המרכז הישראלי למצוינות בחינוך
Israel Center for Excellence through Education

מצוינות 2000
ע"ש קרן מיטצ'ל

המכון למצוינות בהוראה

שידוכים מתמטיים

כתיבה: גלי שמעוני

עריכה: ד"ר אבי פולג

מהדורת ניסן תשס"ט
אפריל 2009

פעילות זו נעשית בקבוצות של 3-5 תלמידים.

נתונה קבוצה של ארבעה גברים: אייל, נועם, אלון וגיל.

וארבע נשים: ספיר, יערה, מאיה ותמר.

אנו מעוניינים ליצור מערכת שידוכים שבה יתקבלו ארבעה זוגות משודכים.

1. כמה מערכות שידוכים שונות אפשר ליצור?
2. כמה מערכות אפשריות בקבוצה של עשרה גברים ועשר נשים?

התברר שלכל אשה ולכל גבר העדפות לגבי השידוך המיועד. בשתי הטבלאות הבאות מופיעות העדפות אלה, מההעדפה הגבוהה ביותר המסומנת ב-1 ועד להעדפה הנמוכה ביותר המסומנת ב-4.

העדפות הגברים

	ספיר	יערה	מאיה	תמר
אייל	1	3	2	4
נועם	4	1	3	2
אלון	2	3	4	1
גיל	2	3	1	4

העדפות הנשים

	אייל	נועם	אלון	גיל
ספיר	3	1	2	4
יערה	1	3	2	4
מאיה	2	1	4	3
תמר	3	2	4	1

3. ערכו דיון בתוך הקבוצה כשמטרתכם למצוא את מערכת השידוכים הטובה ביותר.
4. האם לדעתכם מערכת השידוכים הטובה ביותר היא זו שבה סכום ההעדפות של הגברים והנשים בה הוא הקטן ביותר?

פתרון למורה

1. מספר מערכות השידוך האפשרויות בקבוצה בת ארבעה גברים וארבע נשים הוא $4!=24$. נשדך למשל את הגברים לנשים: לאישה הראשונה 4 אפשרויות שידוך. לאחר שאישה זו משודכת נותרות לאישה השניה 3 אפשרויות. לאחר ששתי הראשונות משודכות נותרו לשלישית שתי אפשרויות, מה שמותיר לרביעית אפשרות שידוך אחת. סך הכל $4\times3\times2\times1=24$. כדאי לצלם לתלמידים את התרשים שבסוף הפתרון למורה (עמוד 5). בעזרת תרשים זה ניתן להבין מדוע השתמשנו בפעולת הכפל. בקשו מהתלמידים להשלים את זוגות השמות החסרים במלבנים (השמות הם אותם שמות כמו בשאלה 2).

2. בקבוצה של 10 גברים ועשר נשים ישנן $10!=3,628,800$ מערכות שידוכים שונות.

3. באופן <u>מכוון</u> לא הגדרנו בשלב זה מהי מערכת שידוכים טובה. לאחר הדיונים הפנימיים תתבקש כל קבוצה להציג את מערכת השידוכים שקבלה תוך הצגת נימוקים מתאימים. ברור כי השידוך 1,1 הוא הטוב ביותר, ואילו 4,4 הוא הגרוע ביותר. כמו כן ברור שהשידוך 2,2 עדיף על השידוך 2,3, אך מה טוב יותר 2,2 או 1,3? סביר להניח ששיקולים מעין אלו יעלו בדיוני הקבוצות. בכל פעם שקבוצה מסוימת מציגה את פתרונה, יש לאפשר לשאר תלמידי הכיתה להעיר את הערותיהם. כמו כן מומלץ להשוות בין התוצאות של הקבוצות השונות.

   נציג כאן שתי דרכים אפשריות להסתכלות על הבעיה שלנו. תוכלו להציג לתלמידים דרכים אלה כמו שהן, או (וזה אף טוב יותר) לשלב את הרעיונות המופיעים בהן במהלך הדיונים של הקבוצות. כאן נקבל תשובה לשאלה מספר 4.

   א. נתבונן בסדרת השיקולים הבאה:

   מאחר שאין אף זוג שיכול להשתדך 1,1 וגם לא 1,2, נרשום את כל השידוכים מהצורה 2,2. לצורך התרגיל נניח שאנחנו מייחסים לשידוך זה עדיפות על השידוך 1,3. אנחנו יכולים להצדיק זאת בכך שלדעתנו מוטב שכל אחד יוותר קצת מאשר אחד ירוויח והשני יפסיד. שידוכים כאלה הם:

אייל (2)	נועם (2)	אלון (2)
↕	↕	↕
מאיה (2)	תמר (2)	ספיר (2)

נוסיף את השידוך הרביעי שנותר:

גיל (3)
↕
יערה (4)

אמנם השידוך הרביעי אינו מוצלח ביותר אך בסך הכל נראה שיצרנו מערכת שידוכים לא רעה. זה המקום להכניס מושג חשוב וטבעי, שמעניין לראות אם יעלה גם בדיוני התלמידים:

מערכת שידוכים נקראת יציבה אם לא קיימים בה גבר ואישה (שאינם זוג משודך במערכת) כך שהאישה מעדיפה גבר זה על פני הגבר המשודך לה ואילו הגבר מעדיף אישה זו על פני האישה המשודכת לו.

במקרה שלנו המערכת אינה יציבה! נועם רוצה את יערה (1), וזה יותר ממה שהוא רוצה את המשודכת שלו תמר (2). כמו כן יערה רוצה את נועם (3), וזה יותר ממה שהיא רוצה את המשודך שלה גיל (4). המערכת תתפרק כי נועם ויערה יעזבו את בני זוגם ויהפכו לזוג.

הערה: מבחינה עקרונית אפשר לא להסכים עם הרעיון שתנאי הכרחי להיותה של מערכת טובה היא יציבותה. יתכן שבראיה קבוצתית כדאי לגברים ולנשים לתכנן מערכת שאמנם אינה יציבה אך הנותנת מקסימום תועלת לקבוצה. לעומת זאת, כאשר כל אחד דואג לאינטרסים של עצמו, נראה שמערכת לא יציבה, סופה לקרוס. אפשר לפתח כאן דיונים פילוסופים עמוקים, אך מאחר שבסופו של דבר במתמטיקה עסקינן, נגדיר לתלמידים שמעתה ועד לסיומה של החוברת, מערכת שידוכים יציבה תחשב בעינינו תמיד כטובה יותר מאשר זו שאינה יציבה.

מעניין לראות מה קורה במערכת השידוכים בדוגמא שהבאנו כאשר נועם ויערה הופכים לזוג ואילו גיל ותמר שנזנחו הופכים גם הם לזוג:

אייל (2)	אלון (2)	נועם (1)	גיל (4)
↕	↕	↕	↕
מאיה (2)	ספיר (2)	יערה (3)	תמר (1)

תמר הרוויחה מהסידור (עלתה מ2- ל1-) ואילו גיל הפסיד (ירד מ3- ל4-).
האם מערכת זו יציבה? ובמילים אחרות: האם יצליח גיל המתוסכל לפרק זוג אחר?
התשובה היא לא. אפשר לראות זאת בנקל בטור של גיל בטבלת "העדפות הנשים":
עבור ספיר ויערה הוא בעדיפות (4), ואצל מאיה הוא בעדיפות (3).

ב. נתבונן בסדרת השיקולים הבאה:
מאחר שאין אף זוג שיכול להשתדך 1,1 וגם לא 1,2, נרשום את כל השידוכים מהצורה 2,2 וגם את כל השידוכים 1,3 (נניח שאנו מאמינים ששידוכים אלה טובים באותה המידה כי 4=2+2=3+1):

אייל (2)	נועם (2)	אלון (2)
↕	↕	↕
מאיה (2)	תמר (2)	ספיר (2)

אייל (1)	אייל (3)	נועם (1)	נועם (3)	גיל (1)
↕	↕	↕	↕	↕
ספיר (3)	יערה (1)	יערה (3)	מאיה (1)	מאיה (3)

ארבעת המלבנים מכילים את מערכת השידוכים היחידה שאפשר להפיק מ-8 אפשרויות אלה (בדקו זאת!!!). האם מערכת זו יציבה? הציגו שאלה זו לתלמידים.
התשובה היא לא. מאיה תעדיף את אייל (2) על פני המשודך שלה גיל (3), ואילו אייל יעדיף את מאיה (2) על פני יערה המשודכת לו (3).

נבדוק כעת מה קורה במערכת השידוכים בדוגמא שהבאנו כאשר מאיה ואייל הופכים לזוג ואילו גיל ויערה שנזנחו הופכים גם הם לזוג:

