

## החיסור הצרפתי

מירה עופרן

### א. אירוע

המטלה הבאה הועמדה בפני קבוצת מבוגרים:

"מהי תוצאת התרגיל  $64-17$ ?"

רוב הנשאלים השיבו שהתוצאה היא 47.

לשאלה "איך הגעת לתוצאה זו?"

ניתנו תשובות רבות ושונות, וביניהן:

1. "התחלתי מ-64. חיסרתי קודם 10, קיבלתי 54, חיסרתי עוד 4 והגעתי ל-50, ואז נשאר לי עוד לחסר 3 - והרי 47."  
( $64-10-4-3=47$ )

2. "התחלתי מ-64. חיסרתי 20, קיבלתי 44, ואז הוספתי 3 - קיבלתי 47."  
( $64-20+3=47$ )

3. "התחלתי מ-64. חיסרתי 4, קיבלתי 60. חיסרתי 40 - הגעתי ל-20, ואז נשאר לי לחסר עוד 3 כדי להגיע ל-17. בסך הכל חיסרתי 47."  
( $64 - (4 + 40 + 3) = 17$ )

4. התחלתי מ-17. הוספתי 3, ואחר כך הוספתי עוד 40 - הגעתי ל-60, ועוד 4 - הגעתי ל-64. בסך הכל הוספתי 47 ל-17 המקוריים, ולכן התוצאה היא 47.  
( $17 + (3+40+4) = 64$ )

5. רשמתי את המטלה כתרגיל חיסור אנכי, וחיסרתי לפי כללי החיסור שלמדנו בבית הספר:  $64-17$

4 פחות 7 - אי-אפשר. פרטתי עשרת אחת מן ה-6, קיבלתי 14, מהם חיסרתי 7 והגעתי ל-7 בעמודת היחידות. בעמודת העשרות נותרו לי 5, פחות 1 - והרי 4, וכך הגעתי לתוצאה 47.

6. יותר קל לי לחסר 20 מאשר לחסר 17. לכן הגדלתי את המספר המוחסר (שמחסרים אותו) ב-3, מ-17 ל-20, וכדי לשמור על ההפרש הגדלתי ב-3 גם את המספר המוחסר (שממנו מחסרים) מ-64 ל-67. נשאר לי לחשב ( $67 - 20$ ), וזה 47.

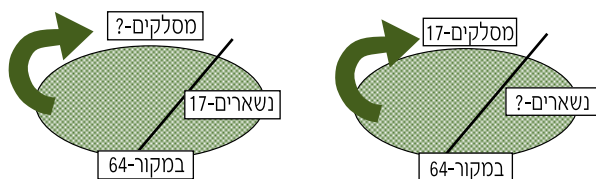
7. חיסרתי בחיסור אנכי בשיטה שלמדנו בבית הספר בפריז כשהייתי ילד. נתקבלו תשובות נוספות שלא יידונו כאן.

### ב. ניתוח התשובות

נקל לראות שכל התשובות נכונות. נבדוק את דרכי החישוב בזו אחר זו:

1. ו-2. שני החישובים הראשונים מבוססים על פעולת החיסור כסילוק מספר איברים ידוע (17) מקבוצה נתונה (של 64 איברים), ומוניית האיברים הנוותרים. המשיבים סילקו 17 איברים מהקבוצה ההתחלתית של 64 איברים באופנים שונים. כדאי לציין שמבוגרים רבים נוקטים בחישובים בעל-פה בשיטה דומה לזאת שבתשובה 2: מחסרים קודם את העשרות ואחר כך מטפלים ביחידות.

3. גם חישוב זה מבוסס על סילוק מספר איברים מקבוצה נתונה של 64 איברים, אלא שכאן מנו את האיברים שמסלקים כדי שבסוף יישארו 17 איברים. כאן ידעו כמה איברים צריכים להישאר (17), ומנו את האיברים שסילקו מהקבוצה המקורית של 64 איברים.



