>



תהי $P(x,y)$ נקודה המקיימת את התנאי $PF_1 + PF_2 = 8$.

$$PF_1 = \sqrt{(x+2)^2 + y^2}$$

$$PF_2 = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$$

$$PF_1 + PF_2 = 8$$

לכן

$$\sqrt{(x+2)^2 + y^2} + \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 8$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 8 - \sqrt{(x+2)^2 + y^2}$$

נעלה בריבוע את שני האגפים

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 64 - 16\sqrt{(x+2)^2 + y^2} + x^2 + 4x + 4 + y^2$$

$$16\sqrt{(x+2)^2 + y^2} = 64 + 8x \quad / \quad :8$$

$$2\sqrt{(x+2)^2 + y^2} = 8 + x$$

העלאה בריבוע נוספת :

$$4x^2 + 16x + 16 + 4y^2 = 64 + 16x + x^2$$

$$3x^2 + 4y^2 = 48$$

זאת משוואה קנונית של אליפסה $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

הוכחנו : אם סכום מרחקיה של נקודה P מהנקודות הנתונות $F_1(-2,0)$ ו-$F_2(2,0)$ הוא 8 ,

הנקודה P נמצאת על אליפסה שמשוואתה $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

גם הכיוון ההפוך נכון : כל נקודה המקיימת את משוואת האליפסה $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$, סכום

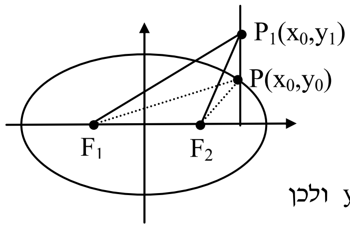
מרחקיה מהנקודות $F_1(-2,0)$ ו- $F_2(2,0)$ הוא 8.

דרך אחת להוכיח זאת היא לקרוא את ההוכחה מהסוף להתחלה, ולבדוק שכל המשוואות המופיעות בהוכחה הן שקולות זו לזו.

להלן נציג הוכחה קצרה יותר ופשוטה יותר.

תהי $P(x_0,y_0)$ נקודה על האליפסה המקיימת את המשוואה $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$. נניח בשלילה כי סכום מרחקיה מהנקודות $F_1\ (-2,0)$ ו- $F_2(2,0)$ קטן מ- 8 (שים לב, סכום המרחקים איננו יכול להיות קטן מ- 4.)

נעביר דרך P ישר מקביל לציר ה-y. על פי ההנחה סכום המרחקים $PF_1 + PF_2 < 8$.



ככל שעולים לאורך הישר מהנקודה P, סכום המרחקים של הנקודות (על הישר) מהמוקדים הולך וגדל כרצוננו ומתקבלים ערכים הגדולים מ- 8 .

לכן קיימת נקודה $P_1(x_0,y_1)$ על הישר, שסכום מרחקיה מהנקודות $F_1\ (-2,0)$ -$F_2(2,0)$ שווה ל- 8.

מכיוון ששיעור ה-x של הנקודה P_1 שווה ל- x_0, שיעור ה- y של P_1 גדול מ- y_0 ולכן

$$\frac{x_0^2}{16}+\frac{y_1^2}{12}>\frac{x_0^2}{16}+\frac{y_0^2}{12}=1$$

כלומר הנקודה P_1 איננה מקיימת את משוואת האליפסה ונמצאת מחוצה לה, למרות העובדה כי סכום מרחקיה מ- F_1 ומ-F_2 שווה ל- 8. באותה דרך מראים שלא יתכן כי $PF_1 + PF_2 > 8$. לכן, כל נקודה המקיימת את המשוואה $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$, סכום מרחקיה מהנקודות $F_1\ (-2,0)$ ו- $F_2(2,0)$ שווה ל- 8.

באופן כללי:

הגדרה: האליפסה היא המקום הגיאומטרי של הנקודות שסכום מרחקיהן משתי נקודות נתונות הוא קבוע. שתי הנקודות הנתונות נקראות **מוקדים**.

אם מסמנים את שיעורי המוקדים על ידי $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$ מקבלים כי האליפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ היא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שסכום מרחקיהן מהמוקדים קבוע ושווה ל- 2a, וקיים הקשר $b^2 = a^2 - c^2$. ראה הוכחה להלן.

בדוגמה שפתרנו ראינו כי האליפסה $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ היא המקום הגיאומטרי של הנקודות שסכום מרחקיהן מהמוקדים $F_1(-2,0)$ ו- $F_2(2,0)$ הוא 8. במקרה זה $a = 4$, $c = 2$, $b=\sqrt{12}$ ומתקיים ו– $b^2 = a^2 - c^2$ (בדוק).

<u>הערה</u>: אפשר להתייחס למעגל כאל מקרה פרטי של האליפסה שבו שני המוקדים מתלכדים.

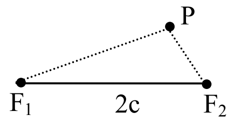
משוואת האליפסה שמוקדיה הם הנקודות (c,0) ו- (-c,0) וסכום מרחקי הנקודות שעל האליפסה מהמוקדים הוא 2a היא $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, כאשר $a > c > 0$ ו- $b^2 = a^2 - c^2$.

<u>טענה</u> : המשוואה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ מתארת את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שסכום מרחקיהן מהמוקדים : $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ הוא קבוע ושווה ל- $2a$, כאשר $b^2 = a^2 - c^2$.

<u>הוכחה</u>:

נתונות הנקודות F_1 ו- F_2. נסמן ב- $2c$ את המרחק ביניהן.

אנחנו מחפשים את הנקודות P שסכום מרחקיהן מ-F_1 ומ-F_2 הוא מספר קבוע שנסמן ב-$2a$, כאשר $a > c$.



$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

$$F_1F_2 = 2c$$

<u>הערה</u> : אם $a = c$, מהשוויון $PF_1 + PF_2 = F_1F_2$ נובע כי המקום הגיאומטרי הוא נקודה בודדת על הקטע F_1F_2 .

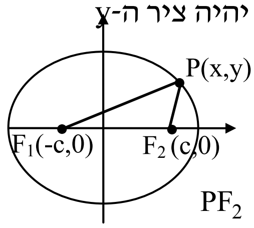
היות שסכום שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית המקום הגיאומטרי עבור $a < c$ הוא ריק.

נבנה מערכת צירים באופן הבא :

הישר העובר דרך F_1 ו- F_2 ישמש כציר ה-x , והאנך האמצעי לקטע F_1F_2 יהיה ציר ה-y

במערכת צירים זאת, שיעורי הנקודות הנתונות הם : $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$.

נסמן את שיעורי הנקודה P ב-(x,y).



$$PF_1 = \sqrt{(x+c)^2+y^2} \quad , \quad PF_2 = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

לכן
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$

.1
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

נעלה בריבוע את שני האגפים

.2
$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

אחרי כינוס איברים דומים, צמצום ושינוי סדר מקבלים

.3
$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx$$

.4 על-ידי העלאה בריבוע מקבלים
$$a^2\left((x-c)^2+y^2\right) = \left(a^2-cx\right)^2$$

נפשט ונקבל
$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

.5 נחלק ב- $a^2(a^2-c^2)$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$$

נתון $a > c > 0 \Rightarrow a^2 - c^2$ הוא מספר חיובי לכן נוכל לסמן אותו על ידי $b^2 = a^2 - c^2$, ואז מתקבלת המשוואה

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

קיבלנו משוואה קנונית של אליפסה.

הוכחנו: כל הנקודות שסכום מרחקיהן מהנקודות $F_1\,(-c,0)$ ו- $F_2\,(c,0)$ קבוע ושווה ל- $2a$ נמצאות על אליפסה שמשוואתה היא $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

הכיוון ההפוך:

כדי לבדוק שכל נקודה (x,y) המקיימת את המשוואה, סכום מרחקיה משתי הנקודות $(-c,0)$ ו- $(c,0)$ הוא $2a$ עלינו להראות כי אפשר לקרוא את ההוכחה מהסוף להתחלה וכי כל המעברים משלב אחד לבא אחריו נכונים. למעשה, עלינו רק להראות כי בשתי ההעלאות בריבוע שביצענו אפשר ללכת גם בכיוון ההפוך.

זכור! המשוואות $x = y$ ו- $x^2 = y^2$ שקולות אם ורק אם יש ל- x ול- y אותו סימן.

א. כדי להראות כי משוואות 3 ו- 4 שקולות יש להראות כי לשני האגפים של המשוואה 3 יש אותו סימן.

אם נקודה (x,y) מקיימת את המשוואה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ כי אז $\frac{x^2}{a^2} \le 1$ ולכן $|x| \le a$.

במשוואה 3 האגף השמאלי בוודאי חיובי. גם האגף הימני חיובי, כי $a > c > 0$ ו- $|x| \le a$. לכן המשוואות 3 ו- 4 שקולות.

ב. נראה כי משוואות 1 ו-2 שקולות:

האגף השמאלי של משוואה 1 איננו שלילי, לכן כדי להוכיח את השקילות עלינו להראות כי האגף הימני של המשוואה 1 איננו שלילי, כלומר: $2a \ge \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. אי-שוויון זה שקול לאי-שוויון $4a^2 \ge (x-c)^2 + y^2$ (כי שני אגפיו של האי-שוויון אינם שליליים).

מ-5 נובע ש- $\frac{y^2}{a^2 - c^2} \le 1$, כלומר $y^2 \le a^2 - c^2$. כמו כן $|x| \le a$ לכן $|x - c| \le a + c$, כלומר $(x-c)^2 \le (a+c)^2$.

מכאן: $(x+c)^2 + y^2 \le (a+c)^2 + a^2 - c^2 = 2a^2 + 2ac < 4a^2$ (כי $c < a$)

קיבלנו $4a^2 > (x-c)^2 + y^2$, לכן $2a > \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. משום כך אגף ימין של משוואה 1 הוא חיובי ומשוואות 1 ו-2 שקולות.

אפשר, אם כן, לקרוא את ההוכחה מהסוף להתחלה, ובכך השלמנו את הוכחת המשפט.

<u>הערה</u> **:** אפשר להוכיח את הכיוון ההפוך באותה דרך שבה הוכחנו את הכיוון ההפוך עבור המקרה הפרטי של האליפסה $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$. ההוכחה פשוטה יותר ואיננה דורשת חישובים מיגעים כמו זו שהבאנו כאן.

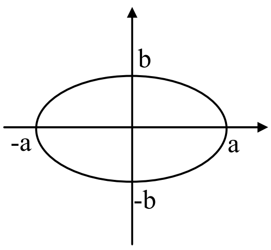
<u>מסקנה</u> : האליפסה שמשוואתה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ היא המקום הגיאומטרי של הנקודות שסכום מרחקיהן מהמוקדים $F_1(-c,0)$ ו- $F_2(c,0)$ הוא $2a$, כאשר $b^2=a^2-c^2$.

<u>דוגמה</u>

המקום הגיאומטרי של הנקודות שסכום מרחקיהן מהנקודות $(4,0)$, $(-4,0)$ שווה ל- 10 היא האליפסה שמשוואתה היא $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

הסבר : $2a=10 \Leftarrow a=5$. $c=4$ לכן $b^2=a^2-c^2=25-16=9 \Leftarrow b=3$.

6.2 תכונות האליפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$



א. האליפסה חותכת את ציר ה-x בנקודות $(a,0)$, $(-a,0)$.

לכן אורך הציר האופקי של האליפסה הוא $2a$.

ב. האליפסה חותכת את ציר ה-y בנקודות $(0,b)$, $(0,-b)$.

אורך הציר האנכי של האליפסה הוא $2b$.

ג. נחסר משני אגפי משוואת האליפסה $\frac{y^2}{b^2}$: $\frac{x^2}{a^2}=1-\frac{y^2}{b^2}$

$0 \ge \frac{y^2}{b^2}$ לכן $\frac{x^2}{a^2}\le 1$

$a>0$ לכן $|x|\le a$

פירוש הדבר כי שיעורי ה-x של נקודות האליפסה נמצאים בתחום $-a\le x\le a$.

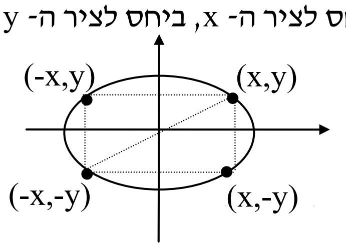
מטעמים דומים שיעורי ה-y של נקודות האליפסה נמצאים בתחום $-b\le y\le b$.

<u>תרגיל</u> : השלם את ההסבר.

ד. אם הנקודה (x,y) שייכת לאליפסה, גם הנקודות $(-x,y)$, $(x,-y)$, $(-x,-y)$ שייכות לה :

$$\frac{(-x)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{(-y)^2}{b^2}=\frac{(-x)^2}{a^2}+\frac{(-y)^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

לכן האליפסה סימטרית ביחס לציר ה- x, ביחס לציר ה- y וביחס לראשית הצירים.



תרגיל 1

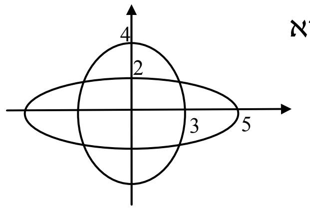
נתונות האליפסות $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$, $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$. שער מהו מספר נקודות החיתוך של שתי האליפסות ואשר את השערתך על-ידי פתרון מערכת המשוואות.

פתרון

האליפסה הראשונה חותכת את הצירים בנקודות (3,0-) , (3,0) , (0, -4) , (0,4).

האליפסה השניה חותכת את הצירים בנקודות (5,0-) , (5,0) , (0, -2) , (0,2).

הגרף של שתי האליפסות הוא



הציר המאוזן של האליפסה הראשונה קטן מהציר המאוזן של האליפסה השניה, ואילו הציר המאונך של הראשונה גדול מהציר המאונך של האליפסה השניה. לכן יש לשתי האליפסות ארבע נקודות חיתוך.

נאשר עובדה זו על ידי פתרון מערכת המשוואות

$$\begin{cases}\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1\\ \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1\end{cases}$$

בשתי המשוואות האלה הנעלמים הם, למעשה, x^2 ו- y^2 (לא מופיעים x ו-y). לכן נוכל להתייחס אליהן כאל משוואות ממעלה ראשונה בנעלמים x^2 ו- y^2. נפתור את מערכת המשוואות בשיטת השוואת המקדמים. לשם כך נכפול את המשוואה השניה ב- $-\frac{1}{4}$ ונקבל את המערכת

$$\begin{cases}\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1\\ -\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{16}=-\frac{1}{4}\end{cases}$$

נחבר את שתי המשוואות ונפתור

$$\frac{x^2}{9}-\frac{x^2}{100}=1-\frac{1}{4}$$

$$100x^2-9x^2=900\cdot\frac{3}{4}$$

$$x^2=225\cdot\frac{3}{91}$$

$$x=\pm 15\cdot\sqrt{\frac{3}{91}}\approx\pm 2.72$$

כדי לחשב את y נציב באחת המשוואות את x^2 ונקבל $y^2=\frac{256}{91}$ $\Leftarrow$ $y=\pm\frac{16}{\sqrt{91}}\approx\pm 1.68$.

לכן לאליפסות הנתונות יש ארבע נקודות חיתוך :

$$\left(-15\sqrt{\frac{3}{91}},-\frac{16}{\sqrt{91}}\right)\ ,\ \left(-15\sqrt{\frac{3}{91}},\frac{16}{\sqrt{91}}\right)\ ,\ \left(15\sqrt{\frac{3}{91}},-\frac{16}{\sqrt{91}}\right)\ ,\ \left(15\sqrt{\frac{3}{91}},\frac{16}{\sqrt{91}}\right)$$

<u>תרגיל 2</u>

מצא את הנקודות המשותפות , את אורכי הצירים וסרטט את הגרפים של זוגות האליפסות.

א. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$, $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1$.

ב. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{16}=1$, $\frac{x^2}{16}+y^2=1$ (מה מיוחד באליפסה זו?).

6.3 סרטוט אליפסה

כדי לסרטט את האליפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ במחשב (או במחשבון גרפי) נציג אותו כאיחוד הגרפים של שתי פונקציות.

נבודד את y מתוך המשוואה :

$$y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$y=\pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

שתי הפונקציות הן : $g(x)=-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ ו- $f(x)=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$.

התחום המשותף של הפונקציות הוא התחום שבו : $1-\frac{x^2}{a^2}\ge 0$ כלומר $\frac{x^2}{a^2}\le 1$.

תחום זה הוא, כמובן, $-a\le x\le a$.

שים לב, שני הגרפים מתחברים בקצות התחום כי : $f(-a) = g(-a) = 0$ ו- $f(a) = g(a) = 0$.

<u>תרגיל</u>

סרטט את הגרפים של האליפסות הבאות במערכת צירים אחת.

.1 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ .2 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ .3 $x^2+\frac{y^2}{16}=1$ .4 $\frac{x^2}{0.25}+\frac{y^2}{16}=1$

מהן הנקודות המשותפות לכל הגרפים? האם יכולת למצוא אותן ללא סרטוט?

<u>הערה</u> : ישנן תוכנות שבאמצעותן אפשר לסרטט גרף גם כשהוא נתון בצורה סתומה $f(x,y) = 0$.

במקרה של האליפסה מקלידים במחשב את המשוואה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$.

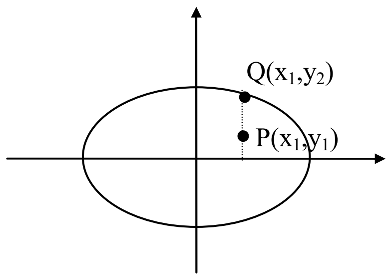
6.4 המצב ההדדי של נקודה ואליפסה

נקודה יכולה להימצא בתוך האליפסה, על האליפסה, או מחוצה לה.

א. אם נקודה $P(x_1,y_1)$ נמצאת **בתוך** האליפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ אז שיעוריה מקיימים את האי-שוויון $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}<1$.

ב. אם נקודה $R(x_1,y_1)$ נמצאת **מחוץ** לאליפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ אז שיעוריה מקיימים את האי-שוויון $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}>1$.

הוכחה:

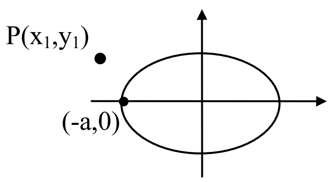


א. נניח כי הנקודה $P(x_1,y_1)$ נמצאת בתוך האליפסה.

נעביר דרכה אנך לציר x החותך את האליפסה בנקודה $Q(x_1,y_2)$ כמתואר בסרטוט. (ישנה נקודת חיתוך נוספת.)

ברור כי $|y_1|<|y_2|$ לכן $y_2^2 < y_1^2$. שיעורי הנקודה Q מקיימים את משוואת האליפסה לכן:

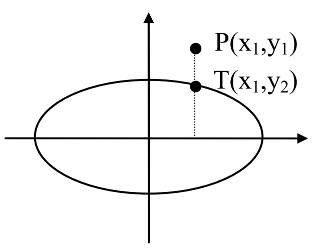
$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2} < \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1$$



ב. הנקודה $P(x_1,y_1)$ נמצאת מחוץ לאליפסה.

i. אם $|x_1|>a$ (כמתואר בסרטוט), ברור כי $\frac{x_1^2}{a^2}>1$

ולכן מתקיים $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}>1$.



ii. אם $|x_1|\le a$, אנך לציר ה-x מ-P יחתוך את האליפסה בנקודה T ששיעוריה הם (x_1,y_2) כמתואר בסרטוט.

(במקרה זה האנך זה חותך את האליפסה בנקודה נוספת.)

P נמצאת מחוץ לאליפסה לכן $|y_1|>|y_2|$ ולכן $y_1^2 > y_2^2$.

מכאן מקבלים: $1=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2} < \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}$ (כי שיעורי T מקיימים את המשוואה.)

נראה עתה כי גם הטענות ההפוכות נכונות.

אם $P(x_1,y_1)$ היא נקודה ששיעוריה מקיימים את האי-שוויון $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}<1$ כי אז P נמצאת בתוך האליפסה.

הוכחה: אם P נמצאת מחוץ לאליפסה שיעוריה מקיימים את האי-שוויון $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}>1$

בסתירה לנתון. אם P נמצאת על האליפסה שיעוריה מקיימים את השוויון $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$

לכן P חייבת להימצא בתוך האליפסה.

בדיוק באותו אופן מוכיחים כי אם שיעורי נקודה $R(x_1,y_1)$ מקיימים את האי-שוויון

$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}>1$ הנקודה חייבת להימצא מחוץ לאליפסה. השלם את ההוכחה.

6.5 אליפסות וישרים

לאליפסה ולישר יכולות להיות שתי נקודות חיתוך, נקודת חיתוך אחת או אף לא אחת. כאשר לאליפסה ולישר יש רק נקודה משותפת אחת אנו אומרים כי הישר **משיק** לאליפסה.

תרגיל 1

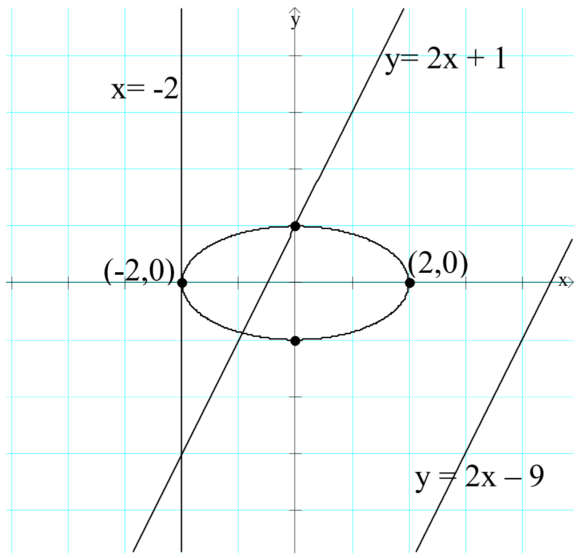
בדוק את המצב ההדדי של האליפסה $x^2 + 4y^2 = 4$ ושל כל אחד מהישרים:

א. $y = 2x + 1$ ב. $y = 2x - 9$ ג. $x = -2$

פתרון

כדי לסרטט את האליפסה נרשום את משוואתה הקנונית: $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

נקודות החיתוך עם ציר ה-x הן $(2,0)$, $(-2,0)$ ונקודות החיתוך עם ציר ה-y הן $(0,-1)$, $(0,1)$.



א. כדי למצוא את מספר הנקודות המשותפות לישר ולאליפסה יש לפתור את מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x^2+4y^2=4 \\ y=2x+1 \end{cases}$$

בשיטת ההצבה: $x^2 + 4(2x + 1)^2 = 4$

ונקבל את הפתרונות : $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{16}{17}$, $y_1 = 2\cdot 0+1=1$, $y_2 = 2\cdot\left(-\frac{16}{17}\right)+1=-\frac{15}{17}$.

נקודות החיתוך הן : $\left(-\frac{16}{17},-\frac{15}{17}\right)$, $(0,1)$.

במקרה שלפנינו יכולנו לדעת את מספר נקודות החיתוך גם ללא פתרון מערכת המשוואות אלא רק על-ידי התבוננות במשוואות האליפסה והישר. הישר הנתון חותך את ציר ה-x בנקודה בתוך האליפסה $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ ולכן חותך את האליפסה בשתי נקודות.

ב. בצורה דומה נפתור את מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x^2+4y^2=4 \\ y=2x-9 \end{cases}$$

בתהליך הפתרון מגיעים למשוואה ריבועית $17x^2-144x+320=0$

הדיסקרימיננטה שלה $\Delta = 144^2-4\cdot 17\cdot 320=-1024$ שלילית ולכן אין פתרון למערכת.

כלומר, לישר ולאליפסה אין נקודות משותפות.

ג. נפתור את מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x^2+4y^2=4 \\ x=-2 \end{cases}$$

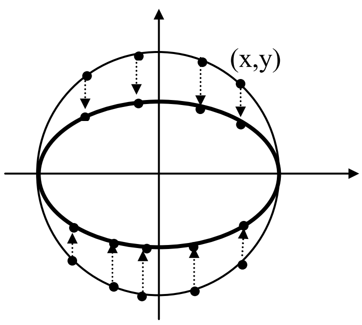
על-ידי הצבה נקבל את המשוואה $(-2)^2+4y^2=4$ שיש לה פתרון יחיד $y=0$, $x=-2$.

למערכת המשוואות יש פתרון יחיד (-2,0) ולכן לאליפסה ולישר יש נקודה משותפת יחידה.

הישר **משיק** לאליפסה בנקודה (-2,0).

6.6 האליפסה ככיווץ של מעגל

נתון מעגל שמשוואתו $x^2+y^2=25$. נכפיל ב- $\frac{3}{5}$ את שיעורי ה-y של כל נקודות המעגל ונסמן את הנקודות המתקבלות. הקו העקום המתקבל מהנקודות $\left(x,\frac{3}{5}y\right)$ נקרא **אליפסה**.

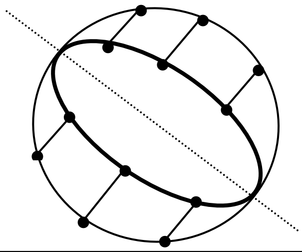


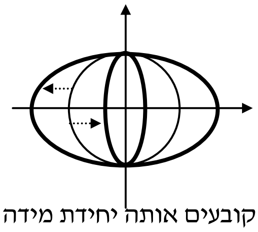
כדי להדגים את התהליך נרשום את השיעורים של מספר נקודות על המעגל ונחשב את שיעורי הנקודות המתקבלות מהן על האליפסה :

מעגל	(5,0)	(-5,0)	(0,5)	(0,-5)	(3,4)	(-4,3)	(-3,-4)
אליפסה	(5,0)	(-5,0)	(0,3)	(0,-3)	(3,2.4)	(-4,1.8)	(-3,-2.4)

הגדרה

אליפסה הוא העקום המתקבל מכיווץ (או ממתיחת) מעגל נתון בכיוון ניצב לקוטר כלשהו.
כלומר, מהכפלת המרחקים של כל נקודות המעגל מהקוטר, במספר קבוע.

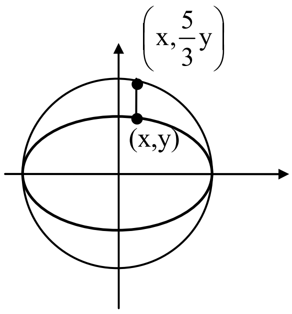




אם המספר הזה קטן מ-1 מכווצים את המעגל.
ואם המספר גדול מ-1 מותחים אותו. בכל מקרה מתקבל עקום הנקרא אליפסה.

הערה: כשמסרטטים מעגל במחשב או במחשבון גרפי, אם לא קובעים אותה יחידת מידה על שני הצירים, המעגל נראה כאליפסה.

בדוגמה שבתחילת הסעיף כיווצנו את המעגל $x^2 + y^2 = 25$ בכיוון ציר y (בניצב לקוטר המאוזן שהוא ציר x). מהי משוואת האליפסה המתקבלת?
נסמן ב-(x,y) את השיעורים של נקודה על האליפסה. כל נקודה על האליפסה מתקבלת על-ידי הכפלת שיעור ה-y של נקודה על המעגל ב-$\frac{3}{5}$, מבלי לשנות את שיעור ה-x.



לכן אם (x,y) היא נקודה על האליפסה, שיעורי הנקודה המתאימה לה על המעגל הם $\left(x,\frac{5}{3}y\right)$ (כי $\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}y = y$).
נקודה זו נמצאת על המעגל, לכן שיעוריה מקיימים את משוואת המעגל:

$$x^2 + \left(\frac{5}{3}y\right)^2 = 25$$

משוואה זו היא משוואת האליפסה.
נרשום אותה בצורה שונה במקצת, שתקל על חקירת תכונותיה.

$$x^2 + \left(\frac{5}{3}y\right)^2 = 25$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\boxed{\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1}$$

למשוואה האחרונה קוראים **המשוואה הקנונית של האליפסה**. (הקנוניות של המשוואה תלויה במקום האליפסה במערכת הצירים ולא בתכונותיה, כמו המשוואה הקנונית של המעגל $x^2 + y^2 = r^2$ שהיא משוואה של מעגל שמרכזו בראשית הצירים.)

מהן תכונות האליפסה $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$?

א. נקודות החיתוך של האליפסה עם הצירים.

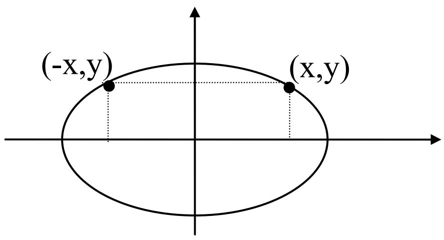
עם ציר y: נציב $x = 0$ במשוואה ונקבל $\frac{y^2}{3^2} \Leftarrow y^2 = 3^2 \Leftarrow y = \pm 3$

עם ציר x: נציב $y = 0$ במשוואה ונקבל $\frac{x^2}{5^2} \Leftarrow x^2 = 5^2 \Leftarrow x = \pm 5$

נקודות החיתוך הן : $(0,-3)$, $(0,3)$, $(-5,0)$, $(5,0)$

ב. סימטרייה

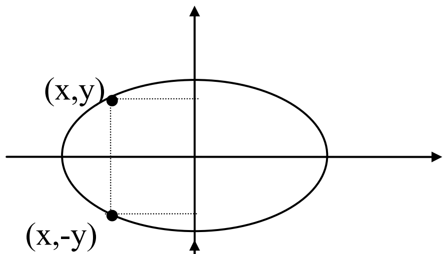
נציב x- במקום x באגף השמאלי של המשוואה ונקבל $\frac{(-x)^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$



כלומר, אם הנקודה (x,y) מקיימת את משוואת האליפסה, גם הנקודה (-x,y) מקיימת אותה. בניסוח שקול : אם הנקודה (x,y) נמצאת על האליפסה, גם הנקודה (-x,y) נמצאת עליה. לכן **האליפסה סימטרית ביחס לציר y.**

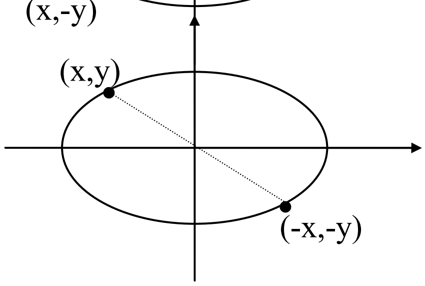
נציב בתבנית y- במקום y :

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{(-y)^2}{3^2} = \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$



מסקנה : אם הנקודה (x,y) נמצאת על האליפסה, גם הנקודה (x,-y) נמצאת עליה.

לכן **האליפסה סימטרית ביחס לציר ה - x.**



אם הנקודה אם הנקודה (x,y) שייכת לאליפסה, גם הנקודה (-x,-y) שייכת לה :

$$\frac{(-x)^2}{5^2} + \frac{(-y)^2}{3^2} = \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

לכן **האליפסה סימטרית ביחס לראשית הצירים.**

6.7 המשוואה הקנונית הכללית של האליפסה המתקבלת על ידי כיווץ של מעגל

במעגל נתון נבחר קוטר מסוים ונכווץ את המעגל בכיוון ניצב לקוטר זה.

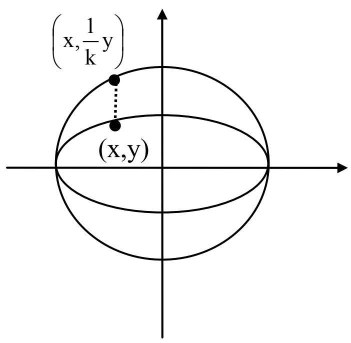
נבחר מערכת צירים נוחה : הישר המכיל את הקוטר יהיה ציר x וראשית הצירים תהיה במרכז המעגל. במערכת צירים זו המעגל הוא המעגל הקנוני (כלומר, מעגל שמרכזו בראשית הצירים) והאליפסה מתקבלת מכיווץ המעגל סביב הראשית בכיוון ניצב לאחד מצירי השיעורים. משוואת האליפסה המתקבלת נקראת **המשוואה הקנונית**. שים לב, אם מכווצים מעגל הנמצא במקום אחר מקבלים משוואה של אליפסה אך לא משוואה קנונית. בפרק זה נעסוק רק במשוואה הקנונית של האליפסה.

הערה : מעגל הוא למעשה מקרה פרטי של אליפסה - אם נכווץ מעגל בכיוון ניצב לאחד הקטרים פי 1, למעשה לא משנים את המעגל. ואם מכווצים את המעגל בכיוון ניצב לשני קטרים מאונכים באותו שיעור, נקבל מעגל אחר.

נמצא את משוואת האליפסה המתקבלת מכיווץ המעגל הקנוני בכיוון ציר y. כלומר, שיעורי ה-y של נקודות האליפסה מתקבלים על-ידי הכפלת שיעורי ה-y של נקודות המעגל $x^2 + y^2 = r^2$ במספר קבוע k מבלי לשנות את

x.כל נקודה (x,y)

על האליפסה מתקבלת מהנקודה $\left(x,\frac{1}{k}y\right)$ שעל המעגל.



לכן, $x^2+\left(\frac{1}{k}y\right)^2=r^2$

$/:r^2$ $\quad x^2+\frac{y^2}{k^2}=r^2$, כלומר $\quad \frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{(kr)^2}=1$

נסמן $r=a$, $kr=b$ $(a>0,\ b>0)$ ונקבל

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

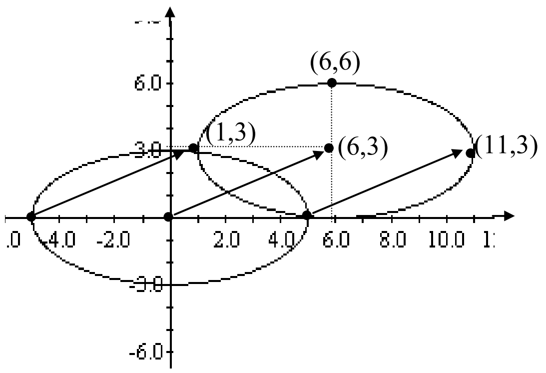
זאת המשוואה הקנונית של האליפסה.

<u>מסקנה</u>: האליפסה שמשוואתה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ מתקבלת מהמעגל $x^2+y^2=a^2$ על ידי הכפלת שיעורי ה-y של כל נקודותיו ב- $\frac{b}{a}$ (נמק!)

6.8 נושאים להעשרה - למתעניינים בלבד

1. הזזות מקבילות לצירים של אליפסה שמשוואתה קנונית

נזיז את האליפסה שמשוואתה $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$



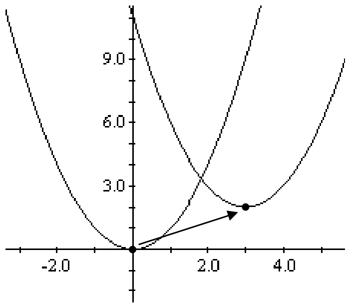
הזזה מקבילה לצירים:

6 יחידות ימינה ו- 3 יחידות למעלה.

קצות הציר המאוזן שהיו (5,0) ו- (-5,0) יהיו לאחר ההזזה (1,3) ו- (11,3) , וקצות הציר המאונך שהיו (0,-3) ו- (0,3) יהיו עתה (6,0) ו- (6,6). מרכז האליפסה שהיה בראשית הצירים (0,0) הוא עתה בנקודה (6,3).

המוקדים יעברו לנקודות (2,3) ו- (10, 3).

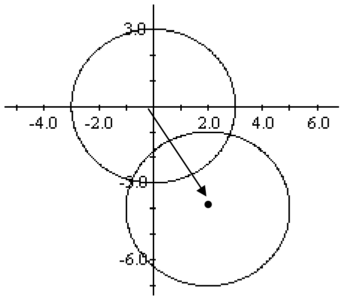
מהי משוואת האליפסה המוזזת?



נזכר בהזזות של גרפים שלמדנו בנושא הפרבולה.

המשוואה של פרבולה $y=x^2$ המוזזת במקביל לצירים 3 יחידות ימינה ו- 2 יחידות למעלה היא: $y-2=(x-3)^2$. כלומר, מקבלים את המשוואה של הפרבולה המוזזת על-ידי החלפה של x ב- $(x-3)$ ושל y ב- $(y-2)$.

ראינו זאת גם כשלמדנו על המעגל.



משוואת המעגל שמרכזו בנקודה (2,-4) ורדיוסו 3 ,
היא $(x-2)^2+(y+4)^2=9$. מעגל זה הוא למעשה
הזזה מקבילה לצירים, של המעגל $x^2+y^2=9$,
שמרכזו בראשית הצירים ורדיוסו שווה ל- 3, ימינה
ב- 2 יחידות ולמטה ב- 4 יחידות. גם כאן מחליפים
בצורה דומה, את x ב- $(x-2)$ ואת y ב- $(y+4)$.

נבצע זאת גם במקרה שלפנינו באליפסה: נחליף במשוואה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ את x ב- $(x-6)$ ואת y ב- $(y-3)$
ונקבל

$$\frac{(x-6)^2}{a^2}+\frac{(y-3)^2}{b^2}=1$$

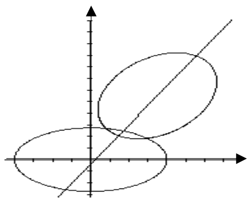
זאת המשוואה של האליפסה המוזזת והיא המקום הגיאומטרי של הנקודות שסכום מרחקיהן מהמוקדים (2,3)
ו- (10, 3) שווה ל- 10. אם ברצונך לסרטט את הגרף במחשב או במחשבון גרפי, בודד את ה- y במשוואה ובטא את
האליפסה על-ידי שתי פונקציות: $y=3\pm\sqrt{9-\frac{9(x-6)^2}{25}}$.

