

שאלות עומק ומורכבות עבור תלמידים מחוננים ומצטיינים

לטיפול מיומנויות חשיבה גבוהות בתחום המתמטיקה לחינוך היסודי וחט"ב

כתבו : שרה גולן¹ ומרים פיטוסי²

ישנם תלמידים אשר להם חשיבה מתמטית ייחודית. אלו הם המחוננים בתחום המתמטיקה³. הולטון גפני ומילר (Holton & Gaffney, 1994; Miller 1990 in J. Stepanek) הגדירו מחוננות במתמטיקה באמצעות מספר מאפיינים:

- סקרנים לגבי מספרים ומידע מתמטי
- מבינים ומיישמים במהירות
- מזהים תבניות
- בעלי חשיבה מופשטת.
- מציעים אסטרטגיות ופתרונות גמישים ויצירתיים
- מסוגלים לבצע העברה של תובנה מתמטית לסיטואציה חדשה
- מפעילים חשיבה אנליטית, דדוקטיבית ומורכבת
- מתמידים בפתרון בעיות קשות ומורכבות
- עלולים להיות בעלי סף תסכול נמוך

כיצד נוכל לתת מענה למחוננים אלו בשיעור?

תלמידים אלו נמצאים אצלנו בכיתה כחלק מהמרקם ההטרוגני ויש לאתגר אותם באמצעות שאלות חשיבה לטיפול מיומנויות חשיבה מתמטיות, לטיפול חשיבה יצירתית, להנאה ולהנעה, ולהבנת מהות המספר.

אחת הדרכים לניסוח שאלות מאתגרות ומעשירות בכל תחום דעת היא על ידי שימוש במודל "עומק ומורכבות" של סנדרה קפלן (S.N Kaplan, in C. M. Callahan & H.L. Hertberg-Davis). מודל זה מזמן מגוון דרכים להרחבת תכני הלימוד הקיימים באמצעות שני ממדים – ממד העומק וממד המורכבות.

מודל זה של "עומק ומורכבות" הוא מודל גנרי ליצירת חומרי לימוד מותאמים המתייחסת לקצב הלמידה, עומק התכנית ומורכבות העיסוק בתחום.

¹ מדריכה ארצית, צוות המחונן בכיתתו, האגף למחוננים ולמצטיינים, המינהל הפדגוגי, משרד החינוך
² מדריכה מחוזית, צוות המחונן בכיתתו, האגף למחוננים ולמצטיינים, המינהל הפדגוגי, משרד החינוך
³ קראו עוד על מחוננות בתחום המתמטיקה ועל מתן מענה למחוננים בכיתה הרגילה בכתבה [שיעור](#) גאומטרייה כהזדמנות למתן מענה לתלמידים מחוננים ומצטיינים בכיתה הרגילה

מתן אפשרות בחירה מתוך מגוון משימות, או משימות פתוחות המיועדות לכל תלמידי הכיתה, מאפשרות ללומדים שונים התייחסות ברמות עומק ומורכבות שונות - כל אחד לפי יכולתו, ולפי מידת המסוגלות והעניין באותו הרגע.

כפועל יוצא מכך, גם ההערכה והמשוב שלנו, המורים, יהיו מותאמות: נדרוש יותר מהתלמידים בעלי היכולות הגבוהות, ונציב להם רף גבוה יותר.

ממד העומק מתייחס ל- 8 רכיבים שהם; הכרת שפת תחום הדעת, הבחנה בפרטים, זיהוי תבניות, זיהוי מגמות וגורמים משפיעים, שאילת שאלות, מציאת חוקיות, זיהוי רעיונות גדולים והכללות ואתיקה. רכיבים אלו מזמנים תהליכים חקרניים בתחום תחום התוכן הנלמד. החקרנות נעשית על ידי בחינת משמעות של עובדות ומושגים ומעבר ליצירת הכללות, עקרונות וחוקים.

ממד המורכבות מורכב משלושה רכיבים שהם; גילוי קשרים בין תחומי תוכן שונים, הבנת נקודות מבט שונות או חקר נושא לאורך ציר זמן.