4. חישוב זה דומה לחישוב 3, שבשניהם ידוע מספר האיברים בהתחלה ובסוף, ומונים את השינוי: בחישוב 3 מנו את האיברים שסולקו מ-64 כדי לקבל 17, ואילו בחישוב 4 מנו את האיברים שיש להוסיף ל-17 כדי לחזור ל-64. זוהי למעשה "שיטת העודף": אם אנחנו צריכים לשלם 17 שקלים ושילמנו 64 שקלים, הרי העודף המגיע לנו הוא ( $64-17$ ) שקלים. אפשר למנות את העודף על-ידי הוספה הדרגתית ל-17: מוסיפים 3 וכך משלימים ל-20, אחר-כך מוסיפים עוד 40 ומגיעים ל-60, ולבסוף מוסיפים עוד 4.

5. זהו החיסור האנכי הרגיל המקובל אצלנו: מחסרים יחידות מיחידות, עשרות מעשרות וכו', ואם בעמודה מסוימת המוחסר אינו מספיק גדול-פורטים מהעמודה שמשמאלה.

**2. אפשר לנסח את מה שאנחנו עושים גם בלשון אחרת.**

כל מספר אינו משתנה אם מוסיפים לו 10 ומיד מחסרים ממנו 10. אנו מבצעים עכשיו את הפעולה הכפולה של חיבור 10 וחיסור 10 על המספר 743. על-ידי כך לא שינינו את המספר:

$$743 + 10 - 10 = 743$$

את ה-10 שהוספנו נוסיף ליחידות החופשיות, ונקבל 13 יחידות חופשיות, שמהן נחסר 4. את ה-10 שחיסרנו נחסר מן העשרות, וכך יקטן מספר העשרות ב-1, מ-4 ל-3. קיבלנו למעשה תהליך שווה ערך לתהליך הפריטה המקובל.

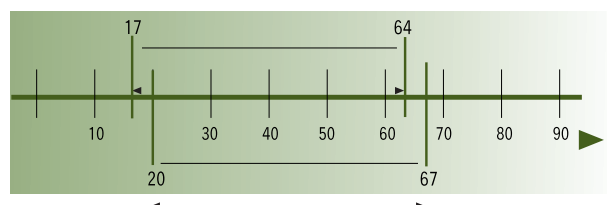
**3. העיקרון "הצרפתי"**

העיקרון הבסיסי הוא כמו אצלנו: הכל מושתת על השיטה העשרונית להצגת מספרים, ועל כך שמחסרים גדלים בעלי אותו כינוי - יחידות מיחידות, עשרות מעשרות וכו'. הכל פשוט עד שנוצר "חסר" בספרה כלשהי במספר העליון (המחוסר). נחזור

$$\begin{array}{r} 743 \\ - 524 \\ \hline \end{array}$$

גם בשיטה הצרפתית מוסיפים 10 יחידות "חופשיות" כדי שאפשר יהיה לחסר את ה-4. ההבדל הוא רק במה שעושים אחרי שמוסיפים 10 כדי לדאוג לכך שההפרש לא ישתנה. ובכך: מכיוון שמוסיפים 10 למספר העליון, המחוסר, ורוצים לשמר את ההפרש, יכולים להוסיף 10 גם למספר התחתון, המחסר. על-ידי כך "מזיזים" את כל ההפרש ב-10 יחידות (בדומה לדרך חישוב 6 שהוצגה לעיל), וערכו של ההפרש לא משתנה. מוסיפים, אפוא, 10 למספר התחתון. והיכן רושמים זאת? אם רושמים את התוספת בעמודת היחידות יוצא שלא מרוויחים כלום, כי עם התוספת של 10 למעלה ולמטה, עדיין יהיה המספר שצריך לחסר, 14, גדול מהמספר המתאים לו למעלה -13. אם כך מוסיפים את ה-10 לספרת העשרות, כלומר, מוסיפים "1" לספרת העשרות. כדי שלא לשכוח שהוספנו "1" לעשרות - רושמים את הספרה "1" בקטן למרגלות ספרת העשרות, ויודעים שכעת צריכים לחסר  $3 = 1 + 2$  עשרות.