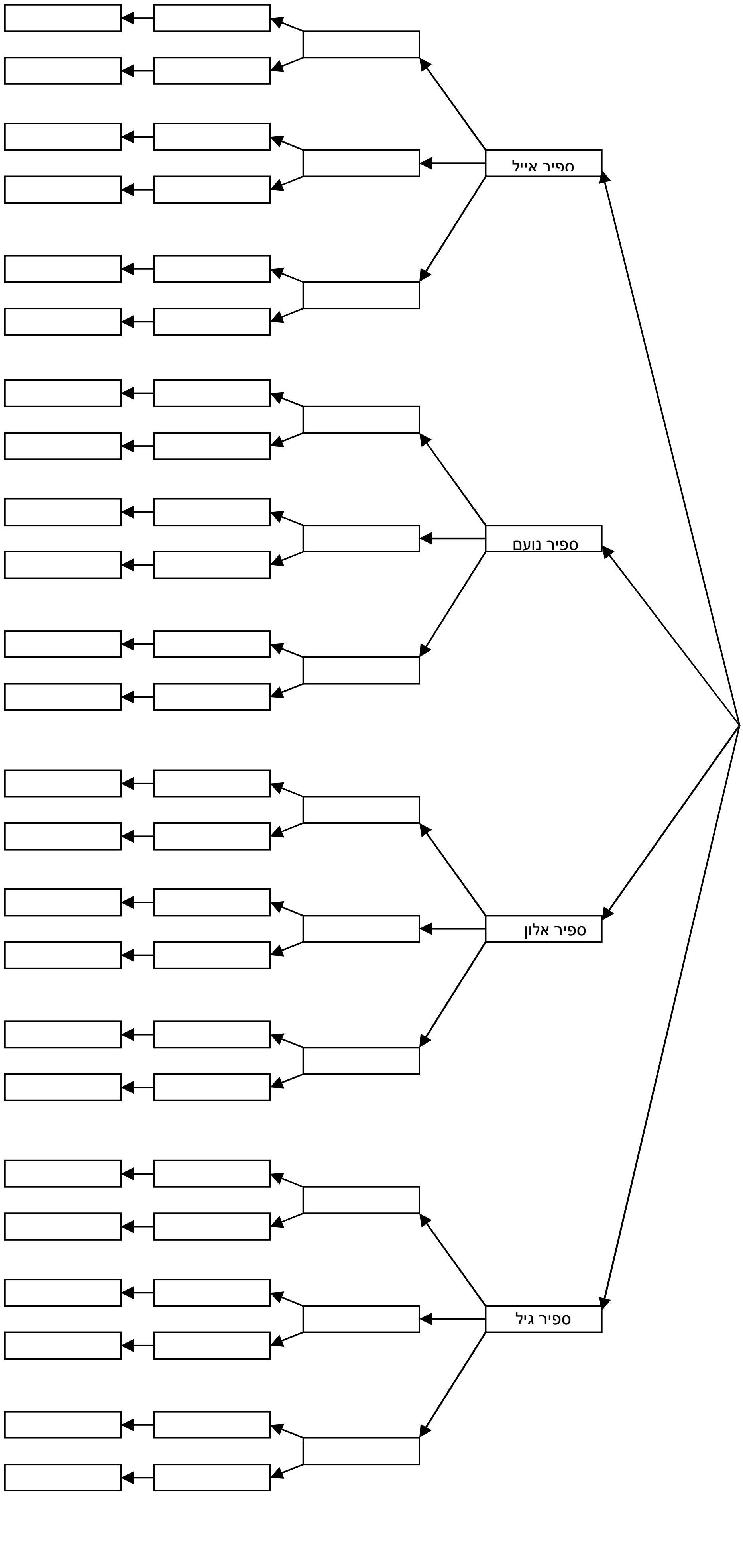
אייל (2)	נועם (2)	אלון (2)	גיל (3)
↕	↕	↕	↕
מאיה (2)	תמר (2)	ספיר (2)	יערה (4)

גיל הפסיד מהסידור (ירד מ1- ל3-). גם יערה הפסידה (ירדה מ1- ל4-).
אבל זוהי בדיוק מערכת השידוכים שהצענו בסעיף א'!!! והרי הראנו שגם מערכת זו אינה יציבה. נועם ויערה יפרקו את המערכת ורק אז היא תגיע ליציבות.

הערה: שימו לב שבמערכת שהצענו בסעיף ב', ושהתבררה כבלתי יציבה סכום כל ההעדפות הוא 16. לעומת זאת, במערכת היציבה אותה קיבלנו בסופו של דבר סכום ההעדפות הוא 17.
כמו כן ברור שגם <u>אם קיימת</u> עוד מערכת שידוכים יציבה הרי שסכום ההעדפות בה הוא 16 או פחות (הזוגות הנמוכים ביותר הם 2,2 ו1,3,- כלומר סכום כל זוג הוא לפחות 4, וראינו שאי אפשר להגיע למערכת יציבה על ידי שימוש בזוגות אלה בלבד!!).
מכאן מתקבלת המסקנה שהיא גם התשובה לשאלה 4: המערכת בעלת סכום ההעדפות הנמוך ביותר אינה בהכרח המערכת הטובה ביותר! האם מסקנה אינה נוגדת את האינטואיציה הראשונית?

הערה: אפשר לקיים את כל הפעילות של דף תלמיד מספר 1 בצורה של משחקי תפקידים. כל קבוצה תמנה שמונה תלמידים, כאשר כל תלמיד יקבל לידיו את טבלאות ההעדפות וימלא את התפקיד של אחד מהגברים/נשים. יתנהל משא ומתן בניסיון ליצור מערכת שידוכים טובה ביותר. אין ספק שבדרך זו יעלה מושג היציבות.
מורה הסבור שקבוצות בנות שמונה תלמידים גדולות מדי, יכול לבנות טבלאות אחרות עבור שלושה גברים ושלוש נשים.

חישוב מספר מערכות השידוכים במקרה של ארבעה זוגות



דף תלמיד 2

נחזור אל טבלת ההעדפות שהופיעה בדף תלמיד מספר 1 (בצענו שינוי קטן בשורה של נועם בטבלת העדפות הגברים):

העדפות הגברים

	ספיר	יערה	מאיה	תמר
אייל	1	3	2	4
נועם	2	1	3	4
אלון	2	3	4	1
גיל	2	3	1	4

העדפות הנשים

	אייל	נועם	אלון	גיל
ספיר	3	1	2	4
יערה	1	3	2	4
מאיה	2	1	4	3
תמר	3	2	4	1

1. התבוננו במערכת השידוכים הבאה: אייל-ספיר נועם-יערה אלון-תמר גיל-מאיה.

א. האם מערכת זו היא יציבה?

ב. איזו מסקנה תוכלו להסיק ממערכת שידוכים זו?

ג. במידה שהבנתם נכון את סעיפים א' ו-ב', נסו ליצור על פי אותו רעיון מערכת שידוכים יציבה שתתחשב בהעדפות הנשים. האם הצלחתם?

2. נתונה מערכת השידוכים הבאה:

העדפות הגברים

	דנה	סיון	יעל	גלית	ענת
חנן	4	5	1	3	2
ארז	3	5	2	4	1
נדב	1	4	3	5	2
תומר	2	1	4	3	5
אורן	5	3	4	1	2

העדפות הנשים

	חנן	ארז	נדב	תומר	אורן
דנה	1	3	2	4	5
סיון	4	5	2	3	1
יעל	4	3	2	1	5
גלית	2	3	1	5	4
ענת	5	1	3	4	2

מצאו שלוש מערכות שידוכים יציבות. לגבי שתים מהערכות לא צריכה להיות לכם בעיה,

עבור המערכת השלישית פעלו באופן הבא: התחילו ממערכת השידוכים הבאה (נבחרה <u>במקריות!</u>)

:

חנן (4)	ארז (5)	נדב (3)	תומר (3)	אורן (2)
↕	↕	↕	↕	↕
דנה (1)	סיון (5)	יעל (2)	גלית (5)	ענת (2)

בצעו החלפת זוגות כך שבכל שלב גבר ואישה המעדיפים זה את זה על פני בני זוגם ישתדכו, ואילו בני הזוג הננטשים יהפכו אף הם לזוג (אפילו אם זמני). נסו לחזור על התהליך כך שבסופו תתקבל מערכת שידוכים יציבה.

3. בחרו מערכת שידוכים מקרית השונה מהמערכת הנתונה בשאלה 2, בצעו סדרת החלפות במטרה להגיע למערכת יציבה. האם קיבלתם מערכת יציבה השונה משלוש המערכות היציבות שקיבלתם בשאלה 2?

פתרון למורה

1. מערכת השידוכים הנתונה בשאלה נראית כך:

אייל (1)	נועם (1)	אלון (1)	גיל (1)
ספיר (3)	יערה (3)	תמר (4)	מאיה (3)

א. קל לראות שכל הגברים קיבלו את מבוקשם, לכולם שידוך בעדיפות (1). אין גבר שיסכים לעזוב את השידוך שלו ולכן השידוך הוא יציב. אין זה משנה מהן העדיפויות של הנשים, הן אינן יכולות לפרק את המערכת. לשידוך כזה אפשר לקרוא שידוך עבור הגברים.

ב. ישנה בעיה ליצור שידוך דומה עבור הנשים. גם ספיר וגם מאיה רוצות את נועם בעדיפות ראשונה. ננסה בכל זאת לתת לנשים את השידוך הטוב ביותר מבחינתן כקבוצה. ליערה ולתמר ניתן את עדיפותן הראשונה, כך גם למאיה, ואילו לספיר ניתן את העדיפות השניה. השידוך יראה כך:

אייל (3)	גיל (4)	נועם (3)	אלון (2)
יערה (1)	תמר (1)	מאיה (1)	ספיר (2)

לכאורה נראה שהנשים בנו "חומה" קשה לביקוע. אבל! בחומה זו ישנו סדק קטן. הסדק הזה הוא ספיר. אותה אפשר לנסות ולשכנע להחליף שידוך. היחיד שהיא מעדיפה (1) על פני המשודך שלה גיל (2) הוא נועם. מאחר שגם נועם מעדיף את ספיר (2) על פני המשודכת שלו מאיה (3), תתפרק מערכת השידוכים, מאיה תאבד את מספר 1 שלה, והחומה תתבקע.

הערה: כפי שציינו, הטבלאות בסעיף זה הן אותן טבלאות מדף תלמיד מספר 1 בשינוי קטן בשורת ההעדפות של נועם. בטבלאות בדף תלמיד מספר 1 רוצה נועם את ספיר בעדיפות (4). במצב זה לא הייתה "חומת הנשים" מתבקעת.

2. מאחר שעדיפות מספר 1 של כל הגברים שונה, ניתן ליצור מערכת שידוכים יציבה עבור הגברים:

חנן (1)	ארז (1)	נדב (1)	תומר (1)	אורן (1)
יעל (4)	ענת (1)	דנה (2)	סיון (3)	גלית (4)

באופן דומה ניתן ליצור מערכת שידוכים יציבה עבור הנשים:

חנן (4)	אורן (3)	תומר (4)	נדב (5)	ארז (1)
דנה (1)	סיון (1)	יעל (1)	גלית (1)	ענת (1)

ניצור מערכת שידוכים שלישית, שהיא יציבה, על פי ההנחיות שניתנו בשאלה.
נתחיל בשידוך הנתון, ונבצע סדרת החלפות (ישנן דרכים נוספות להחלפות):

חנן (4)	ארז (5)	נדב (3)	תומר (3)	אורן (2)
דנה (1)	סיון (5)	יעל (2)	גלית (5)	ענת (2)

גלית וארז (למשל) יכולים לפרק את המערכת מה שייצור גם את הזוג תומר-סיון:

חנן (4)	תומר (1)	נדב (3)	ארז (4)	אורן (2)
דנה (1)	סיון (3)	יעל (2)	גלית (3)	ענת (2)

השידוך המושלם ענת-ארז 1-1 יפרק שוב את המערכת:

חנן (4)	תומר (1)	נדב (3)	אורן (1)	ארז (1)
דנה (1)	סיון (3)	יעל (2)	גלית (4)	ענת (1)

חנן וגלית יכולים להיות הבאים בתור:

חנן (3)	תומר (1)	נדב (3)	אורן (5)	ארז (1)
גלית (2)	סיון (3)	יעל (2)	דנה (5)	ענת (1)

אורן יפנה כעת לסיון:

חנן (3)	תומר (2)	נדב (3)	אורן (3)	ארז (1)
↕	↕	↕	↕	↕
גלית (2)	דנה (4)	יעל (2)	סיון (1)	ענת (1)

דנה תפנה לנדב ואז תתקבל מערכת שידוכים יציבה (בדקו זאת):

חנן (3)	תומר (4)	נדב (1)	אורן (3)	ארז (1)
↕	↕	↕	↕	↕
גלית (2)	יעל (1)	דנה (2)	סיון (1)	ענת (1)

הערות:

א. שימו לב לכך שהתלמידים עשויים לבצע סדרת החלפות שונה, ואולי אף להגיע למערכות שידוכים יציבות אחרות.

