

מתמטיקה - "היא הייתה אומרת" - דמות המורה (למתמטיקה) כפי שמתקף בכתביה של נחמה ליבוביץ'

הוראת מתמטיקה	נחמה ¹ - הוראת תנ"ך	
הסרת "פחדי מתמטיקה", חיבוב הלימוד	חיבוב התורה²	מטרת-על רגשית
להקנות דרכים של גישה חכמה ולוגית לחומר עיוני כללי ובפרט לחומר כמותי ומספרי	להקנות את ההבנה ש"הפוך בה והפוך בה דכולה בה" ³	מטרת-על עיונית
עיון מדוקדק במשמעות הפעולות המתמטיות בכלל והמספריות בפרט ובקשר ביניהן	עיון מדוקדק בפרק כיחידה בפסוק כיחידה ובמילה הבודדת	דרכים כלליות בהוראה
הקניית שפה לדין ולהבעת רעיונות מתמטיים	הקניית שפה לעיון במקורות ובמה שלומדים מהם	מטרות הוראתיות כלליות
הבניית ידע חדש על ידע קודם	הבניית ידע חדש על ידע קודם	
הקניית מיומנויות מתמטיות תוך שימוש בהבנת המושגים והפעולות, לימוד התפקידים של הפעולות השונות והמושגים השונים והקשר ביניהם	הקניית מיומנות קריאה במפרשים לימוד השוואת מקורות ופירושים ניתוח הבדלים	מטרות הוראתיות ייחודיות למקצוע

כתיבה: ד"ר מריט דרעי | מדריכה ארצית למתמטיקה בחמ"ד אידה שלום ומירב דדון | מדריכות למתמטיקה במחוז ירושלים * תודה רבה לד"ר מירה עופרן על תרומתה לחשיבה, לדיוק ולחידוד הכתיבה.

"אין הרצאת הדברים לפני התלמידים - גם אם תהיה סדורה ובנויה כהלכה - דרך הוראה אמיתית.

השמעת דברים לאזני השומעים איננה הדרך לפקחת עיניים ולפתחת הלבבות לקראת הדברים הנאמרים בכתוב. כבר הורו גדולי מחנכים וחזרו ושינונו לנו, שאין אדם לומד מתוך שמיעה, מתוך מצב של סבילות, מתוך שמושיטים לו דבר בקנה, ואין לימוד ממש אלא מתוך פעילות, מתוך יגיעה, מתוך אימוץ חושים ואימוץ כוחות הרוח והנפש".

(נחמה ליבוביץ, הוראת הפטרת יום ב' של ראש השנה, מתוך מאסף לענייני חינוך והוראה, ירושלים תשכ"ח)

מבוא

כבר בשנות ה-30 של המאה ה-20 הציגה נחמה ליבוביץ תפיסת הוראה שלפיה שיטת הקניית הידע ה"מסורתית" והנפוצה בקרב מורים עד היום, גם אם היא סדורה ובנויה כהלכה, אינה מאפשרת למידה משמעותית ומעמיקה. תפיסתה את ההוראה והלמידה תואמת עקרונות של למידה מתוך הבנה, המובאים בספרות המחקר בחינוך בכלל ובחינוך המתמטי בפרט. עקרונות אלו מבוססים על הגישה של הוראה כהבניית ידע, המדגישה כי על התלמידים להיות פעילים בלמידתם ולבצע את הפעולות המרכזיות בשיעור, תוך שהמורה משמש מומחה בתחום התוכן ומתוך כך מנחה ומשתתף בלמידה.

בטבלה הבאה נציג מטרות-על ואמצעים להוראה מיטבית העולים מתוך כתביה של נחמה ליבוביץ' ואת השתקפותם בהוראת מתמטיקה.