6. עיקרון החישוב הזה מתבסס על העובדה שההפרש בין שני מספרים אינו משתנה אם מוסיפים או מחסרים משניהם אותו מספר. למעשה כך "מזיזים" את ההפרש למקום שבו יותר נוח לחשב אותו. (ראו הערה 1) אפשר לראות את העיקרון בשרטוט על ציר מספרים:



במקום לחשב את המרחק מ-17 ל-64, מחשבים את המרחק מ-20 ל-67.

7. "החיסור הצרפתי" הוא שיטת החיסור האנכי המקובלת בצרפת, (ראו הערה 2) שאותה לומדים שם בכל בתי הספר, והיא שונה משיטת הפריטה המקובלת אצלנו. את עיקריה של שיטה זו נסביר להלן. (ראו הערה 3)

**ג. החיסור הצרפתי - העיקרון**

1. נזכיר תחילה את העיקרון שמאחורי החיסור האנכי שלנו. החיסור האנכי המקובל אצלנו בנוי על העיקרון של חיסור איברים בעלי כינוי שווה - מחסרים יחידות מיחידות, עשרות מעשרות, מאות ממאות, וכו'. כל זמן שהספרות במספר המחוסר (המספר שממנו מחסרים, שהוא המספר העליון בתרגיל) גדולות יותר מהספרות המתאימות להן במספר המחסר (שאותו מחסרים, והוא המספר התחתון) מחסרים ספרה אחרי ספרה.

$$\begin{array}{r} 4567 \\ - 3456 \\ \hline 1111 \end{array}$$

נתבונן עתה במקרה ש"אי-אפשר" לחסר את היחידות:

$$\begin{array}{r} 743 \\ - 524 \\ \hline \end{array}$$

אנו נוהגים לפרוט עשרת אחת מתוך 4 העשרות: מקבלים 13 יחידות חופשיות, שאינן מאוגדות כעשרות, ומהן אנו מחסרים 4 יחידות. נותרו לנו 3 עשרות, שמהן אנו מחסרים את 2 העשרות שמתחתן.

**ספרת העשרות:** 0 פחות 3 - "אי-אפשר". נוסף 10 עשרות חופשיות ובמקביל נוסף 100 למספר התחתון תוך שימוש בסימון של "1" קטן למרגלות 3 המאות. נחסר את העשרות ונקבל  $10-3=7$  עשרות.

**ספרת המאות:** 0 פחות 4 - "אי-אפשר". נוסף 10 מאות חופשיות ובמקביל נוסף 1000 למספר התחתון, תוך שימוש בסימון של "1" קטן למרגלות 4 האלפים. נחסר את המאות ונקבל  $10-4=6$  מאות.

**ספרת האלפים:** 8 פחות 5 - נקבל 3 אלפים.

נעיין בדרכ הפתרון של תרגיל זה לפי המקובל אצלנו:

$$\begin{array}{r} 7990 \\ - 4321 \\ \hline 3679 \end{array}$$

והקורא מוזמן להשוות ולראות איזו דרך מסורבלת יותר?

שיטת החיסור המתוארת כאן נהוגה בצרפת ובארצות שהיו בהשפעה צרפתית, ולכן השיטה מכונה "החיסור הצרפתי", אולם מסתבר שהשיטה היתה ידועה, ואולי אף נהוגה גם באנגליה במאה ה-17. בספר הלימוד של אדוארד קוקר (Edward Cocker) שיצא לאור בשנת 1677, והיה מקובל באנגליה במשך שנים רבות, מתוארת הדרך לבצע חיסור אנכי:

$$\begin{array}{r} 437503 \\ - 153827 \\ \hline 283676 \end{array}$$

"אני מתחיל ואומר שמ-3 אני לא יכול לחסר 7, אבל (בהוספת 10 אני אומר) 13 פחות 7 נותן 6, שאותו אני רושם במקום המתאים מתחת לקו. עכשיו אני ממשיך לספרה הבאה ואומר שה-1 שלויתי וה-2 [הנתון שהיה צריך לחסר] נותנים יחד 3, וזה אני לא יכול לחסר מ-0. אבל אפשר לחסר 3 מ-10, וזה נותן 7. ....".  
(בתרגום חופשי, עם תוספות, לפי המובא בספרה של יילדהיים ראו הערה 4)

יילדהים טוענת שההסברים בספריו של קוקר לא היו מובנים, ובמשך הזמן הפסיקו להשתמש בספרים אלה.