באופן כללי: כל משוואה מהצורה $\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$ היא הזזה מקבילה לצירים של האליפסה
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ m יחידות בכיוון אופקי ו-n יחידות בכיוון אנכי. הכיוונים נקבעים על-פי הסימנים של m ו- n.

עד כה ראינו הזזות של אליפסות קנוניות במקביל לצירים. כאשר בנוסף להזזות אלו גם מסובבים את האליפסה,
מקבלים אליפסות מוזזות שציריהן אינם מקבילים לצירי השיעורים. המשוואות של אליפסות מסוג זה כוללות
ביטויים המכילים כפולות של xy.

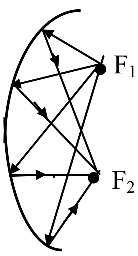
<u>דוגמה</u>

המשוואה $55x^2-220x+39y^2-324y-30xy+796=0$
מתקבלת מהמשוואה הקנונית על-ידי סיבוב בכ- 59° והזזה מקבילה לצירים.

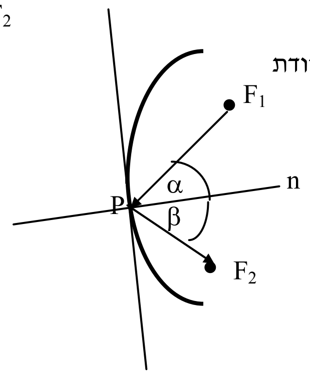


---

2. האליפסה באופטיקה



לאליפסה יש תכונות בעלות השלכה מעשית בתחום האופטיקה.
קרן אור שמקורה באחד המוקדים של מראה אליפטית תוחזר על-ידי המראה למוקד השני.

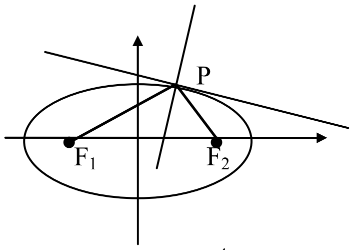


הסיבה לכך היא שהנורמל n (הניצב למשיק בנקודת ההשקה) בנקודת
הפגיעה P חוצה את הזווית $\angle F_1PF_2$ כלומר $\alpha=\beta$.
לכן זווית ההחזרה β (הזווית בין הנורמל ובין הקרן המוחזרת)
שווה לזווית הפגיעה α (הזווית בין הקרן הפוגעת ובין הנורמל)

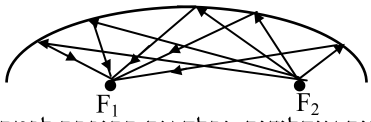
הניסוח המדויק של המשפט הוא :

אם P נקודה על אליפסה שמוקדיה הם הנקודות F_1 ו-F_2 ,

הנורמל לאליפסה בנקודה P חוצה את ה זווית $\angle F_1PF_2$.



מהמשפט נובע כי כל קרני האור שמקורן באחד המוקדים של מראה אליפטית יוחזרו למוקד השני.

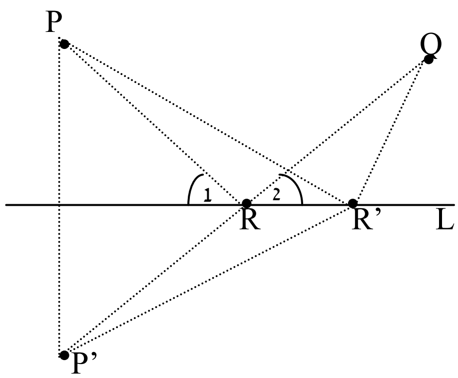


את התכונה האחרונה נוכיח על ידי גיאומטרית אוקלידית. נחלק את ההוכחה לכמה שלבים.

<u>שלב א'</u>

משפט (הרון) על התכונה האקסטרמלית של קרני אור.

נתון ישר L ושתי נקודות P ו- Q מצידו אחד של הישר. השאלה היא איך אפשר לבחור נקודה R על הישר L , כך שסכום אורכי הקטעים PR ו- PQ ייתן את הדרך הקצרה ביותר מ- P ל- Q , כאשר מסלול עובר דרך נקודה על הישר L. בעייה זאת ידועה במתמטיקה כבעית הרון של קרן אור.



פתרון :

ראשית נסמן את הנקודה ’P , הסימטרית ל- P ביחס לישר L.

(ראה סרטוט). מכאן $P'R = PR$. נחבר כעת את הנקודות ’P ו- Q.

נסמן את נקודת החיתוך של הישר L והישר $P'Q$ ב- R.

נוכיח כי בין כל המסלולים האפשריים האורך $PR + RQ$

הוא בעל ערך מינימלי. ניקח נקודה כלשהי ’R ונחבר אותה עם

P , Q ו- ’P. גם כאן $P'R' = PR'$. אי שוויון המשולש נותן לנו

$P'Q < P'R' + R'Q$. ולכן $PR + RQ = P'R + RQ = P'Q < P'R' + R'Q = PR' + R'Q$. בכך קיבלנו שהנקודה R מקיימת את תנאי הבעיה והיא הנקודה המבוקשת על הישר L. בנוסף לכך $\angle R_1 = \angle R_2$ וכאן הרון סיכם כי קרן אור שמגיעה לישר L בזווית מסוימת משתקפת באותה זווית מהישר.

<u>שלב ב'</u>

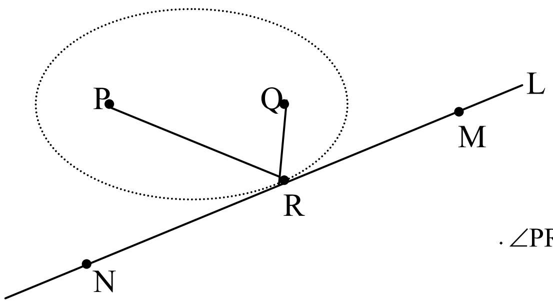
טענת עזר : אם נתונה אליפסה שמשוואתה קנונית : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. אז לכל נקודה בתוך האליפסה , סכום מרחקיה מהמוקדים קטן מ- 2a.

הוכיחו את הטענה. שימו לב להגדרת האליפסה כמקום גיאומטרי בסעיף 6.1.

<u>שלב ג'</u>

משפט : המשיק לאליפסה יוצר זוויות שוות עם הישרים המועברים מהמוקדים אל נקודת ההשקה.

הוכחה :



ניקח שתי נקודות כלשהן P ו- Q וישר כלשהו L שלא עובר דרכן.(ראה סרטוט). ניקח על הישר L את הנקודה R המקיימת את התנאי של משפט הרון שראינו בשלב א'. במילים אחרות סכום PR ו- RQ הוא מינימלי. ואז על פי משפט הרון מתקיים $\angle PRN = \angle QRM$.

נסמן את הערך המינימלי של $PR + RQ$ ב- 2a.

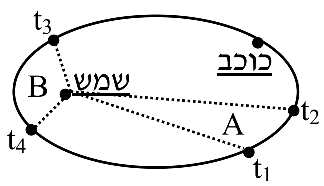
נבנה אליפסה שמוקדיה ב- P ו- Q וסכום המרחקים מנקודות עליה עד המוקדים הוא 2a. האליפסה תעבור בוודאות דרך R. נוכיח כעת שהנקודה R היא נקודת ההשקה. נניח בשלילה כי R אינה נקודת ההשקה, אזי קיימת עוד נקודת חיתוך ’R של האליפסה עם הישר L.

לכן קיימות נקודות על הישר שהן פנימיות בתוך האליפסה. מכאן מקבלים כי סכום המרחקים מכל נקודה פנימית כזו עד המוקדים P ו- Q יהיה קטן מ- 2a כפי שראינו בשלב ב'. זאת סתירה להנחת מינימליות של סכום PR ו- RQ. לכן לא קיימת נקודה R' והנקודה R היא נקודת החיתוך היחידה של L עם האליפסה והיא גם נקודת ההשקה.
למעשה הוכחנו את המשפט מכיוון שהמשיק L יוצר זוויות שוות עם הקטעים PR ו- RQ.

---

3. חוקי קפלר

האסטרונום הגרמני יוהן קפלר (Johan Kepler 1571 - 1630) ממניחי היסוד של האסטרונומיה המודרנית, ניסח את חוקי היסוד של תנועת כוכבי הלכת. בצעירותו למד קפלר אסטרונומיה ותיאולוגיה באוניברסיטה של טיבינגן.
האסטרונום הדני הגדול **טיכו ברהה** (Tycho Brahe) התרשם מידיעותיו והזמין אותו לעבוד כעוזרו. בגלל ראייתו החלשה והתרשמותו הרבה מכוחה של המתמטיקה, פנה קפלר מתצפיות אסטרונומיות והתרכז במחקרים מתמטיים באסטרונומיה. טיכו ברהה היה אסטרונום דייקן ביותר ורשם את מצב כוכבי הלכת בשמים בדייקנות שעלתה בהרבה על זו של קודמיו. קפלר ניתח את תצפיותיו של רבו במשך 20 שנה, והגיע למסקנה כי כדור הארץ וכוכבי הלכת נעים סביב השמש במסלולים **אליפטיים**, ולא במסלולים מעגליים כפי שסברו אסטרונומים עד אז.
קפלר ניסח שלושה חוקים יסודיים השולטים בתנועת כוכבי הלכת.
החוק הראשון קובע כי מסלולו של כוכב לכת הוא אליפסה שבאחד ממוקדיה נמצאת השמש. חשוב להעיר כי מסלולי כוכבי הלכת אמנם אליפטיים אך קרובים מאד בצורתם למעגל, והמסלול של כוכב שביט הוא אליפסה מאד מוארכת.
החוק השני קובע כי הישר המחבר את השמש עם כוכב הלכת הנע לאורך האליפסה, מכסה שטחים שווים בזמנים שווים. (ראה הסרטוט, ברווחי הזמן $\Delta t = t_2 - t_1 = t_4 - t_3$ השטחים A ו- B שווים.)

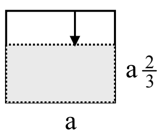


מתוך זה נובע כי כאשר כוכב לכת נמצא קרוב לשמש, הוא נע מהר יותר מאשר בהיותו רחוק ממנה.
החוק השלישי קובע כי לכל כוכבי הלכת, היחס בין החזקה השלישית של המרחק הממוצע של כוכב הלכת מהשמש, לריבוע הזמן של תקופת ההקפה השלמה $\left(\frac{d^3}{T^2}\right)$ הוא קבוע. לכן, ככל שמרחקו של כוכב לכת מהשמש גדול יותר, משך הזמן הדרוש לו לסיים הקפה מלאה גדול יותר, ומהירותו קטנה יותר.

---

4. שטח האליפסה

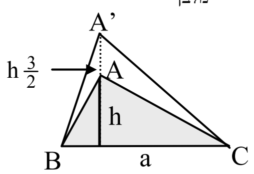
היות שהאליפסה מתקבלת מהמעגל על ידי כיווצו בכיוון אחד מהצירים, אפשר לחשב את שטח האליפסה שאורך ציריה הם a ו-b בעזרת שטח העיגול שרדיוסו a.



<u>דוגמה 1</u> : נתון ריבוע שאורך צלעו a יחידות. כשמכווצים את הריבוע בכיוון אחת הצלעות מתקבל מלבן. מה הוא שטח המלבן המתקבל מריבוע זה על ידי כיווץ בכיוון אחת מהצלעות בגורם $\frac{2}{3}$?

פתרון : מתקבל מלבן שצלעותיו הם a ו- $\frac{2}{3}$a. שטח המלבן יהיה לכן $S_{\text{מלבן}} = \frac{2}{3} a \cdot a = \frac{2}{3} a^2 = \frac{2}{3} S_{\text{ריבוע}}$

במילים אחרות, שטח המלבן שווה לשטח הריבוע המקורי כפול גורם הכיווץ.

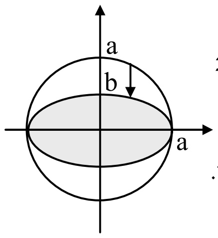


<u>דוגמה 2</u> : נתון משולש ABC שבו אורך הצלע BC הוא a ואורך הגובה לצלע זו הוא h.
מכפילים את גובה המשולש ב- $\frac{3}{2}$ ללא שינוי אורך הצלע BC. מתקבל משולש חדש A'BC שבו רק הגובה השתנה והוא $\frac{3}{2}$h. שטח המשולש הוא $S_{A'BC} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} h \cdot a\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2} h \cdot a\right) = \frac{3}{2} S_{ABC}$.

כלומר שטח המשולש החדש שווה לשטח המשולש המקורי כפול בגורם המתיחה.

<u>תרגילים</u>

1. מהו שטח המלבן המתקבל מריבוע שצלעו a על ידי כיווץ בכיוון אחת הצלעות בגורם $\frac{b}{a}$?
2. מהו שטח משולש המתקבל מהמשולש ABC בדוגמה 2 על ידי כיווץ בכיוון BC בגורם $\frac{b}{a}$?



בדרך דומה מחשבים את שטח האליפסה שציריה הם a ו-b. כפי שלמדנו אליפסה זו מתקבלת מהמעגל שרדיוסו a על ידי כיווץ בכיוון ציר y בגורם $\frac{b}{a}$.

על פי אותו עיקרון נסיק כי שטח האליפסה שווה לשטח העיגול שרדיוסן a כפול בגורם הכיווץ.

מקבלים כי שטח אליפסה שאורך ציריה הם a ו-b הוא:

$$\boxed{S=\frac{b}{a}\left(\pi a^2\right)=\pi ab}$$

תרגילים לפרק 6

6.1 האליפסה כמקום גיאומטרי

1 . נתונות האליפסה $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ והנקודות $F_1(3,0)$, $F_2((-3,0)$. מסמנים ב-A וב-B את קצות הציר האופקי, וב-C ו-D את קצות הציר האנכי.

א. חשב את שיעורי הנקודות D , C , B , A.

ב. חשב את סכומי אורכי הקטעים : $AF_1 + AF_2$, $BF_1 + BF_2$, $CF_1 + CF_2$, $DF_1 + DF_2$.

ג. מצא על האליפסה נקודה M ששיעורה הראשון שווה ל-2, וחשב את הסכום $MF_1 + MF_2$.

ד. בחר על האליפסה נקודה N ששיעורה הראשון שווה ל- 4-, וחשב את הסכום $NF_1 + NF_2$.

ה. שער איזו תכונה מקיימות כל נקודות האליפסה, ובדוק את השערתך על ידי דוגמאות נוספות.

2. מצא את משוואת הישר העובר דרך המוקד הימני של האליפסה $3x^2 + 7y^2 = 21$ ומאונך לישר $2y - 5x = 7$.

3. מצא את המקום הגיאומטרי של הנקודות שסכום מרחקיהן מהנקודות A ו-B נתון, כאשר :

א. $A(-3,0)$, $B(3,0)$, המרחק שווה ל-8.
ב. $A(-4,0)$, $B(4,0)$, המרחק שווה ל-10.

4. מצא את מוקדי האליפסות שלהלן :

א. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

ב. $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$

ג. $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$

ד*. $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{100}=1$

ה*. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$

ו*. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{49}=1$

5. מצא שלש אליפסות בעלות המוקדים :

א. $(4,0)$, $(-4,0)$
ב. $(2,0)$, $(-2,0)$
ג. $(0,3)$, $(0,-3)$

6. מצא אליפסה קנונית שבה המרחק בין מוקדיה שווה ל- :

א. 10
ב. 16

הסבר כיצד בחרת את האליפסה.

7. מצא אליפסה קנונית שבה המוקדים נמצאים על ציר ה-y והמרחק ביניהם שווה ל- :

א. 10
ב. 16

הדרכה : כאשר הציר האופקי של אליפסה גדול מהציר האנכי, המוקדים נמצאים על ציר ה-x. אם המוקדים על ציר ה-y, סימן הוא שהציר הגדול הוא האנכי. אליפסה שמוקדיה על ציר ה-y מתקבלת מאליפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ שמוקדיה על ציר ה-x על ידי שיקוף ביחס לישר $y = x$, כלומר על ידי החלפת שיעורי ה-x של נקודותיה בשיעורי ה-y,ולהפך. על כן משוואתה

היא $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$, ושיעורי המוקדים הם $(0,\pm c)$, עבור $c^2=a^2-b^2$.

8. מצא שלש אליפסות בהן סכום המרחקים מכל אחת מהנקודות אל המוקדים שווה ל-8, כאשר המוקדים נמצאים

א. על ציר ה-x. ב*. על ציר ה-y.

9. מחברים את מוקדי האליפסה $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ עם נקודות החיתוך שלה עם ציר ה-y. נמק מדוע המרובע המתקבל הוא מעוין, וחשב את שטח.

10. מחברים את מוקדי האליפסה $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{169}=1$ עם נקודות החיתוך שלה עם ציר ה-x. חשב את היקף המרובע המתקבל.

11. נתונה האליפסה $x^2+5y^2=5$.

א. רשום את משוואתה הקנונית, ומצא את מוקדיה.

ב. הקדקוד של פרבולה שעוברת דרך מוקדי האליפסה הנתונה, נמצא בקצה העליון של הציר האנכי של האליפסה. מצא את משוואת הפרבולה.

12. נתונה הפרבולה $y=x^2-4$. מצא את האליפסה שמוקדיה נמצאים בנקודות האפס של הפרבולה, כאשר:

א. אורך הציר האנכי הוא 6. ב. אורך הציר האופקי הוא 4.

13. נתונה האליפסה $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{9}=1$. מהי משוואת משפחת הפרבולות שעוברות דרך מוקדיה וקדקודן: א. מינימום? ב. מקסימום?

14. דרך המוקדים של אליפסה נתונה מעבירים מעגל שמרכזו בראשית הצירים. רשום את משוואת המעגל, וציין מהו המצב ההדדי בינו ובין האליפסה, כאשר משוואת האליפסה היא:

א. $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ ב. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{18}=1$ ג. $\frac{x^2}{26}+y^2=1$

15. מצא את המוקדים של כל אחת מהאליפסות הנתונות להלן, ורשום את משוואת משפחת המעגלים שעוברים דרכם:

א. $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{6}=1$ ג. $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{169}=1$

ב. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ ד. $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{21}=1$

בכל מקרה בחר ערך של הפרמטר וסרטט סקיצה מתאימה.

16. נתון המעגל $x^2+y^2=36$. מצא את משוואת האליפסה שמשיקה למעגל מבחוץ, ומוקדיה נמצאים בנקודות החיתוך של המעגל

א. עם ציר ה-x. ב. עם ציר ה-y.

6.2 תכונות האליפסה

17. מצא את אורכי הצירים של האליפסות הנתונות:

א. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1$ ג. $x^2+16y^2 = 4$

ב. $4x^2+9y^2=36$ ד. $0.25x^2+4y^2 = 1$

18. כתוב משוואה של אליפסה שבה אורכי הצירים הם:

א. הציר האופקי 6 והאנכי 12.   ב. הציר האופקי 14 והאנכי 10.

19. כתוב משוואה של אליפסה שבה הציר האופקי גדול פי 2.5 מהציר האנכי.

20. מצא את ערכי הפרמטרים a^2 ו-b^2 של האליפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, אם ידוע:

א. הציר האנכי גדול פי 3 מהציר האופקי, והאליפסה חותכת את ציר ה-x בנקודה (1,0).

ב. הציר האנכי קצר פי 2 מהציר האופקי, והאליפסה חותכת את ציר ה-y בנקודה שנמצאת 3 יחידות מתחת לראשית.

ג. הציר האופקי שלה גדול פי 2 מהציר האנכי, והאליפסה עוברת דרך הנקודה (2,1).

ד. אורך הציר האופקי הוא 1/4 מאורך הציר האנכי, והאליפסה עוברת בנקודה (3,16).

ה. $b = 3a$, והאליפסה עוברת בנקודה $\left(2,-\sqrt{5}\right)$.

ו. הציר האופקי גדול פי 1.5 מהציר האנכי, והנקודה (8,-9) נמצאת על האליפסה.

21. נתונה האליפסה $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

א. חשב את שטחו של מרובע החסום באליפסה (כלומר ארבעת קדקודי המרובע נמצאים על האליפסה), ואלכסוניו מתלכדים עם צירי האליפסה.

ב. מצא את שטח המרובע החסום באליפסה, אם אחד מאלכסוניו מתלכד עם הציר הקטן של האליפסה, והאלכסון האחר נמצא על הישר $16x - 15y = 0$.

22. נתונה האליפסה $x^2+2y^2=75$.

מצא את קדקודי הריבוע החסום באליפסה, אם ידוע כי צלעותיו מקבילות לצירי השיעורים, וחשב את שטחו.

23. בדוק את המצב ההדדי של האליפסה $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{9}=1$ והמעגלים הבאים (האם המעגל מכיל, מוכל או חותך את האליפסה; במקרה האחרון מצא את נקודות החיתוך). סרטט סקיצה מתאימה:

א. $x^2+y^2=25$ ב. $x^2+y^2=70$ ג. $x^2+y^2=36$

ד. $x^2+y^2=9$ ה. $x^2+y^2=64$ ו. $x^2+y^2=5$

24. מצא את קבוצת האמת של תבניות הפסוק שלהלן, ושרטט גרף מתאים:

א. $0x^2+4y^2=1$ ב. $9x^2+0y^2=1$

25. נתון המעגל $x^2 + y^2 = 9$. כתוב שתי משוואות של אליפסות המקיימות את התנאים הנתונים. הסבר כיצד בחרת את המשוואות וסרטט סקיצה מתאימה.

א. לאליפסה יש שתי נקודות משותפות עם המעגל.

ב. לאליפסה יש ארבע נקודות משותפות עם המעגל.

ג. לאליפסה אין נקודות משותפות עם המעגל.

26. נתונה האליפסה: $9x^2 + 4y^2 = 36$. רשום משוואת מעגל שיש לו:

א. שתי נקודות משותפות עם האליפסה.

ב. ארבע נקודות משותפות עם האליפסה.

ג. נקודה אחת משותפת עם האליפסה. התייחס לשלוש האפשרויות: האליפסה בתוך המעגל, המעגל בתוך האליפסה, האליפסה והמעגל משיקים מבחוץ.

ד. שלוש נקודות משותפות עם האליפסה.

ה. אף נקודה משותפת עם האליפסה.

הסבר כיצד בחרת את המעגל וסרטט גרף מתאים.

27. כמה פתרונות, לכל היותר, יש לכל אחת מן המערכות הבאות, כאשר c הוא פרמטר כלשהו, ו- r ,b ,a פרמטרים השונים מ-0?

א. $\begin{cases} ax + by = c \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} y = ax^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

ד. $\begin{cases} y = ax \\ 3x^2 + 4y^2 = 5 \end{cases}$

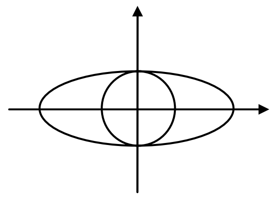
סרטט גרפים המדגימים את קביעתך, וציין את ערכי הפרמטרים שבחרת בכל מקרה.

28. הנקודה (-6,5) נמצאת על האליפסה ומרחקה מהמוקד הימני הוא 13. מצא את משוואת האליפסה.

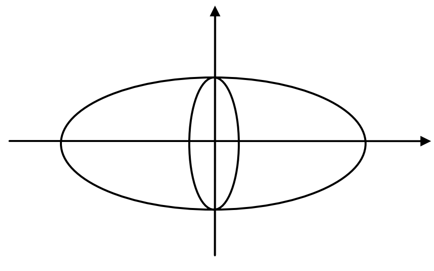
29. מצא את הנקודה על האליפסה $x^2 + 9y^2 = 18$ שמרחקה מהמוקד הימני גדול פי 5 ממרחקה מהמוקד השמאלי.

30. כתוב מערכת משוואות פרמטריות המתאימות לשרטוטים הבאים:

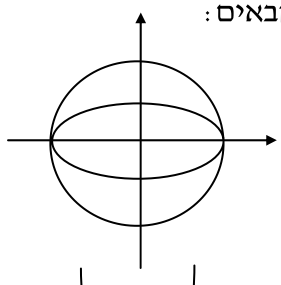
א.



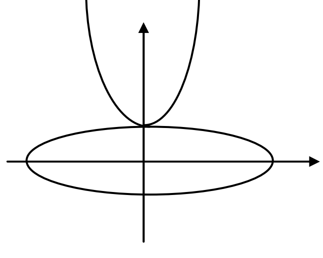
ב.



ג.

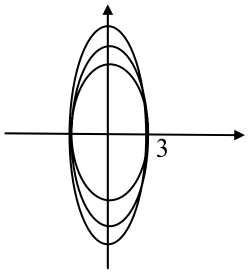


ד.

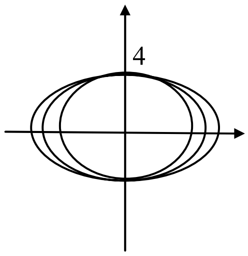


31. מצא את המשוואה של המשפחות הנתונות להלן.

א.



ב.



6.4 המצב ההדדי של נקודה ואליפסה

32. נתונה האליפסה $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$. אילו מבין הנקודות הבאות נמצאות בתוך האליפסה, עליה או מחוץ לאליפסה?

א. $(5,2)$ ג. $(1,-3)$ ה. $(0,1)$

ב. $(-4,6)$ ד. $(2,0)$ ו. $(-1,-1)$

33. נתונה האליפסה $9x^2 + 4y^2 = 36$. בדוק את מיקום הנקודות שלהלן ביחס לאליפסה:

א. $(-2,0)$ ד. $(-1,4)$ ז. $(-1,2)$

ב. $(3,0)$ ה. $\left(1,-1.5\sqrt{3}\right)$ ח. $(1,2.5)$

ג. $(0,-3)$ ו. $(0,0)$

34. נתונה האליפסה $5x^2 + y^2 = 1$. בחר שתי נקודות עליה, שתי נקודות בתוכה ושתי נקודות מחוץ לאליפסה.

35. נתונות הנקודות $A(2,1)$, $B(-2.5,0)$, $C(3,0.5)$, $D(-1,-2)$. מצא אליפסה כך שהנקודות A ו-B בתוכה, והנקודות C ו-D מחוץ לאליפסה.

36. מצא אליפסה כך שהנקודה $A(-2,2)$ נמצאת עליה, והנקודה $B(2,-1)$ בתוכה.

37. מצא אליפסה כך שהנקודה $A(0.6,-0.4)$ נמצאת עליה, והנקודה $B(-0.8,0.3)$ מחוץ לאליפסה.

38. בחר אליפסה כך שהנקודה $(3,2)$ נמצאת בתוכה, והנקודה $(2,3)$ נמצאת מחוצה לה.

6.5 המצב ההדדי של אליפסה וישר

39. בדוק את מצבם ההדדי של האליפסה $x^2 + 4y^2 = 4$ וכל אחד מהישרים הבאים. מצא את נקודות החיתוך, אם ישנן, וסרטט סקיצה של הגרפים.

א. $x = 1$ ו. $x = 4$

ב. $y = 2$ ז. $y = x + 1$

ג. $2x = 3$ ח. $y = 2x + 1$

ד. $y = 1$ ט. $y = 2x - 9$

ה. $x = -2$ י. $y = -2x + 4$

40. רשום את המשוואות של שני ישרים שעוברים דרך הנקודה $A(4,9)$ וחותכים את האליפסה

$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{7}=1$, ושל שני ישרים שעוברים דרך אותה הנקודה וזרים לה.

הדרכה: בדוק את מיקום הנקודה A ביחס לאליפסה, ובחר נקודה נוספת המתאימה לדרישה.

41. נתונים האליפסה $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ וישר שעובר בנקודה $A(4,-3)$. רשום את משוואתו אם נתון כי הישר:

א. חותך את האליפסה. ב. משיק לאליפסה. ג. זר לאליפסה.

42. נתונים האליפסה $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ והישר $y = 3x + 5$. מצא ישרים מקבילים לישר הנתון אם:

א. אחד הישרים חותך את האליפסה בשתי נקודות.

ב. אחד הישרים זר לאליפסה.

ג*. לאחד הישרים יש נקודה אחת בלבד משותפת עם האליפסה.

43. מהו התנאי לכך שהישר $y = -x + a$ ישיק לאליפסה $x^2 + 5y^2 = 30$? מהן נקודות ההשקה?

44. הוכח כי הישר $3x - 2y + 12 = 0$ משיק לאליפסה $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{18}=1$, ומצא את נקודת ההשקה.

45. נתונות האליפסה $3x^2 + y^2 = 4$ ומשפחת הישרים שמקבילים לישר $y = 3x$.

א. רשום את המשוואה הפרמטרית של משפחת הישרים.

ב. אילו מבין הישרים של המשפחה משיקים לאליפסה?

ג. עבור אילו ערכים של הפרמטר הישרים חותכים את האליפסה?

ד. עבור אילו ערכים של הפרמטר הישרים זרים לאליפסה?

46. נתונות האליפסה $x^2 + 4y^2 = 4$ ומשפחת הישרים העוברים בנקודה $(0,1)$. הסבר מדוע אין ישרים במשפחה שזרים לאליפסה, ומצא אילו מהישרים משיקים לאליפסה, ואילו חותכים אותה בשתי נקודות?

47. נתונות האליפסה $4x^2 + 3y^2 = 12$ ומשפחת הישרים $y = ax + 4$. עבור אילו ערכים של הפרמטר הישרים של המשפחה

א. חותכים את האליפסה בשתי נקודות?

ב. זרים לאליפסה?

48. מחברים את קצות הציר המאוזן של אליפסה נתונה עם הקצה העליון של הציר האנכי שלה, ומקבלים משולש. מצא את משוואת האליפסה כאשר

א. שטח המשולש הוא 12 יחידות שטח, וסכום אורכי הצירים שווה ל-14 יחידות אורך.

ב. שטח המשולש הוא 10 יחידות שטח, והאליפסה עוברת בנקודה $(2,-2)$.

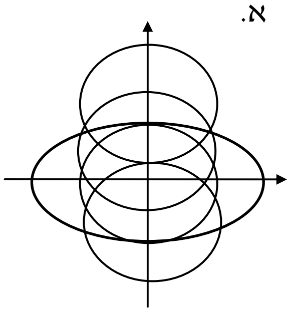
49. כאשר מחברים את נקודות החיתוך של אליפסה נתונה עם צירי השיעורים, מקבלים מעוין ששטחו 120 יחידות שטח, והיקפו 52 יחידות אורך.

א. כמה אליפסות קנוניות מקיימות את התנאי?

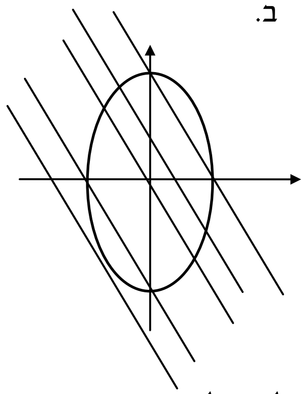
ב. מצא את הפרמטרים של משוואת האליפסה.

50. מצא מערכות פרמטריות של משוואות המתארות את הסרטוטים הנתונים להלן:

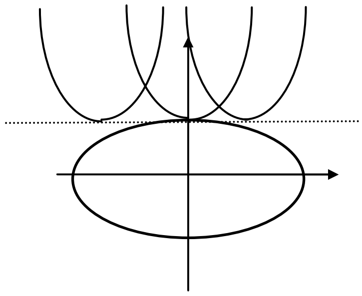
א.



ב.



ג.



6.7 המשוואה הקנונית של האליפסה

51. נתון המעגל $x^2 + y^2 = 16$. מצא את משוואת האליפסה המתקבלת אם כופלים

א. את שיעורי ה-y של נקודותיו ב- $\frac{1}{2}$.

ב. את שיעורי ה-x של נקודותיו ב- $\frac{1}{3}$.

ג. את שיעורי ה-y של נקודותיו ב- $\frac{1}{3}$.

ד. את שיעורי ה-x של נקודותיו ב-4.

ה. את שיעורי ה-y של נקודותיו ב- $\frac{1}{2}$ ואת שיעורי ה-x של נקודותיו ב- $\frac{1}{3}$.

ו. את שיעורי ה-y של נקודותיו ב- $\frac{1}{2}$ ואת שיעורי ה-x של נקודותיו ב-4.

52. נתון המעגל $x^2 + y^2 = 36$. מצא את משוואת האליפסה המתקבלת אם כופלים:

א. את שיעורי ה-y של נקודותיו ב-2 .

ב. את שיעורי ה-x של נקודותיו ב- $\frac{1}{2}$.

ג. את שיעורי ה-y של נקודותיו ב- $\frac{2}{3}$.

ד. את שיעורי ה-x של נקודותיו ב-5 .

ה. את שיעורי ה-y של נקודותיו ב- $\frac{1}{3}$ ואת שיעורי ה-x של נקודותיו ב- $\frac{1}{2}$.

ו. את שיעורי ה- y של נקודותיו ב- $\frac{1}{2}$ ואת שיעורי ה-x של נקודותיו ב-4.

53. א. נתון מעגל ברדיוס 5 סביב הראשית. כווצו אותו על ידי הקטנה פי 4 של שיעורי y של נקודותיו. מצא את משוואת האליפסה המתקבלת.

ב. נתון מעגל ברדיוס $\sqrt{7}$ סביב הראשית. כווצו אותו על ידי הקטנה פי 3 של שיעורי y של נקודותיו. מצא את משוואת האליפסה המתקבלת.

ג. נתון מעגל ברדיוס 1 סביב הראשית. נפחו אותו על ידי הגדלה פי 5 של שיעורי y של נקודותיו. מצא את משוואת האליפסה המתקבלת.

ד. נתון מעגל ברדיוס 1 סביב הראשית. נפחו אותו על ידי הגדלה פי 5 של שיעורי x של נקודותיו. מצא את משוואת האליפסה המתקבלת.

ה. נתון מעגל ברדיוס 3 סביב הראשית. כווצו אותו על ידי הקטנה פי 2 של שיעורי x של נקודותיו, והקטנה פי 3 של שיעורי y של נקודותיו. מצא את משוואת האליפסה המתקבלת.

54. האליפסות הבאות התקבלו מהמעגל $x^2 + y^2 = 81$ על ידי כיווץ או מתיחה של הצירים. הסבר כיצד.

א. $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{9} = 1$
ג. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{81} = 1$
ה. $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$

ב. $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} = 1$
ד. $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{81} = 1$
ו. $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{4} = 1$

55. תאר כיצד מתקבל המעגל $x^2 + y^2 = 1$, על ידי כווץ או מתיחה, מכל אחת מהאליפסות:

א. $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$
ג. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5} = 1$

ב. $4x^2 + 9y^2 = 1$
ד. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{64} = 1$

56. מצא את משוואת האליפסה העוברת דרך הנקודות

א. $(\sqrt{6},0), (0,\sqrt{5})$
ב. $(-2,0), (0,2\sqrt{6})$

57. כתוב משוואה של אליפסה העוברת דרך זוגות הנקודות:

א. (-4,1) , (-2,2)
ג. $(-2\sqrt{2},-2), (2,-2\sqrt{5})$

ב. $(3,\sqrt{6}), (2,\sqrt{8})$
ד. $(0,-2), \left(-\frac{1}{2},\sqrt{3}\right)$

58. מצא את ערכי הפרמטרים a^2 ו-b^2 באליפסה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, אם ידוע שהיא עוברת דרך זוגות הנקודות הנתונות להלן:

א. (-2,1) , (0,2)
ב. $(3,\sqrt{3})$, $(3\sqrt{3},1)$
ג. $\left(\frac{4\sqrt{2}}{3},1\right)$, $\left(1,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

59. מצא מלבן שחסום באליפסה $2x^2 + 3y^2 = 6$, וחשב את שטחו.

60. נתון מלבן ABCD, שצלעותיו מקבילות לצירים. שניים מקדקודיו הם A(5,3) ו-C(-5,-3).
רשום משוואת אליפסה שחוסמת את המלבן.

61. נתון מלבן ABCD, שצלעותיו מקבילות לצירים. שניים מקדקודיו הם B(4,-4) ו-D(-4,4).
א. איזו תכונה מאפיינת מלבן זה?
ב. בחר שתי אליפסות שעוברות דרך קדקודי המלבן.

62. אחד הקדקודים של מעוין, שאלכסוניו נחתכים בראשית, הוא (-6,0). רשום משוואת אליפסה חוסמת את המעויין אם נתון:
א. הציר האופקי של האליפסה גדול מהציר האנכי.
ב. הציר האופקי של האליפסה קטן מהציר האנכי.

63. נתונה האליפסה $x^2+4y^2 = 4$. רשום משוואת מעגל שממנו מתקבלת האליפסה על ידי:

א. כווץ בכוון אחד הצירים בלבד.

ב. כווץ בכוון שני הצירים.

ג. מתיחה בכוון אחד הצירים בלבד.

ציין את שיעור הכווץ או המתיחה בכל מקרה.

64. נתון המעגל $x^2+y^2 = 25$. רשום משוואת אליפסה שמתקבלת מהמעגל על ידי:

א. כווץ בכוון ציר ה-x.

ב. מתיחה בכוון ציר ה-y.

ג. כווץ בכוון שני הצירים.

רשום בכל מקרה את שיעור הכווץ או המתיחה.

תרגילי סיכום

65. בתוך אליפסה $x^2+3y^2=3$ חסום משולש שווה צלעות שאחד מקדקודיו נמצא בנקודה $(0,1)$. מצא את השיעורים של הקדקודים האחרים של המשולש.

66. מצא את שטחו של המלבן, החסום באליפסה $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ אם ידוע שצלעות המלבן מקבילות לצירי האליפסה ואחת מהן עוברת דרך מוקדה.

67. על האליפסה $4x^2+9y^2=45$ מצא נקודה, שמרחקה מן המוקד השמאלי גדול פי 2 ממרחקה מהמוקד הימני.