1 פרקי נחמה: ספר זיכרון לנחמה ליבוביץ, עורכים: משה ארנד, רות בן-מאיר, גבריאל חיים כהן

2 "מטרת ההוראה היא חיבוב התורה על לומדיה". <https://did.li/A8VfT>

3 "יש להראות ללומד שאין התורה ספר מן הספרים שגומרים אותם, אלא שיש להפוך בה ולהפוך בה, ששבעים פנים לה ובכל פעם שאתה חוזר ולומד אותה, מתגלה פן חדש שבה, שאין באים עד חקר דבריה ואין דולים את מימיה". <https://did.li/A8VfT>



מטרות היחידה

- ✓ התלמידים יתמודדו עם בעיה מילולית הדורשת כפל של שלם במספר מעורב, על בסיס ידע קודם.
- ✓ התלמידים יתנסו במשימה אוריינית, רלוונטית, המשלבת תוכן מתמטי עם מקורות יהודיים וקטע מידע.
- ✓ התלמידים יעמיקו את הידע וההבנה באמצעות התנסות פעילה ושיח מתמטי עם עמיתים ועם המורה במהלך העבודה העצמית והדיון במליאה.
- ✓ התלמידים יקשרו בין דרכים שונות לפתרון הבעיה תוך התייחסות לדרך היעילה ביותר.



ידע קודם

משמעות הכפל, משמעות השבר, מספר מעורב, חוק הפילוג, חישוב שטח מלבן, כפל שלם בשבר פשוט.

"היא הייתה אומרת"

"שיעור הניתן בכיתה [...] לעולם אינו עומד בפני עצמו, כבחלל ריק, מבלי שקדמו לו שיעורים רבים באותו מקצוע המכשירים את התלמיד לקראתו, ומבלי שיבואו שיעורים אחרים אחריו, אשר על המורה להדריך את התלמידים לקראתם".



אביזרים נלווים

שברים בעיגולים / שברים במלבנים, יישומון להמחשת כפל שלם במספר מעורב



משימת פתיחה (חזרה על ידע קודם)

אורכו של שולחן מלבני הוא 5 ס"מ ורחבו 1/2 ס"מ. מהו שטחו?

נחמה ¹ - הוראת תנ"ך	הוראת מתמטיקה	
לימוד מתוך מאמץ המביא להבנה וכך גורם להנאה ⁴	לימוד מתוך מאמץ המביא להבנה וכך גורם להנאה	כללי
המחשה - ויזואלית ומילולית ניתוח מילולי ⁵	המחשה - ויזואלית ומילולית ניתוח מילולי (שיח מתמטי)	אמצעים דידקטיים

בדוגמה שלהלן תוצג יחידת הוראה אשר תדגים כיצד מטרות-העל העולות מתוך דמות המורה בכתביה של נחמה ליבוביץ באות לידי ביטוי בשיעור מתמטיקה. בשיעור יודגמו מטרות מרכזיות, מובן שניתן להקיש על מטרות נוספות שמשתקפות מתוך הטבלה שלעיל בכל שלב בשיעור.

◀ **שימו לב!** הערות השוליים יכללו בין היתר דגשים והמלצות למורה.



נושא יחידת ההוראה

כפל שלם במספר מעורב



שכבת גיל

ה'ו' (אפשר גם בסוף כיתה ד', ולהתאים את הרעיון המתמטי בהתאם



משך הזמן

2 שיעורים (90 דקות)

4 נחמה ליבוביץ, הוראת הפטרת יום ב' של ראש השנה, מתוך מאסף לענייני חינוך והוראה, ירושלים תשכ"ח

5 "ולא ינוח ולא ישקוט [המורה] עד שיבארם לתלמידיו ויציגם לפניהם לפחות בתמונה או בציור על הלוח [...] אין על המורה להרגיש עצמו פטור מכל מצוות המחשה ולהשתמש בביטויים כלליים במילים ריקות וסתמיות כאלה ששום תלמיד לא יצייר". (פרקי נחמה: ספר זיכרון לנחמה ליבוביץ, עורכים: משה ארנד, רות בן-מאיר, גבריאל חיים כהן)

הצגת המשימה המרכזית⁶

"היא הייתה אומרת"

"לחבב את התורה על לומדיה באמצעות פקחת עיני התלמידים לראות ואת ליבם להבין.

יש להראות ללומד שאין התורה ספר מן הספרים שגומרים אותם, אלא שיש להפוך בה ולהפוך בה, ששבעים פנים לה ובכל פעם שאתה חוזר ולומד אותה, מתגלה פן חדש שבה, שאין באים עד חקר דבריה ואין דולים את מימיה".

משפחת לוי ומשפחת כהן בנו סוכה.