ב. נשאלת השאלה האם שיטה זו של החלפת זוגות תגיע בהכרח למצב של עצירה במצב יציב?

האם יתכן שההחלפות ימשכו וימשכו ולא יגיעו למצב יציב?

האם ישנן טבלאות שבהן אין שום מערכת שידוכים יציבה?

בדף התלמיד הבא נגלה שאכן יתכן מצב שבו מחליפים ומחליפים ולא מגיעים למערכת שידוכים יציבה.

מאוחר יותר נלמד שיטה אחרת שבאמצעותה נגיע תמיד למערכת שידוכים יציבה (מה שיבטיח שלכל טבלאות השידוכים יש לפחות מצב יציב אחד)

.

דף תלמיד 3

לאנשי העיירה שידוכלנד היה מנהג מוזר. בכל שנה היה בוחר שדכן העיירה חמישה גברים רווקים וחמש נשים רווקות ויוצר מערכת שידוכים מקרית לחלוטין. במקרים רבים היו המשודכים מאוכזבים מאוד מהשידוך שקיבלו. השדכן שהיה איש רחמן, התקשה לעמוד במבטי הייאוש ולכן הוסיף את הכלל הבא:

מיד לאחר ההכרזה על חמשת הזוגות המיועדים היו צריכים עשרת האנשים להגיש לו את טבלאות ההעדפה שלהם לגבי המין השני. בבוקר שלמחרת יכלו גבר ואישה, שלא היו משודכים על פי הצעתו, לגשת אליו ולבקש להשתדך. השדכן היה בודק בטבלאות אם אכן כל אחד משני הניגשים אמור לשפר את מצבו בשידוך החדש (לעבור להעדפה טובה יותר). במידה שכן, היה זוג זה הופך למשודך (זמני כמו שאר השידוכים בשלב זה), כאשר שני בני הזוג הנזנחים שלהם היו הופכים גם הם לזוג זמני. באופן דומה אפשר השדכן שינוי של זוג אחד נוסף בכל יום. החתונות היו מתקיימות בערב של אותו יום בו <u>לא</u> הגיעו גבר ואישה לבקש להשתדך. בדרך כלל הזוגות המתחתנים יצרו מערכת שידוכים יציבה.

בשנת 1992 נבחרו למשימה חמשת הרווקים: ג'ון, בילי, דיויד, ג'ורג' ופיטר.

וחמש הרווקות: אנג'לה, טינה, בטי, ניקול וברברה.

מערכת השידוכים אותה בחר השדכן הייתה:

ג'ון-אנג'לה   בילי-טינה   דיויד-בטי   ג'ורג'-ניקול   פיטר-ברברה

להלן טבלאות ההעדפות אותן הגישו העשרה לשדכן:

<u>העדפות הגברים</u>

	אנג'לה	טינה	בטי	ניקול	ברברה
ג'ון	3	2	1	5	4
בילי	5	3	1	4	2
דיויד	4	5	3	2	1
ג'ורג'	1	4	5	3	2
פיטר	4	3	5	2	1

<u>העדפות הנשים</u>

	ג'ון	בילי	דיויד	ג'ורג'	פיטר
אנג'לה	3	5	4	1	2
טינה	2	3	5	4	1
בטי	4	1	3	5	2
ניקול	4	1	2	3	5
ברברה	2	3	4	5	1

התברר שאף אישה לא ממש רצתה אף גבר, ואף גבר לא ממש רצה אף אישה ולכן החליטו העשרה לנסות ולדחות את החתונה ככל שניתן.

"ננסה לבצע כמה שיותר החלפות ולהתחמק ככל האפשר ממערכת שידוכים יציבה"

נסו לבצע סדרה ארוכה ככל הניתן של החלפות.

<u>זכרו :</u> השדכן יסכים לקבל החלפה מסוימת רק אם יש בה זוג משתדך שבו גם הגבר וגם האישה משפרים את מצבם.

פתרון למורה

המערכת אותה קבע השדכן היא:

ג'ון (3)	בילי (3)	דויד (3)	ג'ורג' (3)	פיטר (1)
אנג'ילה (3)	טינה (3)	בטי (3)	ניקול (3)	ברברה (1)

באופן עקרוני אפשר לבצע סידרה של שלוש החלפות ולהגיע למערכת שידוכים יציבה:

ג'ון (3)	בילי (3)	דויד (3)	ג'ורג' (3)	פיטר (1)
אנג'ילה (3)	טינה (3)	בטי (3)	ניקול (3)	ברברה (1)

↓

ג'ון (5)	בילי (3)	דויד (3)	ג'ורג' (1)	פיטר (1)
ניקול (4)	טינה (3)	בטי (3)	אנג'ילה (1)	ברברה (1)

↓

ג'ון (5)	בילי (1)	דויד (5)	ג'ורג' (1)	פיטר (1)
ניקול (4)	בטי (1)	טינה (5)	אנג'ילה (1)	ברברה (1)

↓

ג'ון (2)	בילי (1)	דויד (2)	ג'ורג' (1)	פיטר (1)
טינה (2)	בטי (1)	ניקול (2)	אנג'ילה (1)	ברברה (1)

לעומת זאת, אנחנו קיבלנו משימה לנסות ולבצע כמה שיותר החלפות.

מתברר שאפשר לבצע סדרה אינסופית של החלפות מבלי להגיע למערכת יציבה!

נראה זאת.

המצב ההתחלתי:

ג'ון (3)	בילי (3)	דיויד (3)	ג'ורג' (3)	פיטר (1)
↕	↕	↕	↕	↕
אנג'ילה (3)	טינה (3)	בטי (3)	ניקול (3)	ברברה (1)

לאחר החלפה של ג'ון וטינה (שניהם משפרים מ-3 ל-2 ולכן ההחלפה מוצדקת):

ג'ון (2)	בילי (5)	דיויד (3)	ג'ורג' (3)	פיטר (1)
↕	↕	↕	↕	↕
טינה (2)	אנג'ילה (5)	בטי (3)	ניקול (3)	ברברה (1)

לאחר החלפה של דיויד וניקול (שניהם משפרים מ-3 ל-2 ולכן ההחלפה מוצדקת):

ג'ון (2)	בילי (5)	דיויד (2)	ג'ורג' (5)	פיטר (1)
↕	↕	↕	↕	↕
טינה (2)	אנג'ילה (5)	ניקול (2)	בטי (5)	ברברה (1)

לאחר החלפה של ג'ון ובטי (ג'ון משפר מ-2 ל-1 ובטי מ-5 ל-4 ולכן ההחלפה מוצדקת):

ג'ון (1)	בילי (5)	דיויד (2)	ג'ורג' (4)	פיטר (1)
↕	↕	↕	↕	↕
בטי (4)	אנג'ילה (5)	ניקול (2)	טינה (4)	ברברה (1)

לאחר החלפה של בילי וניקול (בילי משפר מ-5 ל-4 וניקול מ-2 ל-1 ולכן ההחלפה מוצדקת):

ג'ון (1)	בילי (4)	דיויד (4)	ג'ורג' (4)	פיטר (1)
↕	↕	↕	↕	↕
בטי (4)	ניקול (1)	אנג'ילה (4)	טינה (4)	ברברה (1)

לאחר ההחלפה של דיויד ובטי (שניהם משפרים מ-4 ל-3 ולכן ההחלפה מוצדקת):

ג'ון (3)	בילי (4)	דיויד (3)	ג'ורג' (4)	פיטר (1)
↕	↕	↕	↕	↕
אנג'ילה (3)	ניקול (1)	בטי (3)	טינה (4)	ברברה (1)

לאחר ההחלפה של בילי וטינה (שניהם משפרים מ4- ל3- ולכן ההחלפה מוצדקת):

ג'ון (3)	בילי (3)	דיויד (3)	ג'ורג' (3)	פיטר (1)
↕	↕	↕	↕	↕
אנג'ילה (3)	טינה (3)	בטי (3)	ניקול (3)	ברברה (1)

חזרנו להצעתו של השדכן! מכאן ברור שאפשר להמשיך בהחלפות ללא הפסקה.

כאן אנו מגיעים לרעיון המסתתר בדף תלמיד זה:
ה"שיטה" שבה נקטנו לשם השגת מערכת שידוכים יציבה, התבררה כלא מושלמת. לפי שיטה זו, התחלנו במערכת שידוכים מקרית ו"שיפרנו" אותה בהדרגה בעזרת החלפות של זוגות. מלכתחילה מתקבל על הדעת שבסופו של דבר נעצר במערכת שידוכים יציבה. מצאנו דוגמא שבה אפשר להחליף ולהחליף ולעולם לא להגיע למערכת יציבה!

תוצאה זו מחדדת שוב את שתי השאלות המרכזיות:
א. האם בכל מצב של ההעדפות ישנה מערכת שידוכים יציבה?
ב. במידה שהתשובה לסעיף א' היא כן:
האם ישנה שיטה אחרת שתוליך אותנו תמיד למערכת שידוכים יציבה?

הערה:
אמנם ראינו שגם בשאלה זו אפשר להגיע למערכת שידוכים יציבה (ועוד בשלוש החלפות בלבד), אך הדבר אינו מסיר את הבעייתיות הקיימת בשיטת החילופים. השיטה אינה מוגדרת היטב וישנן דרכים בהן אנו עלולים להסתבך בלולאות. העניינים עלולים להיות בעייתיים הרבה יותר כאשר נעסוק בקבוצות גדולות יותר של נשים וגברים.
בהמשך (דף תלמיד מספר 5) נראה שתמיד קיימת מערכת שידוכים יציבה. נציג שיטה מוגדרת ומסודרת הרבה יותר, שבעזרתה נוכל למצוא לפחות מערכת שידוכים

אחת כזו. בינתיים, בדף התלמיד הבא, נפגוש דוגמא שונה במקצת, שתחדד את הנקודה שקיומה של מערכת יציבה אינו מובן מאליו.