68. על האליפסה $x^2+5y^2=5$ מצא נקודה שממנה נראה הקטע המחבר את מוקדיה של האליפסה בזווית ישרה.

69. דרך מרכז האליפסה $5x^2+9y^2=230$ עובר מיתר שאורכו $2\sqrt{26}$. מצא את משוואת הישר עליו מונח המיתר.

70. נתונים אליפסה $x^2+5y^2=20$ וישר $4x-y=0$.

א. מצא ברביע הראשון את המשיק לאליפסה המקביל לישר נתון.

א. מצא את מרכז המעגל אם ידוע כי הוא נמצא על ציר ה- y והמעגל משיק לישר שמצאת ב-א׳ ובעל הרדיוס $\sqrt{17}$.

71. בתוך אליפסה חסום משולש שווה שוקיים שבסיסו מקביל לציר ה-x. אחד מקדקודי הבסיס הוא $(3,2)$ ושטח המשולש הוא 15. מצא את משוואת האליפסה.

72. מצא זוויות שבהן חותך הישר $y=x-1$ את האליפסה $x^2+2y^2=6$.

הדרכה: 1) מצא את נקודות החיתוך של הישר עם האליפסה.

2) מצא את משוואות המשיקים דרך נקודות החיתוך שמצאת.

3) מצא את הזוויות

73. הנקודה $A(-3,2)$ נמצאת על האליפסה שמוקדיה F_1 ו- F_2. נתון כי מתקיים $AF_1 \cdot AF_2=12$. מצא את משוואות האליפסה.

74. נתון מעגל $x^2 + y^2 = 100$. בונים אליפסה המתקבלת על ידי כפל של שיעור ה- y של כל הנקודות על המעגל ב- 0.6.

א. מצא את משוואת האליפסה.

ב. l הוא ישר שמשוואתו $x = 12.5$. הנקודה $P(x,y)$ כלשהי על האליפסה שמצאת בסעיף א׳. F היא נקודה $(8,0)$. d הוא מרחק בין P לישר l. הוכח כי $PF = 0.8d$.

75. נתונה אליפסה שמשוואתה $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. הנקודה F היא מוקדה הימני. הישר l הוא $x = 6.25$. הנקודה P נמצאת על האליפסה. נסמן ב- d את מרחקה של P מהישר l.

הוכח: $\frac{d}{PF}=\frac{5}{4}$.

76. מצא את שטחו של הריבוע החסום באליפסה $2x^2 + 3y^2 = 20$ אם נתון שצלעותיו מקבילות לצירים.

77. נתונה אליפסה $2x^2 + 3y^2 = 20$ ונתון ישר $y = -5x + 2$.

א. מצא את שיפוע הישר היוצר זווית בת 45° עם הישר הנתון אם ידוע כי הוא שלילי.

ב. מצא את משוואות שני המשיקים לאליפסה בעלי שיפוע שמצאת בסעיף א׳.

78. דרך המוקד הימני של האליפסה $\frac{x^2}{19}+\frac{y^2}{3}=1$ מעבירים משיקים לאליפסה $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{9}=1$.

מצא את משוואות המשיקים הנ״ל.

79. נתון מעגל שמשיק לאליפסה $\frac{x^2}{128}+\frac{y^2}{72}=1$ מבפנים בנקודה $(8,6)$ ובעל רדיוס 5.

א. מצא את המשיק המשותף לאליפסה ולמעגל בנקודה $(8,6)$

ב. מצא את משוואת המעגל.

80. נתונה אליפסה $x^2 + 2y^2 = 8$. דרך הנקודה $(1,1)$ מעבירים ישר החותך את האליפסה בנקודות A ו- B.

א. בדוק שהנקודה אכן נמצאת בתוך האליפסה.

ב. מצא את משוואת הישר אם נתון כי הנקודה $(1,1)$ היא אמצע הקטע AB.

81. נתונה אליפסה $\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{6}=1$.

א. מצא את משוואת המשיק לאליפסה בנקודה $(3,2)$ שעליה.

ב. מצא את משוואת המעגל העובר דרך הנקודה $(5,6)$ ומשיק לישר שמצאת בסעיף א׳ בנקודה $(3,2)$.

82. הנקודות $(8,2)$ ו- $(-4,-4)$ הן על האליפסה שמשוואתה קנונית.

א. מצא את משוואת האליפסה.

ב. מצא את הזווית שבין הקטעים המחברים את המוקדים עם הקדקוד העליון של האליפסה.

83. נתונה אליפסה שמשוואתה $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$. לאליפסה העבירו 4 משיקים היוצרים ריבוע שקדקודיו נמצאים על הצירים. מצא את שטח הריבוע.

84. אליפסה $3x^2+5y^2=120$ נוגעת במעגל (זאת אומרת יש להם משיק משותף בנקודת החתוך) בנקודות שבהן $x = -5$.

א. מצא את משוואות המשיקים לאליפסה בנקודות הנ"ל

ב. מצא את משוואת המעגל אם ידוע כי מרכזו נמצא על ציר ה- x.

85. הנקודות K_1 ו- K_2 הן קדקודים של אליפסה על הציר הגדול. מהנקודה כלשהי P על היקף האליפסה מורידים אנך החותך את ציר ה- x בנקודה Q.

הוכח: $\frac{a^2}{b^2}=\frac{K_1Q\cdot K_2Q}{PQ^2}$.

86. לאליפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ העבירו חותך העובר דרך מרכזה ונפגש עם האליפסה בנקודות P ו-Q.

הנקודה F היא המוקד הימני של האליפסה. הוכח כי $PF + QF = 2a$.

תשובות:

6.1 האליפסה כמקום גיאומטרי

1. א. $A(5,0)$, $B(-5,0)$, $C(0,4)$, $D(0,-4)$; ב., ג., ד. 10 ; ה. סכום המרחקים של נקודות האליפסה מ-F_1 ומ- F_2 הוא 10

2. $2x + 5y = 4$ 3. א. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$; ב. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

4. א. $(\pm3,0)$; ב. $(\pm5,0)$; ג. $(\pm8,0)$; ד. $(0,\pm6)$; ה. $(0,\pm\sqrt{7})$; ו. $(0,\pm2\sqrt{6})$

9. 24 10. 52 11. א. $(2,0)$, $(-2,0)$; ב. $4y = -x^2 + 4$

12. א. $9x^2 + 13y^2 = 117$; ב. $12x^2 + 16y^2 = 192$

13. א. $y = ax^2 - 36a$, $a > 0$; ב. $y = ax^2 - 36a$, $a < 0$

14. $x^2 + y^2 = 1$, המעגל בתוך האליפסה ואין להם נקודות חיתוך ; ב. $x^2 + y^2 = 9$, המעגל משיק לאליפסה מבפנים ; ג. $x^2 + y^2 = 25$, המעגל חותך את האליפסה בארבע נקודות

15. א. $x^2 + (y-n)^2 = 1 + n^2$; ב. $x^2 + (y-n)^2 = 9 + n^2$; ג. $(x-m)^2 + y^2 = m^2 + 25$; ד. $(x-m)^2 + y^2 = m^2 + 16$

16. א. $x^2 + 2y^2 = 72$; ב. $2x^2 + y^2 = 72$

6.2 תכונות האליפסה

17. א. 10 , 12 ; ב. 4 , 6 ; ג. 1 , 4 ; ד. 1 , 4 18. א. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$; ב. $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{25}=1$

20. א. $a^2 = 1$, $b^2 = 9$; ב. $a^2 = 36$, $b^2 = 9$; ג. $a^2 = 8$, $b^2 = 2$; ד. $a^2 = 25$, $b^2 = 400$;
ה. $a^2 = 49/9$, $b^2 = 49$; ו. $a^2 = 100$, $b^2 = 225$

21. א. 40 ; ב. 24 22. א. (5,5) , (5,-5) , (-5,5) , (-5,-5) ; ב. 100

23. א. ארבע נקודות חיתוך : (±4.31,±2.53) ; ב. האליפסה בתוך המעגל ; ג. ארבע נקודות חיתוך : (±5.6,±2.14) ; ד. שתי נקודות השקה : (0,±3) ; ה. שתי נקודות השקה : (±8,0) ;

ו. המעגל בתוך האליפסה 24. א. $y = \pm\frac{1}{2}$; ב. $x = \pm\frac{1}{3}$ 27. א. 2 ; ב. 4 ; ג. 2 ; ד. 2

28. $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{45}=1$ 29. (-3,1) , (-3,-1)

6.4 המצב ההדדי של נקודה ואליפסה

32. בתוך : ה, ו ; על : ד ; בחוץ : א, ב, ג 33. בפנים : ו, ז, ח ; על : א, ג, ה ; בחוץ : ב, ד

6.5 המצב ההדדי של אליפסה וישר

39. א. נחתכים בנקודות $\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(1,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; ב. אינם נחתכים ;

ג. נחתכים בנקודות $\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{7}}{4}\right)$, $\left(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)$; ד. משיקים בנקודה (0,1) ;

ה. משיקים בנקודה (-2,0) ; ו. אינם נחתכים ; ז. נחתכים בנקודות (0,1) , (-1.6,-0.6) ;
ח. נחתכים בנקודות (0,1) , (-16/17, -15/17) ; ט. אינם נחתכים
י. נחתכים בנקודות (2,0) , (30/17,8/17)

43. $a = \pm 6$, (5,1) , (-5,-1) 44. (-2,3) 45. א. $y = 3x + b$; ב. $y = 3x \pm 4$; ג. $|b| < 4$;

ד. $|b| > 4$ 46. $y = 1$; $y = ax + 1$ עבור $a \neq 0$ 47. א. $a^2 > 4$; ב. $-2 < a < 2$

48. א. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ או $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$; ב. $x^2 + 4y^2 = 20$ או $4x^2 + y^2 = 20$

49. א. שתיים ; ב. 25 , 144

6.7 המשוואה הקנונית של האליפסה

51. א. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$; ב. $\frac{x^2}{16/9}+\frac{y^2}{16}=1$; ג. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{16/9}=1$; ד. $\frac{x^2}{256}+\frac{y^2}{16}=1$;
ה. $\frac{x^2}{16/9}+\frac{y^2}{4}=1$; ו. $\frac{x^2}{256}+\frac{y^2}{4}=1$

52. א. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{144}=1$; ב. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36}=1$; ג. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$; ד. $\frac{x^2}{900}+\frac{y^2}{36}=1$;
ה. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$; ו. $\frac{x^2}{576}+\frac{y^2}{9}=1$

53. א. $x^2+16y^2=25$; ב. $x^2+9y^2=7$; ג. $25x^2+y^2=25$; ד. $x^2+25y^2=25$;
ה. $4x^2+9y^2=9$

54. כווץ y פי 3 ; ב. כווץ y פי 2/3 ; ג. כווץ x פי 2/9 ; ד. מתיחת x פי 4/3, כווץ y פי 3 ;
ה. כווץ x פי 3, כווץ y פי 9 ; ו. כווץ y פי 2/9

55. א. כווץ y פי 2 ; ב. מתיחת x פי 2, מתיחת y פי 3 ; ג. כווץ x פי $\sqrt{3}$, כווץ y פי $\sqrt{5}$;
ד. כווץ x פי 4, כווץ y פי 8

56. א. $5x^2+6y^2=30$; ב. $6x^2+y^2=24$

57. א. $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$; ב. $\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{48/5}=1$; ג. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36}=1$; ד. $x^2+\frac{y^2}{4}=1$

58. א. 16/3 , 4 ; ב. 36 , 4 ; ג. 4 , 9

תרגילי סיכום

65. $(\pm0.6\sqrt{3},-0.8)$ 66. $\frac{4b^2c}{a}$ 67. $(1.5,2)$, $(1.5,-2)$ 68. $(\pm0.5\sqrt{15},\pm0.5)$

69. $y=\pm5x$ 70. א. $y=-4x+18$ ב. $(0,35)$ 71. $5x^2+9y^2=81$ 72. $56.3^\circ, 90^\circ$

73. $10x^2+15y^2=150$ 76. 16 77. א. $-\frac{2}{3}$ ב. $2x+3y\pm10=0$ 78. $y=\pm3x\mp12$

79. א. $4x-3y-14=0$ ב. $(x-5)^2+(y-2)^2=25$ 80. ב. $y=-0.5x+1.5$

81. א. $x+3y-9=0$ ב. $(x-4)^2+(y-5)^2=10$ 82. א. $x^2+4y^2=80$ ב. 120°

83. 50 84. א. $y=\mp x\pm8$ ב. $(x+2)^2+y^2=18$

פרק 7: ההיפרבולה

7.1 ההיפרבולה כמקום גיאומטרי

ראינו כי האליפסה היא המקום הגיאומטרי של הנקודות אשר סכום מרחקיהן משתי נקודות נתונות F_1 ו- F_2 הוא קבוע , ובפרט האליפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ היא המקום הגיאומטרי של הנקודות אשר סכום מרחקיהן מהנקודות $F_1(-c,0)$ ו- $F_2(c,0)$ הוא $2a$, כאשר $b^2 = a^2 - c^2$.

עתה נגדיר היפרבולה:

> ההיפרבולה היא המקום הגיאומטרי של הנקודות שהפרש מרחקיהן משתי נקודות נתונות F_1 ו-F_2 הוא קבוע. הנקודות F_1 ו-F_2 נקראות **מוקדי ההיפרבולה**.

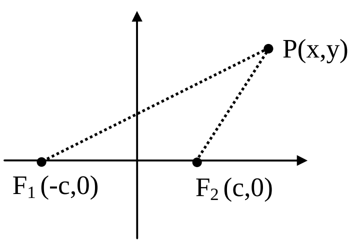
<u>טענה</u>

המקום הגיאומטרי של הנקודות שהפרש מרחקיהן משתי נקודות נתונות $F_1(-c,0)$ ו- $F_2(c,0)$ הוא קבוע $2a$ מתואר על ידי המשוואה $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, כאשר $b^2= c^2 - a^2$.

<u>הוכחה</u>

נבחר מערכת צירים נוחה: הישר העובר דרך הנקודות F_1 ו- F_2 ישמש כציר ה-x, והאנך האמצעי של הקטע F_1F_2 יהיה ציר ה-y. אם המרחק בין הנקודות F_1 ו-F_2 הוא $2c$, כי אז שיעורי הנקודות הם $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$.

נסמן ב-$2a$ את הפרש המרחקים הקבוע .



תהי $P(x,y)$ נקודה המקיימת את התנאי $PF_1 - PF_2 = 2a$

הפרש שתי הצלעות במשולש קטן מהצלע השלישית:

$$PF_1 - PF_2 < F_1F_2$$

לכן יש טעם לטפל בשאלה רק כאשר $a < c$.

$$PF_2 = \sqrt{(x-c)^2+y^2} \qquad , \qquad PF_1 = \sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

שיעורי P מקיימים:
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$

.1
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \sqrt{(x-c)^2+y^2} + 2a$$

נעלה בריבוע ונפשט

.2
$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = \frac{c}{a}x - a$$

נעלה שוב בריבוע
$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2 - 2cx + a^2$$

נכנס איברים דומים $\frac{c^2-a^2}{a^2}x^2 - y^2 = c^2 - a^2$

נחלק ב- $c^2 - a^2$ ונקבל $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2-a^2} = 1$

$c > a$ לכן $c^2 - a^2$ הוא מספר חיובי שנסמנו b^2. נציב זאת במשוואה האחרונה ונקבל את

המשוואה הקנונית של ההיפרבולה $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

הוכחנו : שיעורי כל נקודה שהפרש מרחקיה מהנקודות F_2 ו-F_1 שווה ל-$2a$, מקיימים את

המשוואה $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

הוכחת הכיוון ההפוך דומה לזאת של האליפסה.

לסיכום :

ההיפרבולה $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ היא המקום הגיאומטרי של הנקודות **שהפרש** מרחקיהן מהנקודות $F_1(-c,0)$ ו-$F_2(c,0)$ הוא קבוע ושווה ל- $2a$, כאשר $b^2 = c^2 - a^2$.

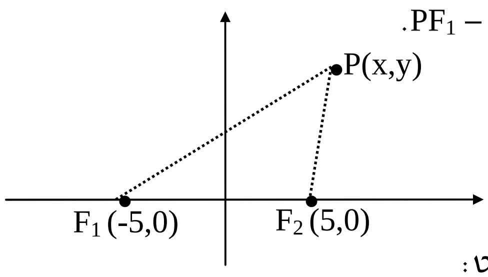
<u>הגדרה</u> : היפרבולה נקראת **שוות שוקיים** אם $b^2 = a^2$, זאת אומרת משוואתה $x^2 - y^2 = a^2$

דוגמאות

<u>תרגיל 1</u>

מצא את המקום הגיאומטרי של הנקודות שהפרש מרחקיהן מהנקודות $F_1(-5,0)$ ו- $F_2(5,0)$ הוא 8.

<u>פתרון</u>



נסמן ב-$P(x,y)$ נקודה המקיימת את התנאי : $PF_1 - PF_2 = 8$.

$$PF_2 = \sqrt{(x-5)^2 + y^2} \quad , \quad PF_1 = \sqrt{(x+5)^2 + y^2}$$

$$PF_1 = PF_2 + 8$$

$$\sqrt{(x+5)^2 + y^2} = \sqrt{(x-5)^2 + y^2} + 8$$

נעלה בריבוע את שני האגפים, נכנס איברים דומים ונפשט :

$$x^2 + 10x + 25 + y^2 = x^2 - 10x + 25 + y^2 + 16\sqrt{(x-5)^2 + y^2} + 64$$

$$\sqrt{(x-5)^2 + y^2} = \frac{5}{4}x - 4$$

נעלה שוב בריבוע ונפשט : $x^2 - 10x + 25 + y^2 = \frac{25}{16}x^2 - 10x + 16$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

קיבלנו משוואה של היפרבולה עם הפרמטרים $a = 4$ ו-$b = 3$. הקשר בינם לבין שיעור ה-x של הנקודה $F_2(5,0)$ הוא $b^2 = c^2 - a^2$ $(9 = 25 - 16)$.

<u>תרגיל 2</u>

מצא על ההיפרבולה $\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{12} = 1$ את הנקודות מימין לציר ה- y, שמרחקן מן המוקד השמאלי הוא $\sqrt{150}$.

<u>פתרון</u>

נסמן את הנקודה המבוקשת ב- (x_1, y_1). המוקד השמאלי נמצא בנקודה (-c,0), כאשר $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{24+12} = 6$.

המרחק בין (x_1, y_1) לבין (-6,0) הוא $\sqrt{150}$ ולכן $(x_1 + 6)^2 + {y_1}^2 = 150$. כמו כן, הנקודה (x_1, y_1) נמצאת על ההיפרבולה ולכן מקיימת את משוואת ההיפרבולה. עתה נותר לפתור מערכת המשוואות: $\begin{cases}(x_1 + 6)^2 + {y_1}^2 = 150 \\ {x_1}^2 - 2{y_1}^2 = 24\end{cases}$.

למערכת יש 4 פתרונות (פתרו אותה), ושניים מהם $\left(6, \pm\sqrt{6}\right)$ נמצאים מימין לציר ה- y.

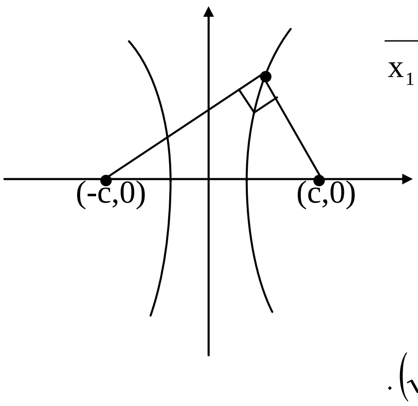
<u>תרגיל 3</u>

מצא על ההיפרבולה $3x^2 - 2y^2 = 60$ את הנקודה ברביע הראשון כך שהזווית בין הקטעים המחברים את הנקודה עם המוקדים היא ישרה.

<u>פתרון</u>

נמצא קודם את המיקום של המוקדים: $a^2 = 20$, $b^2 = 30$ לכן $c^2 = 50$. שני המוקדים הם $\left(\pm\sqrt{50}, 0\right)$.

נסמן נקודה כללית על ההיפרבולה (x_1, y_1). על פי הנתון, הזווית בין הקטעים המחברים את הנקודה עם המוקדים היא ישרה, לכן מכפלת השיפועיהם שווה ל- -1:



$$\frac{y_1}{x_1 - \sqrt{50}} \cdot \frac{y_1}{x_1 + \sqrt{50}} = -1$$

מכאן נקבל ${x_1}^2 + {y_1}^2 = 50$. הנקודה (x_1, y_1) על ההיפרבולה לכן נפתור מערכת המשוואות:

$$\begin{cases}{x_1}^2 + {y_1}^2 = 50 \\ 3{x_1}^2 - 2{y_1}^2 = 60\end{cases}$$

ונקבל שהנקודה המבוקשת מהרביע הראשון היא $\left(\sqrt{32}, \sqrt{18}\right)$.

תרגיל 4

מצא את משוואת המיתר בהיפרבולה $2x^2 - y^2 = 16$ המקיים שהנקודה $(1,2)$ היא האמצע שלו.

פתרון

נסמן ב- k את שיפוע הישר עליו מונח המיתר. הנקודה $(1,2)$ נמצאת על המיתר לכן מתקבלת משוואת הישר $y = kx + 2 - k$. נקודות החיתוך של המיתר עם ההיפרבולה נקבל על ידי פתרון מערכת המשוואות $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 16 \\ y = kx + 2 - k \end{cases}$.

הצבה של y מהמשוואה השנייה במשוואה הראשונה מביא לאחר כינוס איברים דומים למשוואה הריבועית $(2-k^2)x^2 - (4k-2k^2)x - 20 + 4k - k^2 = 0$. הפתרונות של המשוואה x_1 ו- x_2 חייבים לקיים את התנאי $\frac{x_1 + x_2}{2} = 1$ (נתון כי הנקודה $(1,2)$ היא אמצע הקטע). אין צורך בפתרון המשוואה הריבועית כי אפשר להשתמש בנוסחאות וייטה לגבי סכום השורשים $x_1 + x_2 = \frac{4k - 2k^2}{2 - k^2}$ ומכאן $k = 1$. המשוואה הסופית היא $y = x + 1$.

7.2 תכונות ההיפרבולה

סימטרייה

בדומה לאליפסה, הצבת $(-x)$במקום x ו-$(-y)$ במקום y, לא משנה את התבנית. לכן אם הנקודה (x,y) נמצאת על ההיפרבולה, גם הנקודות $(-x,y)$, $(-x,-y)$ ו- $(x,-y)$ נמצאות על ההיפרבולה. לכן ההיפרבולה סימטרית ביחס לציר ה-y, ביחס לציר ה-x, וביחס לראשית הצירים.

נוכל אם כן לבדוק את התנהגות ההיפרבולה עבור $x > 0$ ו- $y > 0$ (ברביע הראשון של מערכת הצירים), ולהסיק את תכונותיה בכל התחום על סמך הסימטרייה.

לפני שנמשיך בחקירה הכללית של תכונות ההיפרבולה, נתבונן בדוגמה ונחקור אותה.

נתונה ההיפרבולה $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

נבודד את y: $\frac{x^2}{9} - 1 = \frac{y^2}{16}$

נכפול את שני האגפים ב-16 : $y^2 = \frac{16}{9}x^2 - 16 = \frac{16}{9}\left(x^2 - 9\right)$ לכן $y = \pm\frac{4}{3}\sqrt{x^2 - 9}$

כלומר, גרף ההיפרבולה מורכב מהגרפים של שתי פונקציות :

$$f(x) = \frac{4}{3}\sqrt{x^2 - 9} \qquad , \qquad g(x) = -\frac{4}{3}\sqrt{x^2 - 9}$$

מי שברשותו מחשב או מחשבון גרפי יכול לסרטט את גרף ההיפרבולה כבר עתה, אולם אנו נמשיך בחקירה.

$f(x)$ ו-$g(x)$ הן פונקציות זוגיות (מדוע?), לכן הגרפים שלהן סימטריים ביחס לציר ה-y.

ערכי הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$ נגדיים: $g(x) = - f(x)$ לכל x בתחום. לכן הגרף של $g(x)$ הוא שיקוף של הגרף של $f(x)$ ביחס לציר ה-x.

תחום הגדרת הפונקציות: $x^2 \ge 9 \Leftarrow x^2 - 9 \ge 0$, ולכן תחום ההגדרה הוא $x \ge 3$ או $x \le -3$.

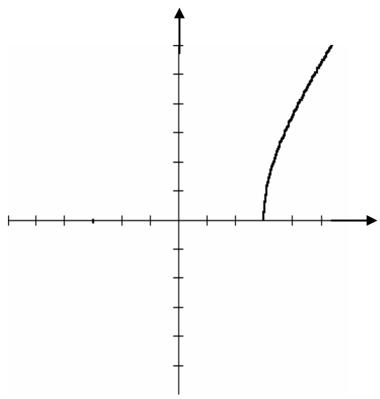
את הגרף של ההיפרבולה נסרטט בשלבים: תחילה נסרטט את גרף הפונקציה $f(x)$ עבור $x \ge 3$.

נשלים את הגרף עבור $x \le -3$ על סמך זוגיות הפונקציה $f(x)$. את הגרף של $g(x)$ נקבל על-ידי שיקוף הגרף של $f(x)$ ביחס לציר ה- x.

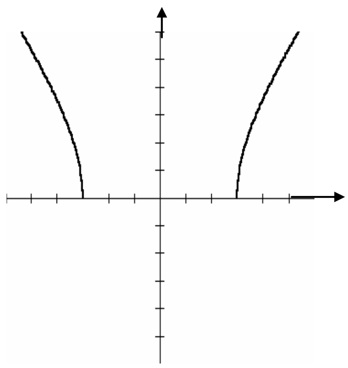
נסרטט את גרף הפונקציה $f(x)$ עבור $x \ge 3$ בעזרת טבלת ערכים:

x	3	3.5	4	4.5	5
f(x)	0	2.4	3.53	4.47	5.33

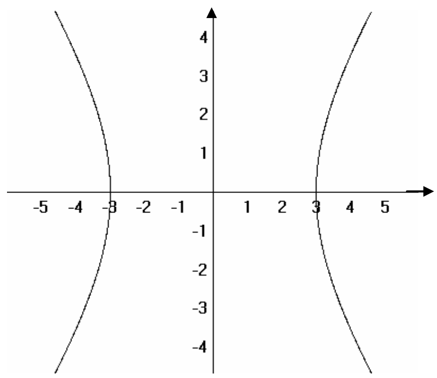
ברביע הראשון:



נשלים את הגרף של $f(x)$, באמצעות שיקוף ביחס לציר y:



3. באמצעות שיקוף ביחס לציר ה-x נקבל את הגרף של $g(x)$, ואת הגרף של כל ההיפרבולה:



שים לב: בשתי נקודות הקצה של התחום, הגרפים של $f(x)$ ושל $g(x)$ מתלכדים.

$$f(3) = g(3) = 0$$

$$f(-3) = g(-3) = 0$$

נחזור למשוואה הכללית של ההיפרבולה ולתכונותיה.

נבודד את y ונבטא אותו כפונקציה של x.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1$$

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}\left(x^2-a^2\right)$$

לכן המשוואה המפורשת של ההיפרבולה היא

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

רואים כי, כמו בדוגמה, גרף ההיפרבולה מורכב מהגרפים של שתי פונקציות:

$$f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \qquad , \qquad g(x)=-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

שתי הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$ זוגיות, לכן הגרפים שלהם סימטריים ביחס לציר y.

ערכיהן נגדיים: $g(x) = -f(x)$ לכל x בתחום ההגדרה, לכן הגרף של $g(x)$ הוא שיקוף של הגרף של $f(x)$ ביחס לציר ה-x.

אסימפטוטות

נתבונן במשוואה המפורשת של ההיפרבולה ברביע הראשון: $f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, $x\ge a$.

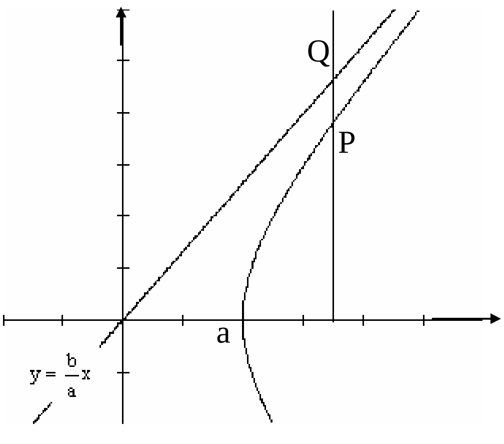
עיון במשוואה זו מראה כי ככל ש- x גדל, גם y גדל ולכן לפנינו פונקציה עולה.

a מספר חיובי, לכן $\sqrt{x^2-a^2}<\sqrt{x^2}$

כלומר, גרף ההיפרבולה ברביע הראשון נמצא מתחת לישר $y=\frac{b}{a}x$.

נתבונן במרחק האנכי שבין הישר $y=\frac{b}{a}x$ וההיפרבולה. לשם כך נבחר נקודה P על ההיפרבולה ונקודה Q על הישר, בעלות אותו שיעור x: $P\left(x,\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\right)$, $Q\left(x,\frac{b}{a}x\right)$.

נחשב את המרחק d שביניהן:



$$d=\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=\frac{b}{a}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)$$

נכפול ונחלק את אגף ימין בביטוי $x+\sqrt{x^2-a^2}$ (למעשה זהו כפל ב-1) ונפשט:

$$d=\frac{b}{a}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)\cdot\frac{\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)}=\frac{b\left(x^2-\left(x^2-a^2\right)\right)}{a\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)}=\frac{ba^2}{a\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)}=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$$

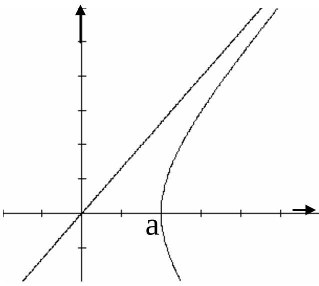
קיבלנו $$d=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$$

כאשר ערכי x הולכים וגדלים ללא הגבלה, המכנה שואף לאינסוף, לכן המרחק d שואף ל-0.

כלומר,

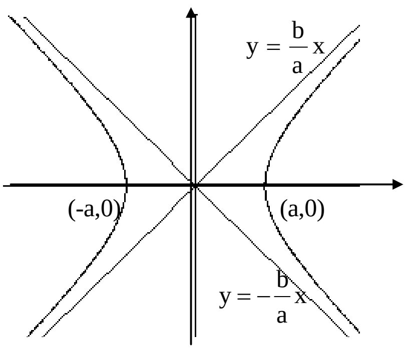
$$d=\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\xrightarrow[x\to\infty]{}0$$

המשמעות הגרפית: כאשר x הולך וגדל, ההיפרבולה מתקרבת לישר $y=\frac{b}{a}x$ וכאשר x שואף לאינסוף המרחק ביניהם שואף לאפס.



<u>נסכם</u>:

ברביע הראשון ההיפרבולה היא גרף של פונקציה עולה המוגדרת עבור $x\ge a$. ההיפרבולה חותכת את ציר ה-x בנקודה $(a,0)$ ונמצאת מתחת לישר $y=\frac{b}{a}x$. ככל ש-x גדל המרחק בין ההיפרבולה והישר $y=\frac{b}{a}x$ קטן ושואף לאפס. נשלים באופן סימטרי את גרף ההיפרבולה בכל ארבעת הרביעים. נסרטט את הישרים $y=\frac{b}{a}x$ ו- $y=-\frac{b}{a}x$. ברביעים הראשון והרביעי גרף ההיפרבולה מתחיל בנקודה $(a,0)$, וברביעים השני והשלישי בנקודה $(-a,0)$. מנקודות אלה הגרף הולך ומתקרב לישרים הישרים $y=\frac{b}{a}x$ ו- $y=-\frac{b}{a}x$ אבל נשאר ביניהם.



הישרים $y=\frac{b}{a}x$ ו-$y=-\frac{b}{a}x$ נקראים **אסימפטוטות**.

אסימפטוטה הוא "משיק באינסוף" - ישר שהגרף מתקרב אליו, כך שהמרחק בין הישר והגרף שואף ל- 0 כאשר $|x|\to\infty$

תרגיל 1

מהי המשוואה של ההיפרבולה הקנונית העוברת בנקודות (2,1) ו- (-4,8)? מהן האסימפטוטות שלה?

פתרון

נציב את שיעורי הנקודות במשוואת ההיפרבולה $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ונקבל מערכת משוואות ב-a ו-b :

$$\begin{cases}\frac{4}{a^2}-\frac{1}{b^2}=1\\ \frac{16}{a^2}-\frac{64}{b^2}=1\end{cases}$$

נתייחס את מערכת משוואות זו כאל מערכת משוואות מהמעלה הראשונה בנעלמים $\frac{1}{a^2}$ ו- $\frac{1}{b^2}$.

נפתור אותה בשיטת השוואת המקדמים. לשם כך נכפול את המשוואה הראשונה ב- 4-:

$$\begin{cases}-\frac{16}{a^2}+\frac{4}{b^2}=-4\\ \frac{16}{a^2}-\frac{64}{b^2}=1\end{cases}$$

נחבר את שתי המשוואות: $\frac{4}{b^2}-\frac{64}{b^2}=-3$

ונפתור עבור b^2 : $-\frac{60}{b^2}=-3$

$$b^2=20$$

על-ידי הצבת ערך זה במשוואה הראשונה מקבלים את המשוואה

$$\frac{4}{a^2}-\frac{1}{20}=1$$

שפתרונה הוא $a^2=\frac{80}{21}$

משוואת ההיפרבולה היא לכן $\frac{x^2}{\frac{80}{21}}-\frac{y^2}{20}=1$ או $21x^2-4y^2=80$.

נמצא את האסימפטוטות: $\frac{b^2}{a^2}=\frac{20}{\frac{80}{21}}=\frac{21}{4}$

לכן $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{21}}{2}$

ומשוואות האסימפטוטות הן: $y=\frac{\sqrt{21}}{2}x$ ו- $y=-\frac{\sqrt{21}}{2}x$.

<u>תרגיל 2</u>

אחת האסימפטוטות של היפרבולה עוברת בנקודה (-6,3), והיפרבולה עוברת דרך נקודה (8,-2).
מצא את משוואת ההיפרבולה.

<u>פתרון</u>

האסימפטוטה עוברת גם דרך ראשית הצירים ולכן שיפוע האסימפטוטה הוא –0.5. לכן $\frac{b}{a}=0.5$. הנקודה (8,-2) מקיימת משוואת ההיפרבולה , לכן $\frac{64}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1$. כדי לחשב את a ו- b יש לפתור את מערכת המשוואות המתקבלת ופתרונה היא $a^2=48$ ו- $b^2=12$. כלומר, משוואת ההיפרבולה היא $\frac{x^2}{48}-\frac{y^2}{12}=1$.

<u>תרגיל 3</u>

מצא על ההיפרבולה $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ את הנקודה ברביע הראשון שמרחקה מהאסימפטוטה בעלת השיפוע החיובי הוא 1.2.

<u>פתרון</u>

ניקח נקודה כללית על ההיפרבולה (x_1,y_1). מתקיימת המשוואה: $\frac{x_1^2}{16}-\frac{y_1^2}{9}=1$.

מהנתונים מקבלים כי משוואת האסימפטוטה בעלת השיפוע החיובי היא $y=\frac{3}{4}x$ או בצורה התקנית $3x-4y=0$. את המרחק של (x_1,y_1) מהאסימפטוטה נמצא על ידי נוסחת המרחק בין נקודה לישר : $\frac{|3x_1-4y_1|}{\sqrt{25}}=1.2$, לכן $|3x_1-4y_1|=6$. נשים לב שהנקודה (x_1,y_1) נמצאת על ההיפרבולה ברביע הראשון וכפי שראינו היא חייבת להיות מתחת לאסימפטוטה. עבור כל נקודה מתחת לאסימפטוטה $3x-4y=0$, סימן הביטוי $3x-4y$ יהיה זהה. נבדוק את הסימן על ידי הצבת הנקודה (1,0) ונקבל שהביטוי הוא חיובי, כלומר גם הביטוי $3x_1-4y_1$ מקבל ערכים חיוביים. לכן $3x_1-4y_1=6$.

כרגע נשאר רק לפתור מערכת המשוואות $\begin{cases}3x_1-4y_1=6\\9x_1^2-16y_1^2=144\end{cases}$ והנקודה המבוקשת תהיה (5,9/4).

צירי ההיפרבולה

נסמן את נקודות חיתוך ההיפרבולה עם ציר ה-x : A(-a,0) , B(a,0). הקטע AB נקרא **הציר הממשי** של ההיפרבולה, ואורכו 2a.

נסמן על ציר ה-y את הנקודות : C(0,-b) , D(0,b). הקטע CD נקרא **הציר המדומה** של ההיפרבולה, ואורכו 2b. (ציר "מדומה" כי הוא איננו חותך את ההיפרבולה.)

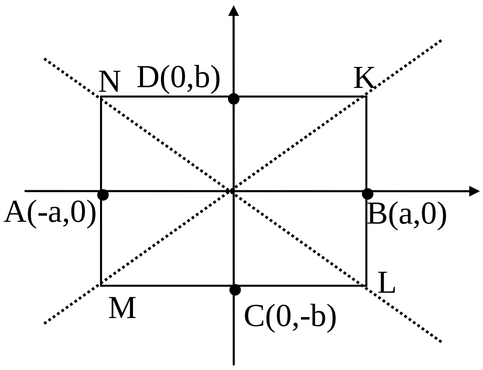
<u>תרגיל 4</u>

הציר המדומה של ההיפרבולה הוא 6 והמרחק מהמוקד הימני לקדקוד השמאלי הוא 9. מצא את משוואת ההיפרבולה.