מידות הסוכה של משפחת לוי הן: אורך - 4 מטר רוחב - $3\frac{1}{2}$ מטר וגובה - 90 ס"מ.

מידות הסוכה של משפחת כהן הן: אורך - 3 מטר, רוחב - $4\frac{1}{2}$ מטר וגובה מטר $2\frac{1}{2}$.

1. האם שטח הסוכה של משפחת כהן שווה, גדול או קטן משטח הסוכה של משפחת לוי? הסבירו.

2. האם שתי הסוכות כשרות? (העזרו במקור ההלכתי על מידותיה של סוכה כשרה ובקטע המידע על המרת יחידות המידה המקראיות ליחידות המידה של ימינו)

למורה: במסגרת הדיון על דרכי הפתרון של התלמידים מומלץ לחזור על רעיונות מתמטיים שהתלמידים למדו לפני השיעור הנוכחי ומהווים בסיס של ידע קודם לקראת המשימה של שיעור:

1. שטח מלבן מתקבל באמצעות הכפלת אורך צלע אחת (אורך) באורך הצלע הסמוכה לה (רוחב): $5 \times \frac{1}{2}$
2. משמעות הכפל בתרגיל זה כ"פעמים" (5 פעמים חצי) וביסוס ההבנה מדוע כופלים במונה ולא במכנה (המכנה הוא כינוי (שם) של החלקים שאותם **אנו מונים** (סופרים).
3. חוק החילוף מאפשר לבצע שינוי סדר על ידי החלפת המקום של שני מספרים המשתתפים בפעולה, והוא חל אך ורק על פעולת חיבור ופעולת כפל. לכן התרגיל $5 \times \frac{1}{2}$ **שקול לקודמו. בתרגיל הנוכחי משמעות הכפל משתנה ל"של" או "מתוך".** זו אינה משמעות חדשה אלא ניסוח מילולי חדש, כי מבחינת השפה העברית אי אפשר לומר (למשל) שלישי פעמים תשע, ובמקום זה אומרים שלישי "של" תשע, או שלישי "מתוך" תשע.
4. כאשר כופלים שלם בשבר אפשר להשתמש בחיבור חוזר.

הרעיון המתמטי של השיעור הנוכחי:

כאשר כופלים שלם במספר מעורב אפשר להפוך את המספר המעורב לשבר גדול מ-1 ולהשתמש באלגוריתם של כפל שלם בשבר.



⁶ **למורה:** מומלץ להקרין את הבעיה על הלוח, וביחד עם התלמידים לקרוא את המשימה. אחר כך אפשר לתת לתלמידים לשער איזו מבין שתי הסוכות בעלת שטח גדול יותר והאם הסוכות כשרות (התלמידים יכתבו את השערותיהם במחברת או על דף ממו באופן עצמאי, יקפלו וישמרו בצד).

עבודה עצמית⁷

"היא הייתה אומרת"

"כבר הורו גדולי מחנכים וחזרו ושיננו לנו, שאין אדם לומד מתוך שמיעה, מתוך מצב של סבילות, מתוך שמושיטים לו דבר בקנה, ואין לימוד ממש אלא מתוך פעילות, מתוך יגיעה, מתוך אימוץ חושים ואימוץ כוחות הרוח והנפש".

שלבים בעבודה על המשימה:

התלמידים

התלמידים יחשבו לחוד וביחד על דרך הפתרון (ניתן להשתמש בציור, בשברים בעיגולים / מלבנים, בידע קודם או בכל דרך אחרת). התלמידים יתעדו את דרך הפתרון במחברת באופן מפורט.

תלמידים שסיימו את עבודתם יחשבו על דרך פתרון נוספת, שונה, לשאלה.

"היא הייתה אומרת"

"עליו (על התלמיד) להיות יודע לשאול, עליו להיות יודע מהי תשובה נכונה על שאלה שנשאלה".

שלחן ערוך, אורח חיים - הלכות סוכה

סימן תרלד: שלא תהיה פחות מן שבעה על שבעה

א סָפָה שְׂאִין בַּהּ שִׁבְעָה עַל שִׁבְעָה, פְּסוּלָה; וְלַעֲנֵן גְּדֹל, אִין לָהּ שְׁעוֹר לְמַעְלָה.