דף תלמיד 4

ארבע בנות נבחרו לייצג בית ספר מסוים בתחרות ספורט שנערכה באיטליה. בבית המלון קיבלו הארבע שני חדרים, ועל כן נאלצו להתפצל לשני זוגות. להלן טבלת ההעדפות של כל אחת מהבנות לגבי מוכנותה לחלוק חדר עם כל אחת משלוש האחרות (1 – ההעדפה הגבוהה ביותר, 3 – הנמוכה ביותר):

	מירית	סיגל	יפית	אדוה
מירית רוצה את	-	1	2	3
סיגל רוצה את	3	-	1	2
יפית רוצה את	2	3	-	1
אדוה רוצה את	1	2	3	-

לדוגמה: מירית רוצה את סיגל בעדיפות (1).

1. להלן <u>כל</u> מערכות "השידוכים" האפשריות (בדקו שאכן אין אפשרויות נוספות!) :

מערכת א':
מירית (1) – סיגל (3)
יפית (1) – אדוה (3)

מערכת ב':
מירית (2) – יפית (2)
סיגל (2) – אדוה (2)

מערכת ג':
מירית (3) – אדוה (1)
סיגל (1) – יפית (3)

מי מבין שלוש המערכות היא יציבה? (שימו לב שהפעם כל בת יכולה להציע התחלפות <u>לכל</u> אחת משתי הבנות שאינה "משודכת לה")

2. מלאו את מספרי ההעדפות בטבלה הבאה באופן ש<u>אף</u> אחת מ-3 מערכות הזוגות האפשריות לא תהיה יציבה
.

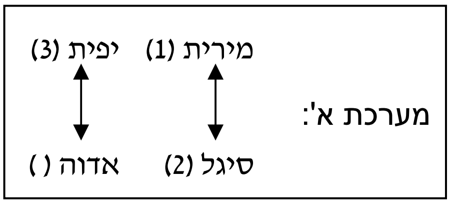
	מירית	סיגל	יפית	אדוה
מירית רוצה את	-			
סיגל רוצה את		-		
יפית רוצה את			-	
אדוה רוצה את				-

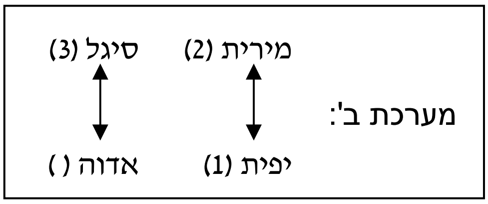
פתרון למורה

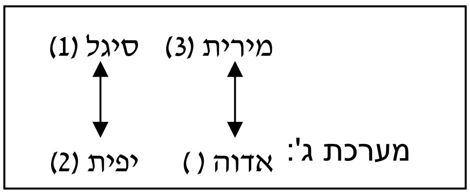
1. מערכת א' אינה יציבה כי אדוה וסיגל יכולות להתחבר ובכך לשפר כל אחת מעדיפות 3 ל-2.
   מערכת ב' אינה יציבה כי מירית ויפית יכולות להתחבר ובכך לשפר כל אחת מעדיפות 3 ל-2.
   מערכת ג' יציבה.
2. הנה דוגמא לטבלת העדפות שבה אין מערכת "שידוכים" יציבה:

	מירית	סיגל	יפית	אדוה
מירית רוצה את	-	1	2	3
סיגל רוצה את	2	-	1	3
יפית רוצה את	1	2	-	3
אדוה רוצה את				-

לא, אין כאן טעות. ללא קשר להעדפות של אדוה, לא תהיה מערכת "שידוכים" יציבה. מצב שלוש המערכות האפשריות הוא:





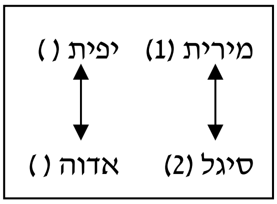


יפית וסיגל יפרקו את מערכת א' ובצורה סימטרית יפרקו מירית וסיגל את מערכת ב' ומירית ויפית את מערכת ג'.
מאחר שמספר האפשרויות למלא את טבלת ההעדפות אינו גדול. אין ספק שתלמידים רבים יוכלו לפתור שאלה זו תוך ניסוי וטעיה.

העשרה: פתרון שיטתי לתרגיל 2:

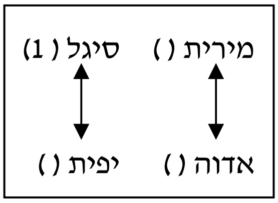
נראה כאן דרך שיטתית, שתסביר מדוע הטבלה שבנינו בפתרון לשאלה 2 משקפת את הרעיון של כל הפתרונות האפשריים לשאלה זו:
ראשית, ברור שאסור שיהיה אף שידוך מהצורה 1-1, אחרת ללא קשר לשידוך השני, המערכת תהיה יציבה.
נניח שישנו שידוך כלשהו מהצורה 1-2. בלי לפגוע בכלליות הפתרון נניח שזוג זה הוא מירית(1) וסיגל(2).
המצב במערכת א' הוא אם כן:

מערכת א'



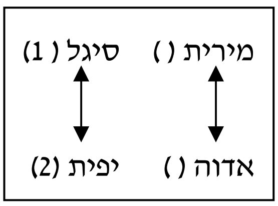
במצב זה אי אפשר לשכנע את מירית להתחלף. כדי שהמערכת לא תהיה יציבה חייבת סיגל לרצות את אחת מהשתיים יפית/אדוה בעדיפות (1). נניח שוב, בלי לפגוע בכלליות הפתרון שזו יפית.
נעדכן כעת את מערכת ג' המכילה את ה"שידוך" סיגל יפית:

מערכת ג'

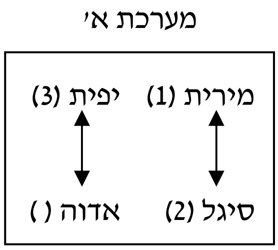


יפית מבחינתה אינה יכולה אף היא לרצות את סיגל בעדיפות (1) אחרת יהיה שידוך בלתי מפורק 1-1. מצד שני אסור לשכוח שאם יפית וסיגל אמורות להיות אלה שיפרקו את מערכת א' הרי שלא יתכן שיפית תרצה את סיגל בעדיפות (3). מה שנשאר הוא שיפית רוצה את סיגל בעדיפות (2).
נעדכן את מערכת ג':

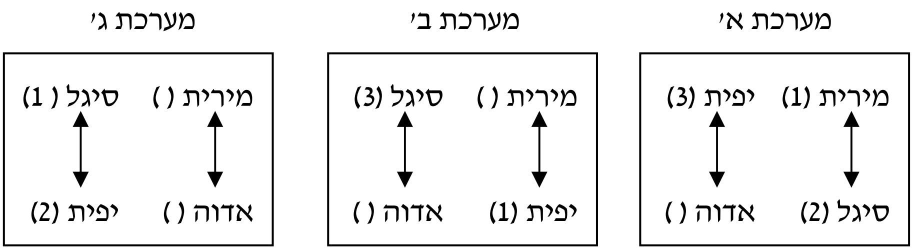
מערכת ג'



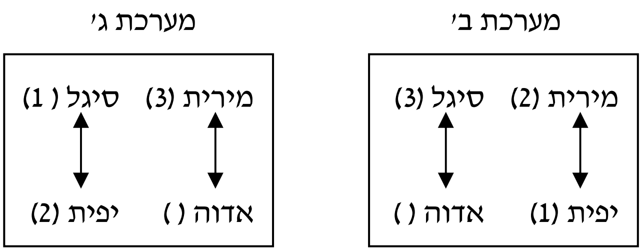
ליפית נשארו עדיין עדיפויות (1) ו-(3). אם נחזור למערכת א' ונזכור שיפית צריכה לפרק את המערכת היא אינה יכולה להעדיף את אדוה (1). היא חייבת אם כן לרצות את אדוה בעדיפות (3), וזה יצדיק את הרצון שלה להיות בחדר אחד עם סיגל. מערכת א' המעודכנת תראה אם כן:



מאחר שמילאנו כבר את עדיפויות 2,3 של יפית, נותרה לה עדיפות (1) למירית.
באופן דומה מילאנו לסיגל את עדיפויות 1,2 ולכן נותרה לה עדיפות (3) לאדוה.
נעדכן את שני העידכונים האלה במערכת ב', ונרשום את כל המערכות שהתקבלו עד כה:



המצב במערכת ג' הוא ממש כמו המצב שבו התחלנו את מערכת א' (שידוך 1-2).
באופן דומה, כדי שהמערכת לא תהיה יציבה חייבת מישהי לשכנע את יפית להתחלף.
יפית תהיה מוכנה "להשתדך" רק לעדיפות הראשונה שלה שהיא מירית (מערכת ב').
למירית נותרו עדיין עדיפויות 2,3, ועל מנת שגם היא תסכים "להשתדך" עם יפית, הרי שעדיפות (2) שלה חייבת להיות ליפית ולכן עדיפות (3) שלה נותרה לאדוה.
נעדכן אם כן את מערכות ב' ו-ג':



הגענו בדיוק לשלוש המערכות אותן רשמנו בפתרון לשאלה 2. כפי שראינו, לא משנות העדפותיה של אדוה – אין מערכת שידוכים יציבה.

עד כאן הראינו שאם אנו רוצים שלא תהיה שום מערכת שידוכים יציבה אזי:

א. אסור שיהיה שידוך מהצורה 1-1.

ב. אם יש שידוך מהצורה 2-1 אז יש פתרון עקרוני אחד (בפתרון זה שלושה שידוכים מהצורה 2-1).

נותר לבדוק את המקרה בו לא קיימים שידוכים מהצורה 1-1 וגם לא מהצורה 2-1. מאחר שכך, העדפה (1) חייבת תמיד להתאים להעדפה (3), מה שמחייב קיום של ארבעה שידוכים מהצורה 3-1, ועל כן שני שידוכים של 2-2.
שימו לב!! אם באחת המערכות מופיע שידוך 2-2 הרי שעל מנת שיתפרק צריכה אחת מהבנות שבשידוך זה, לרצות מישהי בעדיפות (1) ואילו ה"מישהי" הזו צריכה לרצות אותה בעדיפות (1) או (2) (כדי שיהיה גם לה כדאי להתחלף). אם כך, חייב להיות שידוך מהצורה 1-1 או 2-1. אבל אין כזה. על כן כל מערכת בה יופיע השידוך 2-2 היא יציבה ולכן במקרה שלנו לא כל שלוש המערכות <u>בלתי יציבות</u>.