<u>פתרון</u>

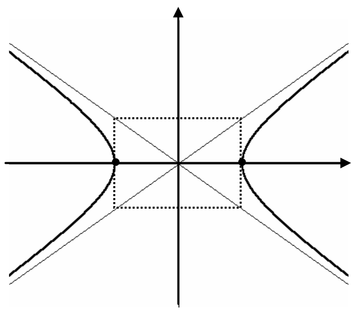
הציר המדומה שווה ל- 2b ולכן b = 3. המרחק מהמוקד הימני עד הקדקוד השמאלי שווה ל- a + c ושווה ל- 9. ראינו בסעיף 7.1 כי $c^2 = b^2 + a^2 = 9 + a^2$. נסיים את התרגיל על ידי פתרון מערכת המשוואות $\begin{cases} c + a = 9 \\ c^2 = 9 + a^2 \end{cases}$. משוואת ההיפרבולה היא $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

7.3 סרטוט גרף ההיפרבולה



במערכת צירים נסמן את הנקודות a(-a,0) , B(a,0) , C(0,-b) , D(0,b). דרך נקודות אלה נעביר מקבילים לצירים (כמתואר בסרטוט), ונקבל מלבן KLMN שקדקודיו הם : K(a,b) , L(a,-b), M(-a,-b), N(-a,b).

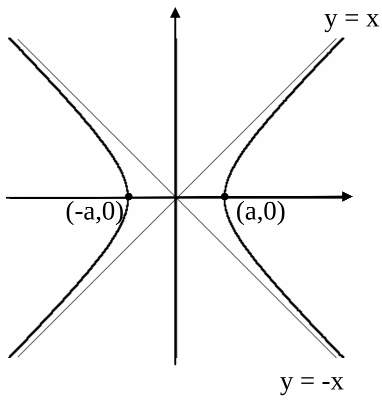
הישר KM עובר בנקודה K(a,b) ובראשית הצירים, לכן שיפועו $\frac{b}{a}$ ומשוואתו $y = \frac{b}{a}x$. הישר LN עובר בנקודה L(a,-b) ובראשית הצירים, לכן שיפועו $-\frac{b}{a}$ ומשוואתו $y = -\frac{b}{a}x$.



הראינו כי הישרים KM ו- LN הם אסימפטוטות של ההיפרבולה. עתה נסרטט את ההיפרבולה דרך הנקודות A ו-B ובין הישרים KM ו-LN.

<u>מקרה פרטי</u>

אם $a = b$ משוואת ההיפרבולה היא $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ או $x^2 - y^2 = a^2$. האסימפטוטות הן הישרים $y = x$ ו- $y = -x$. האסימפטוטות ניצבות זו לזו.

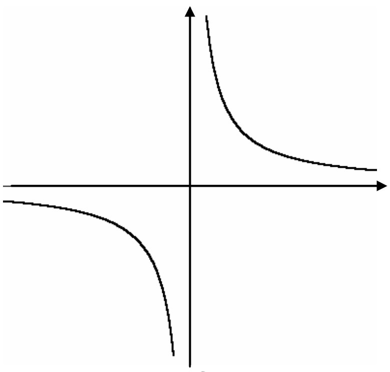


$x^2 - y^2 = a^2$

אם מסובבים את הגרף עם האסימפטוטות שלו בזווית של $45°$ נגד מגמת מחוגי השעון, האסימפטוטות מתלכדות עם הצירים, והגרף המתקבל הוא קבוצת האמת של המשוואה שצורתה $xy = c$ ‏($c > 0$).

במילים אחרות, המשוואה $y = \frac{c}{x}$ מתארת היפרבולה.

לא נוכיח כאן את טענה זו.



$y = \frac{c}{x}$

7.4 תכונות ההיפרבולה שמשוואתה $xy = c$

א. לכל נקודות ההיפרבולה יש שיעורים שווי סימן (כי מכפלת שני השיעורים היא מספר חיובי).

ב. ההיפרבולה לא חותכת את הצירים: $x \neq 0$ ו- $y \neq 0$ (מכפלת שני מספרים שונה מאפס רק אם שניהם שונים מאפס).

ג. הפונקציה $y = \frac{c}{x}$ היא פונקציה יורדת בתחום $x > 0$ ובתחום $x < 0$.

הערה: אי אפשר לומר כי ההיפרבולה $xy = c$ יורדת בכל תחום הגדרתה. כי אם נבחר שתי נקודות x_1 ו-x_2 כך ש- $x_1 < 0$ ו- $x_2 > 0$, אז $y_1 = \frac{c}{x_1} < 0$ ו- $y_2 = \frac{c}{x_2} > 0$. כלומר, מתקיים $x_1 < x_2$ וגם $y_1 < y_2$.

ד. הגרף סימטרי ביחס לראשית הצירים: אם נציב במשוואה $xy = c$ ‏$(-x)$ במקום x ו- $(-y)$ במקום y, המשוואה לא תשתנה. ($(-x)(-y) = xy = c$)

ה. האסימפטוטות של ההיפרבולה $xy = c$ מתלכדות עם הצירים. עובדה זו נובעת מכך שכאשר מסובבים את ההיפרבולה $x^2 - y^2 = a^2$ ב-45° נגד מגמת מחוגי השעון מסתובבות באותו סיבוב גם האסימפטוטות $y = \pm x$. על ידי סיבוב זה הישר $y = x$ מתלכד עם ציר ה-y, והישר $y = -x$ מתלכד עם ציר ה-x.

ו. הגרף סימטרי ביחס לישרים $y = x$ ו- $y = -x$. כלומר אם נקפל את הגרף לאורך הישר $y = x$ או לאורך הישר $y = -x$ החצי האחד של הגרף יכסה את החצי האחר.
סימטרייה זו נובעת מכך שההיפרבולה $x^2 - y^2 = a^2$ (לפני הסיבוב) היא סימטרית ביחס לצירים $x = 0$ ו- $y = 0$, ולאחר סיבוב מערכת הצירים ב-45°, צירים אלה הופכים להיות הישרים $y = x$ ו- $y = -x$.

<u>תרגיל 1</u>

סרטט את הגרף של ההיפרבולה $xy = c$ עבור $c < 0$ וציין את תכונותיה.

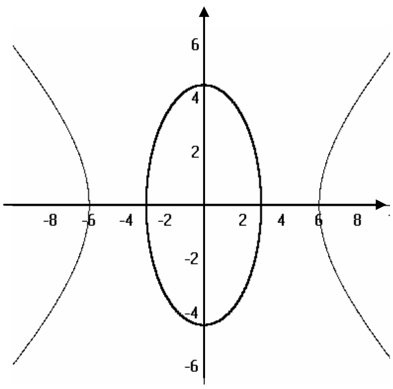
<u>תרגיל 2</u>

נתונה ההיפרבולה $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{20} = 1$ והאליפסות

א. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{20} = 1$ ב. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1$ ג. $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{18} = 1$

על סמך תכונות ההיפרבולה והאליפסה, מצא את מספר נקודות החיתוך של ההיפרבולה עם כל אחת מהאליפסות, ובדוק את תשובותיך גם על-ידי התרת מערכת המשוואות המתאימה.

<u>פתרון</u>



א. ההיפרבולה $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{20} = 1$ חותכת את ציר ה- x בנקודות $(6,0)$ ו- $(-6,0)$, ותחום הגדרתה הוא $x \geq 6$ או $x \leq -6$.

תחום ההצבה של x באליפסה $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{20} = 1$ הוא $-3 \leq x \leq 3$ לכן שני הגרפים אינם נחתכים.

אפשר לראות עובדה זו גם בדרך אלגברית. פותרים את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{20} = 1 \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{20} = 1 \end{cases}$$

אפשר להתייחס למערכת המשוואות שלפנינו כאל מערכת משוואות ממעלה ראשונה בנעלמים x^2 ו- y^2. כדי לפתור אותה מחברים את שתי המשוואות:

$$\frac{x^2}{36}+\frac{x^2}{9}=2$$

$$x^2 + 4x^2 = 72$$

$$x^2 = \frac{72}{5}$$

נציב ערך זה במשוואה הראשונה $$\frac{\frac{72}{5}}{36}-\frac{y^2}{20}=1$$

$$\frac{y^2}{20}=\frac{2}{5}-1 \quad / \cdot 20$$

$$y^2 = 20\left(\frac{2}{5}-1\right) = 20 \cdot \frac{-3}{5} < 0$$

אין מספר ממשי שריבועו שלילי, לכן אין פתרון למערכת המשוואות.

השלם את הסעיפים הנותרים.

7.5 נושאים להעשרה

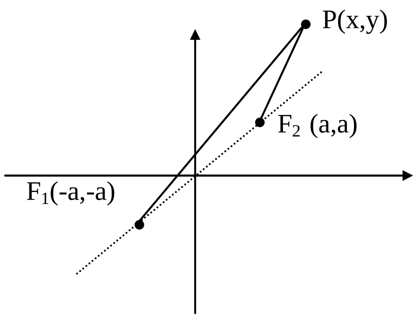
חומר זה איננו שייך לתוכנית הלימודים, הוא מיועד להעשרה לתלמידים המעוניינים להרחיב את ידיעותיהם.

1. ההיפרבולה $xy = c$ כמקום גיאומטרי

אמרנו, כי אם מסובבים את ההיפרבולה שמשוואתה $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$ בזווית של $45°$ בכיוון הפוך לכיוון תנועת מחוגי השעון, מקבלים היפרבולה שמשוואתה היא מהצורה $y=\frac{c}{x}$ (או $xy = c$).

עתה נחשב באופן ישיר את המקום הגיאומטרי של הנקודות שהפרש מרחקיהן מהנקודות (a,a) ו-$(-a,-a)$ שווה ל-$2a$.

הוכחנו בסעיף הקודם כי מקום גיאומטרי זה הוא היפרבולה, נראה כי מתקבלת משוואה שצורתה $y=\frac{c}{x}$.



$$PF_1 - PF_2 = 2a$$

$$\sqrt{(x+a)^2+(y+a)^2}-\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2}=2a$$

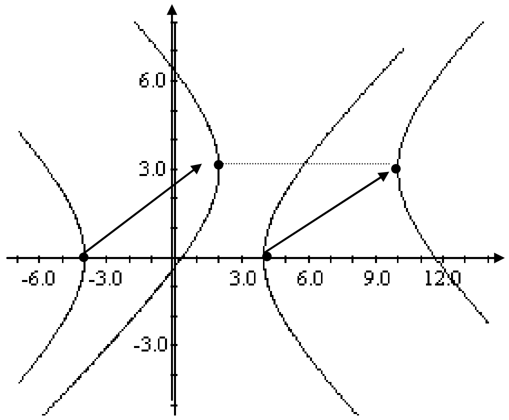
$$\sqrt{(x+a)^2+(y+a)^2}=\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2}+2a$$

מעלים בריבוע את שני האגפים, מפשטים ומקבלים $x+y-a=\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2}$

מעלים שוב בריבוע, מכנסים איברים דומים ומקבלים $xy=\frac{a^2}{2}$

קיבלנו משוואה של היפרבולה שצורתה $xy = c$.

2. ההזזות מקבילות לצירים של היפרבולה שמשוואתה קנונית



כמו שהזזנו את האליפסה, נזיז גם את ההיפרבולה במקביל לצירים. נזיז את ההיפרבולה שמשוואתה $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ הזזה מקבילה לצירים: 6 יחידות ימינה ו-3 יחידות למעלה.

קצות הציר הממשי שהיו (4,0) ו- (-4,0) , יהיו לאחר ההזזה (2,3) ו-(10,3) , וקצות הציר המדומה שהיו (0,-3) ו- (0,3), יהיו עתה (6,0) ו- (6,6).

מרכז ההיפרבולה שהיה בראשית הצירים (0,0) הוא עתה בנקודה (6,3).

המוקדים שהיו בנקודות (5,0) ו-(-5,0) , יעברו לנקודות (1,3) ו-(11, 3).

מהי משוואת ההיפרבולה המוזזת?

נזכר בהזזות של האליפסה. כדי לקבל את המשוואה של האליפסה $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ לאחר הזזה במקביל לצירים 6 יחידות ימינה ו-3 יחידות למעלה. החלפנו במשוואה $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ את x ב- $(x-6)$ ואת y ב-$(y-3)$, וקיבלנו $\frac{(x-6)^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$.

נעשה זאת גם עבור ההיפרבולה $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ ונקבל את המשוואה $\frac{(x-6)^2}{16}-\frac{(y-3)^2}{9}=1$.

זאת המשוואה של ההיפרבולה המוזזת והיא המקום הגיאומטרי של הנקודות שהפרש מרחקיהן מהמוקדים (2,3) ו-(10,3) שווה ל-8. אם ברצונך לסרטט את הגרף במחשב או במחשבון גרפי, בודד את ה-y במשוואה ובטא את ההיפרבולה על-ידי שתי פונקציות: $y=3\pm\sqrt{9-\frac{9(x-6)^2}{16}}$.

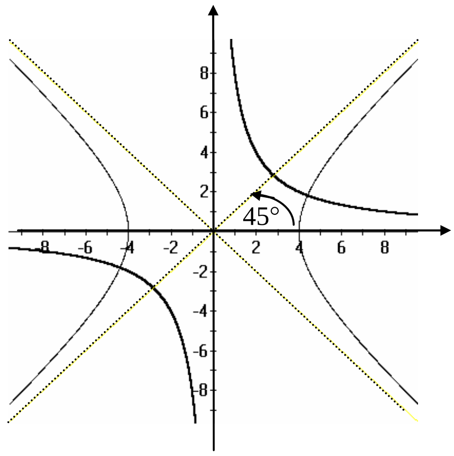
באופן כללי: כל משוואה מהצורה $\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$ היא הזזה מקבילה לצירים של ההיפרבולה $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, m יחידות בכיוון אופקי ו-n יחידות בכיוון אנכי. הכיוונים נקבעים על-פי הסימנים של m ו-n.

אפשר לקבל מהמשוואה הקנונית של ההיפרבולה משוואות של היפרבולות מוזזות שציריהן אינם מקבילים לצירי השיעורים. תחילה מסובבים את ההיפרבולה ואחר כך מזיזים אותה במקביל לצירים.

דוגמה

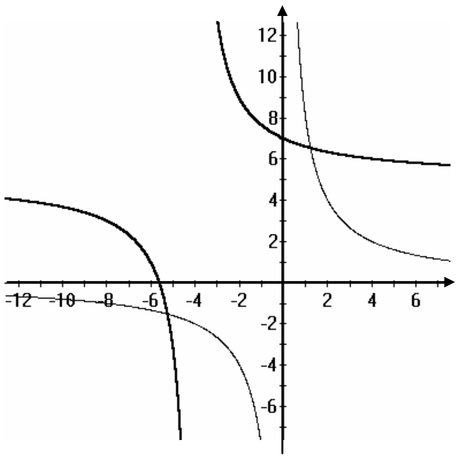
ההיפרבולה $xy = 8$ מתקבלת על-ידי סיבוב

ההיפרבולה $x^2 - y^2 = 16$ ב-$45°$ נגד מגמת מחוגי השעון.



ההיפרבולה $(x + 4)(y - 5) = 8$ מתקבלת מההיפרבולה $xy = 8$

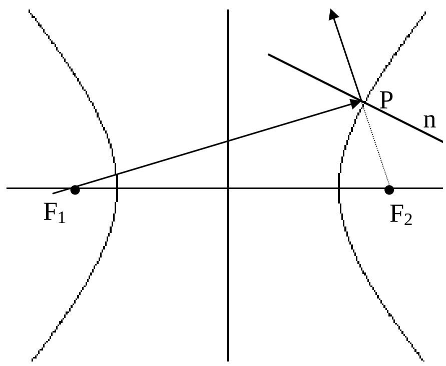
על-ידי הזזה מקבילה לצירים, 4 יחידות שמאלה ו-5 למעלה.

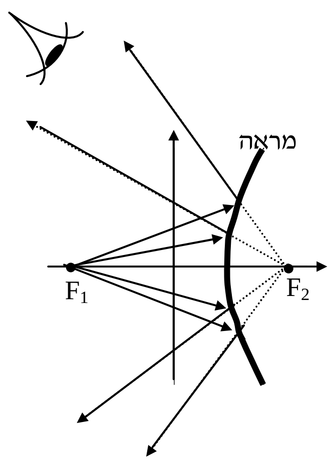


4. ההיפרבולה באופטיקה

כמו לפרבולה ולאליפסה, גם לתכונות ההיפרבולה יש השלכות לתחום האופטיקה.

קרן אור, שמקורה באחד המוקדים של מראה היפרבולית, תוחזר כך שהמשך הקרן המוחזרת (מעבר לנקודת הפגיעה) עובר דרך המוקד השני.

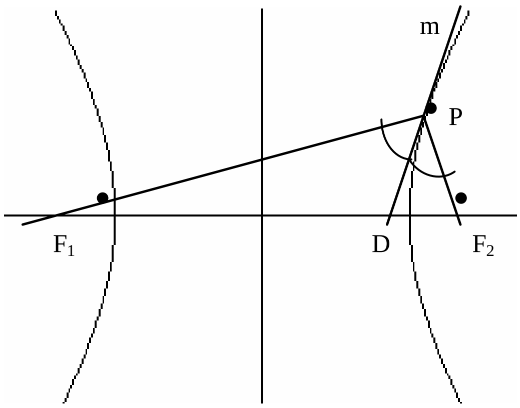




המשמעות האופטית של עובדה זו היא שכאשר נתונה מראה היפרבולית ומקור אור נקודתי הנמצא במוקד F_1 (כמתואר בסרטוט), אדם המתבונן במראה יראה את מקור האור כאילו נמצא מאחורי המראה במוקד F_2.

האמור לעיל נובע משני המשפטים הבאים :

משפט 1

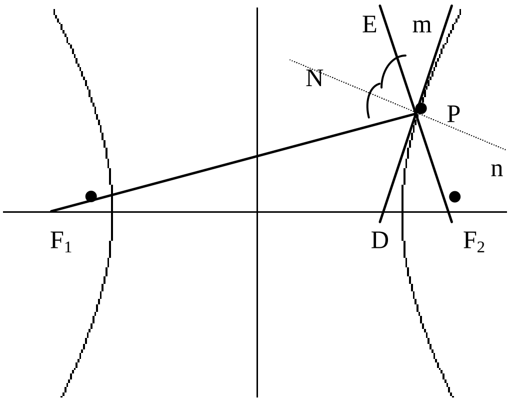


משיק להיפרבולה חוצה את הזווית הנוצרת בין שני קטעים המחברים את נקודת ההשקה, עם מוקדי ההיפרבולה.

כלומר, אם F_1 ו- F_2 מוקדי ההיפרבולה, והישר m משיק להיפרבולה בנקודה P כי אז $\angle F_1PD = \angle DPF_2$

הערה : המשפט נובע מכך ש- $\frac{F_1P}{PF_2} = \frac{F_1D}{DF_2}$

משפט 2



הנורמל להיפרבולה בנקודה P חוצה את הזווית הנוצרת בין PF_1 ובין המשך PF_2 מעבר ל- P.

בסרטוט : m משיק להיפרבולה בנקודה P , n הוא הנורמל לכן על-פי המשפט $\angle F_1PN = \angle NPE$

תרגילים לפרק 7

סעיפים 7.1 – 7.2: ההיפרבולה כמקום גיאומטרי ותכונותיה

1. מצא את משוואת ההיפרבולה עבור כל אחד מהתנאים הבאים:

א. ההיפרבולה עוברת דרך הנקודות $(\sqrt{8},3)$ ו- $(4,3\sqrt{3})$.

ב. ההיפרבולה עוברת דרך הנקודות $(3\sqrt{2},\sqrt{5})$ ו- $(-3\sqrt{3},\sqrt{10})$

ג. הציר הממשי של ההיפרבולה שווה ל-8 , והציר המדומה שלה שווה ל-4.

ד. היחס בין הציר הממשי לבין הציר המדומה הוא 2 : 1, וההיפרבולה עוברת דרך הנקודה $\left(2\sqrt{2},4\right)$

ה. שני צירי ההיפרבולה שווים ל-6.

ו. שני צירי ההיפרבולה שווים, והיא עוברת דרך הנקודה $\left(4,\sqrt{15}\right)$.

2. מצא את אורך הציר הממשי ואת אורך הציר המדומה של ההיפרבולה:

א. $x^2 - 4y^2 = 4$ ג. $4x^2 - y^2 = 1$

ב. $x^2 - 4y^2 = 16$ ד. $2x^2 - 3y^2 = 12$

3. רשום משוואה של היפרבולה שבה הציר הממשי

א. גדול פי 4 מהציר המדומה.   ב. קטן פי 9 מהציר המדומה.

4. נתון מלבן ABCD שצלעותיו מקבילות לצירים. שיעורי שני קדקודים נגדיים הם (6,-2) ו-(-6,2). חשב את שיעורי שאר הקדקודים, ומצא שתי היפרבולות שעוברות דרך הקדקודים.

5. ריבוע שצלעותיו מקבילות לצירים, אלכסוניו נחתכים בראשית ושטחו שווה ל-12, משיק להיפרבולה בנקודות החיתוך שלה עם ציר ה-x. בחר שתי היפרבולות מתאימות.

6. חשב את הפרמטרים של ההיפרבולה $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, העוברת דרך הנקודות:

א. (5,1) ו-(3,0)   ב. (-2,1) ו-$\left(\sqrt{13},2\right)$

7. מצא את ערכי הפרמטרים של ההיפרבולה $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ אם נתון כי צירה הממשי גדול פי 3 מצירה המדומה, והנקודה $\left(6\sqrt{2},2\right)$ נמצאת עליה.

8. מצא את משוואת ההיפרבולה העוברת דרך הנקודה (8,3), אם נתון כי $a = 6$.

9. מצא את משוואת ההיפרבולה העוברת דרך זוגות הנקודות:

א. $\left(5\sqrt{2},3\right)$, (5,0)   ב. (-9,-1) , (-8,0)   ג. (15,8) , (7.5,2)

10. מצא את ערכי הפרמטרים a^2 ו-b^2 של ההיפרבולות הבאות:

א. $9x^2 - 4y^2 = 36$ ג. $x^2 - 4y^2 = 1$ ה. $36x^2 - y^2 = 16$

ב. $9x^2 - 16y^2 = 144$ ד. $25x^2 = 9 + 4y^2$ ו. $x^2 - 9y^2 = 4$

11. מצא את מוקדי ההיפרבולות הנתונות:

א. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$

ב. $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{120}=1$

ג*. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{40}=-1$

ד*. $\frac{y^2}{64}-\frac{x^2}{36}=1$

12. מצא היפרבולה שמוקדיה הם הנקודות

א. $F_1(25,0)$ ו-$F_2(-25,0)$?

ב. $F_1(36,0)$ ו-$F_2(-36,0)$?

13. מצא היפרבולה שמוקדיה הם הנקודות

א. $F_1(0,-10)$ ו-$F_2(0,10)$?

ב. $F_1(0,25)$ ו-$F_2(0,-25)$?

14. מצא את ההיפרבולה שמוקדה הימני הוא $(5,0)$ והציר הממשי שלה $6\sqrt{2}$.

15. מצא את ההיפרבולה שהמוקד שלה נמצא במרחק 7 מהראשית והיא עוברת בנקודה $\left(-4\sqrt{3},5\right)$.

16. מצא היפרבולה שוות שוקיים אם נתון כי מוקדיה מתלכדים עם המוקדים של האליפסה $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{36}=1$.

17. מצא נקודות על ההיפרבולה משמאל לציר ה-y שסכום המרחקים מהן עד המוקדים הוא 130.

18. א. מצא את נקודות החיתוך של הישר $y = x + 6$ וההיפרבולה $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{9}=1$.

ב. בנה משולש שקדקודיו הם הנקודות שקיבלת ב-א וראשית הצירים, וחשב את שטחו.

19. מצא את כל הנקודות על ההיפרבולה $4x^2 - y^2 = 4$

א. שמרחקן מהישר $y = 8$ שווה ל-8.

ב. שמרחקן מהישר $y = 8$ שווה ל-10.

20. נתונה משוואת ההיפרבולה $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$. נבנה את הגרף שלה לפי השלבים:

א. סרטט את המלבן שצלעותיו מקבילות לצירים, אלכסוניו נחתכים בראשית ואחד מקדקודיו נמצא בנקודה $(2,4)$.

ב. העבר את הישרים דרך הקדקודים הנגדיים של המלבן. נמק מדוע ישרים אלה הם האסימפטוטות של ההיפרבולה.

ג. היעזר באסימפטוטות וסרטט את גרף ההיפרבולה.

21. א. סרטט ריבוע שאורך צלעו 8 יחידות, צלעותיו מקבילות לצירים ואלכסוניו נחתכים בראשית.

ב. העבר את הישרים שמכילים את אלכסוני הריבוע, ורשום את משוואותיהם.

ג. הישרים שמצאת בסעיף א' הם האסימפטוטות של היפרבולה שמשיקה לריבוע, בנקודות החיתוך עם ציר ה-x. סרטט אותה ורשום את משוואתה.

ד. סרטט שתי היפרבולות נוספות בעלות אותן האסימפטוטות, ורשום את משוואותיהן.

ה. ציין תכונה אופיינית להיפרבולות אלה, ולכל ההיפרבולות בעלות אותן האסימפטוטות.

22. בדוק את מצבם ההדדי של הגרפים של זוגות תבניות הפסוק. מצא את נקודות החיתוך, אם יש כאלה. צרף לכל מקרה סרטוט.

א. $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x^2-y^2=4 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1 \\ \dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{9}=1 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1 \\ x^2-y^2=1 \end{cases}$

ד. $\begin{cases} x^2+4y^2=1 \\ x^2-10y^2=1 \end{cases}$

23. נתונה ההיפרבולה $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$. כתוב משוואה של מעגל שיש לו עם ההיפרבולה:

א. 4 נקודות משותפות.

ב. 3 נקודות משותפות.

ג. 2 נקודות משותפות.

ד. נקודה משותפת אחת.

ה. למעגל ולהיפרבולה אין אף נקודה משותפת.

24. נתונה ההיפרבולה $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1$. כתוב משוואה של אליפסה כך ש-:

א. לאליפסה ולהיפרבולה יש 4 נקודות משותפות.

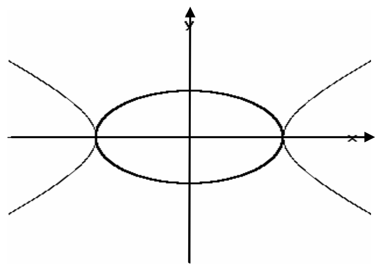
ב. לאליפסה ולהיפרבולה יש 2 נקודות משותפות.

ג. לאליפסה ולהיפרבולה אין אף נקודה משותפת.

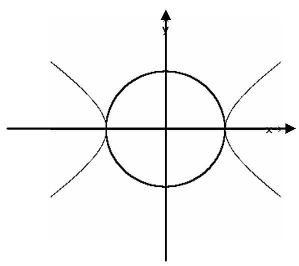
ד. נמק מדוע לא קיימת אליפסה קנונית שיש לה נקודה משותפת אחת או שלוש עם ההיפרבולה.

25. רשום מערכת משוואות שיכולה להתאים לסרטוטים הבאים:

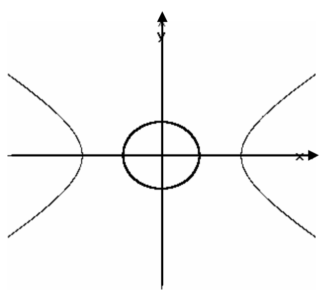
א.



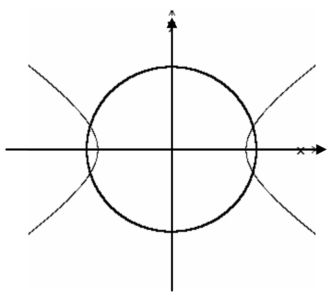
ד.



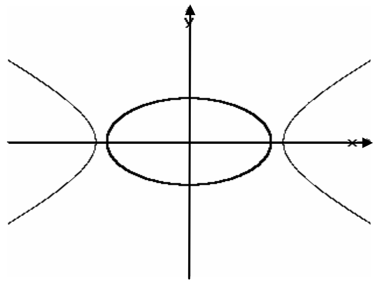
ב.



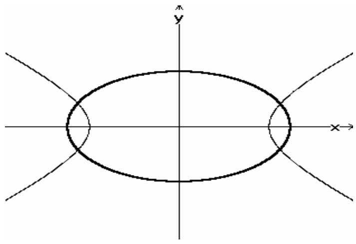
ה.



ג.



ו.



26. נתונה האליפסה $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$. רשום משוואה של היפרבולה כך שלשתי העקומות:

א. יש 4 נקודות משותפות. ב. יש 2 נקודות משותפות. ג. אין נקודה משותפת.

ד. נמק מדוע לא קיימת היפרבולה קנונית שיש לה מספר אי-זוגי של נקודות משותפות עם האליפסה.

27. נתון מלבן שקדקודיו נמצאים על ההיפרבולה $\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{3.5}=1$, וצלעותיו מקבילות לצירים.

שיעור ה-x של אחד הקדקודים שווה ל-3. חשב את היקף המלבן.

28. נתון משולש שווה שוקיים ABC $(AB = AC)$, שכל קדקודיו נמצאים על ההיפרבולה $x^2 - y^2 = 9$. הקדקוד A הוא הקצה השמאלי של הציר הממשי של ההיפרבולה. שיעור ה-x של הקדקוד B גדול ב-1 משיעור ה-y שלו. חשב את שטח המשולש.

29. ארבעת הקדקודים של ריבוע נתון נמצאים על ההיפרבולה $9x^2 - 8y^2 = 4$.

א. מצא את הקדקודים, אם ידוע כי צלעות הריבוע מקבילות לצירים.

ב. האם יתכן כי אלכסוני הריבוע מקבילים לצירים? נמק את תשובתך.

30. הקדקודים של טרפז שבסיסיו מקבילים לציר x נמצאים על ההיפרבולה $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=1$.

שיעור ה-x של אחד הקדקודים הוא 4. שיעור ה-y של קדקוד שני שווה ל-2. חשב את שטח הטרפז.

31. נתונה ההיפרבולה $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$.

מצא את המקום הגיאומטרי של אמצעי הקטעים המחברים את ראשית הצירים עם הנקודות שעל ההיפרבולה.

32. לכל אחת מהתבניות הנתונות קבע עבור אילו ערכים של הפרמטר המשוואה מייצגת

א. מעגל ב. אליפסה ג. היפרבולה

(1) $ax^2 + (a - 1)y^2 - 9 = 0$

(2) $(2a - 2)x^2 + (a^2 + a - 6)y^2 + 100 = 0$

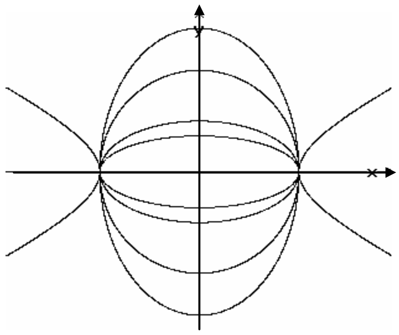
(3) $(2m^2 - 9m + 4)x^2 + (m^2 - 9m + 20)y^2 = 1$

(4) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2-16}=1$ (5) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{36-a^2}=1$

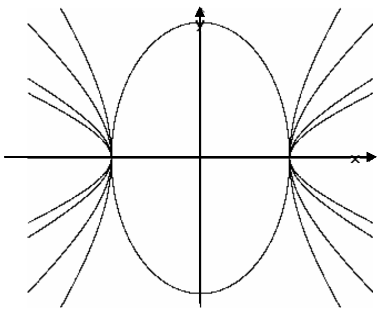
33. הראה כי קבוצת האמת של התבנית $-\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1$ היא היפרבולה. חשב את ציריה וסרטט סקיצה מתאימה.

34. מצא מערכות של משוואות פרמטריות המתארות את הסרטוטים הבאים.

א.



ב.



35. כמה פתרונות לכל היותר יש לכל אחת ממערכות המשוואות הבאות, כאשר $a, b, r \neq 0$?

א. $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\\ x^2+y^2=r^2\end{cases}$

ב. $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\end{cases}$

36. מצא את משוואות האסימפטוטות של ההיפרבולות שלהלן, וסרטט סקיצות מתאימות:

א. $\frac{x^2}{18}-\frac{y^2}{9}=1$

ב. $y^2-4x^2=1$

ג. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{64}=1$

ד. $9x^2-16y^2=144$

37. מצא את ערכי הפרמטרים של היפרבולה $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, אם ההיפרבולה

א. עוברת דרך הנקודה $(\sqrt{200},1)$, ומשוואת אחת האסימפטוטות היא $y=\frac{1}{2}x$.

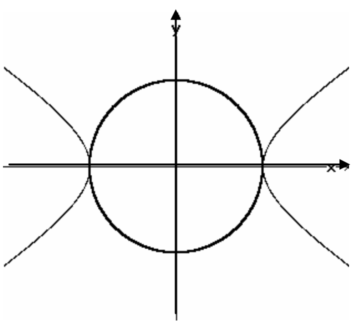
ב. עוברת דרך הנקודה $(4\sqrt{2},-6)$, ומשוואת אחת האסימפטוטות היא $y=-\frac{3}{2}x$.

ג. עוברת דרך הנקודה $(3,-\sqrt{12})$, ומשוואת אחת האסימפטוטות היא $y=2x$.

ד. עוברת דרך הנקודה $(-1,0)$, ומשוואת אחת האסימפטוטות היא $y=3x$.

38. נתון מעגל $x^2+y^2=9$, המשיק להיפרבולה

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, כמתואר בסרטוט.



ההיפרבולה עוברת בנקודה $(-\frac{3\sqrt{7}}{2},2\sqrt{3})$.

א. מהי משוואת ההיפרבולה?

ב. מצא את מספר נקודות החיתוך של הישר $y=kx$ עם ההיפרבולה שמצאת בסעיף א,

כפונקציה של k.

ג. האם קיים k שעבורו ישר זה הוא אסימפטוטה של ההיפרבולה? נמק.

39. נתונה ההיפרבולה $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. מאחת מנקודות החיתוך של ההיפרבולה עם ציר ה-x העבירו אנך לאחת האסימפטוטות. אנך זה חותך את האסימפטוטה בנקודה A, ואת ציר ה-y בנקודה B. הבע את אורכי הקטעים OA ו-OB בעזרת a ו-b.

40. כל אחד מהישרים הנתונים משמש כאסימפטוטה של היפרבולה קנונית. מצא שתי היפרבולות קנוניות המתאימות לכל אחד מהם.

א. $y = 3x$	ג. $x + 2y = 0$	ה. $5y + x = 0$
ב. $y = x$	ד. $4y = -x$	ו. $3x - 4y = 0$

41. כתוב משוואה של היפרבולה בעלת התכונה:

א. אחת האסימפטוטות שלה מקבילה לישר $3x + y = 5$.

ב. אחת האסימפטוטות עוברת בנקודה $(2,3)$.

ג. האסימפטוטות ניצבות זו לזו.

42. נתונה ההיפרבולה $16x^2 - 25y^2 = 400$. מצא את מספר נקודות החיתוך שלה עם כל אחד מהישרים שלהלן, וציין מהו מצבם ההדדי. סרטט סקיצה מתאימה לכל מקרה:

א. $y = 3x$	ד. $x = -5$	ז. $y = 2$
ב. $y = -0.5x$	ה. $x = 2$	ח. $x + 5y = 10\sqrt{5}\ 2$
ג. $y = x + 1$	ו. $x = -4$	ט. $y = 20\sqrt{3}\ 8x - 5$

עבור המשיקים, מצא את שיעורי נקודות ההשקה.

43. נתונה ההיפרבולה $2x^2 - y^2 = 1$.

א. מצא ישר שמשיק להיפרבולה, וסרטט.

ב. מצא שני ישרים שכל אחד מהם חותך את ההיפרבולה בשתי נקודות באותו ענף, וסרטט.

ג. מצא ישר שעובר בנקודה $(0,1)$ וזר להיפרבולה.

ד. מצא ישר שעובר בנקודה $(0,1)$ וחותך את ההיפרבולה.

ה. האם יתכן כי ישר שעובר בראשית משיק להיפרבולה? נמק את תשובתך.

44. סרטט סקיצה של כל המצבים ההדדיים האפשריים של היפרבולה וישר. ציין בכל מקרה את מספר הנקודות המשותפות.

45. נתונים ההיפרבולה $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ ומשפחת הישרים העוברים דרך הראשית.

א. אילו מבין הישרים של המשפחה חותכים את ההיפרבולה בשתי נקודות?

ב. אילו מבין הישרים של המשפחה זרים להיפרבולה?

ג. האם קיים ישר של המשפחה עם נקודה משותפת יחידה עם ההיפרבולה? נמק.

ד*. במה תשתנה תשובתך לסעיפים שלעיל אם משוואת ההיפרבולה היא $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{9}=1$?

46. נתונים ההיפרבולה $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ ומשפחת הישרים העוברים דרך הנקודה $(0,3)$.

א. אילו מבין הישרים של המשפחה חותכים את ההיפרבולה בשתי נקודות?

ב. אילו מבין הישרים של המשפחה זרים להיפרבולה?

ג. האם קיימים במשפחה ישרים עם נקודה משותפת יחידה עם ההיפרבולה? אם כן, מצא אותם, ואם לא - נמק מדוע.

ד*. במה תשתנה תשובתך לסעיפים שלעיל אם משוואת ההיפרבולה היא $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{9}=1$?

47. נתונים ההיפרבולה $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=1$ ומשפחת הישרים המקבילים לציר x.

א. האם יש במשפחה ישר שמשיק להיפרבולה? נמק.