מקובל לסמן כל רכיב בסמל חזותי מאפיין המורה על הרכיב שבו נעשה שימוש במשימה או בשאלה מסוימת, בכדי לעודד מודעות מטה-קוגניטיבית של התלמידים לתהליכי החשיבה בהם עוסקים.


הוראת מחוננים ומצטיינים שם דגש על טיפוח מאפיינים של לומד עצמאי. רכיב חשוב של למידה עצמאית היא שיתוף בבחירת תהליכי הלמידה ורפלקציה על התהליך; לכן, שוחחו עם התלמידים על הממדים השונים של עומק ומורכבות והצמידו סמל מאפיין לכל סוג שאלה כדי ליצור שיח מטה-קוגניטיבי והעלאת מודעות לתהליכי חשיבה.

ניתן ליישם את מודל עומק ומורכבות בכל תחום דעת. נפרט כאן הזדמנויות להעשרת הלמידה לעומק ומורכבות בתחום המתמטיקה:

תוך כדי הפירוט של מודל עומק ומורכבות נציג דוגמאות של חקר קוביות - משחק המיועד לתלמידים בגילאי 9-14.⁴

⁴ לצורך הפעילות יש להכין לכל זוג תלמידים סט של קוביות משחק עם מספר פאות שונה. וקובייה עם 6 פאות ללא ניקוד. (או עם מדבקות חלקות)

הכרת תחום הדעת


	סמל חזותי
מושגים מרכזיים ומיומנויות ייחודיות לתחום הדעת	נושאים מרכזיים
סמלים וסימנים מושגים מתמטיים תחומים מתמטיים יחידות מדידה פעולות חשבון	תכנים לדוגמה המזמנים למידה לעומק ובמורכבות בתחום המתמטיקה
מהי הצורה הגיאומטרית של הקובייה? לאיזה משפחת גופים שייכת הקובייה? כיצד מכוונים הרכיבים השונים (הדופן, הסימון, הפינה) של הקובייה? האם אתם מכירים קוביות משחק אחרות?	דוגמה : משחק חקר קוביות ⁵

הבחנה בפרטים

	סמל חזותי
מיון פרטים לקטגוריות זיהוי חיבורים או קשרים בין פרטים שונים סימון מושגי מפתח להבנת התופעה הבחנה בין עיקר לטפל	נושאים מרכזיים
מספרים, נקודות וקוים גורמים ומכפילים מציאת הבדלים	תכנים לדוגמה המזמנים למידה לעומק ובמורכבות בתחום המתמטיקה
הביטוי בקובייה שלפניכם – קוביית משחק רגילה בעלת 6 פאות, ומצאו כמה שיותר תכונות המייחדות אותה.	דוגמה : משחק חקר קוביות

⁵ חלק מן המשימות מעובדות מתוך ערוץ micmaths של Mickael :
 Launay <https://www.youtube.com/watch?v=N-DPQ7XOHnU>


שאלת שאלות

	<p>סמל חזותי</p>
<p>שאלת שאלות בעקבות תופעה</p>	<p>נושאים מרכזיים</p>
<p>ניסוח בעיות מילוליות מציאת נעלמים זיהוי מידע חסר ניתוח גרפים</p>	<p>תכנים לדוגמה המזמנים למידה לעומק ובמורכבות בתחום המתמטיקה</p>
<p>נסחו בעיות מילוליות העוסקות בקוביות. שאלו כמה שיותר שאלות על תמונה או תופעה. נסחו לפחות 2 שאלות בהקשר מתמטי השאר לאו דווקא. מיינו את השאלות שכתבתם : שאלות שאתם יודעים כיצד לפתור אותם, שאלות שניתן למצוא את התשובה עליהם בקלות, שאלות הדורשות בחינה מחדש של נתונים, שאלה שניתן לחקור, שאלה שאין עליה תשובה.</p>	<p>דוגמה : משחק חקר קוביות</p>