לסיכום: יש רק מצב עקרוני אחד בו אין אף מערכת יציבה (עם שלושה שידוכים של 1-2).

תהליך Gale – Shapley
לקבלת מערכת שידוכים יציבה

העיסוק המרכזי בחוברת זו הוא מציאת שידוכים יציבים עבור קבוצות שוות גודל (נניח n) של גברים ונשים, כך שלכל אחד מהם העדפות n1- לגבי בני המין השני.
מלכתחילה אי אפשר להניח שתמיד קיימת לפחות מערכת שידוכים אחת שהיא יציבה. בדף תלמיד מספר 3 הצגנו אמנם דוגמא מנושא אחר (שותפות לחדר) אך בדוגמא זו ראינו שיתכן מצב שבו אין אף מערכת שידוכים יציבה. הדמיון הרב בין הנושאים "שידוכים" ו"שותפות לחדר" והעובדה שבנושא השני אין בהכרח מערכת שידוכים יציבה מגדילים ומחדדים את העניין בשאלה המרכזית: האם בנושא ה"שידוכים" ישנה תמיד מערכת יציבה.
בתחילת החוברת ניסינו לפתח שיטה לקבלת מערכת שידוכים יציבה. בדף תלמיד מספר 4 ראינו שהשיטה שלנו לא תמיד עובדת.

בשנת 1962 פיתחו .Gale D ו- .Shapley L.S את תהליך Gale-Shapley לקבלת מערכת שידוכים יציבה, ובכך הראו שתמיד קיימת לפחות מערכת שידוכים אחת שהיא יציבה.

נבהיר את תהליך Gale-Shapley בעזרת הדוגמא הבאה:

העדפות הגברים

	ספיר	יערה	מאיה	תמר
אייל	1	2	3	4
נועם	1	3	2	4
אלון	4	3	1	2
גיל	2	3	1	4

העדפות הנשים

	אייל	נועם	אלון	גיל
ספיר	3	4	1	2
יערה	3	1	2	4
מאיה	3	4	1	2
תמר	2	4	1	3

את תהליך Gale-Shapley ניתן להפעיל בשתי צורות. בצורה הראשונה הגברים הם המחזרים ובצורה השניה הנשים מחזרות.

א. קבלת שידוך יציב כאשר הגברים הם המחזרים:

בשלב הראשון פונה כל גבר לעדיפות <u>הראשונה</u> שלו:

ספיר	יערה	מאיה	תמר
אייל (1)		אלון (1)	
נועם (1)		גיל (1)	

ספיר ומאיה, שקיבלו יותר מהצעה אחת, משאירות אצלן את הגבר המועדף. ספיר תשאיר את אייל אותו היא רוצה בעדיפות (3) ומאיה תשאיר את אלון ויתקבל שידוך מושלם 1-1.

בשלב זה, גיל ונועם הדחויים יפנו כל אחד לעדיפות הבאה שלהם (2):

ספיר	יערה	מאיה	תמר
אייל (1)		אלון (1)	
גיל (2)		נועם (2)	

מאיה תדחה בוודאי את נועם ואילו ספיר מעדיפה את גיל (2) על פני אייל (3) ולכן תדחה את אייל.

בשלב זה פונים נועם ואייל לעדיפות הבאה שלהם. נועם ל-(3) ואילו אייל ל-(2):

ספיר	יערה	מאיה	תמר
גיל (2)	אייל (2)	אלון (1)	
	נועם (3)		

יערה רוצה את נועם בעדיפות (1) ולכן אייל יאלץ לעבור לעדיפות הבאה שלו מאיה (3):

ספיר	יערה	מאיה	תמר
גיל (2)	נועם (3)	אלון (1)	
		אייל (3)	

אייל, שכבר נדחה פעמיים, צפוי למפח נפש שלישי שיוליך אותו לעדיפות האחרונה שלו, וכך יתקבל המצב הסופי:

ספיר (2)	יערה (1)	מאיה (1)	תמר (2)
גיל (2)	נועם (3)	אלון (1)	אייל (4)

בדקו שהתקבלה מערכת שידוכים יציבה!.

ב. קבלת שידוך יציב כאשר הנשים הן המחזרות:

התהליך כאן מקביל לזה שהיה עם הגברים. כל אשה פונה תחילה לעדיפות הראשונה שלה:

אייל	נועם	אלון	גיל
	יערה (1)	ספיר (1)	
		מאיה (1)	
		תמר (1)	

ספיר ותמר נדחות ומתקבלת אותה מערכת שידוכים יציבה כמו במקרה שהגברים הם המחזרים:

אייל (4)	נועם (3)	אלון (1)	גיל (2)
תמר (2)	יערה (1)	מאיה (1)	ספיר (2)

בדף התלמיד הבא נתרגל את הנושא, נראה שלא תמיד חיזור הגברים מביא לאותה מערכת שידוכים כמו חיזור הנשים וכמו כן ננסה לענות על השאלה מדוע תמיד מוליכה שיטה זו למערכת שידוכים יציבה.

1. נתונות הטבלאות הבאות:

העדפות הגברים

	מור	הילה	קרן	אנה	ענת
אמיר	4	5	3	2	1
דן	2	3	5	1	4
אבנר	4	3	2	1	5
סהר	3	2	4	5	1
מתן	1	3	4	5	2

העדפות הנשים

	אמיר	דן	אבנר	סהר	מתן
מור	3	2	1	4	5
הילה	2	3	1	5	4
קרן	2	5	1	4	3
אנה	5	4	3	1	2
ענת	5	2	1	4	3

א. השתמשו בתהליך Gale-Shapley, לקבלת מערכת שידוכים יציבה, כאשר הגברים הם המחזרים. בדקו שמערכת השידוכים יציבה.

ב. השתמשו בתהליך Gale-Shapley, לקבלת מערכת שידוכים יציבה, כאשר הנשים הן המחזרות. בדקו שמערכת השידוכים יציבה.

שאלות אתגר:

2. נסו להסביר מדוע תמיד ייעצר תהליך Gale-Shapley במצב שבו לכל אישה ולכל גבר יש משודך

יחיד. נפרק את השאלה לשאלות קטנות (נניח למשל שהגברים הם המחזרים):

א. מדוע לא יתכן מצב שבו התהליך יהיה אינסופי (כלומר לא ייעצר)?

ב. מדוע לא יתכן שהתהליך ייעצר במצב שאישה מסוימת נשארת ללא גבר ?

ג. מדוע לא יתכן שהתהליך ייעצר במצב שגבר מסוים נשאר ללא אישה?

3. בתרגיל מסוים בוצע תהליך Gale-Shapley, כאשר הגברים הם המחזרים, והתקבלה מערכת שידוכים. נתבונן בשניים מתוך השידוכים של מערכת זו:

יעל (A) $\updownarrow$ רונן (C)

מיכל (B) $\updownarrow$ יאיר (D)

נסו להסביר מדוע לא יתכן שיאיר ויעל יעדיפו זה את זה יותר מאשר את בני זוגם.

<u>הערה:</u> שימו לב לכך שההוכחה לגבי יאיר ויעל מתאימה גם לזוג מיכל ורונן ובעצם לכל זוג של מערכת השידוכים. מכאן - מי שיוכיח את שאלה 3 הוכיח בעצם שמערכת השידוכים המתקבלת בתהליך Gale-Shapley היא יציבה.

פתרון למורה

1. להלן הפתרונות לשני הסעיפים. לא הוספנו הסברים מילוליים.

א.

מור	הילה	קרן	אנה	ענת
מתן (1)			~~דן (1)~~	~~אמיר (1)~~
			אבנר (1)	סהר (1)

מור	הילה	קרן	אנה	ענת
~~מתן (1)~~			אבנר (1)	סהר(1)
דן (2)			~~אמיר (2)~~	

מור	הילה	קרן	אנה	ענת
דן (2)		אמיר (3)	אבנר (1)	~~סהר(1)~~
				מתן (2)

מור (2)	הילה (5)	קרן (2)	אנה (3)	ענת (3)
דן (2)	סהר (3)	אמיר (3)	אבנר (1)	מתן(2)

קיבלנו מערכת שידוכים יציבה. בדקו זאת!

ב.

אמיר	דן	אבנר	סהר	מתן
		~~מור (1)~~	אנה (1)	
		~~הילה (1)~~		
		קרן (1)		
		~~ענת (1)~~		

↓

↓

אמיר	דן	אבנר	סהר	מתן
הילה (2)	מור (2)	קרן (1)	אנה (1)	
	~~ענת (2)~~			

↓

אמיר (5)	דן (2)	אבנר (2)	סהר (5)	מתן (2)
הילה (2)	מור (2)	קרן (1)	אנה (1)	ענת (3)

קיבלנו מערכת שידוכים יציבה, השונה מהמערכת שהתקבלה במקרה בו הגברים מחזרים.
ישנם שני שידוכים משותפים: דן-מור   מתן-ענת.

2. א. תהליך Gale-Shapley חייב להיעצר. הגברים המחזרים מתחילים כל אחד בעדיפות (1).
בכל שלב בו התהליך ממשיך, עובר לפחות גבר אחד לעדיפות הבאה שלו. מספר הגברים הוא סופי, וגם מספר ההעדפות של כל גבר הוא סופי. מכאן שהתהליך חייב להפסק בשלב כלשהו.

<u>שימו לב</u>, בסעיף זה לא טענו שהתהליך יסתיים במערכת שידוכים יציבה ואף לא טענו
שהתהליך יסתיים במערכת שידוכים (לכל גבר אישה אחת ולכל אישה גבר אחד).

ב,ג. כדאי להתחיל את הדיון בהסבר הטענה הבאה: אם ישנה קבוצה של N ילדים וקבוצה של N סוכריות, ואנו מחלקים לכל ילד <u>לפחות</u> סוכרייה אחת, אזי כל ילד יקבל <u>בדיוק</u> סוכרייה אחת. הטענה ברורה כיוון שמספר הילדים שווה למספר הסוכריות ואז אם ילד מסוים יקבל יותר מסוכרייה אחת, הרי שיהיה לפחות ילד אחד שלא יקבל אף סוכרייה.

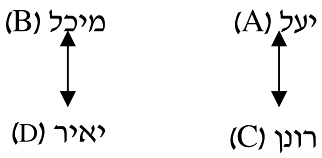
נוכיח כעת שתהליך Gale-Shapley ייעצר תמיד במצב בו לכל אישה לפחות גבר אחד.