ב. כמה נקודות חיתוך יש להיפרבולה עם כל אחד מהישרים? נמק.

ג*. ענה על השאלות הנ"ל כאשר הישרים מקבילים לציר ה-y ומשוואת ההיפרבולה היא

$$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{25}=1.$$

ד*. סרטט סקיצה שמתארת את ההיפרבולה ומשפחת הישרים הנתונות, קבל ממנה סקיצה שמתאימה לסעיף ג', ותאר כיצד קיבלת אותה.

48. נתונים ההיפרבולה $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=1$ ומשפחת הישרים המקבילים לציר y.

א. אילו מבין הישרים של המשפחה חותכים את ההיפרבולה בשתי נקודות?

ב. אילו מבין הישרים של המשפחה זרים להיפרבולה?

ג. לאילו מבין הישרים של המשפחה יש נקודה משותפת יחידה עם ההיפרבולה?

ד*. ענה על השאלות הנ"ל כאשר הישרים מקבילים לציר ה-x ומשוואת ההיפרבולה היא

$$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{25}=1.$$

49. נתונות ההיפרבולה $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{25}=1$ ומשפחת הפרבולות $y = ax^2$.

א. לאילו מבין הפרבולות של המשפחה יש נקודות משותפות עם ההיפרבולה?

ב*. אילו מבין הפרבולות שמצאת בסעיף א' משיקות להיפרבולה?

ג. אילו מבין הפרבולות של המשפחה זרות להיפרבולה?

ד*. רשום את המשוואות של היפרבולה ושל משפחת הפרבולות שסימטריות לנתונות ביחס לישר $y = x$, והתאם להן את תשובותיך לשלוש השאלות הנ"ל.

*50. נתונות ההיפרבולה $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{4}=1$ ומשפחת הפרבולות $y^2 = ax$.

כמה נקודות חיתוך יש לפרבולות עם ההיפרבולה, בהתאם לערכו של a?

51. נתונות ההיפרבולה $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ ומשפחת הפרבולות $y = x^2 + a$.

מצא את ערכי הפרמטר a עבורם יש להיפרבולה ולפרבולה של המשפחה:

א. 4 נקודות משותפות.

ב. 3 נקודות משותפות.

ג. 2 נקודות משותפות.

ד. נקודה משותפת אחת.

ה. אין נקודות משותפות.

52. נתונה ההיפרבולה $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$, שקדקודיה (כלומר קצות הציר הממשי) הם A ו-B.

סרטט את הגרף וסמן את הנקודות $F_1(-5,0)$ ו-$F_2(5,0)$.

א. חשב את אורכי הקטעים AF_1 , AF_2 , BF_1 , BF_2, ואת ההפרשים $|AF_1 - AF_2|$ ו- $|BF_1 - BF_2|$.

ב. מצא על ההיפרבולה נקודה M ששיעורה הראשון הוא $x = 6$, וחשב את ההפרש $|MF_1 - MF_2|$.

ג. מצא על ההיפרבולה נקודה N ששיעורה הראשון הוא $x = -7$, וחשב את ההפרש $|NF_1 - NF_2|$.

ד. איזו השערה תוכל להעלות על תכונה משותפת של כל נקודות ההיפרבולה? בדוק את השערתך עבור נקודה נוספת.

53. מצא את המקום הגיאומטרי של הנקודות שהפרש מרחקיהן מהנקודות $F_1(-4,0)$ ו-$F_2(4,0)$ הוא 6.

54. מצא את המקום הגיאומטרי של הנקודות שהפרש מרחקיהן מהנקודות $F_1(-3,0)$ ו-$F_2(3,0)$ הוא 4.

55. מצא היפרבולה שהיא המקום הגיאומטרי של הנקודות שהפרש מרחקיהן משתי נקודות נתונות על ציר ה-x הוא 6.

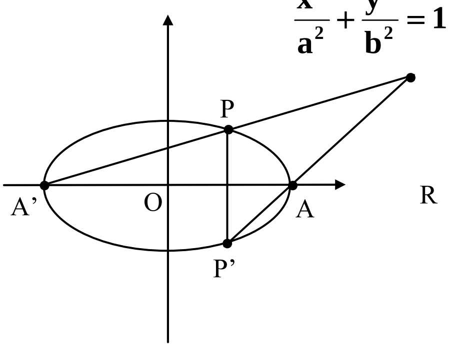
*56. מצא היפרבולה שהיא המקום הגיאומטרי של הנקודות שהפרש מרחקיהן משתי נקודות נתונות על ציר ה-y הוא 6.

*57. מצא את המקום הגיאומטרי של הנקודות שהפרש מרחקיהן מהנקודות $F_1(-6,-6)$ ו-$F_2(6,6)$ שווה ל-12.

*58. מצא את המקום הגיאומטרי של הנקודות שהפרש מרחקיהן מהנקודות $F_1(-4,4)$ ו-$F_2(-4,4)$ שווה ל-8.

7.3 גרף ההיפרבולה

*59. **בנייה של ההיפרבולה $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ מהאליפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$**



נתונה האליפסה $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$. התבונן בסרטוט:

P ו-'P הן שתי נקודות על האליפסה, שיש להן אותו שיעור x.

A ו-'A הן נקודות החיתוך של האליפסה עם ציר ה- x.

סמן ב-(x_1,y_1) את שיעורי הנקודה P. שיעורי הנקודה 'P הם $(x_1,-y_1)$.

א. מצא את משוואות הישרים 'AP ו-A'P במונחים של x_1 ו- y_1.

ב. סמן ב-R את נקודת החיתוך של שני הישרים 'AP ו-A'P, והראה כי עבור כל נקודה P על האליפסה, המקום הגיאומטרי של הנקודות R הוא $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

ג. הסבר כיצד אפשר לסרטט את גרף ההיפרבולה $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ באמצעות הגרף של האליפסה $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

ד**. בעזרת התהליך המתואר בתרגיל זה אפשר לבנות את ההיפרבולה $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ מהאליפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. הסבר כיצד והוכח את טענתך.

7.4 ההיפרבולה $xy = c$

60. א. מצא את נקודות החיתוך של הישר $y = 2x + 3$ עם ההיפרבולה $xy = 5$.
ב. בנה משולש שקדקודיו הם ראשית הצירים, ושתי הנקודות שמצאת בסעיף א'. מהו היקפו של המשולש?

61. חשב את שטח המשולש שקדקודיו הם הראשית ונקודות חיתוך ההיפרבולה $xy + 6 = 0$ עם הישר $2y = x - 8$.

62. נתונה ההיפרבולה $xy = 4$. בחר עליה שלש נקודות כך שהמשולש שנקודות אלה הן קדקודיו יהיה משולש שווה שוקיים.

63. נתונה ההיפרבולה $xy = -2$. בחר עליה ארבע נקודות שהן:
א. קדקודים של מלבן. ב. קדקודים של טרפז.

64. א. הוכח כי גרף קבוצת האמת של המשוואה $xy = c$ סימטרי ביחס לראשית, גם עבור $c < 0$.
ב. הוכח כי גרף קבוצת האמת של המשוואה $xy = c$ סימטרי ביחס לכל אחד מהישרים $y = -x$ ו- $y = x$, עבור $c \neq 0$.

65. א. מהי קבוצת האמת של המשוואה $xy = 0$?
ב. נתונה ההיפרבולה $xy = 5$. מצא את האסימפטוטות שלה.
ג. תאר כיצד מתקבלת ההיפרבולה $xy = 5$ מההיפרבולה $xy = -5$.

66. כל אחת ממערכות המשוואות שלהלן מייצגת זוג עקומות. בדוק בכל סעיף מהו המצב ההדדי של שתי העקומות, וחשב את שיעורי נקודות החיתוך שלהן, אם יש כאלה. צרף סרטוטים מתאימים:

א. $\begin{cases} xy = 0 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} xy = 12 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ xy = -1 \end{cases}$

ד. $\begin{cases} xy = -15 \\ x^2 + 4y^2 = 36 \end{cases}$

67. כמה פתרונות לכל היותר יש לכל אחת ממערכות המשוואות הבאות, כאשר c הוא פרמטר כלשהו, ו-a, b, r שונים מ-0.

א. $\begin{cases} xy = c \\ x = y \end{cases}$

ג. $\begin{cases} xy = c \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} xy = c \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$

ד. $\begin{cases} xy = c \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$

68. בכל אחת ממערכות המשוואות של התרגיל הקודם בחר, אם אפשר, ערכי פרמטרים כך שקבוצת האמת המתאימה ריקה. באיזה סעיף לא ניתן לבחור ערכי פרמטרים כנדרש?

*69. נתונה ההיפרבולה $xy = 4$. מצא את מוקדיה.

תרגילי סיכום

70.נתונה היפרבולה $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ ונתון ישר L : $x = \frac{16}{5}$. P היא נקודה כלשהי על ההיפרבולה. נסמן ב- d את מרחקה של P מהישר L. הראה כי מרחקה של P מהמוקד הימני של ההיפרבולה מתיחס ל- d כמו $\frac{5}{4}$.

71. מצא את משוואת המיתר של ההיפרבולה $4x^2 - 9y^2 = 144$ אם ידוע כי הוא עובר דרך הנקודה (9,4) והיא האמצע שלו.

72. נתונה היפרבולה $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{16} = 1$. הוכח כי מרחקה של המוקד מאחת האסימפטוטות שלה שווה ל- 2.

73. מצא על ההיפרבולה $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{32} = 1$ נקודה ברביע השני שמרחקה מהאסימפטוטה בעלת שיפוע שלילי קטן פי 2 ממרחקה מהאסימפטוטה בעלת שיפוע חיובי.

74. הזווית הקהה בין שתי האסימפטוטות של היפרבולה היא בת 120^0. ידוע כי ההיפרבולה עוברת דרך הנקודה (-4,-2). מצא את משוואתה של ההיפרבולה.

75. מצא על ההיפרבולה $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ את הנקודות ברביעים הראשון והשני שמכפלת מרחקיהן מהמוקדים הוא 32.

76. קדקודי המלבן ששטחו 60 והיקפו 32 נמצאים על היפרבולה שמוקדה בנקודה $\left(\sqrt{65},0\right)$.
מצא את המשוואה של ההיפרבולה, אם צלעותיו של המלבן מקבילות לצירים.

77. נתונה היפרבולה $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. מצא על האסימפטוטה בעלת שיפוע חיובי את הנקודה ברביע הראשון ממנה רואים את המוקדים בזווית ישרה.

78. מנקודה P שעל ההיפרבולה $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{1}=1$, מעבירים ישרים שמקבילים לשתי האסימפטוטות שלה. הראה כי שטח המקבילית הנוצרת על ידי שני הישרים ושתי האסימפטוטות הוא 1.

79. על ההיפרבולה $x^2-3y^2=3$ מצא את הנקודה ברביע הראשון שסכום מרחקיה משני המוקדים הוא 6.

80. אסימפטוטה של היפרבולה מאונכת לישר $4x+3y-20=0$ שהוא עובר דרך המוקד הימני שלה.מצא את משוואתה של ההיפרבולה.

81. הוכח כי כל ישר המקביל לאסימפטוטה של היפרבולה חותך אותה בנקודה אחת בלבד.

82. הוכח כי מרחקו של מוקד ההיפרבולה מאחת האסימפטוטות שווה לחצי הציר המדומה שלה.

83. הוכח כי מכפלת מרחקיה של נקודה כלשהי על היפרבולה משני האסימפטוטות שלה הוא גודל קבוע.

84. נתונה היפרבולה $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. הנקודה P נמצאת על ההיפרבולה . נסמן ב- A את הקדקוד הימני של ההיפרבולה וב- B את קדקודה השמאלי. הישר AP עובר דרך הנקודה $(-4,k)$, והישר BP עובר דרך הנקודה $(4,r)$. הוכח כי $k\cdot r=-36$.

תשובות לפרק היפרבולה

תרגילים לפרקים 7.1-7.2

1. א. $9x^2-4y^2=36$; ב. $5x^2-9y^2=45$; ג. $x^2-4y^2=16$; ד. $4x^2-y^2=16$;
ה. $x^2-y^2=9$; ו. $x^2-y^2=1$

2. $2a=4$, $2b=2$; ב. $2a=8$, $2b=4$; ג. $2a=1$, $2b=2$; ד. $2a=2$ $2b=4\sqrt{6}$,

6. א. $a=3$, $b=0.75$; ב. $a=1$, $b=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 7. $a=6$, $b=2$

10. א. 3 , 2 ; ב. 3 , 4 ; ג. 1/2, 1 ; ד. 3/2 , 3/5 ; ה. 4 , 2/3 ; ו. 2/3 , 2

11. א. $(\pm5,0)$; ב. $(\pm13,0)$; ג. $(0,\pm7)$; ד. $(0,\pm10)$ 14. $7x^2-18y^2=126$

15. $25x^2-24y^2=600$ 16. $x^2-y^2=2$ 17. $(-5,\pm2)$ 18. א. $(-10,-4)$, $(-6,0)$, ב. 12

19. א. $(\pm1,0)$, $\left(\pm\sqrt{65},16\right)$; ב. $\left(\pm\sqrt{82},18\right)$, $\left(\pm\sqrt{2},-2\right)$ 21. ב. $y=\pm x$; ג. $x^2-y^2=16$
ה. שוות שוקיים ;

22. א. $(-2,0)$, $(2,0)$; ב. $(-2,-\sqrt{3})$, $(2,-\sqrt{3})$, $(2,\sqrt{3})$, $(-2,\sqrt{3})$; ג. $(-5,0)$, $(5,0)$;
ד. $(-1,0)$, $(1,0)$ 27. 32 28. 32 29. א. $(\pm2,\pm2)$; ב. לא 30. $12\left(1+\sqrt{7}\right)$

31. $9x^2-4y^2=9$ 32. (1) א. אין ; ב. $a>1$; ג. $0<a<1$ (2) א. $a=\frac{1-\sqrt{17}}{2}\approx-1.5616$;
ב. $-3<a<1$ ג. $a<-3$ או $1<a<2$ (3) א. $m=-4$; ב. $m>5$ או $m<1/2$; ג. $4<m<5$
או $1/2<m<4$ (4) א. אין ; ב. $|a|<4$; ג. $|a|>4$ (5) א. $a=3\sqrt{2}$; ב. $|a|<6$;
ג. $|a|>6$ 35. א. 4 ; ב. 2 36. א. $y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}x$ ב. $y=\pm2x$; ג. $y=\pm2x$; ד. $y=\pm3/4\,x$.

37. א. $a=14$, $b=7$; ב. $a=4$, $b=6$; ג. $a=\sqrt{6}$, $b=\sqrt{24}$; ד. $a=1$, $b=3$

38. א. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$; ב. עבור $-4/3<k<4/3$ יש שתי נקודות חיתוך ; ג. $k=\pm4/3$

39. $OB=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $OA=\frac{a^2}{b}$,

42. זרים: א, ה, ו ; חותכים: ב, ג, ז ; משיקים: ד $(-5,0)$, ח $\left(5\sqrt{5},-8\right)$, ט $\left(10,4\sqrt{3}\right)$
43. ה. לא
45. $y=mx$: א. $-1.5<m<1.5$; ב. $|m|>1.5$; ד. חותך: $|m|>2/3$, זר: $|m|<2/3$
46. $y=mx+3$: א. $m^2<4.5$; ב. $m^2>4.5$; ג. $m^2=4.5$; ד. כולם חותכים
47. א. לא ; ב. שתיים ; ג. כולם חותכים בשתי נקודות
48. $x=c$: א. $|c|>4$; ב. $|c|<4$; ג. $c=\pm4$; ד. $y=c$, התשובות כנ״ל
49. $|a|\le\frac{5}{72}$; ב. $a=\pm\frac{5}{72}$; ג. $|a|>\frac{5}{72}$; ד. $25y^2-36x^2=900$, $x=ay^2$, התשובות כנ״ל
50. $a=\pm9$: שתיים, $|a|<9$: אין, $|a|>9$: ארבע
51. $a<-8\frac{8}{9}$; ב. אין ; ג. $a=-8\frac{8}{9}$; ד. אין ; ה. $a>-8\frac{8}{9}$
52. א. $|AF_1-AF_2|=|BF_1-BF_2|=6$; ב. $M(6,4\sqrt{3})$, $|MF_1-MF_2|=6$;
ג. $N(-7,\frac{4}{3}\sqrt{40})$, $|NF_1-NF_2|=6$; ד. לכל נקודה P על ההיפרבולה: $|PF_1-PF_2|=6$

53. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$ 54. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ 57. $xy=18$ 58. $xy=-8$

תרגילים לפרק 7.4

60. א. $(-2.5,-2)$, $(1,5)$; ב. 16.13 61. 8
65. א. $(0,0)$; ב. $x=0$, $y=0$; ג. שיקוף ביחס לאחד הצירים (או סיבוב סביב הראשית ב-90°)

66. א. (0,0) ; ב. ϕ ; ג. (4,3), (3,4), (-3,-4), (-4,-3) ; ד. ϕ 67. א. 2 ; ב. 2 ; ג. 4 ; ד. 4
68. ב' 69. (-2,-2) , (2,2)

תרגילי סיכום

71. $y - x + 5 = 0$ 73. (3,-2) 74. $3x^2 - y^2 = 44$ ו- $x^2 - 3y^2 = 4$ 75. $\left(\pm 4, \sqrt{15}\right)$

76. $10x^2 - 3y^2 = 15$ 77. (a,b) 79. $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ 80. $9x^2 - 16y^2 = 144$

פרק 8: הפרבולה

בפרק זה נעסוק בצורה שנקראת פרבולה וידועה לכל תלמיד מלימודי מתמטיקה קודמים. נפגשנו עם פרבולות גם באלגברה, גם בפרקים ראשונים באנליזה וכמו כן שמענו את השם בהקשרים נוספים בחיי יום יום , למשל, צלחות לווין שנקראות צלחות פרבוליות ועוד. בסוף הפרק נראה כמה דוגמאות לשימושים שונים בפרבולות.

8.1 הפרבולה כמקום גיאומטרי

הגדרנו את המעגל, אליפסה והיפרבולה כמקום הגיאומטרי של הנקודות בעלות תכונות מסוימות ומתוך התכונות האלו מצאנו את משוואותיהן.
נעשה כך גם במקרה של הפרבולה ונראה בהמשך שהפרבולה שהכרנו עד כה היא רק מקרה פרטי של משפחה הרבה יותר רחבה.
<u>הגדרה</u> :

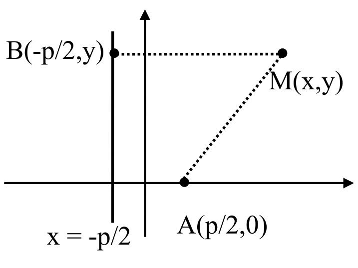
הפרבולה היא המקום הגיאומטרי של הנקודות הנמצאות במרחק שווה מנקודה ומישר נתונים. הישר הנתון l נקרא **המדריך** של הפרבולה, והנקודה הקבוע F נקראת **המוקד** של הפרבולה.

כדי למצוא משוואה של פרבולה נבחר כמדריך l את הישר המקביל לציר ה- y אשר משוואתו $x=-\frac{p}{2}$ ואת המוקד בנקודה $\left(\frac{p}{2},0\right)$ ונחפש את כל הנקודות שמרחק מישר זה ומהנקודה שווים. נשים לב כי ראשית הצירים (0,0) נמצאת על הפרבולה, מכיוון שהיא מרוחקת באותה מידה מהמדריך ומהמוקד ומרחק זה שווה ל- $\frac{p}{2}$. הנקודה (0,0) נקראת **הקדקוד** של הפרבולה והמרחק מהמדריך למוקד p נקרא **הפרמטר** של הפרבולה.

<u>משפט</u> :

משוואת המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מהישר $x=-\frac{p}{2}$ ומהנקודה $\left(\frac{p}{2},0\right)$ שווה היא $\mathbf{y^2=2px}$.

<u>הוכחה</u> :



ניקח נקודה כלשהי על הפרבולה M(x,y). המרחק בין M לבין המדריך הוא $x+\frac{p}{2}$ והמרחק של M מהנקודה $\left(\frac{p}{2},0\right)$ שווה ל- $\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$ (ראו שרטוט).

מרחקים אלה שווים לכן מתקבל השוויון $x+\frac{p}{2} = \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$. נפשט משוואה זו על ידי העלאה בריבוע ופתיחת הסוגריים. מקבלים:

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = \frac{p^2}{4} + px + x^2$$

כינוס איברים דומים מביא אותנו למשוואה $y^2 = 2px$.

המשוואה **$y^2 = 2px$** נקראת גם **המשוואה הקנונית** של הפרבולה.

<u>דוגמה</u>

מהו המקום הגיאומטרי של הנקודות הנמצאות במרחק שווה מהנקודה $A(0,1)$ והישר $x = -1$?

<u>פתרון</u>

נסמן ב-$P(x,y)$ נקודה המקיימת את התנאי וב-B את נקודת החיתוך של האנך מ- P לישר $x = -1$.

$$PA = PB$$

$$PA^2 = PB^2$$

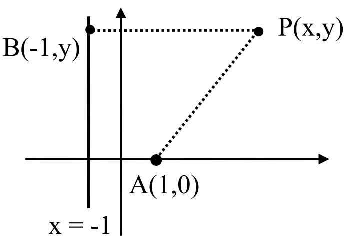
$$PA^2 = (x-1)^2 + y^2$$

$$PB^2 = (x-(-1))^2 = (x+1)^2$$

נציב $(x-1)^2 + y^2 = (x+1)^2$

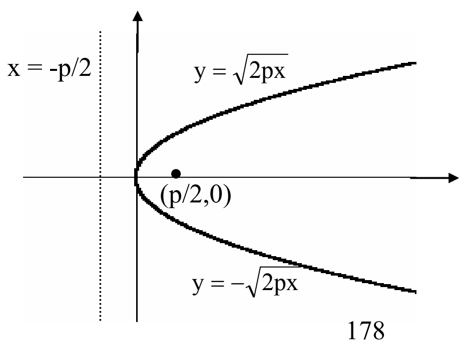
ונקבל $x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + 2x + 1$

$$y^2 = 4x$$



8.2 התיאור הגרפי של הפרבולה $y^2 = 2px$ $(p>0)$

- כפי שרואים ממשוואת הפרבולה , האגף השמאלי הוא אי שלילי, לכן אם p הוא חיובי , גם שיעור ה- x של כל הנקודות על הפרבולה חייב להיות אי שלילי.
- אם $p > 0$, לכל ערך חיובי של x מתאימים שני ערכים שונים של y ולכן ברור כי מדובר בגרף שלא מתאר פונקציה.
- לכל ערך של x (פרט ל- 0) מתאימים שני ערכים של y בעלי ערך מוחלט שווה וסימנים מנוגדים, לכן לכל נקודה פרט לקדקוד של הפרבולה $(0,0)$, קיימת נקודה סימטרית לה ביחס לציר ה- x.
- התיאור הגרפי של הפרבולה $y^2 = 2px$ $p > 0$ מורכב מגרפים של שתי הפונקציות $y = \sqrt{2px}$ ו- $y = -\sqrt{2px}$.



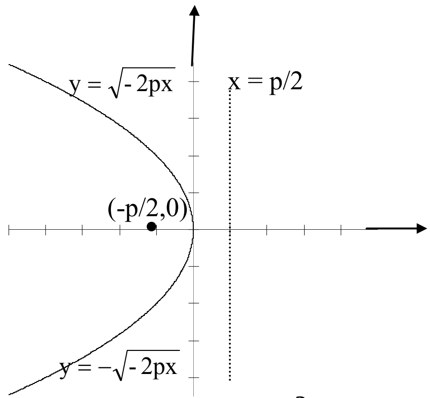
הערה :

אפשר לדבר גם על הפרבולה המוגדרת על ידי המשוואה **$y^2 = -2px$ ($p > 0$)**.

כמובן המשוואה יכולה להתקבל כאשר מגדירים את הפרבולה עבור המדריך $x = \frac{p}{2}$ והמוקד

$\left(-\frac{p}{2},0\right)$. ההבדל העיקרי הוא בכך שבמקרה זה שיעור ה- x של נקודות על הפרבולה חייב להיות

שלילי. והגרף של הפרבולה יהיה כולו משמאל לציר ה- y כפי שמתואר בסרטוט הבא :



8.3 הפרבולה מהצורה $y = ax^2 + bx + c$ כמקום גיאומטרי

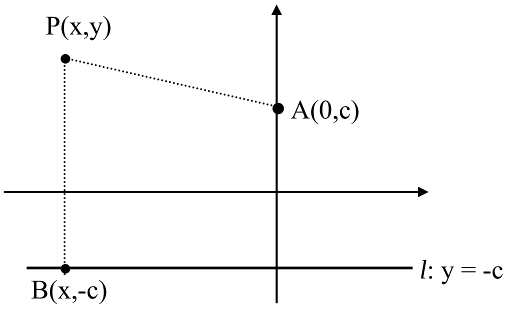
הפונקציה הריבועית $y = ax^2 + bx + c$ מוכרת לנו והגרף שלה גם נקרא פרבולה. בסעיף זה נסביר מדוע. נראה כי גם המשוואה הזאת מתארת פרבולה שמוגדרת כמקום גיאומטרי בדיוק באותו אופן כפי שהוגדרה פרבולה בסעיפים הקודמים. כשחקרנו את הגרף של המשוואה $y = ax^2 + bx + c$ ראינו כי מבחינה גיאומטרית גרף זה חופף את הגרף של הפרבולה $y = ax^2$ והוא הזזה של הפרבולה $y = ax^2$ במקביל למערכת הצירים .

טענה :

המשוואה $y = ax^2$ מתארת את המקום הגיאומטרי של הנקודות הנמצאות במרחק שווה מנקודה ומישר נתונים.

הוכחה :

כדי להוכיח את המשפט נראה כי כל הנקודות הנמצאות במרחק שווה מנקודה ומישר נתונים נמצאות על עקום שמשוואתו היא מהצורה $y = ax^2$. ולהפך, כל נקודה על העקום $y = ax^2$ נמצאת במרחק שווה מנקודה ומישר. היות שכל פרבולה היא הזזה או סיבוב של פרבולה יסודית זו הרי שהמשפט מוכח.



נתונים ישר l ונקודה A. נבחר מערכת צירים שבה ציר ה-y מאונך לישר l ועובר דרך הנקודה A. ציר ה-x מקביל לישר l וחוצה את הקטע על ציר ה-y בין הנקודה A והישר l כמתואר בסרטוט.

(זכור : בחירת מערכת צירים איננה משנה את התכונות הגיאומטריות.)

על פי בחירה זו אם מסמנים את שיעורי הנקודה A ב-(0,c) כי אז משוואת הישר l היא $y = -c$.

תהי $P(x,y)$ נקודה כלשהי שמרחקה מ-A ומהישר l שווים. מרחק הנקודה P מהישר l הוא אורך האנך היורד ממנה לישר l . אנך זה חותך את הישר l בנקודה B ששיעוריה הם $B(x,-c)$.

$$PB = |y-(-c)| = |y+c|$$

לכן $PB^2 = (y + c)^2$

$$PA^2 = (x - 0)^2 + (y - c)^2$$

$$PA = PB$$

לכן $PA^2 = PB^2$

נציב ונקבל $(y + c)^2 = x^2 + (y - c)^2$

$$4cy = x^2$$

$$y = \frac{1}{4c}x^2$$

($c \neq 0$ כי הנקודה A לא נמצאת על הישר l.)

הוכחנו : אם נקודה $P(x,y)$ נמצאת במרחק שווה מהנקודה $A(0,c)$ ומהישר l: $y = -c$ שיעוריה מקיימים את המשוואה $y = \frac{1}{4c}x^2$. כלומר, הנקודה P נמצאת על הפרבולה שמשוואתה $y = \frac{1}{4c}x^2$.

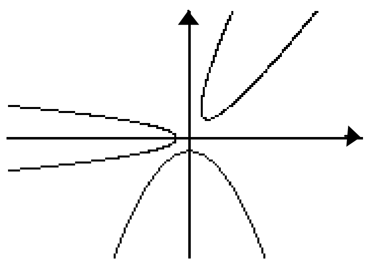
אם קוראים את ההוכחה מהסוף להתחלה מקבלים כי גם הכיוון ההפוך נכון. לכן כל הנקודות שעל הפרבולה $y = \frac{1}{4c}x^2$ נמצאות במרחק שווה מהנקודה $A(0,c)$ ומהישר l: $y = -c$.

הנקודה A היא **מוקד** הפרבולה והישר l הוא **המדריך**.

ההוכחה האחרונה נותנת דרך לחישוב המוקד והמדריך של פרבולות שמשוואתן מהצורה $y = ax^2$.

$a = \frac{1}{4c} \Leftarrow c = \frac{1}{4a}$, לכן הנקודה $\left(0, \frac{1}{4a}\right)$ היא מוקד הפרבולה והישר $y = -\frac{1}{4a}$ הוא המדריך.

מהמשפט שהוכחנו אפשר להבין מדוע אנו קוראים לצורה הגיאומטרית של הגרף של $y = ax^2$ בשם פרבולה. לכן כל ההזזות או הסיבובים של הגרף של $y = ax^2$ אף הם פרבולות. להלן גרפים של פרבולות במערכת הצירים :



זכור, התכונות הגיאומטריות של הפרבולה אינן תלויות במיקומה במערכת הצירים. מיקום הפרבולה משפיע רק על המשוואה שלה.

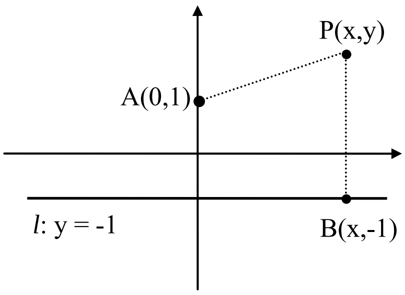
מבחינה היסטורית הגדרת הפרבולה כמקום גיאומטרי קדמה לביטויה על-ידי תבנית. הפרבולה כמקום גיאומטרי הייתה ידועה כבר בגיאומטריה של היוונים, ואילו הצגתה על-ידי תבנית שייכת לגיאומטריה האנליטית המתחילה בדקרט.

<u>דוגמה</u>

מצא את המקום הגיאומטרי של הנקודות הנמצאות במרחק שווה מהישר l: $y = -1$ ומהנקודה

.A(0,1)

<u>פתרון</u>



תהי P(x,y) נקודה כלשהי הנמצאת במרחק שווה מהישר y = -1 ומהנקודה A(0,1). נחבר את P עם A ונוריד ממנה אנך PB לישר l (כמתואר בסרטוט).

שיעורי הנקודה B הם (x,-1).

<u>פתרון</u>

$$PB = y + 1$$

$$PA = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$$

הנקודה P מקיימת את התנאי $PA = PB$

$$PA^2 = PB^2$$

$$x^2 + (y-1)^2 = (y+1)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = y^2 + 2y + 1$$

$$x^2 = 4y$$

$$y = \frac{1}{4}x^2$$

קיבלנו משוואה של פרבולה. הוכחנו, אם כן, כי אם נקודה P נמצאת במרחק שווה מהנקודה A(0,1) ומהישר l: y = -1 , אז P מונחת על הפרבולה שמשוואתה $y = \frac{1}{4}x^2$. אם קוראים את ההוכחה מהסוף להתחלה מקבלים כי גם הכיוון ההפוך נכון כלומר, כל נקודה על הפרבולה $y = \frac{1}{4}x^2$ נמצאת במרחק שווה מהנקודה A(0,1) ומהישר l: y = -1.

מסקנה : המקום הגיאומטרי של הנקודות הנמצאות במרחק שווה מהנקודה A(0,1) ומהישר l: y = -1 הוא הפרבולה שמשוואתה $y = \frac{1}{4}x^2$.

<u>דוגמאות</u>

מצא את המוקד ואת המדריך של הפרבולות הבאות.

א. $y = x^2$

פתרון : $\frac{1}{4c} = 1 \Leftarrow c = \frac{1}{4} \Leftarrow$ הנקודה $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ היא המוקד והישר $y = -\frac{1}{4}$ הוא המדריך.

ב. $y = -\frac{1}{4}x^2$

פתרון : $\frac{1}{4c} = -\frac{1}{4} \Leftarrow c = -1 \Leftarrow$ הנקודה (0,-1) היא המוקד והישר y = 1 הוא המדריך.

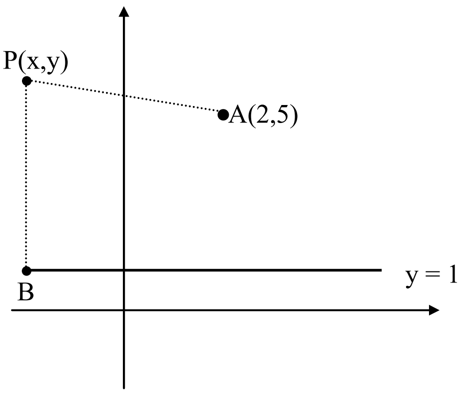
זכור, המשוואה $y=\frac{1}{4c}x^2$ שקיבלנו היא תוצאה של בחירה מסוימת של מערכת צירים. אם בוחרים מערכת צירים אחרת (או לחילופין נקודה וישר במקום שונה במערכת צירים נתונה) מקבלים אותה צורה גיאומטרית של פרבולה (כי התכונות הגיאומטריות נשמרות בכל מערכת צירים) אך המשוואה המתארת אותה תהיה שונה.

להלן דוגמה שבה נתונה מערכת צירים. הישר l מקביל לציר x ו-A נקודה נתונה. על-פי מה שהוכחנו זה עתה, המקום הגיאומטרי של הנקודות הנמצאות במרחק שווה מהישר l ומהנקודה A הוא פרבולה אך מהי משוואתה?

<u>דוגמה</u>

מהו המקום הגיאומטרי של הנקודות הנמצאות במרחק שווה מהישר $y = 1$ ומהנקודה $A(2,5)$?

<u>פתרון</u>



$$PA^2 = (y-5)^2 + (x-2)^2$$

$$PB^2 = (y-1)^2$$

$$PA^2 = PB^2$$

$$(y-1)^2 = (y-5)^2 + (x-2)^2$$

$$8y = x^2 - 4x + 28$$

$$y=\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$$

וזו משוואה של פרבולה מהצורה $y = ax^2 + bx + c$.

נשלים לריבוע ב-x את המשוואה שקיבלנו לפני החילוק ב-8.

$$8y = (x-2)^2 + 24$$

$$y=\frac{1}{8}(x-2)^2+3$$

כלומר, המקום הגיאומטרי $y=\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$ הוא פרבולה שהיא הזזה מקבילה לצירים של $y=\frac{1}{8}x^2$, ימינה ב-2 יחידות ולמעלה ב-3 יחידות. קדקוד הפרבולה נמצא בנקודה (2,3).

שים לב, למדנו כי המוקד של פרבולה שצורתה $y = ax^2$ הוא $\left(0,\frac{1}{4a}\right)$ ומשוואת המדריך היא $y=-\frac{1}{4a}$. לכן מוקד הפרבולה $y=\frac{1}{8}x^2$ הוא (0,2), ומשוואת המדריך היא $y = -2$.

כשמזיזים פרבולה במקביל לצירים זזים יחד אתה גם המוקד והמדריך. לכן הזזה ימינה ב-2 יחידות ולמעלה ב-3, משנה את משוואת הפרבולה $y=\frac{1}{8}x^2$ למשוואה $y=\frac{1}{8}(x-2)^2+3$. המוקד עובר מהנקודה (0,2) לנקודה (2,5) והמדריך מ- $y = -2$ ל- $y = 1$. ואמנם אלה הם הנתונים שבתרגיל.

<u>תרגיל</u>

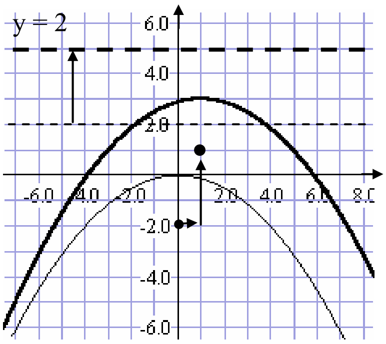
א. מהם המוקד והמדריך של הפרבולה $y=-\frac{1}{8}x^2$?

ב. מצא את שיעורי המוקד ומשוואת המדריך של הפרבולה $y=-\frac{1}{8}(x-1)^2+3$?

<u>פתרון</u>

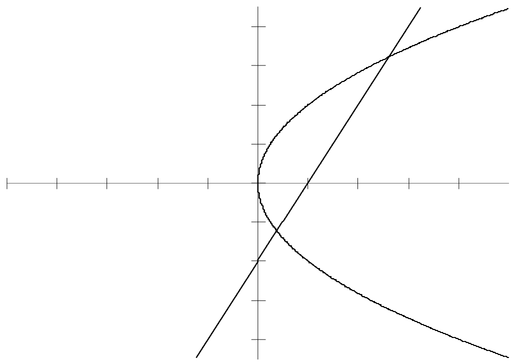
א. המוקד של פרבולה שצורתה $y = ax^2$ הוא $\left(0,\frac{1}{4a}\right)$ ומשוואת המדריך היא $y=-\frac{1}{4a}$. במקרה שלפנינו $a=-\frac{1}{8}$ לכן המוקד הוא (0,-2) והמדריך $y = 2$.

ב. הפרבולה $y = -\frac{1}{8}(x-1)^2 + 3$ היא הזזה מקבילה לצירים של הפרבולה $y = -\frac{1}{8}x^2$ ימינה ביחידה אחת, ולמעלה ב-3 יחידות. לכן המוקד של הפרבולה המוזזת הוא $(1,1)$.
מכיוון שהמדריך הוא ישר מקביל לציר x, רק ההזזה האנכית משפיעה עליו, לכן משוואתו היא $y = 5$.