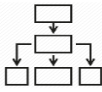
זיהוי תבנית

	<p>סמל חזותי</p>
<p>יישום חוקים ונוסחאות זיהוי תופעות מחזוריות זיהוי יחסי סיבה – תוצאה חשיבה דדוקטיבית</p>	<p>נושאים מרכזיים</p>
<p>סדר פעולות וחישובים גיאומטריים חילוק ארוך ערך מקום חקר לוח הכפל ריצוף גיאומטרי חקירת פונקציות הוכחות בגיאומטריה</p>	<p>תכנים לדוגמה המזמנים למידה לעומק ובמורכבות בתחום המתמטיקה</p>
<p>התבוננו בסכום של הניקוד על כל שתי פאות נגדיות בקובייה. מהו הסכום? מדוע לדעתכם יש סכום זהה לכל זוג פאות נגדיות? האם יש לכם הצעות אחרות לפיזור הניקוד של כל פאה בקובייה? נמקו את הצעתכם.</p>	<p>דוגמה : משחק חקר קוביות</p>


זיהוי מגמות וגורמים משפיעים

	<p>סמל חזותי</p>
<p>הבנה כיצד התופעה או התהליך משפיע על האופן שבו מבינים את העולם סביבנו</p> <p>הבנה כיצד התופעה או התהליך משפיע על מגמות עתידיות</p>	<p>נושאים מרכזיים</p>
<p>התפתחות מכונות חישוב – אנלוגיים ודיגיטליים</p> <p>שינויים בגישות לאיסוף, ארגון וייצוג נתונים</p> <p>ניתוח גרפים</p> <p>אומדן</p>	<p>תכנים לדוגמה המזמנים למידה לעומק ובמורכבות בתחום המתמטיקה</p>
<p>חשבו – אם נזרוק קובייה אחת מה הסיכוי שיצא מספר מסוים? נסו להטיל קובייה 30 פעמים והציגו בגרף עמודות את מספר הפעמים שמתקבל כל ספרה מ-1 עד 6. התבוננו בגרף. מה גיליתם? האם תוכלו לחזות מה תהיה התוצאה בפעם הבאה שתטילו קובייה?</p> <p>אם נזרוק 2 קוביות, מה הסיכוי שיצא סכום מסוים? למשל 7, 8, 12? נסו להטיל 2 קוביות 30 פעמים והציגו בגרף עמודות את מספר הפעמים שמתקבל כל סכום מ-2 עד 12.</p> <p>האם הפעם תוכלו לחזות מה תקבלו בפעם הבאה שתטילו שוב את הקובייה?</p> <p>מה הסכום שיש לו את הסיכוי הגבוה ביותר? (הסיכוי לשודד כשמשחקים בקאטן ☺) מהו הסכום שיש לו את הסיכוי הנמוך ביותר? מדוע זה קורה?</p> <p>חוק המספרים הגדולים – מה היה קורה אילו הייתם מטילים את הקובייה מספר מעט של פעמים? האם הייתם מגלים אותם תגליות? ומה יקרה עם תטילו את הקוביות מספר רב יותר של פעמים? מה החשיבות של מדגם גדול כאשר עורכים סקר או ניסוי.</p>	<p>דוגמה : משחק חקר קוביות</p>