## ד. החיסור הצרפתי - הביצוע

נדגים את החישוב תחילה על התרגיל שבו עסקנו:

$$\begin{array}{r} 743 \\ - 524 \\ \hline \end{array}$$

**ספרת היחידות:** 3 פחות 4 - "אי-אפשר".

נוסיף 10 יחידות "חופשיות", נקבל 13 פחות 4, ונרשום בתוצאת היחידות את הספרה 9. כדאי לשים לב לכך שאת תוספת העשרת במספר העליון סימנו על-ידי הוספת סיפרה 1 קטנה מעל הספרה 3, כמקובל אצלנו, וכפי שנראה מיד אין צורך ברישום זה כלל, והוא אכן אינו מקובל בצרפת. לעומת זאת את התוספת של 10 למספר התחתון, המחסר, מציינים על-ידי הספרה 1 בקטן למרגלות סיפרת העשרות 2.

**ספרת העשרות:** היה לנו 4 פחות 2, אבל הוספנו עוד עשרת הרשומה כ-1 קטן למרגלות הספרה 2. אנו צריכים אפוא, לבצע את החיסור "4 פחות 3", ונרשום 1 בתוצאה בספרת העשרות.

**ספרת המאות:** 7 פחות 5 נותן 2 בספרת המאות שבתוצאה.

**הערה:** את הספרה הקטנה "1" שליד 3 היחידות אין נוהגים לרשום, כי אין צורך להיזכר בה: מיד כשמוסיפים את 10 היחידות משתמשים בהן לחיסור (4-13), ולכן אין צורך לרשום זאת. לעומת זאת את הספרה הקטנה "1" למרגלות ה-2 רצוי לרשום, כי אליה נגיע רק יותר מאוחר, כשנחסר את העשרות, ואנו עלולים לשכוח שצריך לחסר 3 עשרות ולא 2.

למעשה צורת הכתיבה של התרגיל על-ידי מי שמורגל בדרך הפתרון הזה נראית כך:

$$\begin{array}{r} 743 \\ - 524 \\ \hline 219 \end{array}$$

דוגמה נוספת:

$$\begin{array}{r} 8000 \\ - 4321 \\ \hline 3679 \end{array}$$

**ספרת היחידות:** 0 פחות 1 - "אי-אפשר".

נוסיף 10 יחידות חופשיות ובמקביל נוסף 10 למספר התחתון, תוך שימוש בסימון של "1" קטן למרגלות 2 העשרות. נחסר את היחידות ונקבל  $10-1=9$  יחידות.

## ה. סיכום

■ האם כדאי ללמד את תלמידי הכיתות הנמוכות את דרך החיסור הזאת בנוסף לדרך הרגילה שלנו או במקומה? נראה שהוספת הדרך הזאת מיד בהתחלת הלימוד תגרום רק לסיבוך ולבלבול של תלמידים מתקשים. הוראת הדרך הזאת בנפרד מן הדרך שלנו תואמת את רוח תכנית הלימודים, המעודדת היכרות עם דרכי חישוב שונות. לגבי החלפת השיטה - ייתכן שאפשר לחשוב על כך, אך תנאי הכרחי מוקדם הוא שהמורים והמורות ישלטו בשיטה, יבינו אותה, וירגישו נוח בשימוש בה.

■ היכרות של מורים, של מבוגרים אחרים ושל תלמידים עם השיטה הצרפתית יכולה להעמיק את ההבנה של פעולות החשבון ושל השיטה העשרונית, וכן להעשיר את התבונה החשבונית.