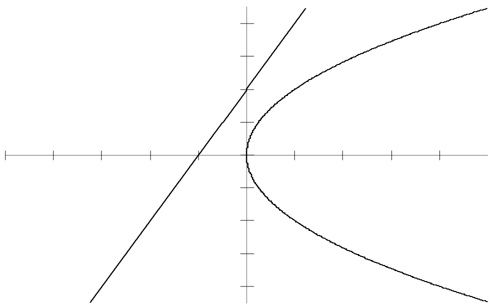


8.4 ישרים ופרבולות, תנאי השקה

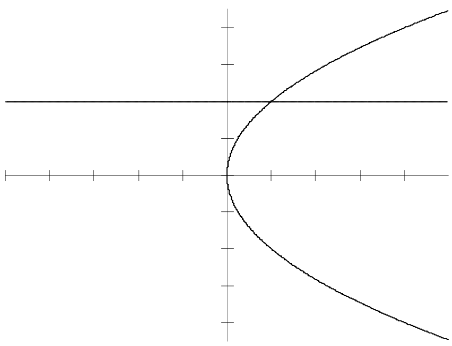
יש ארבעה מצבים אפשריים שונים בין פרבולה וישר.
א. לישר ולפרבולה יש שתי נקודות חיתוך.



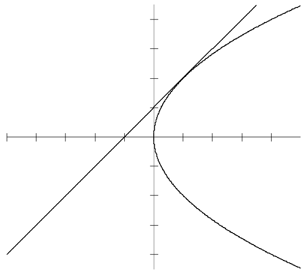
ב. הישר והפרבולה אינם נחתכים באף נקודה.



ג. לישר ולפרבולה יש נקודת חיתוך אחת, והישר מקביל לציר הפרבולה.



ד. לישר ולפרבולה יש נקודת חיתוך אחת, והישר איננו מקביל לציר הפרבולה. במקרה זה קוראים לישר **משיק**.



כמו שראינו במעגל ובאליפסה, גם כאן קובעים את המצב ההדדי של ישר ופרבולה נתונים, על פי מספר הפתרונות שיש למערכת המשוואות הכוללת את משוואת הפרבולה ומשוואת הישר. אולם, בשונה מהמעגל ומהאליפסה , אם יש רק פתרון אחד יש שני מצבים אפשריים, וצריך לקבוע אם הישר הוא משיק או חותך בנקודה אחת.

כיצד מוצאים משיק לפרבולה בנקודה נתונה?

<u>דוגמה</u>

מצא את משוואת המשיק לפרבולה $y = 2x^2 - x$ העובר בנקודה $(-2,8)$.

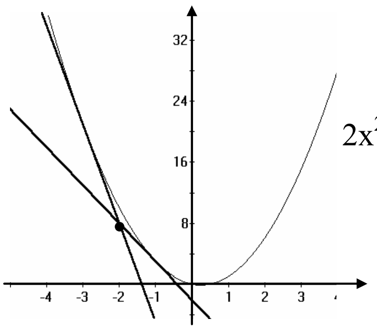
<u>פתרון</u>

משוואת ישר בעל שיפוע m העובר בנקודה הנתונה היא:

$$y - 8 = m(x + 2)$$

$$y = mx + 2m + 8$$

ישר זה הוא משיק לפרבולה רק אם יש לו ולפרבולה נקודת חיתוך אחת. משמעות עובדה זו היא



כי למערכת המשוואות $\begin{cases} y = 2x^2 - x \\ y = mx + 2m + 8 \end{cases}$ פתרון יחיד.

על ידי הצבה מקבלים משוואה ריבועית: $2x^2 - x(1 + m) - 2m - 8 = 0$

למשוואה זו פתרון יחיד אם הדיסקרמיננטה שלה שווה לאפס.

$$(1 + m)^2 + 4\cdot 2(2m + 8) = 0$$

$$m^2 + 18m + 65 = 0$$

למשוואה זו שני פתרונות: $m = -13$, $m = -5$. ישרים אלה אינם מקבילים לציר הפרבולה לכן הם משיקים לה ומשוואותיהם הם: $y = -5x - 2$ ו- $y = -13x - 18$.

<u>הערה</u>:

צוין לעיל שלא קיים משיק לפרבולה $\mathbf{y^2 = 2px}$ שמקביל לציר ה- x .

לכל שיפוע אחר אפשר למצוא ישר שישיק לפרבולה. בנוסף לכך ציר ה- y הוא משיק לפרבולה הנ"ל בקדקודה.

תרגיל 1

נתון ישר $y = mx + n$ ונתונה הפרבולה $y^2 = 2px$. מצא את התנאי לכך שהישר ישיק לפרבולה.

פתרון

על מנת למצוא תנאי השקה של הישר לפרבולה נמצא מתי יש למערכת המשוואות הכוללת את משוואת הפרבולה ומשוואת הישר פתרון יחיד:

$$\begin{cases} y^2 = 2px \\ y = mx + n \end{cases}$$

על ידי הצבה של y ממשוואת הישר אל תוך המשוואת של הפרבולה נקבל משוואה בנעלם אחד:

$(mx+n)^2 = 2px$. בצורה מסודרת המשוואה הריבועית נראית כ-

$m^2x^2 + (2mn - 2p)x + n^2 = 0$. נשאר לדרוש שהדיסקרימיננטה של המשוואה הריבועית תהיה שווה ל- 0 (m לא שווה ל- 0 , כי אחרת אין מצב של השקה).

$$\Delta = (2mn - 2p)^2 - 4m^2n^2 = 0$$

כינוס איברים וצמצום מביא את המשוואה לצורה הבאה: $p^2 - 2mnp = 0$. ברור כי p אינו 0 אחרת לא מדובר בפרבולה, לכן אפשר לצמצם בו ואז נקבל את התנאי הדרוש: $p = 2mn$.

בספרות מתמטית רושמים את התנאי בדרך כלל באופן הבא:

$$\boxed{n = \frac{p}{2m}}$$

והוא נקרא **תנאי השקה של ישר לפרבולה**.

הערה:

תנאי השקה מאוד פשוט ויעיל לפתרון תרגילים רבים. אפשר להשתמש בו במהלך פתרון תרגילים ללא הוכחה.

דוגמאות

תרגיל 2

נתון ישר $2x - y + 17 = 0$ שמשיק לפרבולה שמשוואתה קנונית. מצא את משוואת הפרבולה.

פתרון

מהמשוואה של הישר נובע כי $m = 2$ ו- $n = 17$. לכן על פי תנאי ההשקה $p = 2\cdot2\cdot17 = 68$ ולכן המשוואה המבוקשת היא $y^2 = 136x$.

תרגיל 3

הוכח כי משוואות של שני משיקים היוצאים מנקודה על המדריך של הפרבולה $y^2 = 2px$ ניצבים אחד לשני.

פתרון

כפי שראינו זאת בתחילת הפרק, משוואת המדריך היא $x=-\frac{p}{2}$. לכן את הנקודה שממנה

יוצאים שני משיקים נוכל לסמן ב- $P\left(-\frac{p}{2},t\right)$. נניח כי m הוא שיפוע של משיק היוצא מנקודה

P. אז משוואת המשיק היא $y-t=m\left(x+\frac{p}{2}\right)$ או בצורה מפורשת $y=mx+\left(t+\frac{mp}{2}\right)$.

נשאר להציב את הנתונים בתנאי ההשקה שלמדנו ונקבל $p=2m\left(t+\frac{mp}{2}\right)$. המשוואה

הריבועית לגבי m תיראה כך: $pm^2+2tm-p=0$. לא נצטרך לפתור את המשוואה מכיוון

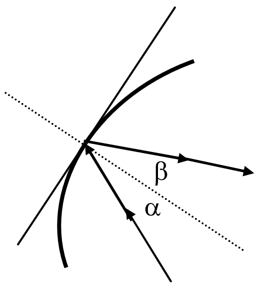
שאפשר לראות כבר בשלב זה שמכפלת שני הפתרונות שלה שווה ל- 1- על פי משפט ויאטה , ולכן

הישרים ניצבים זה לזה מה שהיה צריך להוכיח.

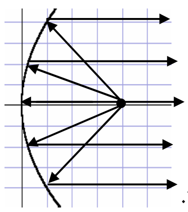
8.5 נושאי העשרה

תכונה גיאומטרית של הפרבולה, שיש לה שימוש באופטיקה

נציג כאן שימוש בתכונות הפרבולה מתחום האופטיקה.



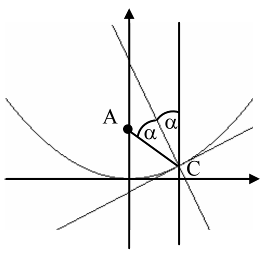
על פי חוק ההחזרה של האור, כאשר קרן אור פוגעת במשטח החזרה חלק כגון מראה, זווית ההחזרה β שווה לזווית הפגיעה α. זווית הפגיעה היא הזווית בין הקרן הפוגעת לבין הישר הניצב למשיק של המראה בנקודת ההשקה. זווית ההחזרה היא הזווית בין הניצב הנ"ל לבין הקרן המוחזרת. בסרטוט שלפניכם α היא זווית הפגיעה ו-β היא זווית ההחזרה.



התכונה המיוחדת של מראה פרבולית היא:

כל קרן אור שמקורה במוקד הפרבולה מוחזרת במקביל לציר הסימטרייה של הפרבולה.

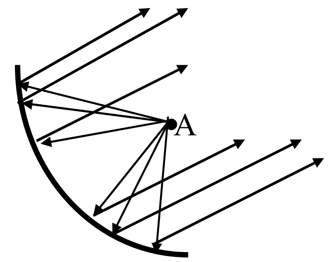
נעיר כי מראה פרבולית היא תלת ממדית, ואנו כאן עוסקים בחתכים מישוריים דרך המוקד.



המשפט הגיאומטרי שממנו נובעת תכונה זו הוא:

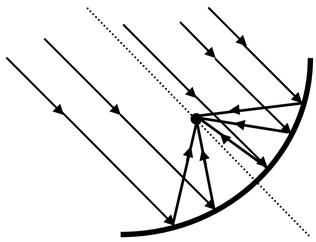
אם A מוקד של פרבולה, אז האנך למשיק לפרבולה בנקודה כלשהי C עליה, חוצה את הזווית בין הישר AC, ובין הישר המקביל לציר הפרבולה העובר בנקודה C.

אם משטח ההחזרה הוא חלק, זווית הפגיעה שווה לזווית ההחזרה, לכן כל קרן אור שמקורה במוקד A תוחזר במקביל לציר הפרבולה.



משתמשים בתכונה זו בפנסים הבנויים ממראה פרבולית ומקור אור המונח במוקד הפרבולה. קרני האור אינם מתפזרים לכל כיוון אלא מוחזרים במקביל לציר הפרבולה וכך עוצמת האור של הפנס גדלה.

ולהפך : קרני אור המקבילות לציר של מראה פרבולית ופוגעות במראה, יוחזרו למוקד הפרבולה. במילים אחרות, מראה פרבולית תרכז קרני אור המקבילות לציר הסימטרייה שלה במוקד. באופן מעשי קרני אור נחשבות למקבילות אם מקורן מרוחק מאד (כגון שמש או כוכבים).



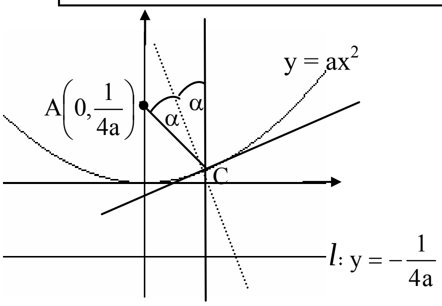
מציבים את המראה הפרבולית כך שציר הסימטרייה שלה מקביל לקרניים הפוגעות. האנך למשיק בנקודת הפגיעה (הנורמל) חוצה את הזווית בין המקביל לציר הפרבולה, ובין הקטע המחבר את נקודת הפגיעה עם המוקד. לכן כל קרן אור המקבילה לציר תוחזר למוקד.

תכונה אופטית זו היא המקור לכנוי הנקודה A בשם "מוקד" מלשון "יקוד" שמשמעותו בערה. הנקודה שבה מבעירים אש על-ידי ריכוז קרני השמש, באמצעות מראה פרבולית שצירה מקביל לקרניים, היא מוקד הפרבולה.
המילה האנגלית למוקד היא "focus" שמשמעותה מדורה או אח. קפלר עשה שימוש במילה זו לראשונה בספרו על אופטיקה בשנת 1604 . הוא לא ציין את סיבת בחירתו בשם זה, אבל משערים כי המשמעות האופטית - נקודת הבעירה של עדשה או מראה הייתה כבר ידועה.
נוכיח עתה המשפט הגיאומטרי שהזכרנו בהתחלה.

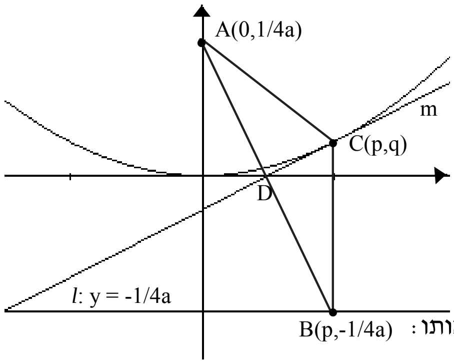
משפט

אם A מוקד של פרבולה, אז האנך למשיק לפרבולה בנקודה כלשהי C עליה, חוצה את הזווית בין הישר AC. ובין הישר המקביל לציר הפרבולה העובר בנקודה C.

<u>הוכחה</u>



נתבונן בפרבולה $y = ax^2$. פרבולה זו היא המקום הגיאומטרי של הנקודות שמרחקיהן מהמוקד $A\left(0,\dfrac{1}{4a}\right)$ ומהמדריך $l: y = -\dfrac{1}{4a}$ שווים.



נבחר נקודה C(p,q) על הפרבולה, נחבר אותה עם המוקד A ונעביר דרך C אנך CB למדריך l . קיים AC = BC.
נחבר את A ו- B. המשולש המתקבל ABC הוא משולש שווה שוקיים. דרך C נעביר משיק m לפרבולה, החותך את AB בנקודה D .

שיפוע המשיק m שווה לנגזרת הפונקציה $y = ax^2$ בנקודה C . נחשב אותו :

$$y' = 2ax$$

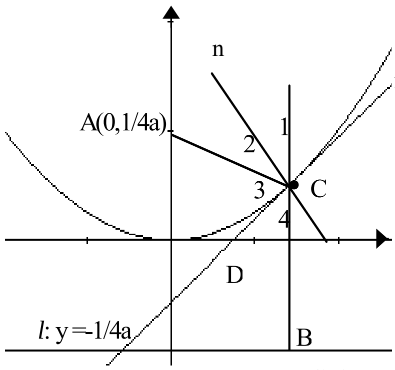
$$y'(p) = 2ap$$

שיעורי הנקודה B הם $\left(p,-\frac{1}{4a}\right)$. לכן שיפוע הקטע AB הוא

$$\frac{-\frac{1}{4a}-\frac{1}{4a}}{p-0}=\frac{-\frac{1}{2a}}{p}=-\frac{1}{2ap}$$

רואים כי מכפלת השיפועים של המשיק m ושל AB היא -1 , לכן הם מאונכים זה לזה. כלומר CD הוא הגובה לבסיס במשולש שווה השוקיים ABC. לכן הוא חוצה את זווית הראש $\angle ACB$ כלומר, $\angle ACD = \angle DCB$.

הוכחנו: המשיק לפרבולה חוצה את הזווית הנוצרת בין הקטע המחבר את נקודת ההשקה עם המוקד, ובין האנך מנקודת ההשקה למדריך.



הגדרה: **הנורמל** הוא ישר הניצב למשיק של עקומה בנקודת ההשקה.

נסמן ב- n את הנורמל לפרבולה בנקודה C.

ראינו כי המשיק m חוצה את הזווית $\angle ACB$ כלומר,

$$\angle C_3 = \angle C_4$$

הנורמל n ניצב למשיק m ועובר דרך C , לכן הוא חוצה את הזווית הצמודה ל- $\angle ACB$ (הסבר!) כלומר,

$$\angle C_1 = \angle C_2$$

במילים אחרות, הנורמל n חוצה את הזווית שבין AC ובין המשך BC מעבר ל- C.

תרגילים לפרק 8

8.1-8.2 פרבולה כמקום גיאומטרי

1. מצא את המקום הגיאומטרי של הנקודות הנמצאות במרחק שווה מהישר ומהנקודה הנתונים להלן:
א. הישר $x = -2$ והנקודה $(2,0)$.
ב. הישר $x = 3$ והנקודה $(-3,0)$.
ג*. הישר $x = 2$ והנקודה $(6,7)$.

2. מצא את משוואת הפרבולה אם נתון כי הנקודות והישרים שלהלן הם מוקדה ומדריכה:
א. $(0.25,0)$, $x = -0.25$
ב. $(-1/3,0)$, $x = 1/3$
ג. $(-2,0)$, $x = 2$
ד. $(-4,0)$, $x = 4$

3. רשום את משוואת הפרבולה:
א. בעלת פרמטר 3.
ב. העוברת דרך הנקודה $(4,6)$
ג. בעלת מוקד בנקודה $(3,0)$
ד. שמדריכה הוא $x + 1 = 0$.

4. מצא את מרחקה של הנקודה $(3,6)$ מהמוקד של הפרבולה אם הנקודה נמצאת עליה.

5. מצא את הנקודה על הפרבולה שמוקדה ב- $(4,0)$ ונמצאת במרחק 13 מהמוקד.

6. מצא את המרחק הנקודה על הפרבולה $y^2 = 24x$ מהקדקוד אם נתון כי היא במרחק 12 מהמוקד.

7. מצא את אורך המיתר של הפרבולה $y^2 = 2x$ המונח על הישר $x - y - 4 = 0$.

8. לאילו ערכים של k חותך הישר $y = kx + 2$ את הפרבולה שמוקדה בנקודה $(1,0)$.

9. נתונה הפרבולה שעוברת בנקודה $(3,3)$ וישר $x - 2y + n = 0$. מהם הערכים של n עבורם יש שתי נקודות חיתוך בין הישר לבין הפרבולה.

10. הנקודה $A(t,4)$ נמצאת על הפרבולה שמשוואתה קנונית $y^2 = 2px$. המרחק בין A לבין המוקד של הפרבולה שווה ל- 8.5. מצא את משוואת הפרבולה (הבחן בין שני מקרים)

11. הנקודה ששיעור ה- y שלה הוא 12 נמצאת על הפרבולה ומרחקה מהמוקד של הפרבולה שווה ל- 13. מצא את משוואת הפרבולה.

12. קודקודיו של משולש שווה שוקיים וישר זווית נמצאים על הפרבולה $y^2 = 16x$, כאשר קדקוד הראש מונח בקדקוד הפרבולה. מצא את שני הקדקודים האחרים.

13. מצא על הפרבולה $y^2 = 24x$ את הנקודה הנמצאת במרחק שווה מהקדקוד ומהמוקד.

14. הנקודה $A(2,2)$ נמצאת בתוך הפרבולה שמוקדה $(2,0)$. דרך הנקודה A עובר מיתר של הפרבולה. מצא את משוואת הישר עליו מונח המיתר אם ידוע כי A היא האמצע שלו.

15. מצא את משוואת מיתר הפרבולה $y^2 = 9x$, העובר דרך הנקודה $(2.5 , -1.5)$ ונחצה על ידי הנקודה.

16. המעגל $x^2 + y^2 = 80$ ופרבולה שהנקודה $(8,4)$ עליה נפגשים בשתי נקודות. מצא את המרחק של הנקודות המשותפות למוקדה של הפרבולה.

17. מצא את משוואת הפרבולה שהמוקד שלה מתלכד עם המוקד הימני של האליפסה

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

18. מצא את משוואות הפרבולות שהמוקד שלהן מתלכד עם אחד המוקדים של ההיפרבולה

$\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{12}=1$.

19. על הפרבולה $y^2 = 8x$ מצא את הנקודות שסכום ריבועי מרחקיהן מן המוקד ומן הקדקוד של הפרבולה הוא 36.

20. הישר $y = 2x + 4$ חותך את הפרבולה בשתי נקודות P ו- Q כך שאמצע הקטע PQ הוא בנקודה $(2.5,t)$.

א. מצא את משוואת הפרבולה.

ב. מצא את P ו- Q.

21. קצותיו של מיתר בפרבולה הם $(36,q)$, $(1,t)$. מצא את משוואת הפרבולה אם נתון כי המיתר עובר דרך מוקדה.

8.3 הפרבולה מהצורה $y = ax^2 + bx + c$

22. מצא את המקום הגיאומטרי של הנקודות הנמצאות במרחק שווה מהישר ומהנקודה הנתונים להלן:

א. הישר $y = -2$ והנקודה $(0,2)$.

ב. הישר $y = -0.5$ והנקודה $(0,0.5)$.

ג. הישר $y = 1$ והנקודה $(0,-1)$.

ד. הישר $y = -1$ והנקודה $(1,2)$.

23. להלן נתונים נקודות וישרים. מצא את משוואת הפרבולה שאלה הם מוקדה ומדריכה:

א. $y = -1$, $(0,1)$ ד. $y = 0.1$, $(0,-0.1)$

ב. $y = 3$, $(0,-3)$ ה. $y = 1$, $(0,3)$

ג. $y = -0.5$, $(0,0.5)$ ו. $y = 0$, $(1,3)$

24. מצא את המוקד ואת המדריך של הפרבולות הנתונות:

א. $3y = x^2$ ד. $4y = -x^2$ ז. $y^2 = 2x$ י. $y^2 = -2x$

ב. $5y = -x^2$ ה. $2y = -3x^2$ ח. $y^2 = -5x$ יא. $3y^2 = 4x$

ג. $2y = x^2$ ו. $2y = 3x^2$ ט. $y^2 = 4x$ יב. $3y^2 = -8x$

25. הישר $y + 5x = 7$ חותך את הפרבולה $y = ax^2 + bx + 6$ בשתי נקודות. שיעורי ה-x של נקודות החיתוך הם: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$. מצא את משוואת הפרבולה.

26. נתונים הפרבולה $y = -3x^2$ ומשפחת הישרים $y = mx - 1$. הוכח כי כל הישרים של המשפחה חותכים את הפרבולה בשתי נקודות.

27. חשב את המרחק בין נקודות החיתוך של הפרבולות $y = x^2$ ו- $x = y^2$.

28. כמה נקודות משותפות יש למעגל $x^2 + y^2 = 25$ ולפרבולה $y = ax^2$

א. לכל היותר? ב. לכל הפחות?

נמק את תשובתך.

29. צלע אחת של מלבן, שאורכה 6 יחידות, מונחת על ציר ה-x. שני קדקודי המלבן שאינם על ציר ה-x מונחים על הפרבולה $y = ax^2$, ומרחקם מציר ה-x הוא 3. מצא את משוואת הפרבולה.

30. נתונות הפרבולות $y = x^2$ ו- $y = -0.5x^2 + 6$. הוכח כי המרובע, שקדקודיו הם נקודות החיתוך של הפרבולות וקדקודי הפרבולות, הוא דלתון, וחשב את שטחו.

31. הפרבולה $y = x^2$ המעגל $x^2 + (y - 7)^2 = 13$ נחתכים בארבע נקודות. הוכח כי המרובע המתקבל מחיבור ארבע נקודות אלו הוא טרפז, וחשב את שטחו.

32. חשב את שטח המרובע שקדקודיו הם נקודות חיתוך הפרבולה $y = x^2 - 13$ עם המעגל $x^2 + y^2 = 25$.

8.4 פרבולה וישרים, תנאי השקה

הפרבולה שמשוואתה קנונית $y^2 = 2px$

33. מצא את משוואת המשיק לפרבולה $y^2 = 12x$ שיוצר זווית בת 45° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x.

34. מצא את משוואות המשיקים לפרבולות שרשומות מימין העוברים דרך הנקודה הרשומה לידה:

א. $y^2 = 12x$, (0,9)

ב. $y^2 = 16x$, (-2,2)

ג. $y^2 = 40x$, (-1,-3)

35. מצא באיזו זווית רואים את הפרבולה $y^2 = 16x$ מהנקודה (-2,2).

36. מצא את משוואת הפרבולה שהישר $y = 2x - 7$ משיק לה.

37. מצא את משוואת המשיק לפרבולה $y^2 = 8x$ שמאונך לישר המחבר את מוקדה של הפרבולה עם הנקודה (0,6).

38. מנקודת החיתוך של מדריך הפרבולה $y^2 = 2px$ עם ציר ה- x יוצאים שני משיקים אליה. מצא את המשוואות של המשיקים האלה.

39. מצא את המרחק הקטן ביותר בין הפרבולה $y^2 = 8x$ לבין הישר $y = x + 4$.

רמז: המרחק הקטן ביותר הוא בין הישר הנתון לבין המשיק לפרבולה המקביל לישר הזה.

40. מצא את משוואת הישר המשיק למעגל $x^2 + y^2 = 0.8$ ולפרבולה העוברת דרך הנקודה (8,4).

41. הוכח כי המשיקים לפרבולה $y^2 = 2px$ העוברים דרך הנקודה (-4,0) נוגעים בפרבולה בשתי נקודות ששיעור ה- x שלהן אינו תלוי ב- p.

42. מצא את מרכז המעגל שרדיוסו $\sqrt{8}$ והמעגל משיק מבחוץ לפרבולה $y^2 = 8x$ בנקודה $(2,4)$.

43. מצא את משוואות שני משיקים לפרבולה $y^2 = 12x$ שהמרחק מהם עד קדקודה של הפרבולה הוא $1.5\sqrt{2}$.

44. מצא את משוואות המשיקים המשותפים למעגל קנוני שרדיוסו $2\sqrt{2}$ ולפרבולה שמוקדה בנקודה $(4,0)$.

45. מצא את משוואת המעגל המשיק מבפנים לפרבולה $y^2 = 13x$ בנקודה $(5,9)$ ונוגע גם בציר ה- x.

הפרבולה מהצורה $y = ax^2 + bx + c$

46. בדוק את המצב ההדדי בין הפרבולה $y = 2x^2$ והישרים הנתונים להלן (חותך בנקודה אחת, חותך בשתי נקודות, משיק, זר). צרף בכל מקרה סקיצה של גרף מתאים.

א. $y = 8$	ג. $y = -6$	ה. $x = 1$	ז. $y = 4x - 2$
ב. $y = 0$	ד. $y = 4x$	ו. $y = 3x - 1$	ח. $y = x - 1$

47. הישר $y = ax - 4$ משיק לפרבולה $y = x^2 - 2x + 5$. חשב את a.

48. א. מצא ישר המקביל לישר $y + 2x = 3$, ומשיק לפרבולה $y = -x^2 + 4x + 1$. מהי נקודת ההשקה?

ב. מצא ישר שניצב לישר $y = x + 3$, ומשיק לפרבולה $y = x^2 - 3x$. מהי נקודת ההשקה?

ג. מצא ישר המקביל לישר $x = 3$, ומשיק לפרבולה $y^2 = -4x$. מהי נקודת ההשקה?

49. נתונים הפרבולה $y = 2x^2$ והישר $y = mx - 2$. עבור אילו ערכי m מתקיים:

א. הישר חותך את הפרבולה בשתי נקודות?

ב. לישר יש נקודה אחת משותפת עם הפרבולה?

ג. הישר אינו חותך את הפרבולה?

ד. מצא משפחה של ישרים שחותכים את הפרבולה בנקודה אחת בלבד, אך אינם משיקים לה, והסבר את תשובתך.

50. א. מצא את המשוואות של המשיקים לפרבולה $y = -x^2 + 1$, העוברים דרך הנקודה $A(-1,4)$, ואת נקודת ההשקה.

ב. רשום משוואה של ישר העובר בנקודה A, חותך את הפרבולה $y = -x^2 + 1$ בנקודה אחת בלבד, ואינו משיק לפרבולה.

51. להלן נתונות פרבולה ומשפחת ישרים. עבור אילו ערכים של הפרמטר הישרים של המשפחה

א. חותכים את הפרבולה בשתי נקודות?

ב. זרים לפרבולה?

ג. משיקים לפרבולה?

ד. חותכים את הפרבולה בנקודה אחת בלבד, אך אינם משיקים לה?

בכל סעיף בחר ערך מתאים של הפרמטר וסרטט גרף מייצג.

הסבר מדוע אינך יכול למצוא ערך מתאים של הפרמטר עבור סעיף ד'.

זכור: מספר נקודות החיתוך הוא כמספר פתרונות מערכת המשוואות המתאימה, ונקבע על פי סימן הדיסקרימיננטה.

הפרבולה ומשפחת הישרים הן:

(1) $y = ax + 1\ ,\ y = 2x^2$

(2) $y = ax + 1\ ,\ y = -x^2 + x$

(3) $y = 4x + b\ ,\ y = 2x^2 - 2$

52*. להלן נתונות פרבולה ומשפחת ישרים. עבור אילו ערכים של הפרמטר הישרים של המשפחה

א. חותכים את הפרבולה בשתי נקודות?

ב. זרים לפרבולה?

ג. משיקים לפרבולה?

ד. חותכים את הפרבולה בנקודה אחת בלבד, אך אינם משיקים לה?

הפרבולה ומשפחת הישרים הן:

(1) $y = 2x + b\ ,\ y^2 = 5x$

(2) $y = ax\ ,\ y^2 = -x$

(3) $y = ax + a\ ,\ y^2 = x$

לווה את כל תשובותיך בגרף מתאים, וציין את ערך הפרמטר שבחרתה בכל מקרה.

53. נתונים הישר $y = 2x - 1$ ומשפחת פרבולות. מצא עבור אילו ערכים של הפרמטר

א. הפרבולות חותכות את הישר בשתי נקודות.

ב. הפרבולות משיקות לישר.

ג. הפרבולות זרות לישר.

ענה על השאלות הנ"ל ולווה את כל תשובותיך בגרף מתאים כאשר משפחת הפרבולות היא:

(1) $y = x^2 - 2x + c$

(2) $y = x^2 - bx + 8$

(3) $y = ax^2 + 2x + 1$

(4) $y^2 = ax$

תרגילי סיכום

54. הנקודה $A(4,1)$ נמצאת בתוך הפרבולה $y^2 = 6x$. דרך A העבירו ישר שחותך את הפרבולה בנקודות B ו- C. מצא את משוואת הישר אם נתון כי A היא אמצע של BC.

55. נתונות פרבולות $y^2 = 5\frac{1}{3}x$ ו- $y = \frac{4}{9}x^2$.

א. מצא את האורך של המיתר המשותף של שתי הפרבולות.

ב. מצא באיזו זווית חותך המיתר המשותף את הישר המחבר את מוקדי הפרבולות.

56. נתונה הפרבולה $y^2 = 2px$ (p חיובי) ונתון ישר שלא מקביל לציר ה- x. הוכח כי אם $p > 2mn$, אז יש שתי נקודות חיתוך לישר ולפרבולה.

57. הנקודה A שייכת לפרבולה $y^2 = 2px$ מתחת לציר ה- x. ידוע כי מרחקה של A מקדקוד הפרבולה הוא $3\sqrt{5}$ ומרחקה ממדריך הפרבולה הוא 6. מצא את A ואת משוואות הפרבולה.

58. נתונה הפרבולה $y^2 = 8x$ והישר $y = mx$, החותך את הפרבולה בנקודות P ו- O. לישר הנתון מעבירים אנך בנקודה O, החותך את הפרבולה בנקודה Q. הוכח שנקודת החיתוך של PQ עם ציר ה- x אינה תלויה ב- m.

59. אחד מקדקודיו של משולש שווה צלעות נמצא בקדקוד הפרבולה $y^2 = 2px$ ושני קדקודיו אחרים מונחים על הפרבולה הזו. הבע באמצעות p את שני הקדקודים האחרים.

60. נתונה הפרבולה $y^2 = 8x$ והישר $y = 2x + n$. הישר חותך את הפרבולה בנקודות P ו- Q, כך שאורך הקטע PQ הוא 10. מצא את n.

61. ישר ששיפועו 2 חותך פרבולה בשתי נקודות (p,2) ו- (q,4). מצא את משוואת הפרבולה.

62. נתונה הפרבולה $y^2 = 16x$.

א. כתוב את משוואת המשיק לפרבולה בנקודה (9,12).

ב. מצא את המעגל שמשוואתו קנונית והוא משיק לישר שמצאת בסעיף א'.

63. נתון ישר $y = 3x$ ונתונה פרבולה $y^2 = 12x$.

א. מצא את השיפועים של הישרים היוצרים זווית בת 45° עם הישר הנתון.

ב. מצא את המשיקים לפרבולה המקבילים לישרים שקיבלת בסעיף א'.

64. הישר $y = 0.6x + 5$ משיק לפרבולה $y^2 = 2px$ בנקודה P.

א. מצא את P.

ב. מצא את משוואת ההיפרבולה שקדקודה הוא במוקד של הפרבולה הנתונה, והיא עוברת דרך הנקודה P.

65. נתונה הפרבולה $y^2 = 16x$. מהנקודה A(-4,6) מעבירים שני ישרים לברבולה המשיקים לה בנקודות B ו- C. הוכח כי הזווית בין המשיקים היא ישרה.

66. מהנקודה (a,9) יוצאים שני משיקים לפרבולה בעלי שיפועים 2 ו- 1.

א. מצא את משוואת הפרבולה.

ב. מצא את נקודות ההשקה.

67. הישר העובר דרך הנקודה (-4,1) משיק באותה הנקודה לפרבולה $y^2 = 20x$ ולמעגל שמרכזו על ציר ה- y .מצא את מרכז המעגל. (הבחן בין שני מקרים)

68. נתון ששיפוע הישר היוצא מנקודה על מדריך הפרבולה $y^2 = 12x$ הוא 0.25. מצא את המשוואה של המשיק השני היוצא מאותה הנקודה על המדריך.

*69. הנקודה F היא מוקד הפרבולה $y^2 = 2px$, הנקודה E כלשהי על הפרבולה. הוכח כי המעגל שקוטרו EF משיק לציר ה- y.

*70. הוכח כי אם $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$ הן שתי נקודות על הפרבולה שהקטע המחבר אותן עובר דרך המוקד שלה, אז $x_1 \cdot x_2 = \frac{p^2}{4}$.

*71. דרך מוקד הפרבולה $y^2 = 2px$ העבירו ישר היוצר עם ציר ה- x זווית בת 60°. הפרבולה חותכת מהישר הזה מיתר, שמתחלק על ידי ציר ה- x לשני חלקים. הוכח כי אורך של החלק הגדול מבין השניים הוא 2p.

תשובות לפרק 8

8.1-8.2 פרבולה כמקום גיאומטרי

1. א. $y^2 = 8x$; ב. $y^2 = -12x$; ג. $x = \frac{y^2}{8} - \frac{7x}{4} + \frac{81}{8}$

2. א. $y^2 = x$; ב. $3y^2 = -4x$; ג. $y^2 = -8x$; ד. $y^2 = -16x$

3. א. $y^2 = 6x$, ב. $y^2 = 9x$, ג. $y^2 = 12x$, ד. $y^2 = 4x$

4. 6 .5 $(9,12)$ .6 $6\sqrt{5}$ .7 $6\sqrt{2}$ .8 $k \le 0.5$ .9 $n<3$ .10 $y^2 = 2x$, $y^2 = 32x$

11. $y^2 = 16x$ .12 $(16,\pm16)$ .13 $\left(3,\pm6\sqrt{2}\right)$ .14 $y = 2x - 2$ .15 $y = -3x + 6$

16. 8.5 .17 $y^2 = 16x$ .18 $y^2 = 24x$ .19 $(2,\pm4)$ .20 א. $y^2 = 36x$, ב. $(4,12)$, $(1,6)$

21. $y^2 = 36x$

8.4 הפרבולה מהצורה $y = ax^2 + bx + c$

22. . א. $y = \frac{1}{8}x^2$; ב. $y = 0.5x^2$; ג. $y = -0.25x^2$; ד. $y = \frac{x^2}{6} - \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$

23. א. $y = 0.25x^2$; ב. $12y = -x^2$; ג. $y = -0.125x^2$; ד. $y = -2.5x^2$;
ה. $y = 0.25x^2 + 2$; ו. $y = \frac{x^2 - 2x + 10}{6}$

24. א. $(0,0.75)$, $y = -0.75$; ב. $(0,-1.25)$, $y = 1.25$; ג. $(0,0.5)$, $y = -0.5$;
ד. $(0,-1)$, $y = 1$; ה. $(0,-1/6)$, $y = 1/6$; ו. $(0,1/3)$, $y = -1/3$; ז. $(1/2,0)$, $x = -1/2$;
ח. $(-1.25,0)$, $x = 1.25$; ט. $(1,0)$, $x = -1$; י. $(-1/2,0)$, $x = 1/2$; יא. $(1/3,0)$, $x = -1/3$;
יב. $(-2/3,0)$, $x = 2/3$

25. $y = x^2 - 5x + 6$ .27 $\sqrt{2}$ .28 א. שתיים ; ב. שתיים .29 $y = \frac{1}{3}x^2$ .30 12

31. 25 .32 49

8.4 פרבולה וישרים, תנאי השקה

הפרבולה שמשוואתה קנונית $y^2 = 2px$

33. $y = x + 3$

34. א. $x - 3y + 27 = 0$, $x = 0$ ב. $y = x + 4$, $y = -2x - 2$ ג. $y = 5x + 2, y = -2x - 5$.