אם נוכיח זאת הרי שאז, מאחר שמספר הגברים שווה למספר הנשים הרי שכל אישה תקבל בדיוק גבר אחד וכל גבר יקבל בדיוק אישה אחת.
<u>הוכחה:</u> בשלב הראשון פונים כל הגברים לנשים שהן מספר (1) שלהם. נשים אלה יישארו מעתה ועד לסוף התהליך עם לפחות הצעת שידוכים אחת. הגברים הנדחים עוברים למספר (2) שלהם. הנשים שקיבלו הפעם הצעת שידוכין ראשונה לא יישארו יותר ללא הצעות שידוך. באופן כללי אפשר לומר שכל אישה שפנו אליה בשלב מסוים כבר לא תישאר ללא שידוך. מאחר

שברשימתו של כל גבר מופיעות כל הנשים, הרי שכל אישה תקבל בשלב כלשהו הצעת שידוכים, מה שמבטיח שבשלב עצירת התהליך תהיה לכל אישה לפחות הצעת שידוכים אחת (ולכן בדיוק אחת).

בסעיפים א',ב', ו-ג' הראינו שתהליך Gale-Shapley נעצר תמיד במצב של מערכת שידוכים. לכל גבר ולכל אישה בדיוק שידוך אחד. נוכיח כעת ששידוך זה הוא בהכרח יציב.

3.לקחנו לדוגמא שניים מתוך השידוכים שהתקבלו בתהליך Gale-Shapley כאשר הגברים הם המחזרים:



נתבקשנו להראות שלא יתכן מצב שבו יאיר ויעל רוצים זה את זה יותר ממה שהם רוצים את בני זוגם. אם יאיר רוצה את יעל יותר ממה שהוא רוצה את מיכל הרי שהוא כבר הציע לה הצעת שידוכים (לפני שהציע למיכל). יעל ויתרה עליו, וזה אפשרי רק כי הייתה לה הצעת שידוכים טובה יותר. בתהליך Gale-Shapley אישה שקיבלה הצעת שידוכים מסוימת מוותרת עליה רק לטובת מישהו שהוא טוב יותר מבחינתה, ולכן יעל חייבת הייתה להישאר בסוף התהליך עם הצעה טובה יותר מהצעתו של יאיר. לא ייתכן אם כן שיעל מעדיפה את יאיר שדחתה יותר מאשר היא רוצה את רונן שנשאר בסוף התהליך. לכן, הזוג יאיר-יעל לא ישבור את המערכת ובאופן סימטרי אף זוג אחר.

לסיכום: תהליך Gale-Shapley נעצר במערכת שידוכים יציבה.

הערה: ערכנו כאן דיון תיאורטי לא פשוט ובו טענו למשל שאי אפשר לפסול מראש את האפשרות שגבר מסוים יידחה מהמערכת. בדף תלמיד מספר 7 מתברר שתהליך Gale-Shapley יכול לעבוד גם במקרה שמספר הגברים שונה ממספר הנשים.
בדוגמא המובאת שם בשאלה מספר 1, יש שש נשים וארבעה גברים. מרתק לראות כיצד פולט התהליך שתי נשים מהמערכת עד לקבלת מערכת שידוכים יציבה של ארבעה זוגות. מורה שרוצה בכך יכול להשתמש כעת בדוגמא זו ואף להקדים את דף תלמיד מספר 7 לדף תלמיד מספר 6

דף תלמיד 6

1. התבוננו בטבלאות הבאות:

העדפות הגברים

	ספיר	יערה	מאיה	תמר
אייל	2			
נועם		2		
אלון			2	
גיל				2

העדפות הנשים

	אייל	נועם	אלון	גיל
ספיר	2			
יערה		2		
מאיה			2	
תמר				2

המספרים המופיעים בטבלאות מאפשרים ליצור מערכת שידוכים:

אייל-ספיר נועם-יערה אלון-מאיה גיל-תמר

נסו להשלים את המספרים בטבלאות כך שמערכת השידוכים שלעיל תהיה יציבה?

אם לדעתכם המשימה בלתי אפשרית נסו להסביר מדוע.

2. התבוננו בטבלאות הבאות:

העדפות הגברים

	ספיר	יערה	מאיה	תמר
אייל	4			
נועם				
אלון				
גיל				

העדפות הנשים

	אייל	נועם	אלון	גיל
ספיר	4			
יערה				
מאיה				
תמר				

נסו להשלים את המספרים שבטבלאות כך שתהיה מערכת שידוכים יציבה,

שאחד מהשידוכים בה הוא **אייל-ספיר**.

(במילים אחרות: האם ייתכן שתהיה מערכת שידוכים יציבה עם השידוך 4-4?)

אם לדעתכם המשימה בלתי אפשרית נסו להסביר מדוע.

3. התבוננו בטבלאות הבאות:

העדפות הגברים

	ספיר	יערה	מאיה	תמר
אייל	4			
נועם		4		
אלון				
גיל				

העדפות הנשים

	אייל	נועם	אלון	גיל
ספיר	4			
יערה		4		
מאיה				
תמר				

נסו להשלים את המספרים שבטבלאות כך שתהיה מערכת שידוכים יציבה, ששניים

מתוך ארבעת השידוכים שבה יהיו **אייל-ספיר נועם-יערה.**
(במילים אחרות: האם ייתכן שתהיה מערכת שידוכים יציבה עם שני שידוכים מהצורה 4-4?) אם לדעתכם המשימה בלתי אפשרית נסו להסביר מדוע.

4. התבוננו בטבלאות הבאות:

העדפות הגברים

	ספיר	יערה	מאיה	תמר
אייל	3			
נועם		3		
אלון			3	
גיל				3

העדפות הנשים

	אייל	נועם	אלון	גיל
ספיר	3			
יערה		3		
מאיה			3	
תמר				3

המספרים המופיעים בטבלאות מאפשרים ליצור מערכת שידוכים:

אייל-ספיר נועם-יערה אלון-מאיה גיל-תמר

נסו להשלים את המספרים בטבלאות כך שמערכת השידוכים לעיל תהיה יציבה?

אם לדעתכם המשימה בלתי אפשרית נסו להסביר מדוע.

5. התבוננו בטבלאות הבאות:

העדפות הגברים

	ספיר	יערה	מאיה	תמר
אייל	3			
נועם		3		
אלון			2	
גיל				2

העדפות הנשים

	אייל	נועם	אלון	גיל
ספיר	2			
יערה		2		
מאיה			3	
תמר				3

המספרים המופיעים בטבלאות מאפשרים ליצור מערכת שידוכים:

אייל-ספיר נועם-יערה אלון-מאיה גיל-תמר

נסו להשלים את המספרים בטבלאות כך שהשידוך לעיל יהיה יציב?

אם לדעתכם המשימה בלתי אפשרית נסו להסביר מדוע.

<u>רמז:</u> מתוך חמש המשימות בדיוק שלוש אפשריות.

.

פתרון למורה

ישנה חשיבות רבה לדרך ניהולו של שיעור זה. נציע כאן דרך שאחת ממטרותיה היא לחשוף את צורת ההתמודדות של מתמטיקאי עם השאלות בהן הוא נתקל.

עליכם לחלק את הכיתה לקבוצות. כל קבוצה מקבלת את דף התרגילים ועונה ברצף על כל חמש השאלות ללא התערבותכם. קיימת סבירות גבוהה שהדרך בה יבחרו התלמידים תהיה הניסוי והטעייה. יהיה זה לא סביר (אך מעודד) לגלות מצב שבו יבצעו תלמידים מסוימים חשיבה לא קצרה בטרם יתחילו בשלב של מילוי המספרים בטבלאות. עקבו אחר שיטות העבודה של הקבוצות השונות.

במשימות 1,2,5 , להן יש פתרון, יכולה כל קבוצה להציג על הלוח את הטבלאות שמילאה.

תפקידכם יהיה לאמת או להפריך את הפתרון על ידי בדיקת יציבות מערכת השידוכים שהתקבלה.

משימות 3,4 הן חסרות פתרון. חשוב להסביר את ההבדל המהותי בינן לבין שלוש האחרות. כאשר יש פתרון לשאלה (והשאלות אינן ברמה בלתי אפשרית) אפשר למוצאו גם אם <u>במקרה</u>. לעומת זאת, כאשר אין פתרון יכול תהליך החיפוש אחריו להמשך זמן רב ללא הצלחה (במידה שאין שגיאה), עד שבשלב מסוים פשוט מפסיקים. משפט כמו "אין פתרון כי ניסיתי וניסיתי ולא הצלחתי" כמובן שאינו קביל, וראוי לדון עליו בכיתה. לתלמיד המאמין שאין פתרון, ושאינו רוצה להשתמש בטיעון ה"ניסיתי וניסית..." לא נותרה ברירה אלא לעצור ולנסות להסביר את הסיבות לכך. אסור לשכוח שברקע תמיד קיים הסיכוי שאולי יש פתרון שלא התגלה עד כה. חשיבה זו עשויה להיות לא פשוטה. כיצד מוכיחים שאין פתרון? הניסוי והטעייה שאותם ביצע התלמיד קודם עשויים לתרום לפתרון השאלה אם כי לא בהכרח.

נשאלת השאלה: האם לא כדאי לחשוב על בעיה זמן מה בטרם נכנסים לשלב של ניסוי וטעייה?

דרך עבודה מקובלת במתמטיקה לפתרון בעיות היא לנסות תחילה להביט על העניין מגבוה, ולא להיכנס מיד לניסוי וטעייה. בדרך זו מתגלים לעתים פתרונות זריזים ואלגנטיים, והוכחות לאי קיומו של פתרון.

לפניכם פתרונות קצרים ואלגנטיים שחשוב שתציגו לתלמידים, אבל רק לאחר שהם הציגו תחילה את הפתרונות אותם קיבלו:

1. כל ארבעת השידוכים במערכת שלנו הם מהצורה 2-2. השידוך היחיד שיכול לפרק שידוכים כאלה הוא 1-1 (הגבר צריך לשפר ל1- וכך גם האישה). אנחנו מעונינים שמערכת השידוכים הנתונה תהיה יציבה, ולכן עלינו לדאוג שלא יהיה אף לא שידוך אחד מהצורה 1-1.