מציאת חוקיות

	<p>סמל חזותי</p>
<p>זיהוי גורמים שמשפיעים על התופעה או על התהליך. זיהוי תבנית, חוקיות או מחזוריות</p>	<p>נושאים מרכזיים</p>
<p>חוקיות והכללות סדרות יחס</p>	<p>תכנים לדוגמה המזמנים למידה לעומק ובמורכבות בתחום המתמטיקה</p>
<p>החזיקו את הקובייה באופן כזה שנראה את ש-3 הפאות של הניקוד הנמוך ביותר בקובייה נמצאות בפאות סמוכות, ו-3 הפאות של הניקוד הגבוה ביותר בקובייה נמצאות גם כן בפאות סמוכות. כך ישנו הפרש גדול בין הסכומים של 3 הפאות. האם ניתן בקובייה של 6 פאות לסדר את הניקוד באופן כזה שכל 3 פאות יהיו תמיד באותו סכום? אם כן – הציגו את סידור הניקוד בקובייה הריקה שקיבלתם. אם לא – הסבירו מדוע לדעתכם זה לא אפשרי.</p> <p>השימוש בקוביות במשחקי מזל ובמשחקים בכלל, מבוסס על הנחה שהקובייה עשויה מחומר הומוגני יחיד, ולכן ההסתברות של הקובייה ליפול על כל אחת מהפאות שלה היא זהה ושווה ל-1/6. אך מהי ההסתברות לקבלת כל סכום מספרים בין 2 – 12 כאשר מטילים 2 קוביות? איזה סכום מספרים בעל ההסתברות הגבוהה ביותר בהטלת 2 קוביות? הטילו קוביות והפעם הכפילו את הספרות המתקבלות. כעת קבלתם משחק של לוח הכפל 6-1. אם תרצו תוכלו להטיל פעמיים 2 קוביות כדי להגיד את לוח הכפל ל-12. חקרו את לוח הכפל ונסו למצוא דברים מעניינים.</p>	<p>דוגמה : משחק חקר קוביות</p>


אתיקה

	סמל חזותי
זיהוי דילמות ערכיות וניתוחן	נושאים מרכזיים
<p>הטיית נתונים הסתברות זכויות יוצרים של גילויים מתמטיים</p>	<p>תכנים לדוגמה המזמנים למידה לעומק ובמורכבות בתחום המתמטיקה</p>
<p>קוביות משחק משמשות גם להימורים. (זהו נושא שנוי במחלוקת ולכן מתאים מאד לשיח עם מחוננים ומצטיינים) מה דעתכם על הימורים? האם ראוי לדבר על נושאים שנויים במחלוקת במסגרת הכתה? בעד או נגד? כתבו טיעון משכנע והרחיבו את הטענות שהעליתם באמצעות נימוקים מתוך מקורות מידע שתמצאו או שתיצרו בעצמכם על ידי סקרים וראיונות.</p>	<p>דוגמה : משחק חקר קוביות</p>

שינויים לאורך זמן

	סמל חזותי
תחזית והשערות לגבי השפעות והשלכות עתידות	נושאים מרכזיים
<p>מדידת שינויים בתופעות ובתהליכים השפעת גילויים מתמטיים על ההיסטוריה שינויים בפרדיגמות מתמטיות לאורך זמן</p>	<p>תכנים לדוגמה המזמנים למידה לעומק ובמורכבות בתחום המתמטיקה</p>
<p>מהי ההיסטוריה של קוביית המשחק? חקרו וערכו השוואה איך נראו קוביות משחק בתקופות שונות? מאילו חומרים היו עשויות? לאילו מטרות שימשו? האם קוביית משחק תמיד הייתה "הוגנת" עם סיכוי שווה ליפול על כל אחד מפאותיה?</p>	<p>דוגמה : משחק חקר קוביות</p>