סימן תרלג: דין גבה הסכה

א סָפָה שְׂהִיא גְבוּהָה לְמַעְלָה מֵעֲשָׂרִים אֲמָה, פְּסוּלָה, בֵּין שְׂהִיא גְדוּלָה בֵּין שְׂהִיא קְטָנָה, בֵּין שְׂמַחְצוֹת מְגִיעוֹת לְסֶכֶךְ בֵּין שְׂאִינָן מְגִיעוֹת; אֲבָל עֲשָׂרִים, פְּשָׂרָה אֲפִלוּ כָּל סֶכְכָה לְמַעְלָה מֵעֲשָׂרִים, כִּיּוֹן שְׂאִין בְּחֻלְלָה אֵלָּא עֲשָׂרִים.

ח סָפָה שְׂאִינָה גְבוּהָה עֲשָׂרָה טְפָחִים, פְּסוּלָה.

יחידות מידה

טפח (טפחא) - מידה מקראית. בציווי על בניית שולחן לחם הפנים שבמשכן נצטווה משה "ועשית לו מסגרת טפח סביב" (שמות, כה, כה). בארמית לעיתים מכונה 'טפחא'. **משמעות תאורטית:** רוחב אגרוף קמוץ. **הגדרה הלכתית:** 4 אצבעות. לפי החזון איש כ-10 ס"מ (9.6 ס"מ).

אמה - מידה מקראית [בציווי ה' לנח על מעשה התיבה: "שלש מאות אמה ארך התבה, חמשים אמה רחבה, ושלשים אמה קומתה" (בראשית ו, טו)]. **משמעות תאורטית:** אורך ידו של אדם בינוני מהמרפק ועד לקצה האצבע אמה. **הגדרה הלכתית:** אמה רגילה - 6 טפחים. לפי החזון איש כ-60 ס"מ (57.6 ס"מ)

7 למורה: מומלץ לתת לתלמידים הנחיות מדויקות לפני שלב העבודה על המשימה. למשל:

1. עבדו ביחידים / בזוגות / בשלושות / תחילה ביחידים ואחר כך בזוגות.
2. קראו את הבעיה היטב ונסו להבין אותה / נסו לתאר את הבעיה במילים שלכם.
3. כתבו דרך פתרון מלאה במחברת.
4. השתמשו בייצוגים שונים לפי הצורך (ציור, אמצעי המחשה של שברים, ידע קודם).
5. לאחר זמן העבודה שעליו תחליט המורה, זוגות שעבדו יחד יתבקשו להסתובב זה לזה, לשתף ברביעיות בצורה הדדית בדרכי הפתרון ולדון בהן.

מסתובב בין התלמידים, שואל שאלות מעקב אחר החשיבה שלהם (למשל: האם הבנת את מה ש-א' אמרה? האם את מסכימה עם ב' שבגלל חוק החילוף שטחי הסוכות שווים? מה דעתכם על דרך הפתרון שהציגו בפניכם זוג א'? איך בדקתם אם השטחים שווים או שונים?) ומכוון את מי שצריך להשתמש באמצעי המחשה, לצייר במחברת, לכתוב ועוד.

"היא הייתה אומרת"

"למורה אחריות מיוחדת באשר לידיעת התכן שהרי הוא משמש כמקור ראשוני להבנת הלומד את תחום התכן".

ב. הצגת דרכי הפתרון במליאה⁸

"היא הייתה אומרת"

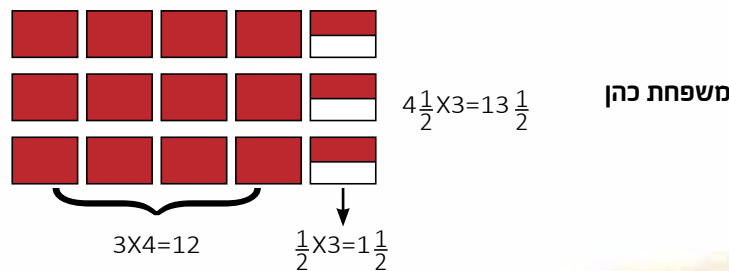
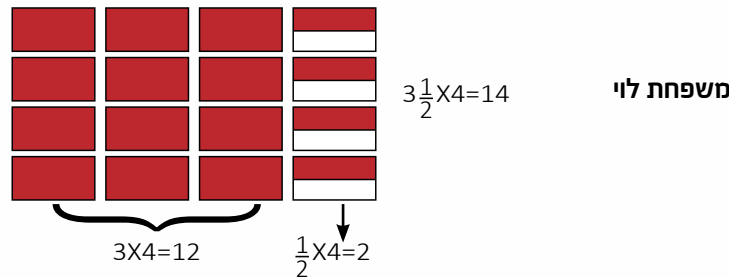
"להכיר בחשיבות השפה, הניסוח והמילה..."