זוהי משימה פשוטה. ישנן דרכים רבות לעשות זאת, למשל כך:

העדפות הגברים

	ספיר	יערה	מאיה	תמר
אייל	2			1
נועם		2		1
אלון	1		2	
גיל	1			2

העדפות הנשים

	אייל	נועם	אלון	גיל
ספיר	2	1		
יערה		2		
מאיה			2	
תמר			1	2

ספיר היא העדיפות הראשונה של אלון וגיל, אך היא מעדיפה בעדיפות זו דווקא את נועם.
תמר היא העדיפות הראשונה של אייל ונועם, אך היא מעדיפה בעדיפות זו דווקא את אלון.
בכל דרך בה נמשיך למלא את הטבלה, לא יהיה שידוך של 1-1 ולכן מערכת השידוכים הנתונה בשאלה יציבה.

2. בהחלט אפשר להגיע למערכת שידוכים יציבה שאחד משידוכיה הוא 4-4. אפשר למשל לדאוג לכך ששלושת השידוכים האחרים יהיו בלתי ניתנים לפרוק, כלומר 1-1. למשל כך:

העדפות הגברים

	ספיר	יערה	מאיה	תמר
אייל	4			
נועם				1
אלון		1		
גיל			1	

העדפות הנשים

	אייל	נועם	אלון	גיל
ספיר	4			
יערה			1	
מאיה				1
תמר		1		

מערכת השידוכים שלנו היא:

אייל (4) ↔ ספיר (4)
נועם (1) ↔ תמר (1)
אלון (1) ↔ יערה (1)
גיל (1) ↔ מאיה (1)

בכל דרך בה נשלים את הטבלאות נקבל שהמערכת שלנו יציבה. זהו רק אחד מתוך הרבה מאוד פתרונות אפשריים.

3. מתברר שאין אפשרות שבקבוצה של ארבע נשים וארבעה גברים תהיה מערכת שידוכים יציבה שתכיל שני שידוכים מהצורה 4-4. בשאלה שלנו, אנחנו מחפשים מערכת שידוכים יציבה, בת ארבעה שידוכים, ששניים מהם הם:

אייל (4) ↔ ספיר (4)
נועם (4) ↔ יערה (4)

מאחר שיערה קיבלה את העדיפות האחרונה שלה היא בוודאי תעדיף את אייל (עדיפות 2,1 או 3).

באופן דומה, גם אייל שקיבל את עדיפותו האחרונה יעדיף לשבור את המערכת ולעבור ליערה.

המערכת תתפרק. הוכחנו שלא יתכנו שני שידוכים של 4-4 במערכת שידוכים יציבה.

<u>הערה:</u> אותה הוכחה נכונה גם לזוג נועם-ספיר.

4. נתבונן בטבלאות ובמערכת השידוכים הנתונה:

העדפות הגברים

	ספיר	יערה	מאיה	תמר
אייל	3			
נועם		3		
אלון			3	
גיל				3

העדפות הנשים

	אייל	נועם	אלון	גיל
ספיר	3			
יערה		3		
מאיה			3	
תמר				3

אייל (3) ↔ ספיר (3)
נועם (3) ↔ יערה (3)
אלון (3) ↔ מאיה (3)
גיל (3) ↔ תמר (3)

לפי האינטואיציה הראשונית נראה שמספרי ההעדפות במערכת השידוכים גבוהים מדי, ולכן לא נוכל למלא את הטבלאות כך שהמערכת תהיה יציבה. אינטואיציה זו, כך מתברר, נכונה.

נתמקד לרגע באייל: ישנן שתי נשים אותן הוא רוצה בעדיפויות (1),(2). <u>הוא מעדיף כל אחת מהן על פני ספיר המשודכת לו שאותה הוא רוצה רק בעדיפות (3)</u>.

על מנת שהמערכת תהיה יציבה חייבת כל אחת משתי נשים אלה לרצות את אייל פחות ממה שהן רוצות את המשודך שלהן. אבל, כל שידוכי המערכת הם 3-3! ולכן כל אחת מהשתיים רוצה את המשודך שלה בעדיפות (3), ולכן חייבת לרצות את אייל בעדיפות <u>(4)!!</u>

באופן דומה גם את נועם חייבות לפחות שתי נשים לרצות בעדיפות (4), וכך גם את אלון ואת גיל.

קיבלנו אם כן, שעל מנת שמערכת השידוכים הנתונה בשאלה תהיה יציבה, חייבת העדפה (4) להופיע בטבלת ההעדפות הנשים, לפחות <u>שמונה</u> פעמים. זה כמובן בלתי אפשרי! בטבלת ההעדפות הנשים צריכה העדפה (4) להופיע <u>בדיוק</u> 4 פעמים. יש כאן סתירה!

<u>מסקנה</u>: מערכת השידוכים המופיעה בשאלה אינה יציבה.

<u>הערה</u>: יכולנו באופן סימטרי להתמקד בנשים ולהגיע לסתירה בטבלת ההעדפות של הגברים.

5. נסתכל בטבלאות ובמערכת השידוכים הנתונה:

העדפות הגברים

	ספיר	יערה	מאיה	תמר
אייל	3			
נועם		3		
אלון			2	
גיל				2

העדפות הנשים

	אייל	נועם	אלון	גיל
ספיר	2			
יערה		2		
מאיה			3	
תמר				3

אייל (3)	נועם (3)	אלון (2)	גיל (2)
↕	↕	↕	↕
ספיר (2)	יערה (2)	מאיה (3)	תמר (3)

כל שידוכי המערכת הם מהצורה 2-3. השידוכים היחידים שיכולים "לשבור" את שידוך כזה הם 1-1 או 1-2. אם ניצור למשל שמונה זוגות של שידוכי 1-4 נבטיח שלא יהיו שידוכים של 1-1 או 1-2, מה שיבטיח לנו שמערכת השידוכים הנתונה בשאלה יציבה. המשימה אינה מסובכת.

א. בטבלת העדפות הגברים נדאג לכך שכל גבר ירצה אישה אחרת בעדיפות (1), ובטבלת

העדפות הנשים נדאג לכך שנשים אלה ירצו גברים אלה בעדיפות (4):

העדפות הגברים

	ספיר	יערה	מאיה	תמר
אייל	3		1	
נועם		3		1
אלון	1		2	
גיל		1		2

העדפות הנשים

	אייל	נועם	אלון	גיל
ספיר	2		4	
יערה		2		4
מאיה	4		3	
תמר		4		3

ב. נבצע את הפעולה ההפוכה, בטבלת העדפות הנשים נסמן את ארבעת ה-(1) ובטבלת העדפות הגברים נתאים את ארבעת ה-(4):

העדפות הגברים

	ספיר	יערה	מאיה	תמר
אייל	3		1	4
נועם		3	4	1
אלון	1	4	2	
גיל	4	1		2

העדפות הנשים

	אייל	נועם	אלון	גיל
ספיר	2		4	1
יערה		2	1	4
מאיה	4	1	3	
תמר	1	4		3

השלימו את המספרים בטבלאות ובדקו שמערכת השידוכים שמופיעה בשאלה אכן יציבה

.

דף תלמיד ז

1.נתבונן בטבלאות הבאות:

העדפות הגברים

	יעל	הדס	דנה	הגר	נטע	שיר
דן	4	5	3	6	2	1
ארז	2	4	3	5	6	1
אבי	1	2	6	3	4	5
חנן	2	3	4	5	1	6

העדפות הנשים

	דן	ארז	אבי	חנן
יעל	2	3	4	1
הדס	3	1	4	2
דנה	4	1	2	3
הגר	2	1	4	3
נטע	3	2	1	4
שיר	3	4	2	1

מספר הגברים שונה ממספר הנשים, ובכל זאת ננסה להפעיל את תהליך Gale-Shapley:

א. מהי מערכת השידוכים המתקבלת בתהליך Gale-Shapley כאשר הגברים הם המחזרים?
מיהן הנשים הנותרות בלתי משודכות?
האם מערכת השידוכים יציבה?
שימו לב שגם הנשים שנותרו בלתי משודכות יכולות לנסות ולפרק את השידוך.

ב. מהי מערכת השידוכים המתקבלת בתהליך Gale-Shapley כאשר הנשים הן המחזרות?
מיהן הנשים הנותרות בלתי משודכות?
האם מערכת השידוכים יציבה?

2. בכיתה לומדים עשרה תלמידים. נסמנם באותיות א,ב,ג,ד,ה,ו,ז,ח,ט,י.
כל תלמיד צריך לבחור באחד משלושת החוגים הבאים: ציור, מחשבים וקוסמות.
חוג הציור יכול לקלוט עד חמישה תלמידים, חוג המחשבים עד ארבעה תלמידים וחוג הקוסמות עד שני תלמידים.
נערכו מבחני התאמה שבסיומם דרג כל חוג את התלמידים לפי סדר ההעדפות שלו
.
כמו כן, כל תלמיד דרג את סדר ההעדפות שלו החוגים.
בעמוד הבא תוכלו למצוא את טבלאות ההעדפות.

להלן טבלת ההעדפות של כל אחד מהחוגים לגבי כל אחד מהתלמידים.

ההעדפה הנמוכה ביותר היא 10 והגבוהה ביותר היא 1

<u>העדפות החוגים</u>

	א	ב	ג	ד	ה	ו	ז	ח	ט	י
ציור	4	2	6	5	10	7	9	1	3	8
מחשבים	6	9	8	3	4	1	2	5	10	7
קוסמות	7	5	3	10	1	8	6	9	4	2

להלן טבלת ההעדפות של כל תלמיד לגבי כל אחד מהחוגים. ההעדפה הנמוכה ביותר היא 3 והגבוהה ביותר היא 1.

<u>העדפות התלמידים</u>

	ציור	מחשבים	קוסמות
א	3	1	2
ב	3	2	1
ג	3	2	1
ד	1	3	2
ה	2	1	3
ו	1	3	2
ז	3	2	1
ח	3	2	1
ט	2	1	3
י	1	2	3

עליכם מוטלת המשימה להתאים את התלמידים לחוגים, כך שיתקיימו הדרישות הבאות:

א. בחוג לציור יהיו עד חמישה תלמידים, בחוג למחשבים עד ארבעה ובחוג לקוסמות עד שניים.

ב. החלוקה צריכה להיות <u>יציבה!</u> פירוש הדבר שאין מצב בו תלמיד מסוים רוצה חוג כלשהו יותר ממה שהוא רוצה את החוג אליו התקבל, בזמן שחוג זה רוצה אותו יותר ממה שהוא רוצה את אחד מהתלמידים שהתקבלו אליו.

מיהו החוג שמקבל תלמיד אחד פחות ממה שהוא יכול לקלוט?

פתרון למורה

מסתבר שתהליך Gale-Shapley יוצר מערכת שידוכים יציבה גם כאשר קבוצת הגברים שונה בגודלה מקבוצת הנשים. לא נוכיח זאת (אם כי ההוכחה דומה לזו של קבוצות שוות גודל).