זיהוי רעיונות גדולים והכללות

	סמל חזותי
יצירת הכללות	נושאים מרכזיים
<p>דיוק בניסוח הכללות תוך שימוש במושגים מתמטיים מתאימים</p> <p>חשיבה אינדוקטיבית - יצירת הכללות וחוקיות פתרון בעיות פתוחות</p>	<p>תכנים לדוגמה המזמנים למידה לעומק ובמורכבות בתחום המתמטיקה</p>
<p><u>פאון משוכלל</u> הוא פאון שבנוי ממצולעים משוכללים. (צלעות שוות, זוויות שוות). לפניכם פאוני משוכללים שמהם עושים קוביות למשחקים שונים (ראו איור). באילו פאוני כבר נתקלתם בתור קובית משחק? באיזה משחק? שתפו את חבריכם לקבוצה.</p> <p>האם ישנו פאון משוכלל שבו ניתן לפזר את הניקוד באופן כזה שבכל קודקוד יהיה סכום הפאות הנפגשות באותו קדקוד זהה?</p> <p>האם ניתן לשלב בין 2 הכללים בפאון משוכלל אחד? (גם סכום של 2 פאות נגדיות זהה, וגם סכום הפאות מסביב לכל קדקוד זהה?)</p> <p><u>פאון שאינו משוכלל</u> הוא פאון שלא כל הפאות שלו מורכבות מאותו מצולע (לדוגמא – כדורגל מורכב ממחומשים וממשושים...) או שמורכב ממצולעים לא משוכללים (שאינן להם צלעות וזוויות שוות)</p> <p>האם תוכלו לחשוב על פאון – שאינו פאון משוכלל שיכול לענות על 2 התנאים?</p> <p>בדקו בסט הקוביות שקיבלתם. אילו פאוני אינם משוכללים? האם הם עונים על אחד הכללים? על שניהם?</p>	<p>דוגמה: משחק חקר קוביות</p>

חמשת הפאוני האפלטוניים



עשרימון
(איקוסהדרון - 20 פאות)



תריסרון
(דודקהדרון - 12 פאות)



תמניון
(אוקטהדרון - 8 פאות)




קובייה
(קובייה - 6 פאות)




ארבעון
(טטרהדרון - 4 פאות)

איור מתוך ערך [פאון משוכלל](#) ויקיפדיה

מגוון נקודות מבט

	<p>סמל חזותי</p>
<p>התבוננות על תופעה או תהליך מנקודת מבט אחרת</p>	<p>נושאים מרכזיים</p>
<p>ניתוח טבלאות וגרפים ניתוח סטטיסטי של נתונים יצירת דוגמאות לריצוף גיאומטרי דרכים לייצוג מידע ניתוח טעויות ותפיסות שגויות</p>	<p>תכנים לדוגמה המזמנים למידה לעומק ובמורכבות בתחום המתמטיקה</p>
<p>הטילו את הקובייה 4 פעמים וחברו תרגיל עם לפחות 2 פעולות חשבון שונות (כפל, חילוק, חיבור וחסור). פתרו את התרגיל. נסו לשנות את סדר פעולות החשבון. האם התוצאה תשתנה? רבים נוטים לשנות בסדר פעולות חשבון בפתרון תרגיל עם פעולות שונות. האם גם לכם זה קרה? מדוע לדעתכם אנו נוטים לטעות? כיצד תוכלו להסביר לתלמיד ששגה על חשיבות סדר פעולות חשבון?</p>	<p>דוגמה : משחק חקר קוביות</p>

קשרים בין תחומיים

	<p>סמל חזותי</p>
<p>מציאת חיבורים בין תחומיים. התבוננות על תופעה או תהליך בכלים של תחום דעת אחר</p>	<p>נושאים מרכזיים</p>
<p>הרחבת ההבנה של מושגים, תהליכים, מיומנויות וערכים באמצעות הקשרים רב תחומיים. כגון השתקפות, אור וצל, גיאומטריה, אומנות ואדריכלות, בישול ואפייה, צרכנות נבונה, ניהול תקציב, תובנות והשראה בעקבות מתמטיקאים ומתמטיקאיות, ביקור בירקן ובגינה, מספרים במרחב האורבאני</p>	<p>תכנים לדוגמה המזמנים למידה לעומק ובמורכבות בתחום המתמטיקה</p>
<p>מה בין קוביית משחק לבין סביבון?</p>	<p>דוגמה : משחק חקר קוביות</p>

- S.N Kaplan, Depth & Complexity, Chap. 28, in C. M. Callahan & H.L Hertberg-Davis. Fundamentals of Gifted Education: Considering Multiple Perspectives, Taylor & Francis Ltd. 2017
- J. Stepanek, [Meeting the Needs of Gifted Students: Differentiating Mathematics and Science Instruction](#). Northwest Regional Educational Laboratory. Mathematics and Science Education Center. December 1999.