35. 71.56° 36. $y^2 = -36x$ 37. $x - 3y + 18 = 0$ 38. $y = \pm x \pm \frac{p}{2}$ 39. $\sqrt{2}$

40. $y = \pm 0.5x \pm 1$ 42. $(0,6)$ 43. $y = \pm x \pm 3$ 44. $x \pm y + 4 = 0$

45. $(x-8)^2 + (y-5)^2 = 25$

הפרבולה מהצורה $y = ax^2 + bx + c$

46. א. חותך ב-$(2,8)$ ו-$(-2,8)$; ב. משיק ב-$(0,0)$; ג. זר ; ד. חותך ב-$(0,0)$ ו-$(2,8)$;

ה. חותך ב-$(1,2)$; ו. חותך ב-$(1,2)$ ו-$(0.5,0.5)$; ז. משיק ב-$(1,2)$; ח. זר

47. 4 או -8 48. א. $y = -2x + 10$, $(3,4)$; ב. $x + y + 1 = 0$, $(1,-2)$; ג. ציר ה-y , הראשית

49. א. $|m| > 4$; ב. $|m| = 4$; ג. $|m| < 4$; ד. $x = c$

50. א. $y = 6x + 10$, $(-3,-8)$; $y = -2x + 2$, $(1,0)$; ב. $x = -1$

51. (1) א. כל a ; ב., ג., ד. אין ; (2) א. $a > 3$ או $a < -1$; ב. $-1 < a < 3$; ג. $a = 3 , -1$; ד. אין ;

(3) ש. $b > -4$; ב. $b < -4$; ג. $b = -4$; ד. אין

52. (1) א. $b < \frac{5}{8}$; ב. $b > \frac{5}{8}$; ג. $b = \frac{5}{8}$; ד. אין ; (2) א. $a \neq 0$; ב. אין ; ג. אין ; ד. $a = 0$;

(3) א. $0 < |a| < 0.5$; ב. $a > 0.5$ או $a < -0.5$; ג. $a = \pm 0.5$; ד. $a = 0$

53. (1) א. $c < 3$; ב. $c = 3$; ג. $c > 3$; (2) א. $b > 4$ או $b < -8$; ב. $b = -8 , 4$; ג. $-8 < b < 4$;

(3) א. $a < 0$; ב. אין ; ג. $a > 0$; (4) א. $a > 0$ או $a < -8$; ב. $a = -8$; ג. $-8 < a < 0$

תרגילי סיכום

54. $y = 3x - 11$ 55. א. 5 ב. 76° 57. $y^2 = 4x$, $(5,-\sqrt{20})$ ו- $y^2 = 12x$, $(3,-6)$

59. $\left(6p, \pm 2p\sqrt{3}\right)$ 60. -4 61. $y^2 = 4x$ 62. א. $2x - 3y + 18 = 0$ ב. $13x^2 + 13y^2 = 324$

63. א. 0.5, -2 ב. $x - 2y + 12 = 0$, $4x + 2y + 3 = 0$ 64. א. $\left(8\frac{1}{3}, 10\right)$

ב. $225x^2 - 136y^2 = 2025$

66. א. $y^2 = 24x$ ב. $(6,12)$, $(1.5,6)$ 67. $(0,15)$ ו- $(0,-10.56)$ 68. $16x + 4y + 3 = 0$

פרק 9: מקומות גיאומטריים

בפרקים קודמים כבר הכרנו את המושג "מקום גיאומטרי" שהוא **קבוצה של נקודות המכילה את כל הנקודות המקיימות תכונה מסוימת, ורק אותן**. כלומר, נקודה שייכת לקבוצה אם ורק אם היא מקיימת את התכונה. התייחסנו למקרים מיוחדים כגון: מעגל, אליפסה, היפרבולה ופרבולה. כל אחת מהצורות האלו הגדרנו ותיארנו כמקום גיאומטרי.
הפרק הנוכחי יסכם את לימודי הגיאומטריה האנליטית ובו נעסוק במקומות גיאומטריים בצורה רחבה יותר וכמובן נצטרך להשתמש בכל האמצעים המתמטיים שנרכשו עד כה.
כמה הנחיות כלליות:

א. בדרך כלל מתחילים פתרון של תרגיל מסימון הנקודה הכללית על המקום הגיאומטרי ב- (x,y) או $\left(x_1,y_1\right)$

ב. משתמשים בנתוני התרגיל לצורך קבלת המשוואה המקשרת בין x_1 ל- y_1 (או x ו- y).

ג. דואגים שכל המעברים ממשוואה אחת למשוואה הבאה אחריה יהיו שקולים, זאת אומרת יהיו תקפים לשני הכיוונים. כך נוכל להבטיח שמשוואה שתתקבל בסוף תתאר את כל הנקודות ורק אותן נקודות בעלות התכונה המבוקשת.

ד. מזהים את העקומה שהתקבלה בסעיף ג' .

לצורך נוחות, נחלק את הפרק לכמה סעיפים:

9.1 משוואות ישרים

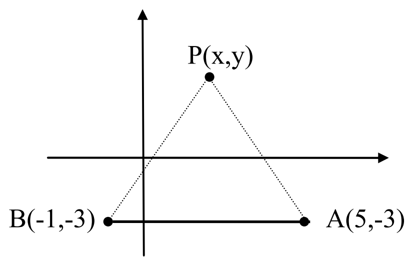
בלימודי הגיאומטריה הכרנו את המשפט: אנך אמצעי לקטע הוא המקום הגיאומטרי של הנקודות הנמצאות במרחק שווה מקצוות הקטע. פירוש משפט זה הוא שכל נקודה הנמצאת במרחק שווה מקצוות הקטע נמצאת על האנך האמצעי, ולהפך, כל נקודה על האנך האמצעי נמצאת במרחק שווה מקצוות הקטע. נציג כאן הוכחה של משפט זה על ידי שימוש בטכניקות של גיאומטריה אנליטית, ונתחיל בדוגמאות.

<u>דוגמאות</u>

א. מצא את המקום הגיאומטרי של הנקודות במישור הנמצאות במרחק שווה מהנקודות $A(5,-3)$ ו- $B(-1,-3)$.

<u>פתרון</u>

תהי $P(x,y)$ נקודה הנמצאת במרחק שווה מ-A ומ-B.



$$PA = PB$$

לכן גם

$$PA^2 = PB^2$$

$$\left(x-5\right)^2+\left(y+3\right)^2=(x+1)^2+(y+3)^2$$

$$x^2-10x+25=x^2+2x+1$$

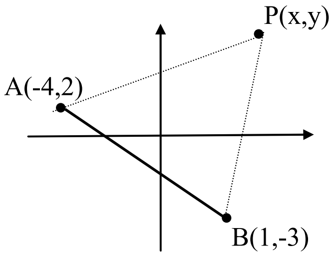
$$12x=24$$

$$x=2$$

הוכחנו: אם נקודה P נמצאת במרחק שווה מהנקודות הנתונות A ו-B, שיעור ה- x שלה הוא 2. כדי להשלים את ההוכחה ש $x = 2$ הוא המקום הגיאומטרי הנדרש יש להוכיח גם את הכיוון ההפוך, כלומר כל נקודה ששיעור ה-x שלה הוא 2 נמצאת במרחק שווה מהנקודות A ו-B. לשם כך מספיק להפוך את כיוון ההוכחה ולקרוא אותה מהסוף להתחלה.

<u>תרגיל 1</u>: הוכח כי הישר שמשוואתו $x = 2$ הוא האנך האמצעי של הקטע AB, שקצותיו הם A(5,-3) ו- B(-1,-3).

<u>תרגיל 2</u>: מצא את המקום הגיאומטרי של הנקודות הנמצאות במרחק שווה מהנקודות A(-4,2) ו- B(1,-3).



<u>פתרון</u>

נסמן ב-P(x,y) נקודה המקיימת $PA = PB$.

$$\sqrt{(x+4)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2}$$

נעלה בריבוע את שני אגפי המשוואה ונפשט

$$x^2 + 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9$$

$$8x - 4y + 20 = -2x + 6y + 10$$

$$-10y = -10x - 10$$

$$y = x + 1$$

מסקנה: אם $PA = PB$ כי אז שיעורי הנקודה $P(x, y)$ מקיימים את התנאי $y = x + 1$, כלומר P נמצאת על הישר $y = x + 1$.

גם הטענה ההפוכה נכונה: כל נקודה על הישר $y = x + 1$ נמצאת במרחק שווה מהנקודות A ו-B. ההוכחה לכך מתקבלת מההוכחה האחרונה, אם נלך בה מהסוף להתחלה.

נסכם: הישר שמשוואתו $y = x + 1$ הוא המקום הגיאומטרי של הנקודות במישור הנמצאות במרחק שווה מהנקודות A(-4,2) ו- B(1,-3).

הערה: שים לב, כדי להראות שהישר $y = x + 1$ הוא המקום הגיאומטרי המבוקש, יש להוכיח את **שני** הכיוונים. כלומר, צריך להראות כי הישר $y = x + 1$ מכיל את כל הנקודות המקיימות את התנאי $PA = PB$, **ורק** אותן.

<u>תרגיל 3</u>

הוכח כי הישר $y = x + 1$ הוא האנך האמצעי של הקטע AB, שקצותיו הם A(-4,2) ו-B(1,-3).

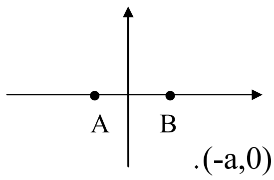
הדרכה: למעשה עליך להוכיח רק כי הישר $y = x + 1$ מאונך לקטע AB. נקודת החיתוך שלהם חייבת להיות אמצע הקטע, כי היא שייכת למקום הגיאומטרי של הנקודות הנמצאות במרחק שווה מקצות הקטע.

הוכחנו: המקום הגיאומטרי של הנקודות הנמצאות במרחק שווה מהנקודות A(-4,2) ו-B(1,-3) הוא האנך האמצעי לקטע AB.

נחזור למקרה הכללי.

נתון קטע AB במישור ועלינו למצוא את המקום הגיאומטרי של הנקודות הנמצאות במרחק שווה משני קצותיו. נבחר מערכת צירים נוחה לפתרון הבעיה.

הערה: אנו רשאים לבחור כל מערכת צירים כי התכונות הגיאומטריות לא תלויות במערכת צירים מסוימת. אם מזיזים את מערכת הצירים הנתונה נשמרים: שוויון של קטעים, ניצבות של ישרים, מרחקים, זוויות וכדי.



נבחר את הישר AB כציר ה-x, ואת ציר ה-y כישר הניצב לקטע AB וחוצה אותו (כלומר ציר y הוא האנך האמצעי של הקטע AB).

במערכת הצירים שבנינו, אם שיעורי הנקודה B הם (a,0), שיעורי A הם (-a,0).

תהי P(x,y) נקודה המקיימת את התנאי:

$$PA = PB$$

$$PA = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$$

$$PB = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$

לכן $$\sqrt{(x+a)^2 + y^2} = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$

נעלה בריבוע את שני אגפי המשוואה, נפתח סוגרים ונפשט

$$x^2 + 2ax + a^2 + y^2 = x^2 - 2ax + a^2 + y^2$$

$$4ax = 0$$

$$x = 0$$

($a \neq 0$, כי A ו-B נקודות שונות.)

בזה הוכחנו כי אם הנקודה P מקיימת: $PA = PB$ כי אז שיעור ה-x שלה הוא 0, לכן P נמצאת על ציר ה-y.

בחרנו את מערכת הצירים כך שציר ה-y הוא האנך האמצעי של הקטע AB ולכן הוכחנו למעשה כי כל נקודה במישור הנמצאת במרחק שווה מקצות קטע, מונחת על האנך האמצעי של הקטע.

עתה יש להוכיח את הכיוון ההפוך. נבחר נקודה כלשהי Q(0,q) על ציר y ונחשב את מרחקיה מ-A ומ-B:

$$QA = \sqrt{(0+a)^2 + (q-0)^2} = \sqrt{a^2 + q^2}$$

$$QB = \sqrt{(0-a)^2 + (q-0)^2} = \sqrt{a^2 + q^2}$$

לכן $QA = QB$

הראינו כי כל נקודה על ציר ה-y נמצאת במרחק שווה מ-A ומ-B. כלומר, כל נקודה על האנך האמצעי של קטע נמצאת במרחק שווה מקצות הקטע.

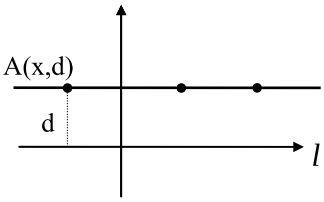
משני כיווני ההוכחה מקבלים :

האנך האמצעי של קטע הוא המקום הגיאומטרי של הנקודות הנמצאות במרחק שווה מקצות הקטע.

נציג להלן דוגמאות נוספות של מקומות גיאומטריים שונים.

א. מהו המקום הגיאומטרי של הנקודות הנמצאות במרחק נתון מישר, ומצדו האחד?

<u>פתרון</u>

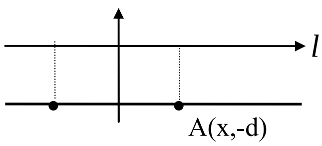


נתון ישר l במישור. נבנה מערכת צירים נוחה לפתרון הבעיה.

הישר l ישמש כציר ה-x וציר ה-y יהיה ניצב ל- l.

מרחק נקודה מישר הוא אורך האנך לישר העובר דרך הנקודה.

לכן כל הנקודות הנמצאות מעל לציר ה-x, ובמרחק d ממנו שיעור ה-y שלהן הוא d. לכן כל הנקודות נמצאות על הישר שמשוואתו $y = d$.



כל הנקודות הנמצאות מתחת לציר ה- x, ובמרחק d ממנו, שיעור ה-y שלהן הוא d-, לכן הן נמצאות על הישר שמשוואתו $y = -d$.

בשני המקרים כל הנקודות נמצאת על ישר המקביל לציר ה- x.

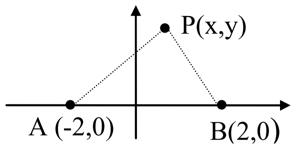
ולהפך : כל הנקודות הנמצאות על ישר המקביל לציר ה- x, נמצאות על ישר שמשוואתו $y = k$. שיעורי ה-y שלהן שווים ל-k, ולכן מרחקן מציר ה-x הוא $|k|$ (ערך מוחלט, כי מרחק מוגדר כמספר חיובי).

נסכם : כל הנקודות הנמצאות במרחק נתון מישר נתון, ומצדו האחד של הישר, מונחות על מקביל לישר. ולהפך, כל הנקודות המונחות על מקביל לישר, נמצאות במרחק שווה ממנו. לכן ישר המקביל לישר נתון הוא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות הנמצאות במרחק נתון מהישר, ומצדו האחד.

הערה : הוכחנו כאן בטכניקות של גיאומטריה אנליטית משפט גיאומטרי מוכר. כדאי לשים לב לפשטות היחסית של ההוכחה האנליטית לעומת ההוכחה הגיאומטרית. כאן נחסך הצורך בחפיפות משולשים והשוואת צורות גיאומטריות ואפשר להסתפק בתכונות אלגבריות של שיעורי נקודות.

ב. נתונות הנקודות $A(-2,0)$ ו $B(2,0)$. מצא את המקום הגיאומטרי של הנקודות $P(x,y)$ המקיימות $AP^2 - BP^2 = 4$.

פתרון



$$AP^2 = (x+2)^2 + y^2$$
$$BP^2 = (x-2)^2 + y^2$$
$$AP^2 - BP^2 = 4$$
$$(x+2)^2 + y^2 - \left[(x-2)^2 + y^2\right] = 4$$
$$8x = 4$$
$$x = \frac{1}{2}$$

שיעור ה- x של כל נקודה המקיימת את התנאי הוא $x = \frac{1}{2}$.

כמו במקרים הקודמים, גם כאן אפשר לקבל את הכיוון ההפוך על-ידי קריאת ההוכחה מהסוף להתחלה. נראה כאן דרך אחרת, ברורה יותר.

נבחר נקודה Q ששיעור ה-x שלה הוא $\frac{1}{2}$ ונסמנה $Q(\frac{1}{2}, q)$

$$AQ^2 - BQ^2 = \left(\frac{1}{2}+2\right)^2 + (q-0)^2 - \left[\left(\frac{1}{2}-2\right)^2 + (q-0)^2\right] = \left(2\frac{1}{2}\right)^2 + q^2 - \left(-1\frac{1}{2}\right)^2 - q^2 = 6\frac{1}{4} - 2\frac{1}{4} = 4$$

לכן Q מקיימת את התנאי.

הוכחנו: הישר שמשוואתו $x = \frac{1}{2}$ הוא המקום הגיאומטרי של הנקודות שהפרש ריבועי מרחקיהן מהנקודות $A(-2,0)$ ו $B(2,0)$ שווה ל-4.

ג. הכללה של ב׳

נתונות במישור שתי נקודות A ו-B. מצא את המקום הגיאומטרי של הנקודות שהפרש ריבועי מרחקיהן מ-A ומ-B הוא מספר קבוע.

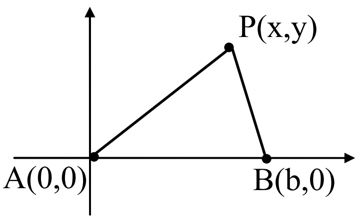
פתרון

נבחר מערכת צירים שבה הישר AB מונח על ציר x והישר הניצב לו, ועובר דרך A הוא ציר y.

במערכת צירים זו שיעורי הנקודות הנתונות הם: $A(0,0)$ ו- $B(b,0)$.

תהי $P(x,y)$ נקודה המקיימת את התנאי

$PA^2 - PB^2 = c$ (c מספר קבוע).



$$PA^2 = (x-0)^2 + (y-0)^2 = x^2 + y^2$$
$$PB^2 = (x-b)^2 + (y-0)^2 = x^2 - 2bx + b^2 + y^2$$
$$PB^2 - PA^2 = (x^2 + y^2) - (x^2 - 2bx + b^2 + y^2) = 2bx - b^2$$

מהתנאי $PA^2 - PB^2 = 2bx - b^2 = c$

מקבלים על-ידי חילוק ב- b ($b \neq 0$ כי A ו-B שתי נקודות שונות) $x = \frac{b}{2} + \frac{c}{2b}$.

מסקנה: אם P נקודה המקיימת $PA^2 - PB^2 = c$ כי אז היא נמצאת על הישר $x = \frac{b}{2} + \frac{c}{2b}$.

גם הכיוון ההפוך נכון כי אפשר לקרוא את ההוכחה מהסוף להתחלה.

לכן הישר $x = \frac{b}{2} + \frac{c}{2b}$ הוא המקום הגיאומטרי של הנקודות P המקיימות $PA^2 - PB^2 = c$.

9.2 משוואות מעגלים

מעגל אפולוניוס

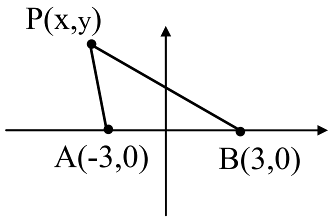
מהו המקום הגיאומטרי של הנקודות שיחס מרחקיהן משתי נקודות נתונות הוא קבוע?

אם היחס הקבוע הוא 1 כי אז המרחקים שווים, וכבר ראינו כי המקום הגיאומטרי הזה הוא האנך האמצעי של הקטע המחבר את הנקודות. לכן נטפל במקרה שהיחס שונה מ-1. נתחיל בדוגמה מספרית.

<u>דוגמה</u>

מהו המקום הגיאומטרי של הנקודות שיחס מרחקיהן מהנקודות A(-3,0) ו- B(3,0) הוא 1:2?

<u>פתרון</u>



תהי P(x,y) נקודה המקיימת את התנאי $\frac{PA}{PB} = \frac{1}{2}$

נרשום את התנאי בצורה $(2PA)^2 = PB^2$

$PA^2 = (x + 3)^2 + y^2$

$PB^2 = (x - 3)^2 + y^2$

נציב ונקבל $4\left((x+3)^2 + y^2\right) = (x-3)^2 + y^2$

לאחר פתיחת סוגריים, כינוס איברים וצמצום מקבלים את המשוואה

$x^2 + 10x + y^2 = -9$

ועל-ידי השלמה לריבוע $(x + 5)^2 + y^2 = 16$

קיבלנו משוואה של מעגל שרדיוסו 4 ומרכזו הנקודה (-5,0).

מעגל זה נקרא **מעגל אפולוניוס** על שם המתמטיקאי היווני אפולוניוס, שחי במאה השנייה לפני הספירה (נרחיב עליו את הדיבור בסוף סעיף).

הוכחנו, אם כן, כי אם יחס המרחקים של נקודה P מהנקודות A(-3,0) ו-B(3,0) הוא 1:2 כי אז הנקודה P נמצאת על המעגל שמשוואתו היא $(x + 5)^2 + y^2 = 16$.

מהוכחה זו נובע כי גם הטענה ההפוכה נכונה: אם נקודה P נמצאת על המעגל $(x + 5)^2 + y^2 = 16$ הרי שיחס מרחקיה מהנקודות A(-3,0) ו-B(3,0) הוא 1:2. הופכים את כיוון ההוכחה וקוראים אותה מהסוף להתחלה (המשוואות שקולות, לכן הדבר אפשרי).

נסכם: המקום הגיאומטרי של הנקודות שיחס מרחקיהן מהנקודות A(-3,0) ו-B(3,0) הוא 1:2, הוא מעגל סביב הנקודה (-5,0) שרדיוסו שווה ל-4.

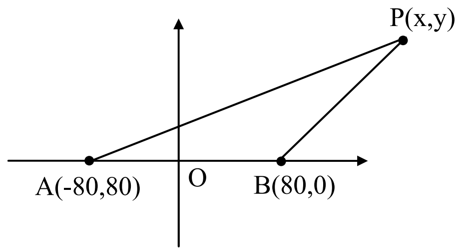
לשם המחשה נציג בעיה כלכלית.

בערים A ו-B שהמרחק ביניהם 160 ק״מ, מצויים שני בתי חרושת המייצרים אותו מוצר באותו מחיר. הוצאות ההובלה חלות על הקונה. היצרן בעיר A גובה עבור הובלת המוצר 6 ש״ח לק״מ והיצרן בעיר B גובה 10 ש״ח לק״מ.

היכן נמצאים הלקוחות שיעדיפו לקנות את המוצר מהעיר A והיכן נמצאים הלקוחות שיעדיפו לקנות מ-B?

<u>פתרון</u>

הלקוח יבחר את מקום הקניה על-פי מחיר ההובלה בלבד, כי מחיר המוצר בשני בתי החרושת הוא זהה.



נבנה מערכת צירים שבה הישר AB משמש כציר ה-x וציר ה-y הוא האנך האמצעי לקטע AB.

במערכת צירים זאת שיעורי הנקודות A ו-B הם: $A(-80,0)$, $B(80,0)$.

נמצא את מקום הלקוחות שאין להם העדפה לקנות ב-A או ב-B.

נסמן ב-$P(x,y)$ את מיקומו של לקוח כזה במערכת הצירים. בשבילו, מחיר ההובלה משני בתי החרושת זהה כלומר: $PA\cdot 6 = PB\cdot 10$

(מחיר ההובלה שווה למרחק הלקוח מבית החרושת כפול במחיר ההובלה לקילומטר.)

יחס המרחקים הוא $\frac{PA}{PB} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

$3PA = 5PB$

נעלה בריבוע את שני האגפים $9PA^2 = 25PB^2$

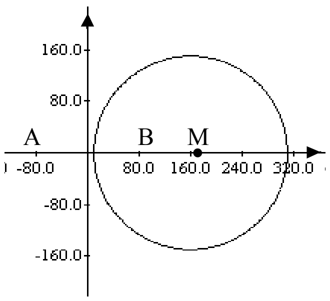
$PB^2 = (x - 80)^2 + y^2 \quad , \quad PA^2 = (x + 80)^2 + y^2$

נציב במשוואה $9[(x + 80)^2 + y^2] = 25[(x - 80)^2 + y^2]$

נפשט אותה $x^2 - 340x + y^2 = -6400$

נשלים לריבוע $x^2 - 340x + 170^2 + y^2 = -6400 + 170^2$

ונקבל $(x - 170)^2 + y^2 = 150^2$



זו משוואה של מעגל שמרכזו בנקודה $(170,0)$ ורדיוסו 150.

פירוש הדבר כי הלקוחות הנמצאים על המעגל ישלמו מחיר שווה עבור הובלת המוצר מ-A ומ-B . לכן אין להם העדפה בבחירת מקום הרכישה. הלקוחות הנמצאים בתוך המעגל יעדיפו לרכוש את המוצר ב- B כי למרות שמחיר ההובלה לקילומטר גבוה יותר, המרחק יותר קצר.

ואילו הלקוחות הנמצאים מחוץ למעגל יעדיפו לקנות ב- A.

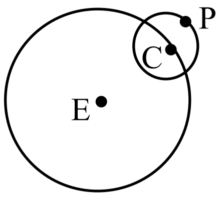
שים לב לעובדה כי גם ללקוחות הנמצאים מחוץ למעגל ומימין ל- B עדיף לקנות ב-A למרות שמרחקם מ- B קטן יותר. האם תוכל להסביר זאת?

לסיום נביא מספר נקודות ציון בתולדות חייו ופועלו של אפולוניוס ששמו קשור קשר אמיץ בהתפתחות הגיאומטריה האנליטית.

אפולוניוס (Apollonius)

אפולוניוס נולד בעיר פרגה (Perga) שבאסיה הקטנה, והתחנך באלכסנדריה, בתקופה שבה החשיבה והפיתוח המתמטיים של העולם המערבי התרכזו בעיר זו. ההערכה היא כי אפולוניוס חי בין השנים 262 עד 190 לפני הספירה. להלן מספר נושאים בהם הוא עסק.

- אפולוניוס פיתח דרכים מהירות לביצוע חישובים שונים. מייחסים לו את הקירוב 3.1416 למספר π.
- אפולוניוס עסק בחקר מקומות גיאומטריים שונים. המפורסם שבהם הוא המעגל הנקרא על שמו "מעגל אפולוניוס" שהוא המקום הגיאומטרי של הנקודות שיחס מרחקיהן משתי נקודות נתונות הוא קבוע.
- בעיות גיאומטריות בעלות משמעות אלגברית. לדוגמה: העברת קו ישר דרך נקודה נתונה, החותך שני ישרים נתונים, כך שיחס הקטעים בין נקודות החיתוך ובין נקודות נתונות על כל ישר הוא יחס קבוע. בעיה זו שקולה לפתרון המשוואה $ax^2 - x^2 = bc$.
- תיאור תנועת כוכבי הלכת. המודל של אפולוניוס היה שכוכבי הלכת נעים סביב כדור הארץ בצורה שבה כוכב הלכת P נע על מעגל קטן שמרכזו C, כאשר המרכז C נע על מעגל גדול סביב כדור הארץ E. (רק במאה ה- 16 לספירה שונתה תפיסה זו. האסטרונום הגרמני קופרניקוס (1543 – 1473) טען כי כדור הארץ ושאר כוכבי הלכת מסתובבים סביב השמש.)



תרומתו העיקרית של אפולוניוס להיסטוריה של המתמטיקה הייתה בדיקת תכונותיהן של עקומות מישוריות. תוצאות מחקריו בנושא זה מרוכזות בספר "תורת החרוטים". העקומות מתקבלות על-ידי חיתוך של חרוט במישורים.

החתכים המתקבלים הם: מעגל, אליפסה, פרבולה והיפרבולה. העקומות השונות מתקבלות על-ידי שינוי זווית הנטייה של המישור החותך. נושא זה עניין מתמטיקאים נוספים בתקופת אפולוניוס. תרומתו של אפולוניוס התבטאה בכך שהוא הראה כי כל העקומות התקבלו מחיתוך אותו חרוט, ושהחרוט לא חייב להיות ישר, וכן בהתייחסו לחרוט הכפול. הוא הציג דרכים לבניית משיקים לעקומות אלה תוך הסתמכות על החלוקה ההרמונית, וחקר את תכונותיהם של משיקים ושל נורמלים. שיטות המחקר של אפולוניוס את חתכי החרוט דומות מאד לשיטות המקובלות בגישה המודרנית. בזכותן מחקריו נחשבים לגיאומטריה אנליטית שהקדימה את זו של דקרט ב- 1800 שנים.

מעגל כללי

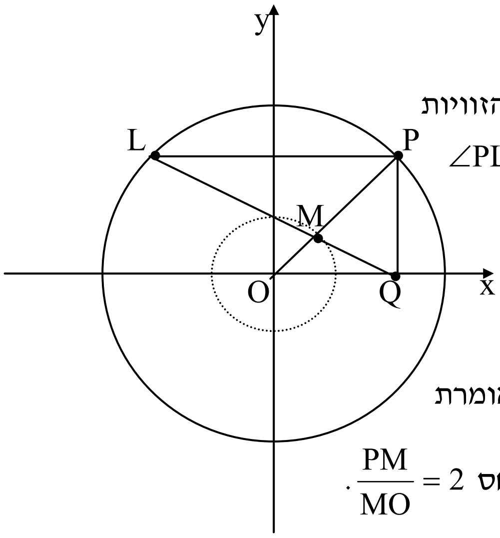
בסעיף זה כמו בסעיפים הבאים נראה כמה דוגמאות לפתרון של תרגילים שיעזרו לפתור את התרגילים המסכמים בסוף הפרק.

<u>תרגיל 1</u>

מהנקודה P על היקף המעגל $x^2 + y^2 = 9$ מעבירים ישר המאונך לציר ה- x שחותך את הציר בנקודה Q, וישר מאונך לציר ה- y שחותך את המעגל בנקודה L. מצא את המקום הגיאומטרי של מפגש הישר QL עם הישר OP (O ראשית הצירים)

פתרון

ראשית, נציין כי קיימות אפשרויות רבות לפתרון התרגיל. אנו מציעים כאן פתרון המבוסס על שימוש במשפטים שלמדנו בגיאומטריה של מישור.



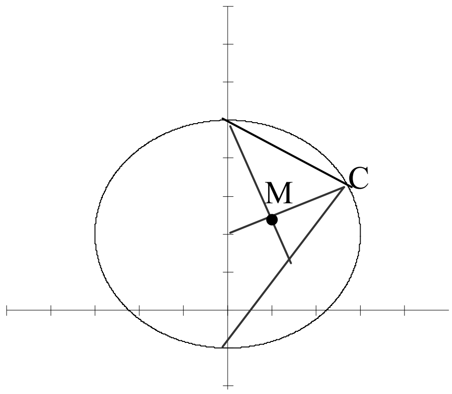
נסמן ב- $M(x_1, y_1)$ נקודה כללית על המקום הגיאומטרי המבוקש. מתקיים שוויון של הזוויות הבאות: $\angle MOQ = \angle MPL$ ו- גם $\angle PLM = \angle MQO$ (זוויות מתחלפות שוות בין ישרים מקבילים, ראה סרטוט). לכן $\Delta QMO \sim \Delta LMP$ לפי משפט דמיון (ז.ז.) . כמו כן $PL = 2|x_P|$ (ציר ה-y אנך ממרכז המעגל למיתר PL ולכן חוצה אותו), זאת אומרת יחס הדמיון הוא $2 = \frac{|2x_P|}{|x_P|} = \frac{LP}{OQ}$. מכאן גם היחס $2 = \frac{PM}{MO}$.

לפיכך, הנקודה M מחלקת את הקטע OP ביחס 1:2 ולכן שיעורי הנקודה P יהיו $P(3x_1, 3y_1)$. נציב את שיעורי הנקודה P במשוואת המעגל ונקבל את המשוואה הבאה: $(3x_1)^2 + (3y_1)^2 = 9$. לסיכום, המקום הגיאומטרי המבוקש מתואר על ידי המשוואה $x^2 + y^2 = 1$ והוא מעגל (הקו המקווקו בסרטוט) .

תרגיל 2

מצאו את המקום הגיאומטרי של מרכזי הכובד של כל המשולשים החסומים במעגל $x^2 + (y-2)^2 = 9$, כך שצלע אחת של המשולש מתלכדת עם הקוטר של המעגל הנמצא על ציר ה- y.

פתרון



ממשוואת המעגל קל לראות כי מרכזו נמצא בנקודה (0,2) ורדיוסו 3. לכן ברור כי קדקודיו של המשולש הנמצאים על ציר ה-y הם בנקודות (0,5) ו- (0,-1). נסמן ב- $M(x_1, y_1)$ את הנקודה הכללית על מרכז הכובד. כפי שלמדנו בפרק 3.2,

מרכז הכובד ניתן לביטוי על ידי שיעורי הקדקודים באופן הבא: $x_1 = \frac{0 + 0 + x_C}{3}$ ו- $y_1 = \frac{-1 + 5 + y_C}{3}$. זאת אומרת $x_C = 3x_1$ ו- $y_C = 3y_1 - 4$. הנקודה C נמצאת על המעגל הנתון ולכן שיעוריה מקיימים את משוואתו של המעגל: $(3x_1)^2 + (3y_1 - 4)^2 = 9$ ומכאן משוואתו של המקום הגיאומטרי היא $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$. משוואה זו מתארת מעגל.

9.3 משוואות אליפסה, היפרבולה ופרבולה

בסעיף זה נתייחס לאליפסות , היפרבולות ופרבולות שמשוואותיהן קנוניות כפי שלמדנו בפרקים קודמים.

אליפסה

<u>תרגיל 1</u>

מצאו את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שהמרחק ביניהן לבין הנקודה $(2,0)$ הוא מחצית מרחקיהן מהישר $x = 8$.

<u>פתרון</u>

נסמן ב- $M(x,y)$ את הנקודה הכללית על המקום הגיאומטרי הרצוי. המרחק בינה לבין הישר $x = 8$ הוא $|x-8|$ ולכן המשוואה שמתארת את המקום הגיאומטרי היא:

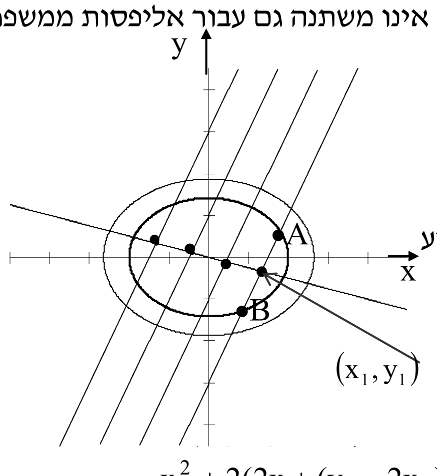
$\sqrt{(x-2)^2+y^2} = \frac{1}{2}|x-8|$. שני אגפים של המשוואה הם חיוביים ולכן העלאה בריבוע מביאה אותנו למשוואה שקולה: $x^2-4x+4+y^2 = \frac{1}{4}(x^2-16x+64)$ ולאחר כינוס איברים דומים מקבלים אליפסה שמשוואתה היא $3x^2+4y^2 = 48$.

<u>הערה</u>: בתרגיל אנו רואים שאליפסה יכולה להתקבל כמקום גיאומטרי המוגדר באופן שונה ממה שלמדנו בפרק 6.

<u>תרגיל 2</u>

א. מצא את המקום הגיאומטרי של אמצעי המיתרים באליפסה $x^2+2y^2 = 4$ שהשיפוע שלהם הוא 2.

ב. הסבר מדוע המקום הגיאומטרי שקיבלנו בסעיף א׳ אינו משתנה גם עבור אליפסות ממשפחה המוגדרת על ידי המשוואה: $x^2+2y^2 = a^2$.



<u>פתרון</u>

א. נסמן ב- $M(x_1, y_1)$ נקודה כללית על המקום הגיאומטרי. משוואת הישר העובר דרכה ובעל שיפוע 2 היא $y-y_1 = 2(x-x_1)$ או בצורה מפורשת $y = 2x+(y_1-2x_1)$. על מנת לקבוע את קצות המיתר המונח על ישר זה נציב את ה- y מהמשוואה המפורשת במשוואת האליפסה הנתונה. נקבל $x^2+2(2x+(y_1-2x_1))^2 = 4$.

לאחר סידור של המשוואה הריבועית מקבלים את המשוואה

$9x^2+8(y-2x_1)x+2(y-2x_1)^2-4=0$. פתרונות משוואה זו נותנים את שיעורי ה-x של הנקודות A ו-B שהן קצות המיתר במונחים של x_1 ו- y_1. אולם אין צורך לפתור את המשוואה.

על פי משפט ויאטה: $x_A + x_B = -\frac{8(y_1 - 2x_1)}{9}$. מצד שני x_1 הוא ממוצע של שיעורי ה- x של

קצוות המיתר ולכן $x_1 = -\frac{8(y_1 - 2x_1)}{2 \cdot 9}$ ומכאן $x_1 + 4y_1 = 0$. המקום הגיאומטרי המבוקש הוא

קו ישר שמשוואתו $y = -0.25x$ (ראה סרטוט).

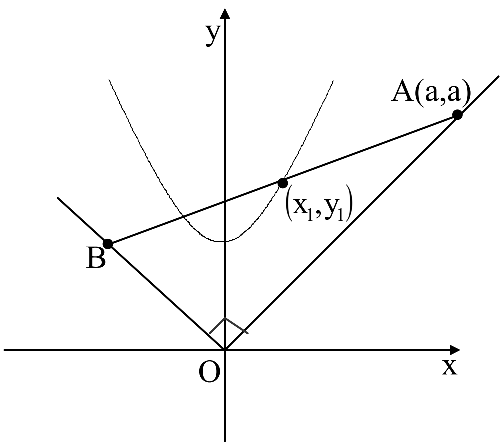
ב. על מנת להוכיח שהמקום הגיאומטרי נא ישתנה לכל משפחת האליפסות הנתונות נצטרך לעבור
על פתרון חלק א׳ ולראות שכל השלבים אינם תלויים ב- 4 המופיע בחלק הימני של משוואת
האליפסה. אם נחליף את 4 ב- a^2 ונחזור שוב על כל הדרך מהתחלה נקבל כמובן אותה משוואה.