לנוחיותכם הנה שוב טבלאות ההעדפות
:

העדפות הגברים

	יעל	הדס	דנה	הגר	נטע	שיר
דן	4	5	3	6	2	1
ארז	2	4	3	5	6	1
אבי	1	2	6	3	4	5
חנן	2	3	4	5	1	6

העדפות הנשים

	דן	ארז	אבי	חנן
יעל	2	3	4	1
הדס	3	1	4	2
דנה	4	1	2	3
הגר	2	1	4	3
נטע	3	2	1	4
שיר	3	4	2	1

1א. תהליך חיזור הגברים קצר מאוד:

יעל	הדס	דנה	הגר	נטע	שיר
אבי (1)				חנן (1)	דן (1)
					~~ארז (1)~~

↓

יעל	הדס	דנה	הגר	נטע	שיר
~~אבי (1)~~				חנן (1)	דן (1)
ארז (2)					

↓

יעל (3)	הדס (4)	דנה	הגר	נטע (4)	שיר (3)
ארז (2)	אבי (2)			חנן (1)	דן (1)

קל לבדוק שמערכת השידוכים שהתקבלה יציבה. גם הגר ודנה שמחוץ למערכת אינן יכולות לפרק אותה.

1ב. תהליך חיזור הנשים ארוך מאד. הרי ברור ששתי נשים יפלטו מהמערכת, וזה יקרה רק

לאחר שכל אחת תקבל דחייה <u>מכל</u> אחד מארבעת הגברים:

<u>דן</u>	<u>ארז</u>	<u>אבי</u>	<u>חנן</u>
	~~הדס (1)~~	נטע (1)	יעל (1)
	דנה (1)		~~שיר (1)~~
	~~הגר (1)~~		

↓

<u>דן</u>	<u>ארז</u>	<u>אבי</u>	<u>חנן</u>
הגר (2)	דנה (1)	נטע (1)	יעל (1)
		שיר (2)	הדס (2)

↓

<u>דן</u>	<u>ארז</u>	<u>אבי</u>	<u>חנן</u>
~~הגר (2)~~	דנה (1)	נטע (1)	יעל (1)
הדס (3)			
שיר (3)			

↓

<u>דן</u>	<u>ארז</u>	<u>אבי</u>	<u>חנן</u>
שיר (3)	דנה (1)	נטע (1)	יעל (1)
		הדס (4)	הגר (3)

↓

<u>דן</u>	<u>ארז</u>	<u>אבי</u>	<u>חנן</u>
שיר (3)	דנה (1)	הדס (4)	יעל (1)
	~~נטע (2)~~	~~הגר (4)~~	

הגר נפלטת מהמערכת!

↓

↓

דן	ארז	אבי	חנן
שיר (3)	דנה (1)	הדס (4)	יעל (1)
~~נטע (3)~~			

↓

דן	ארז	אבי	חנן
שיר (3)	דנה (1)	הדס (4)	~~יעל (1)~~
			נטע (4)

↓

דן	ארז	אבי	חנן
שיר (3)	דנה (1)	הדס (4)	נטע (4)
~~יעל (2)~~			

↓

דן	ארז	אבי	חנן
שיר (3)	~~דנה (1)~~	הדס (4)	נטע (4)
	יעל (3)		

↓

דן	ארז	אבי	חנן
שיר (3)	יעל (3)	הדס (4)	נטע (4)
		~~דנה (2)~~	

דן	ארז	אבי	חנן
שיר (3)	יעל (3)	הדס (4)	נטע (4)
			~~דנה (3)~~

דן (1)	ארז (2)	אבי (2)	חנן (1)
שיר (3)	יעל (3)	הדס (4)	נטע (4)
~~דנה (4)~~			

דנה נפלטת מהמערכת!

קיבלנו את אותה מערכת שידוכים כמו במקרה שבו הגברים הם המחזרים.

<u>הערה:</u> לא נוכיח זאת, אבל במקרה שמספר הגברים גדול ממספר הנשים, אם אישה כלשהי נשארת ללא שידוך כאשר אחד הצדדים מחזר בתהליך Gale-Shapley, הרי שאותה אישה תישאר לא משודכת גם כאשר הצד השני יחזר. כמו כן אין אף מערכת שידוכים יציבה בה משודכת אישה זה. מבחינת התרגיל שלנו, דנה והגר לא יכולות להופיע באף מערכת שידוכים יציבה!!

1. מסתבר שגם בשאלה זו אפשר ליצור מערכת יציבה בתהליך דמוי Gale-Shapley.

   את התהליך אפשר לבצע גם כאן בשתי צורות. ראשית נתבונן במצב הטבעי שבו התלמידים הם המחזרים: בתחילה פונה כל תלמיד לחוג שנמצא אצלו בעדיפות ראשונה. חוג שמקבל הצעות מעבר למכסה שלו, משאיר בהמתנה את התלמידים המועדפים עליו (לפי גודל המכסה), ואת האחרים דוחה. התלמידים הנדחים פונים בשלב שני לחוגים שמופיעים אצלם בעדיפות שניה והתהליך נמשך באותה הצורה עד לשלב שבו לא נדחים יותר תלמידים.

המספר המופיע ליד שם החוג הוא המכסה שלו. המספר המופיע בסוגריים שמשמאל לאות התלמיד הוא ההעדפה שלו לחוג, והמספר המופיע בסוגריים שמימין לאות התלמיד הוא ההעדפה של החוג לתלמיד זה.

ציור - 5	**מחשבים - 4**	**קוסמות - 2**
(5) ד (1)	(6) א (1)	(5) ב (1)
(7) ו (1)	(4) ה (1)	(3) ג (1)
(8) י (1)	(10) ט (1)	(6) ~~ז (1)~~
		(9) ~~ח (1)~~

ציור - 5	**מחשבים - 4**	**קוסמות - 2**
(5) ד (1)	(6) א (1)	(5) ב (1)
(7) ו (1)	(4) ה (1)	(3) ג (1)
(8) י (1)	(10) ~~ט (1)~~	
	(2) ז (2)	
	(5) ח (2)	

ציור - 5	**מחשבים - 4**	**קוסמות - 2**
(5) ד (1)	(6) א (1)	(5) ב (1)
(7) ו (1)	(4) ה (1)	(3) ג (1)
(8) י (1)	(2) ז (2)	
(3) ט (2)	(5) ח (2)	

התהליך הסתיים מהר. לא קשה לראות ש"מערכת השידוכים" יציבה. שבעה תלמידים קיבלו את העדיפות הראשונה שלהם. ז,ח,ט שקיבלו את העדיפות השניה שלהם, אינם יכולים לשפר את מצבם כיוון שכבר ניסו את העדיפויות הטובות יותר שלהם, אך חוגים אלה העדיפו אחרים על פניהם.

לסיום נבדוק איזו תוצאה תתקבל במקרה בו החוגים הם המחזרים. במקרה זה, כל חוג פונה תחילה לסטודנטים שנמצאים בעדיפויות הראשונות שלו, בהתאם לגודל המכסה שלו (חוג הציור פונה לחמישה, חוג המחשבים לארבעה וחוג הקוסמות לשניים). תלמיד שמקבל יותר מהצעה אחת דוחה את אותם חוגים שמועדפים עליו פחות. חוג שנשאר עם פחות תלמידים מאשר המכסה שלו פונה לתלמידים הבאים בתור בסדר העדיפויות שלו, וחוזר חלילה.

א	ב	ג	ד	ה	ו	ז	ח	ט	י
ציור	ציור		ציור	~~מחשבים~~	מחשבים	מחשבים	ציור	ציור	קוסמות
			~~מחשבים~~	קוסמות					

חוג המחשבים יאלץ להשתמש בעדיפות החמישית שלו וחוג הקוסמות בעדיפות השלישית שלו:

א	ב	ג	ד	ה	ו	ז	ח	ט	י
ציור	ציור	קוסמות	ציור	מחשבים	מחשבים	מחשבים	~~ציור~~	ציור	קוסמות
							מחשבים		

חוג הציור יאלץ להשתמש בעדיפות השישית שלו, ומכאן יתפתח "מאבק" שיסתיים רק כאשר חוג כלשהו ידחה על ידי <u>כל</u> התלמידים.

א	ב	ג	ד	ה	ו	ז	ח	ט	י
ציור	ציור	קוסמות	ציור	מחשבים	מחשבים	מחשבים	מחשבים	ציור	קוסמות
		~~ציור~~							

ציור עובר לעדיפות שביעית:

א	ב	ג	ד	ה	ו	ז	ח	ט	י
ציור	ציור	קוסמות	ציור	מחשבים	~~מחשבים~~	מחשבים	מחשבים	ציור	קוסמות
					ציור				

חוג המחשבים עובר לעדיפות שישית:

א	ב	ג	ד	ה	ו	ז	ח	ט	י
~~ציור~~	ציור	קוסמות	ציור	מחשבים	ציור	מחשבים	מחשבים	ציור	קוסמות
מחשבים									

ציור עוברים לעדיפות שמינית:

א	ב	ג	ד	ה	ו	ז	ח	ט	י
מחשבים	ציור	קוסמות	ציור	מחשבים	ציור	מחשבים	מחשבים	ציור	~~קוסמות~~
									ציור

חוג הקוסמות עובר לעדיפות רביעית:

א	ב	ג	ד	ה	ו	ז	ח	ט	י
מחשבים	ציור	קוסמות	ציור	מחשבים	ציור	מחשבים	מחשבים	ציור	ציור
								~~קוסמות~~	

חוג הקוסמות עובר לעדיפות החמישית:

א	ב	ג	ד	ה	ו	ז	ח	ט	י
מחשבים	~~ציור~~	קוסמות	ציור	מחשבים	ציור	מחשבים	מחשבים	ציור	ציור
	קוסמות								

חוג הציור עובר לעדיפות תשיעית:

א	ב	ג	ד	ה	ו	ז	ח	ט	י
מחשבים	קוסמות	קוסמות	ציור	מחשבים	ציור	מחשבים	מחשבים	ציור	ציור
						~~ציור~~			

חוג הציור עובר לעדיפות העשירית והאחרונה שלו:

א	ב	ג	ד	ה	ו	ז	ח	ט	י
מחשבים	קוסמות	קוסמות	ציור	מחשבים	ציור	מחשבים	מחשבים	ציור	ציור
				~~ציור~~					

קיבלנו "מערכת שידוכים" יציבה הזהה למערכת היציבה שקיבלנו בחיזור התלמידים.