## הערות

(1) באתר: [ncrtl.msu.edu/http/rreports/html/pdf/rr951.pdf](http://ncrtl.msu.edu/http/rreports/html/pdf/rr951.pdf) (עמודים 10-12) מתואר (באנגלית) שיעור שבו המורה מנסה להביא את הילדים להבנה שההפרש אינו משתנה אם מוסיפים למחסר ולמחוסר אותו מספר.

(2) באתר:

[http://www.csus.edu/indiv/o/oreyd/ACP.htm\\_files/NguyenandOrey.htm](http://www.csus.edu/indiv/o/oreyd/ACP.htm_files/NguyenandOrey.htm)

השיטה הזאת מתוארת (באנגלית) כשיטה הווינטאמית, אך מצוין שהשיטה היא ירושה מהזמן שהצרפתים שלטו שם.  
(3) עיין גם בפרק החיסור בספר "שליש לחלק לרבע - המחשבה שמאחורי החישוב", המוזכר בהערה 2.

(4) Yeldham Florence A., (1936) The Teaching of Arithmetic 400 Years 1535-1935 George G. Harrap & Co., p 79.

על מחברת המאמר:

## ד"ר מירה עופרן

מורה בכירה בחוג להוראת המדעים באוניברסיטה העברית בירושלים. כתבה עבור מורים, הורים ומבוגרים אחרים את הספר "שליש לחלק לרבע - המחשבה שמאחורי החישוב", המאיר ומבהיר את היסודות החשיבתיים של החשבון והוראתו. (הוצאת רכס, תשס"ה).

■ מבחינת עקרונות החיסור, כאמור, בשיטה שלנו ובשיטה הצרפתית מחסרים בכל שלב מספרים בעלי כינויים שווים (יחידות מיחידות, אלפים מאלפים).

■ בשתי השיטות כאשר נוצר חסר בספרה מסוימת של המחוסר (המספר העליון) - מוסיפים 10 לספרה הזאת (ה-10 הזה הוא 10 יחידות אם החסר הוא בספרת היחידות, והוא 10 אלפים אם החסר הוא בספרת האלפים). כאשר ההבדל בין השיטות הוא האופן שבו דואגים לכך שהוספה זו לא תשנה את ההפרש: אצלנו **מחסרים 1** מהספרה העומדת משמאל ל"חסר" **במחוסר** (המספר העליון), ואילו בצרפת מוסיפים 1 לספרה העומדת משמאל ל"חסר" **במחסר** (במספר התחתון).

■ העיקרון של השיטה שלנו הוא של פריטה מהפוזיציה הבאה של המחוסר (המספר העליון), ואילו העיקרון הצרפתי הוא של "הזהה" של ההפרש על-ידי הוספה וחיסור של אותו מספר.

■ יתרון גדול של החיסור הצרפתי הוא שכאשר יש צורך בהוספה-התוספת באה תמיד על-ידי קשר עם העמודה הסמוכה משמאל בלבד, ואף פעם איננו מתרחקים לעמודות יותר רחוקות. לעומת זאת בחיסור שלנו קורה, כשיש אפסים במספר המחוסר (העליון), שאנו נזקקים לעזרתן של עמודות רחוקות יותר, ואז אנו פורטים מספר פעמים, כפי שראינו בדוגמה האחרונה. במקרים כאלה החישוב הצרפתי יותר פשוט וחסכוני.

■ יתרון נוסף של השיטה הצרפתית הוא בכך שכאשר אנו "מחזירים" את ה-10 שהוספנו - הסימון הוא תמיד על-ידי הספרה 1 במקום המתאים, ואף פעם איננו נזקקים לספרה אחרת. באופן כזה יוצא שאף פעם איננו "מוחקים" ספרות ואיננו מחליפים אותן באחרות.

■ הניסיון מראה שבפגישה הראשונה עם דרך החיסור הצרפתית היא נראית לישראלים כמסובכת וקשה. אולם הניסיון עם מבוגרים מראה שאחרי התנסות קצרה בפתרון תרגילי חיסור בדרך הזאת- רואים את היופי ואת הקומפקטיות שלה.