"ולא ינוח ולא ישקוט (המורה) עד שיבארם לתלמידיו ויציגם לפניהם לפחות בתמונה או בציור על הלוח [...] אין על המורה להרגיש עצמו פטור מכל מצוות המחשה ולהשתמש בביטויים כלליים במילים ריקות וסתמיות כאלה ששום תלמיד לא יצייר בדמיונו".

"אין ההכרעה חשובה, אלא עצם העבודה".

"לכן אל תשאל בהכנתך: 'איך אומר להם את אשר יש בידיעתי ובלבי לאמר?' אלא זו השאלה אשר תעמיד לפניך: 'איך אובילם ואדריכם עד אשר יאמרו הם את אשר יש לאמר?'"

1. בעזרת אמצעי המחשה קונקרטיים או ציור:



בשלב זה המורה בונה את מהלך הדיון במליאה - מגדיר לעצמו ובוחר אילו פתרונות יוצגו על הלוח ובאיזה סדר יוצגו (למשל בסדר הבא: באמצעות אמצעי המחשה קונקרטיים / ויזואליים, ציור, חיבור חוזר, פילוג, כפל שלם בשבר גדול מ-1). מומלץ לכתוב את סדר הצגת דרכי הפתרון על דף ממו. אם ישנן שגיאות אפשריות לציין אותן ולהפעיל שיקול דעת כיצד להתייחס אליהן במהלך הדיון. לאחר כ-15-20 דקות עבודה עצמית, המורה יבקש מכל זוג תלמידים להסתובב לזוג מאחוריו ולדון ברביעיות בדרכי הפתרון.

איסוף תשובות התלמידים ודיון במליאה

א. אימות ההשערות: פתחו את ההשערות ששיערתם כתשובה לשאלה 1 וכתבתם על דף הממו. האם ההשערות ששיערתם בהתחלה היו נכונות? מי קיבל תשובה שונה ממה ששיער לאחר שפתר? מה בלבד אתכם? מה הטעה אתכם?

8 התלמידים יציגו את פתרונותיהם **על הלוח** לפי הסדר שעליו החליט המורה (למשל: פתרון באמצעות אמצעי המחשה ויזואליים, ציור, חיבור חוזר, חוק הפילוג, כפל שלם בשבר גדול מ-1) ויסבירו את דרך הפתרון לכלל הכיתה.

2. בעזרת חיבור חוזר:

$$4 \times 3\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2} = 12 + \frac{4}{2} = 14 \quad \text{משפחת לוי}$$

$$3 \times 4\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2} = 12 + \frac{3}{2} = 13\frac{1}{2} \quad \text{משפחת כהן}$$

3. בעזרת חוק הפילוג:

$$4 \times 3\frac{1}{2} = 4 \times 3 + 4 \times \frac{1}{2} = 12 + \frac{4}{2} = 14 \quad \text{משפחת לוי}$$

$$3 \times 4\frac{1}{2} = 3 \times 4 + 3 \times \frac{1}{2} = 12 + \frac{3}{2} = 13\frac{1}{2} \quad \text{משפחת כהן}$$

4. בעזרת כפל שלם בשבר גדול מ-1:

$$4 \times 3\frac{1}{2} = 4 \times \frac{7}{2} = \frac{28}{2} = 14 \quad \text{משפחת לוי}$$

$$3 \times 4\frac{1}{2} = 3 \times \frac{9}{2} = \frac{27}{2} = 13\frac{1}{2} \quad \text{משפחת כהן}$$

דין בתשובות לשאלה 1

האם שטח הסוכה של משפחת כהן שווה לשטח הסוכה של משפחת לוי / גדול ממנו / קטן ממנו? הסבירו.