היפרבולה

<u>תרגיל 1</u>

נתון משולש ישר זווית OAB, שאחד מקדקודיו הוא O(0,0) והשניים האחרים A ו- B נמצאים על הישרים $y = x$ ו- $y = -x$ בהתאמה. ידוע כי הנקודה A נמצאת ברביע הראשון והנקודה B ברביע השני. מהו המקום הגיאומטרי של אמצעי היתר של המשולשים AOB אשר שטחם הוא 25 יחידות ריבועיות.

<u>פתרון</u>



נסמן ב- (x_1, y_1) נקודה כללית על המקום הגיאומטרי וב- ב- (a,a) שיעורי הנקודה A.
על פי נוסחת אמצע קטע נקבל שהנקודה B היא $(2x_1 - a, 2y_1 - a)$ (בדקו זאת!). נתון כי הנקודה B נמצאת על הישר $y = -x$, זאת אומרת
$-(2x_1 - a) = 2y_1 - a$ כלומר $x_1 + y_1 = a$.
כדי להשלים את הפתרון נשאר רק להביע את a באמצעות x_1 ו- y_1 מהנתון השני.

כעת נשתמש בנתון נוסף ששטח המשולש חייב להיות 25, כלומר $25 = \frac{OB \cdot OA}{2}$, או

$OB \cdot OA = 50$. אורך הקטע OA הוא $a\sqrt{2}$ (ללא ערך מוחלט מכיוון שהנקודה A ברביע

הראשון), ואורך הקטע OB שווה ל- $(a - 2x_1)\sqrt{2}$ מכיוון שהנקודה B ברביע השני. לכן

$a\sqrt{2} \cdot (a - 2x_1)\sqrt{2} = 50$, כלומר $a^2 - 2x_1 a - 25 = 0$. כרגע נציב את $x_1 + y_1$ במקום a

ולאחר כינוס איברים דומים נקבל את המקום הגיאומטרי הדרוש והוא $y_1{}^2 - x_1{}^2 = 25$.

בפרק 7 למדנו כי הצורה המתקבלת ממשוואה זאת היא היפרבולה שצירה הוא ציר ה- y.

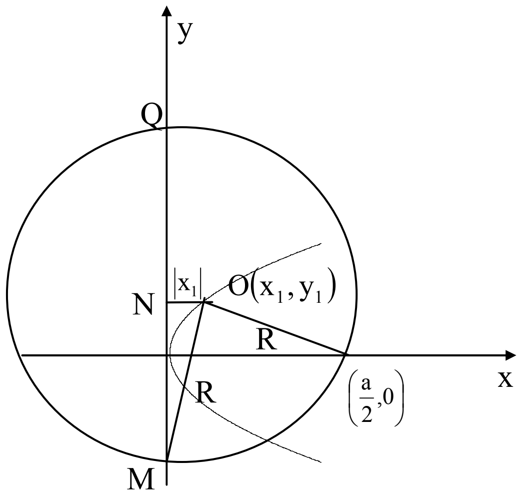
על מנת לסיים את התרגיל נתייחס למיקום של הנקודות A ו- B, והתשובה הסופית היא הענף העליון של היפרבולה $y^2 - x^2 = 25$.

פרבולה

<u>תרגיל 1</u>

מהו המקום הגיאומטרי של מרכזי המעגלים העוברים בנקודה $\left(\frac{a}{2},0\right)$ ומקצים על ציר ה- y קטע

בעל אורך a.



<u>פתרון</u>

נסמן ב- $O(x_1,y_1)$ את מרכז המעגל המבוקש

וב- R את רדיוסו.האנך שיוצא ממרכז המעגל

לציר ה- y חוצה את הקטע MQ שהמעגל מקצה

על הציר (אנך למיתר שיוצא ממרכז המעגל).

אורך האנך ON הוא $|x_1|$. מהמשולש ONM

(ראב סרטוט) נקבל על פי משפט פתגורס :

$R^2 = x_1^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$. מאידך, המרחק בין O

לבין הנקודה הנתונה $\left(\frac{a}{2},0\right)$ גם הוא רדיוס המעגל ולכן $R^2 = \left(x_1 - \frac{a}{2}\right)^2 + y_1^2$.

לא נשאר אלא להשוות את שני הביטויים של R^2 ולכנס איברים דומים. המקום הגיאומטרי

במתקבל בתנאים הללו הוא פרבולה שמשוואתה $y^2 = ax$.

תרגילים לפרק 9 מקומות גיאומטריים

9.1 הישר

1. מצא את המקום הגיאומטרי של הנקודות שמרחקן מהנקודה $A(2,1)$ שווה למרחקן מהנקודה $B(6,3)$. סרטט את הנקודות הנתונות ואת גרף המקום הגיאומטרי.
2. מצא את המקום הגיאומטרי של הנקודות הנמצאות במרחק שווה מהנקודות $A(-2,1)$ ו-$B(-2,-3)$.
3. מצא את המקום הגיאומטרי של הנקודות שמרחקן מהנקודה $A(-1,4)$ שווה למרחקן מהנקודה $B(3,8)$.
4. מצא את המקום הגיאומטרי של הנקודות שמרחקן מציר ה-y שווה למרחקן מהנקודה $(4,0)$.
5. מצא את המקום הגיאומטרי של הנקודות שמרחקן מציר ה-x שווה למרחקן מהנקודה $(0,2)$.
סרטט את הגרף של המקום הגיאומטרי שקיבלת וציין בסרטוט את הנקודה $(0,2)$.
6. מצא את המקום הגיאומטרי של הנקודות שמרחקן מהישר $x = -2$ שווה למרחקן מהנקודה $(0,2)$.
7. א. חשב את מרחק הנקודה $A(2,3)$ מהישר $4x - 3y = 0$.
ב. מהו המקום הגיאומטרי של הנקודות שמרחקן מהישר $4x - 3y = 0$ שווה למרחקן מ-A?
שים לב: הנקודות יכולות להימצא משני צדי הישר הנתון.
8. מצא את המקום הגיאומטרי של הנקודות שהפרש ריבועי מרחקיהן מהנקודות $A(2,-3)$ ו-$B(1,6)$ שווה ל-6.
9. מצא את המקום הגיאומטרי של הנקודות שהפרש ריבוע מרחקיהן מהנקודות $A(1,-1)$ ו-$B(1,5)$ שווה ל-12.
10. שוקיה של זווית מונחות על הישרים $2x + y + 2 = 0$ ו-$x + 2y + 1 = 0$.
א. הראה כי כל אחת מהנקודות $A(-3,2)$, $B(0,-1)$, $C(1,-2)$, $D(0,1)$,
$E(-2,-1)$, $F(-1,0)$ נמצאת במרחק שווה משוקי הזווית.
ב. מצא את המקום הגיאומטרי של הנקודות הנמצאות במרחק שווה משוקי הזווית.
ג. נמק מדוע זוג המשוואות שקיבלת בסעיף ב' מייצג שני ישרים ניצבים זה לזה, שנחתכים בנקודת החיתוך של הישרים הנתונים. איזה משפט גיאומטרי מתקיים כאן?
שים לב: שני ישרים נחתכים יוצרים ארבע זוויות.

9.2 המעגל

מעגל אפולוניוס

11. מצא את המקום הגיאומטרי של הנקודות P שיחס מרחקיהן מהנקודות $A(5,0)$ ו-$B(-5,0)$ הוא 1:2 (כלומר $PA:PB = 1:2$).
12. מצא את המקום הגיאומטרי של הנקודות שמרחקן מהנקודה $(-4,0)$ גדול פי שניים

ממרחקן מהנקודה (4,0).

13. מצא את המקום הגיאומטרי של הנקודות שיחס מרחקיהן מהנקודות (4,0) ו-(-4,0) הוא 2:3.

14. נתון הקטע AB שקצותיו הם B(-5,0), A(5,0), ויחס חלוקה PA:PB = 3:1 . אילו מבין הנקודות הבאות נמצאות בתוך מעגל אפולוניוס המתאים, אילו עליו ואילו מחוצה לו?

א. (0,0)	ד. (-6,2)	ז. (-8.5,-3)
ב. (-4,3)	ה . (-5,0)	ח. (-3,-1)
ג. (-10,0)	ו. (1,-1)	ט. (0,1)

15. המעגל סביב הנקודה (-13,0), שרדיוסו 12, הוא המקום הגיאומטרי של הנקודות שיחס מרחקיהן מהנקודות A(m,0) ו-B(-m,0) שווה ל-2:3.

א. חשב את m.

ב. מצא את הנקודות C ו-D בהן חותך המעגל את ציר x, ובדוק האם ארבע הנקודות A, B, C, D מהוות רביעייה הרמונית (כלומר האם AC:CB = AD:DB).

16. שני בתי חרושת מייצרים נעליים בערים שונות. מחיר הנעליים שווה בשני בתי החרושת והוא a ש״ח/זוג. הוצאות ההובלה מבית החרושת האחד הם 10 ש״ח/ק״מ, ומהשני 8 ש״ח/ק״מ. המרחק בין בתי החורשת הוא 300 ק״מ. איזה אזור של השוק יעדיף לקנות מבית החרושת האחד ואיזה מהשני?

הדרכה: מקם את בית החרשת שמחיר ההובלה ממנו הוא 10 ש״ח/ק״מ בנקודה A(150, 0), ואת בית החרושת השני בנקודה B(-150,0), ומצא את מיקום הלקוחות שעבורם הוצאות ההובלה משני בתי החרושת שווים.

17. שתי חברות דלק, הנמצאות במרחק 10 ק״מ זו מזו, מספקות סולר לחימום ביתי. מחיר הסולר בשתיהן שווה, אך המחיר שגובה חברה A לכל קילומטר מרחק כפול מזה שגובה חברה B.

א. מקם את A ו-B במערכת צירים, בנקודות (5,0) ו-(-5,0) בהתאמה.

ב. היכן נמצאים הלקוחות שעבורם הוצאות ההובלה שוות בשתי החברות?

ג. להלן נתון המיקום של לקוחות פוטנציאליים. קבע לכל אחד מהם היכן כדאי לו להזמין את הסולר, ונמק:

(1) $\left(\frac{25}{3}, \frac{20}{3}\right)$ (2) (7,6)   (3) (6,7)   (4) (10,5)

ד. בחר על הכביש שמחבר את שתי החברות A ו-B מיקום של שני צרכנים שיעדיפו לרכוש את הדלק ב-A, שניים שיקנו ב-B, ושניים שלא משנה להם.

מעגל כללי

18. צלעותיו של ריבוע מונחות על הישרים x = 2a ,y = 2a ועל צירי שהיעורים. הוכח כי המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שסכום ריבועי המרחקים מהן עד צלעות הריבוע הוא גודל קבוע $6a^2$ הוא מעגל שחסום בריבוע. מצא את משוואתו.

19. מצא את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות מהם רואים את הקטע בין $(1,4)$ ו- $(-7,2)$ בזווית ישרה.

20. מצא את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שהיחס בין מרחקן מהנקודה $(0,2)$ לבין מרחקן מהנקודה $(0,1)$ שווה ל- $\sqrt{2}$.

21. נתונות שתי נקודות $B(0,0)$ ו- $C(8,0)$. מצא את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות A שהקטע המחבר את A עם הנקודה $(3,0)$ חוצה את הזווית בין AB ל- AC.

22. הוכח כי המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שהן אמצעי המיתרים במעגל $x^2 + y^2 = R^2$, שקצה אחד של המיתרים הוא בנקודה $(-R,0)$ הוא מעגל שקוטרו הוא הקטע בין $(0,0)$, $(-R,0)$.

23. מצא את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות מהן רואים את הקטעים בין $(0,0)$ ל- $(2,0)$ ובין $(0,0)$ ל- $(-6,0)$ באותה זווית.

24. דרך הנקודה $(a,0)$ עוברים ישרים שאליהם מגיעים אנכים מראשית הצירים. מצא את המקום הגיאומטרי של נקודות המפגש של האנכים עם הישרים.

25. מצא וזהה את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שאורך המשיק מהן למעגל $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 25$ גדול פי 2 ממרחקן מהנקודה $(2,-6)$.

9.3 אליפסה, היפרבולה ופרבולה

26. מצא את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מהישר $x = 9$ גדול פי 3 ממרחקן מהנקודה $(1,0)$.

27. שני קדקודים של משולש שהיקפו 40 נמצאים בנקודות $(8,0)$ ו- $(-8,0)$. מצא את המקום הגיאומטרי של הקדקוד השלישי.

28. נתון מעגל $x^2 + y^2 = R^2$. מהנקודה P שנמצאת מחוץ למעגל מעבירים ישר המשיק למעגל בנקודה A. הראה כי המקום הגיאומטרי של כל הנקודות P , שמרחקן מציר ה- y שווה ל- $2PA$ הוא אליפסה.

29. מצא את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שסכום ריבועי מרחקיהן מראשית הצירים ומציר ה- x הוא 8.

30. מצא את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שמכפלת מרחקיהן מהישרים $y = 2x$ ו- $y = -2x$ היא 5.

31. מצא את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שמרחקיהן מן הישר $x = 2$ קטן פי 2 ממרחקיהן מהנקודה $(8,0)$.

32. מצא את המקום הגיאומטרי שלאמצעי הקטעים המחברים נקודות שמונחות על ההיפרבולה עם ראשית הצירים.

33. מצא את המקום הגיאומטרי שלאמצעי הקטעים המחברים נקודות שמונחות על ההיפרבולה $x^2 - y^2 = a^2$ עם ראשית הצירים. (שימו לב, שהתרגיל מרחיב את התרגיל הקודם)

34. מצא את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שריבוע המרחק מהן לישר $x = -4$ גדול ב- 7 מריבוע המרחק מהן לנקודה (3,0).

35. מצא את המקום הגיאומטרי של מרכזי המעגלים המשיקים מבחוץ למעגל $(x-5)^2 + y^2 = 25$ ולציר ה- y .

36. מצא את המקום הגיאומטרי של מרכזי המעגלים הנמצאים ברביע הראשון והמשיקים לציר ה- y ולמעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 - 6x = 0$.

37. שני קדקודים של משולש הם בנקודות (p,p) ו- (p,-p). הקדקוד השלישי הוא על ציר ה- y. מצא את המקום הגיאומטרי של מפגש הגבהים במשולש.

38. הוכח כי המקום הגיאומטרי של כל הנקודות מהן רואים את הפרבולה $y^2 = 8x$ בזווית ישרה הוא ישר $x = -2$.

תרגילים שונים

39. קצות הצלע AB של המשולש ABC הם A(-2,0) ו-B(2,0).
הפרש ריבועי המרחקים של הקדקוד C מ-A ומ-B שווה ל-4. מצא את המיקום האפשרי של C.

40. מצא את המקום הגיאומטרי של הנקודות שריבוע מרחקן מהנקודה A(-2,3) גדול ב-4 מריבוע מרחקן מהנקודה B(3,5).

41. נתון משולש ABC. מצא את המקום הגיאומטרי של הנקודות שסכום ריבועי מרחקיהן מקדקודי המשולש שווה ל-k, כאשר:
א. A(1,0) , B(0,2) , C(-1,1) , k = 10
ב. A(-5,1) , B(2,5) , C(0,0) , k = 70

42. מצא את המקום הגיאומטרי של הנקודות שסכום ריבועי מרחקיהן מהנקודות A(3,-2) ו-B(-3,2) גדול פי ארבע ריבוע מרחקן מהנקודה C(5,3).

43. מצא את המקום הגיאומטרי של הנקודות שמרחקן מהישר $3x - 4y = 0$ כפול ממרחקן מהישר $5x + 12y = 0$.

44. מצא את המקום הגיאומטרי של הנקודות שמרחקן מהישר $x + 2y = 1$ שווה לשליש ממרחקן מהישר $2x + y = 5$.

45. קצות הצלע AB של המשולש ישר הזווית ABC הם: A(3,-5) , B(-5,1). מצא את המיקום האפשרי של הקדקוד C
א. כאשר C היא קדקוד הזווית הישרה.
ב. כאשר A היא קדקוד הזווית הישרה.
ג. כאשר B היא קדקוד הזווית הישרה.

46. נתונות הנקודות A ו-B. מצא את המקום הגיאומטרי של הנקודות שחיבורן עם A ועם B יוצר משולש ששטחו S:

ג. $A(1,2)\ ,\ B(3,4)\ ,\ S = 3$ $A(-3,0)\ ,\ B(1,0)\ ,\ S = 4$

ד. $A(3,-1)\ ,\ B(0,2)\ ,\ S= 6$ ב. $A(3,6)\ ,\ B(3,2)\ ,\ S = 10$

47. מצא את משוואת המקום הגיאומטרי של הנקודות שנמצאות במרחק שווה
א. מציר ה-x ומהנקודה (0,4).
ב. מציר ה-y ומהנקודה (-6,0).
ג. מהישר $y = -1$ ומהנקודה (-3,5).
ד. מהישר $x = 3$ ומהנקודה (1,1).

48. אורך הקטע AB הוא 5 יחידות. הנקודה A נמצאת על ציר ה-x ו-B על ציר ה-y. הנקודה C, שעל הקטע AB, מחלקת אותו לפי היחס 2:3 ($AE:EB = 2:3$). מצא את משוואת המקום הגיאומטרי של הנקודות E.

49. מצא את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שהן מפגש הגבהים במשולשים ששניים מקדקודיהם בנקודות (0,0) ו- (4,0) וכאשר הקדקוד השלישי נמצא על הישר $y = x$.

50. מצא את המקום הגיאומטרי של מרכזי הכובד של המשולשים ששניים מקדקודיהם בנקודות (-4,0) , (16,8) והקדקוד השלישי הוא על הישר $y = -x + 1$.

51. מצא את המקום הגיאומארי של מרכזי הכובד של המשולשים בעלי שטח 15 ששניים מקדקודיהם נמצאים בנקודות (6,0) ו- (3,4).

52. מצא את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שאורך המשיק מהן למעגל $(x+3)^2+(y-6)^2=9$ קטן פי 3 מאורך המשיק למעגל $(x-12)^2+(y-9)^2=36$.

53. מצא את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות מהן רואים את המעגל $(x-8)^2+(y-19)^2=10$ בזווית ישרה.

התרגיל הבא <u>מכליל</u> את התוצאה של התרגיל 40.

54. מצא את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות מהן רואים את המעגל $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ בזווית ישרה.

55. נתונות הנקודות $A(0,a)$ ו- $O(0,0)$ כאשר $a>0$. על הישר $y = a$ בוחרים נקודה B מהרביע הראשון ואת נקודה C על החלק החיובי של ציר ה- x כך שמתקיים $AB\cdot OC = a^2$. מצא את המקום הגיאומטרי של מפגש הקטעים AC ו- OB.

56. נתונים משולשים שווי שוקיים, שקדקוד הראש שלהם הוא $A(3,4)$ ואחד מקדקודי הבסיס שלהם הוא $B(0,0)$. מצא את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שהן אמצע הבסיס במשולשים הללו.

57. מצא את המקום הגיאומטרי של אמצעי המיתרים המחברים את ראשית הצירים עם נקודות המעגל $x^2+y^2-8x-6y=0$.

58. הישר $3x + 4y - 12 = 0$, חותך את ציר ה- x בנקודה A ואת ציר ה- y בנקודה B. הנקודה P וראשית הצירים נמצאות מצדדים שונים של הישר הנ"ל. מצא את המקום הגיאומטרי

של הנקודות P שעבורן $\angle APB = 45^\circ$.

.59 $A(10,0)$ היא נקודה על המעגל $x^2 + y^2 = 100$. AB הוא מיתר כלשהו במעגל זה.

תהי $M(a,b)$ נקודה על המיתר AB כך ש- $AM = 2MB$.

א. הבע את שיעורי B באמצעות a ו- b.

ב. הוכח כי המקום הגיאומטרי של הנקודות M המוגדרות באופן זה הוא מעגל, רשום את שיעורי מרכזו ואת רדיוסו.

.60 הוכח כי המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שסכום ריבועי מרחקים מהן לשני ישרים $y = kx$ ו- $y = -kx$ הוא גודל קבוע m , הוא אליפסה אם $k \neq \pm 1$ ו- מעגל אם $k = \pm 1$.

.61 מצא את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שמרחק מהן עד הישר $x = 21\frac{1}{3}$ מתיחס למרחק מהן עד הנקודה $(3,0)$ כמו $\frac{8}{3}$.

.62 מצא את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שמרחק מהן עד הישר $x = \frac{a^2}{c}$ מתיחס למרחק מהן עד הנקודה $(c,0)$ כמו $\frac{a}{c}$. (שימו לב התרגיל הוא הכללה של התרגיל הקודם)

.63 מצא את המקום הגיאומטרי של מרכזי המעגלים המקצים על ציר ה- x קטע שאורכו 4 אם גם ידוע כי מרחק המרכזים מ- $(0,0)$ גדול פי 2 מרדיוס המעגלים.

.64 מהנקודה P שעל המעגל $x^2 + y^2 = R^2$, מעבירים מיתר המקביל לציר ה- y, וחותך את ציר ה-x בנקודה Q. על הקטע PQ בוחרים נקודה E, כך ש- $\frac{PE}{EQ} = \frac{m}{n}$. הראה כי המקום הגיאומטרי של כל הנקודות E שנבחרו בדרך זו, כאשר הנקודה P נעה על המעגל, הוא אליפסה. הבע באמצעות R, m ו- n את שיעורי מוקדי האליפסה.

.65 בוחרים נקודה A על ציר ה- x ונקודה B על ציר ה- y, כך ש- $AB = 1$. E היא נקודה על הקטע AB , כך ש- $\frac{AE}{EB} = \frac{m}{n}$, $(n > m)$.

א. הראה כי המקום הגיאומטרי של הנקודות E, שנוצרות באופן זה הוא אליפסה

ב. בטא באמצעות m ו- n את אורך הציר הגדול של האליפסה שבסעיף א'

.66 באליפסה $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ חוסמים משולש ABC כך שהצלע AB מתלכדת עם הציר הגדול של האליפסה, והקדקוד C הוא נקודה כלשהי על היקף האליפסה.

דרך הנקודה A מעבירים ישר שמאונך ל- AC, ודרך B מעבירים ישר שמאונך ל- BC. נסמן ב- D את נקודת החיתוך של שני האנכים.

מצא את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות D שהוגדרו באופן זה.

67. מצא וזהה את המקום הגיאומטרי של מרכזי כל המעגלים המקצים על ציר ה- y קטע באורך 12, כך שמרחקם של המרכזים מ- (0,0) קטן פי 3 מרדיוס המעגל.

68. מצא את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שמרחקיהן מראשית הצירים שווה לממוצע גיאומטרי של מרחקיהן מהנקודות (4,0) ו- (-4,0).

69. במשולש ABC נתונים קדקודים A(-1,0) ו- B(2,0). מצא את המקום הגיאומטרי עליו נמצאים קדקודים אפשריים C אם ידוע כי גודל הזווית B הוא כפול מגודל הזווית A.

70. נתון המעגל $(x+3)^2 + y^2 = 4$. מצא את המקום הגיאומטרי של מרכזי המעגלים המשיקים למעגל הנתון מבחוץ ועוברים דרך הנקודה (3,0) .

71. מצא את המקום הגיאומטרי של מרכזי המעגלים המקצים על ציר ה- x את הקטע שאורכו 2a ועל ציר ה- y את הקטע שאורכו 2b.

72. שני הקטעים AB ו- CD, ניצבים זה לזה וחוצים זה את זה בנקודה O.

נתון $a \neq b$, $AB = 2a$, $CD = 2b$.

הוכח: המקום הגיאומטרי של כל הנקודות P, המקיימות: $PA \cdot PB = PC \cdot PD$, הוא היפרבולה.

73. נתון מעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 + 4x = 0$, והנקודה: A(2,0) מחוצה לו.

א. הוכח כי המקום הגיאומטרי של מרכזי כל המעגלים העוברים דרך הנקודה A והנוגעים במעגל הנתון הוא היפרבולה ומצא את משוואתה.

ב. מצא את האסימפטוטות של ההיפרבולה.

74. מצא וזהה את המקום הגיאומטרי של מרכזי כל המעגלים המשיקים מבחוץ למעגלים $(x+3)^2 + y^2 = 16$ ו- $(x-3)^2 + y^2 = 1$.

75. מצא את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שהפרש ריבועי מרחקיהן מהישר $x + 5 = 0$ ומהנקודה (4,0) שווה ל- 9.

76. הוכח כי המקום הגיאומטרי של אמצעי המיתרים העוברים דרך קדקודה של פרבולה הוא פרבולה.

77. במערכת צירים נתונות הנקודות A(3,0) ו- B(0,t).

דרך ראשית הצירים מעבירים אנך ל- AB ודרך הנקודה B מעבירים ישר המקביל לציר ה- x וחותך את האנך בנקודה M. מצא את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות M הנוצרים באופן זה כאשר B נעה על ציר ה-y.

78. נתון כי המקום הגיאומטרי של מרכזי המעגלים המשיקים לישר $x = -1$ וגם משיקים מבחוץ למעגל $(x-a)^2 + y^2 = R^2$ ($a > R$) הוא פרבולה שקדקודה (0,0).

א. הראה כי $a = R + 1$

אם ידוע כי משוואת הפרבולה היא $y^2 = 20x$, חשב את a ו- R.

תשובות לפרק מקומות גיאומטריים

9.1 הישר

1. $2x + y = 10$ .2 $y = -1$ .3 $x + y = 7$ .4 $y^2 = 8x - 16$ .5 $x^2 = 4y - 4$

6. $y^2 = 4(x + y)$ .7 א. 0.2 ב. $4x - 3y \pm 1 = 0$ .8 $x - 9y + 15 = 0$

9. $y = 3$ .10 ב. $y = \pm (x + 1)$

9.2 המעגל

מעגל אפולוניוס

11. $\left(x - 8\frac{1}{3}\right)^2 + y^2 = 44\frac{4}{9}$ .12 $\left(x - 6\frac{2}{3}\right)^2 + y^2 = 28\frac{4}{9}$ .13 $(x - 10.4)^2 + y^2 = 92.16$

14. בתוך: ד, ה, ח; על: ב, ג, ז; בחוץ: א, ו, ט .15 א. -5; ב. $(-25,0)$, $(-1,0)$

16. התושבים שבתוך המעגל $3x^2 + 3y^2 - 4100x + 67500 = 0$ יעדיפו לקנות ב-A.

17. ג. (1) לא משנה, (2) ו-(4) ב-A, (3) ב-B; ד. לא משנה: $(15,0)$ ו-$(-1\frac{2}{3},0)$

מעגל כללי

18. $(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2$ .19 $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 17$ .20 $x^2 + y^2 = 2$

21. $x^2 + y^2 + 9x = 36$ ללא נקודות החיתוך עם ציר ה- x. .23 $(x - 3)^2 + y^2 = 9$

24. $x^2 + y^2 = ax$ .25 $3x^2 + 3y^2 - 6x + 56y + 165 = 0$

9.3 האליפסהת היפרבולה ופרבולה

26. $8x^2 + 9y^2 = 72$ .27 $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{80} = 1$ .29 $x^2 + 2y^2 = 8$

30. $4x^2 - y^2 = 25$ ו- $y^2 - 4x^2 = 25$ .31 $3x^2 - y^2 = 48$ .32 $x^2 - y^2 = 1$

33. $x^2 - y^2 = \frac{a^2}{4}$ .34 $y^2 = 14x$ .35 $y^2 = 20x$ .36 $y = 2\sqrt{3x}$ .37 $y^2 = px$

תרגילים שונים

39. הישר $x = 0.5$ .40 $10x + 4y = 25$ .41 א. $x^2 + y^2 - 2y = 1$;
ב. $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 5$ .42 $x^2 + y^2 - 20x - 12y + 55 = 0$

43. $89x + 68y = 0$ או $11x + 172y = 0$ .44 $x + 5y + 2 = 0$ או $5x + 7y = 8$

45. א. $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 20 = 0$; ב. $3x + y + 17 = 0$; ג. $3x + y = 3$

46. א. $y = \pm 2$; ב. $x = -2$ או $x = 8$; ג. $y = x + 4$ או $y = x - 2$;
ד. $x + y - 6 = 0$ או $x + y + 2 = 0$

47. א. $x^2+y^2=25$; ב. $(x-1)^2+(y+2)^2=25$; ג. $(x-1)^2+(y+2)^2=144$;
ד. $(x+3)^2+(y-4)^2=144$

48. $4x^2+9y^2=36$ 49. $x+y-4=0$ 50. $x+y+17=0$

51. $4x+3y-14=0$ ו- $4x+3y-34=0$. 52. $(x+8)^2+(y-5)^2=104$

53. $(x-8)^2+(y+9)^2=20$ 54. $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

55. $x^2+y^2-ay=0$ 56. $(x-1.5)^2+(y-2)^2=6.25$ 57. $x^2+y^2-4x-3y=0$

58. $(x-3.5)^2+(y-3.5)^2=12.5$ 59. א. $B\left(\frac{3a-10}{2},\frac{3b}{2}\right)$ ב. $\left(3\frac{1}{3},0\right)$, $r=6\frac{2}{3}$

61. $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{55}=1$ 62. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$ 63. $x^2-3y^2=16$

64. $\left(\pm\frac{R\sqrt{m^2+2mn}}{m+n},0\right)$ 65. ב. $2a=\frac{2n}{m+n}$ 66. $\frac{x^2}{25}+\frac{9y^2}{625}=1$

67. $8x^2+9y^2=36$ 68. $x^2-y^2=8$ 69. $3x^2-y^2=3$

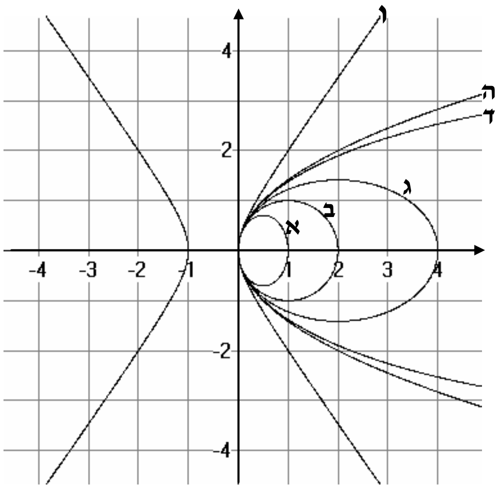
70. $8x^2-y^2=8$ (הענף הימני) 71. $x^2-y^2=a^2-b^2$

73. א. $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ ב. $y=\pm\sqrt{3}x$ 74. $12x^2-4y^2=27$ 75. $y^2=18x$

77. $y^2=3x$ 78. $a=5$ ו- $R=4$

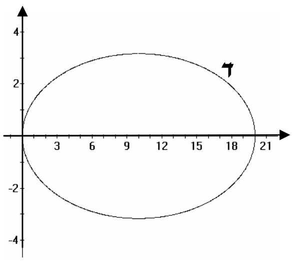
פרק 10 : חתכי החרוט

בפרקים קודמים הכרנו את הפרבולה, המעגל, האליפסה וההיפרבולה כעקומים מסוימים במישור מן המעלה השנייה. ראינו גם כי כל אחד מהם הוא מקום גיאומטרי מיוחד.
למעשה כל העקומים המישוריים מן המעלה השנייה שהכרנו שייכים למשפחה אחת.

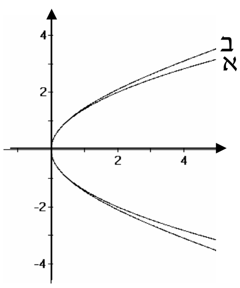


כדי לראות זאת נתבונן במשפחה $qx^2 - 2px + y^2 = 0$.
נדגים כי משפחה זו מכילה את כל העקומים הנ״ל,
והפרמטר q קובע את סוג העקום.
אם ברשותך טכנולוגיה גרפית בחר ערכים שונים לפרמטרים, סרטט מספר גרפים ובחן את התוצאות.
לפניכם גרפים של נציגים מהמשפחה.
קל לראות כי כאשר $q = 1$ מקבלים משוואה של מעגל $(x - p)^2 + y^2 = p^2$ שמרכזו בנקודה $(0,p)$ ורדיוסו p (בדוק!). בסרטוט $p = 1$ והגרף המתקבל הוא ב.

כאשר $q > 0$ מקבלים אליפסה (שהיא הזזה אופקית של האליפסה הקנונית) [1]. רואים זאת בבירור



בגרפים א ו- ג. בשני הסרטוטים $p = 1$. בעקום א $q = 2$, ובעקום ג $q = 0.5$. ככל ש-q הולך וקטן ומתקרב ל-0 האליפסה נעשית מוארכת יותר (המרחק בין מוקדי האליפסה הולך וגדל), וקשה להבחין בינה לבין הפרבולה. טענה זו מומחשת בעזרת עקום ד שהוא אליפסה $(q = 0.1)$ למרות שהגרף נראה כפרבולה. ואכן במערכת צירים שונה מתקבל גרף שרואים מיד שהוא אליפסה.
כאשר $q = 0$ מתקבלת המשוואה $y^2 = 2px$ שהיא כידוע משוואה של פרבולה. עקום ה בסרטוט.
עבור $q < 0$ מקבלים היפרבולות שהן הזזות אופקיות של ההיפרבולה הקנונית,



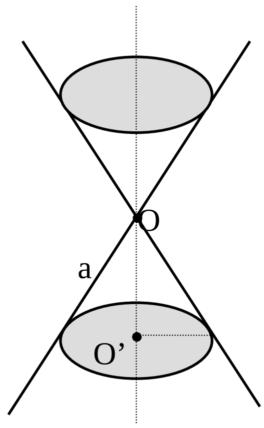
כך שאחד מקדקודן בראשית הצירים. עקום ו בסרטוט ($p = 1$ ו- $q = -2$).
כאשר ערכי q קרובים לאפס, גרף ההיפרבולה (הענף הימני) דומה מאד לפרבולה $y^2 = 2px$. בגרף שלפניכם עקום א הוא פרבולה $(p = 1)$ ועקום ב הוא היפרבולה $(p = 1 , q = -0.1)$.
<u>שאלה*</u> : מהי השפעת הפרמטר p על הגרפים?

הפרבולה, המעגל, האליפסה וההיפרבולה נקראים גם בשם ״חתכי החרוט״. שם זה נובע מהעובדה כי הם מתקבלים כאשר מישור חותך חרוט (אינסופי וכפול) שלא דרך קדקוד החרוט.
המתמטיקאי הראשון שגילה כי עקומים אלה הם חתכי החרוט היה המתמטיקאי היווני

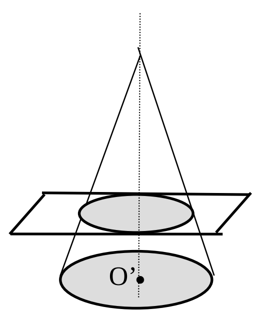
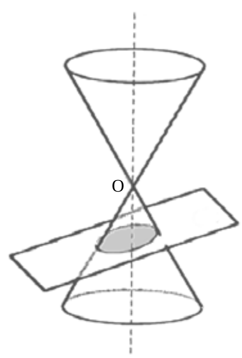
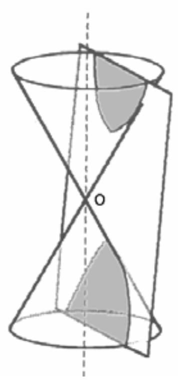
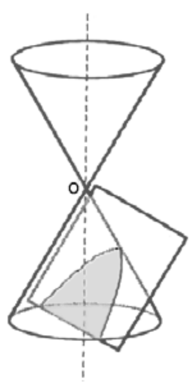
[1] תלמידים שלמדו הזזות מקבילות לצירים של האליפסה וההיפרבולה יוכלו להוכיח זאת.

אפולוניוס, שחי במאה השנייה לפני הספירה. הוא חקר את התכונות של עקומים אלה ואת מכלול התוצאות שאליהן הגיע תיאר בחיבורו "תורת החרוטים". בסעיף זה נדגים (ההוכחה מובאת כחומר העשרה) כיצד מתקבלים עקומים אלה כחתכים של חרוט (מעגלי) על-ידי מישור. נראה כי העקומים השונים מתקבלים על ידי שינוי זווית הנטייה של המישור החותך.
נגדיר תחילה מהו חרוט (מעגלי). שימו לב, הגדרה זו היא הרחבה של החרוט שהכרתם עד כה.

חרוט (מעגלי) - הוא המשטח המרחבי (האין-סופי) הנוצר כאשר ישר a נע דרך מעגל קבוע (שמרכזו 'O) ונקודה קבועה O הנמצאת מעל מרכז המעגל. ראה הסרטוט.
הישר a נקרא **הקו היוצר** של החרוט, הנקודה O היא **קדקוד** החרוט והישר 'OO הוא **ציר** החרוט. לחרוט שני ענפים והקדקוד מפריד ביניהם.



העקומים השונים של חתכי החרוט מתקבלים כאשר מישור, שאיננו עובר דרך קדקוד החרוט, חותך את החרוט בכוונים שונים.

א. **מעגל**	ב. **אליפסה**	ג. **היפרבולה**	ד. **פרבולה**
קו חתך שהוא מעגל מתקבל כאשר המישור חותך את החרוט בענף אחד בלבד, ומקביל למעגל שמרכזו 'O.	קו חתך שהוא אליפסה מתקבל כאשר המישור חותך את החרוט בענף אחד בלבד, ואיננו מקביל לקו יוצר.	ההיפרבולה מתקבלת בדיוק כמו האליפסה אלא שהמישור חותך את שני ענפי החרוט.	כאשר המישור החותך מקביל לקו יוצר מקבלים פרבולה. שים לב, המישור חותך רק ענף אחד של החרוט.
			

הערה: אם המישור עובר דרך קדקוד החרוט ובמקביל לציר החרוט, קו החתך שמתקבל הוא של שני ישרים נחתכים.