דוגמאות לשאלות לדיון, המקדמות שיח מתמטי להעמקת החשיבה של התלמידים, בעקבות דרכי הפתרון שהוצגו:

1. מי מבין את דרך פתרון 1 ויכול לחזור על הדרך במילים שלו?

2. מי יכול להסביר את הדברים שאמר תלמיד א'?

3. האם אתם מסכימים / לא מסכימים עם אחת מדרכי הפתרון המוצגות? מדוע?

4. האם יש קשר בין דרך פתרון 1 לדרך פתרון 2?

5. האם יש קשר בין דרך פתרון 2 לדרך פתרון 3?

6. האם דרך פתרון 4 מזכירה לכם רעיון שלמדנו בשיעורים קודמים? אם כן, איזה רעיון? (כפל שלם בשבר פשוט)

7. טענה: "שטח שתי הסוכות שווה כי מתקיים חוק החילוף". האם הטענה נכונה? האם מתקיים חוק החילוף בין שני התרגילים: $4 \times 3\frac{1}{2}$ ו $3 \times 4\frac{1}{2}$? אם כן, הסבירו. אם לא, נמקו מדוע.

8. מהי דרך הפתרון היעילה ביותר ומדוע?

9 **למורה:** אם התלמידים לא הקישו מהידע הקודם (כפל שלם בשבר פשוט) שניתן לפתור בדרך זו, המורה יציג דרך זו כדרך נוספת על אלו שהוצעו וינסה להביא את התלמידים ליצירת קישוריות בין כפל שלם בשבר פשוט לכפל שלם בשבר גדול מ-1 ולהבין את הדומה והשונה בין שני האלגוריתמים (דומה - כפל שלם בשבר, אותה דרך פתרון. שונה - פעם הגורם שאינו השלם קטן מ-1 ופעם גדול מ-1). בשלב זה, לאחר שלב העבודה העצמית והדיון בכיתה, התלמידים יהיו בשלים לקשור בין דרכי הפתרון ולאמץ דרך נוספת הבנויה על ידע קודם שנלמד בשיעורים קודמים.

דיון בתשובות לשאלה 2

האם שתי הסוכות כשרות? (שאלה אוריינית המתבססת על קריאה, הבנה ושימוש בשני קטעי המידע שניתנו לתלמידים)

ניתן להציג את התשובה לשאלה בעל פה, ואם יש דרכי פתרון מעניינות שתועדו במחברות - להציגן על הלוח. כמו כן, במידה שיש שתי תשובות סותרות יש לכתוב את שתיהן על הלוח.

דוגמאות לשאלות לדיון המקדמות שיח מתמטי, מעמיקות את החשיבה ומתייחסות לשאלה 2:

1. **הסבירו כיצד קבעתם** האם הסוכות כשרות.

2. **אילו ראיות מהטקסט** סייעו לכם בדרך לפתרון השאלה?

3. מי הבין את הטיעון של א' **ויכול לחזור עליו במילים שלו?**

4. **מה המשמעות** של שבעה על שבעה? **הסבירו.**

5. א' טוען כי רק הסוכה של משפחת כהן כשרה וב' טוען ששתיהן כשרות. **מי לדעתכם צודק ומדוע?**

6. **מה היה קורה לכשרות הסוכה אילו** הייתי משנה את גובה הסוכה של משפחת לוי מ-90 ס"מ ל-100 ס"מ? **הסבירו.**

7. **בכמה, לכל היותר,** ניתן להנמיך את **גובה** הסכך של משפחת כהן ועדיין לשמור על כשרות הסוכה?

8. בכמה ניתן להקטין את **שטח** הסוכה של משפחת כהן / משפחת לוי ועדיין לשמור על כשרות הסוכה?

דוגמאות לשאלות רפלקטיביות בשלב סיכום השיעור

1. מה למדתי היום שלא ידעתי? מה התחדד לי?

2. מי רוצה לנסח רעיון חדש שלמד בשיעור?

3. מהו הנושא (המתמטי) של השיעור?

דוגמה לשאלת המשך: דני קנה חמישה שקים של אבני חצץ לצורך בנייה. משקל כל שק של אבני חצץ הוא שניים ורבע ק"ג. מה משקל כל שקי אבני החצץ שקנה דני? פתרו בשתי דרכים שונות.