מתמטיקה לחטיבה העליונה

5 יחידות לימוד

# פרקים באלגברה

אלכסנדר חייט

האוניברסיטה העברית בירושלים, המרכז להוראת המדעים

משרד החינוך, המזכירות הפדגוגית, האגף לתכנון ולפיתוח תכניות לימודים

מטה מל"מ, המרכז הישראלי לחינוך מדעי - טכנולוגי ע"ש עמוס דה-שליט

תשס"ז 2007

מתמטיקה לחטיבה העליונה

5 יחידות לימוד

# פרקים באלגברה

אלכסנדר חייט

האוניברסיטה העברית בירושלים, המרכז להוראת המדעים

משרד החינוך, המזכירות הפדגוגית, האגף לתכנון ולפיתוח תכניות לימודים

מטה מל"מ, המרכז הישראלי לחינוך מדעי – טכנולוגי ע"ש עמוס דה-שליט

תשס"ז 2007

מתמטיקה לחטיבה העליונה

5 יחידות לימוד

# פרקים באלגברה

3 פרקים בנושאים: בעיות מילוליות
משוואות ואי-שוויונים ליניאריים וריבועים עם ערך מוחלט
מבוא לאינדוקציה מתמטית


כתיבה: **ד"ר אלכסנדר חייט**

עריכת לשון: **מיכל פרנקל**



© כל הזכויות שמורות למשרד החינוך



יצא לאור במימון האגף לתכנון ולפיתוח תכניות לימודים במשרד החינוך
ומטה מל"מ, המרכז הישראלי לחינוך מדעי-טכנולוגי ע"ש עמוס דה-שליט

האוניברסיטה העברית בירושלים, המרכז להוראת המדעים

משרד החינוך, המזכירות הפדגוגית, האגף לתכנון ולפיתוח תכניות לימודים

מטה מל"מ, המרכז הישראלי לחינוך מדעי – טכנולוגי ע"ש עמוס דה-שליט

תשס"ז 2007

גף אישור ספרי לימוד – באישור
משרד החינוך התרבות והספורט
אישור מס' נ/4108

# תוכן העניינים


I.בעיות מילוליות 1

1. הקדמה 1

2. דוגמאות לבעיות לפי סוגים 1

2.1 בעיות מספרים ובעיות כלליות 2

2.2 בעיות תנועה 6

2.3 בעיות עבודה משותפת (הספק) 11

2.4 בעיות תמיסה 14

2.5 בעיות קנייה ומכירה (רווח והפסד) 16

2.6 המשותף בין בעיות מסוגים שונים 17

3. תרגילים 19

3.1 בעיות מספרים ובעיות כלליות 19

3.2 בעיות תנועה 23

3.3 בעיות עבודה משותפת (הספק) 24

3.4 בעיות תמיסה 26

3.5 בעיות קנייה ומכירה (רווח והפסד) 27

4. תשובות 30

II. משוואות ואי-שוויונים ליניאריים וריבועיים עם ערך מוחלט 32

1. הקדמה 32

2. משוואות ואי-שוויונים ליניאריים עם ערך מוחלט 34

2.1 משוואות ואי-שוויונים עם ביטוי ליניארי בערך מוחלט ומספר 34

2.2 משוואות ואי-שוויונים עם ביטוי ליניארי בערך מוחלט וביטוי ליניארי ללא ערך מוחלט 38

2.3 משוואות ואי-שוויונים עם שני ביטויים ליניאריים בערך מוחלט ומספר 45

2.4 מנה של שני ביטויים ליניאריים הנתונים בערכים מוחלטים, ומספר 54

3. משוואות ואי-שוויונים עם ביטוי ריבועי בערך מוחלט ומספר 56

*4. על שימוש בגרפים לפתרון משוואות ואי-שוויונים 62

5. תרגילים 64

6. תשובות 68

## III. מבוא לאינדוקציה מתמטית 72


1. הקדמה 72

2. עקרון האינדוקציה המתמטית 74

2.1 סכומים של סדרות בנות n איברים 75

2.1.1 מקרים בהם במעבר מ-k ל- (k+1) מצורף לסכום יותר מאיבר אחד 78

2.1.2 מקרים בהם במעבר מ-k ל- (k+1) נגרעים איברים מהסכום 79

2.2 מכפלות 79

2.3 תכונות התחלקות 80

2.4 אי-שוויונים 81

3. עקרון האינדוקציה עם ערכי בסיס שונים 86

4. הגדרות של סדרות, נוסחאות נסיגה 90

4.1 הגדרת סדרות באמצעות איבר בסיסי יחיד 90

4.2 הגדרת סדרות באמצעות כמה איברים בסיסיים 95

5. עקרון האינדוקציה המורחבת 100

*6. עוד על התקֵפות של שיטת האינדוקציה המתמטית 108

7. תרגילים 109

8. פתרונות לתרגילים נבחרים 121

9. התפתחות עקרון האינדוקציה: סקירה היסטורית 129


**הערה**: בסעיפים המסומנים בכוכבית (*) וכן בחלקים הכתובים בגופן קטן שמופיעים בתוך סעיפים אחרים, מופיעות הרחבות שאינן נכללות בתוכנית הלימודים.

# I. בעיות מילוליות

## 1. הקדמה

פתירת בעיה מילולית כוללת את שלושת השלבים הבאים:

א. הרכבת משוואה;

ב. פתירת המשוואה;

ג. בדיקת ההתאמה של פתרונות המשוואה לתיאור הבעיה.

ובאופן מפורט יותר:

א. הרכבת משוואה בהתאם לנתונים של הבעיה הנתונה פירושו מתן ביטוי אלגברי לקשר בין הערכים הנתונים בבעיה (מספרים או פרמטרים) לבין אלה שיש למצוא אותם (הנעלמים).
הקושי בהרכבת משוואות נעוץ בהעדר אלגוריתם (כלומר סדרת כללים קבועים) להרכבת משוואה לכל בעיה. היכולת להרכיב משוואות נרכשת על-ידי ניסיון בפתירת בעיות רבות.
שלב חשוב בהרכבת משוואה הוא ההחלטה איזה ערך יסומן כנעלם, וכמה נעלמים ומשוואות להרכיב. בדרך-כלל יש כמה אפשרויות. יש מקרים שבהם דרך אחת פשוטה יותר מדרכים אחרות. יש גם מקרים שכמה דרכים הן שקולות, ואז הבחירה בין הדרכים השונות היא עניין של העדפה אישית.
ב. השלב של פתירת המשוואה הוא טכני בעיקרו, ומנצל את שיטות הפתירה שנלמדו בעבר.
ג. במקרים מסוימים, חלק מהפתרונות שנמצאו בשלב ב׳ אינם מתאימים למשמעות הנעלם בבעיה הספציפית. למשל, יש ערכים (כגון זמן הדרוש לביצוע עבודה) שאינם יכולים להיות שליליים. כעת הזמן לנפות את הפתרונות שאינם מתאימים למשמעות הנעלם בבעיה הנדונה.

## 2. דוגמאות לבעיות לפי סוגים

כאמור אין שיטה כללית לפתרון בעיות; אך למרות זאת, אפשר למיין בעיות לסוגים. מיון כזה עשוי לעזור בארגון החשיבה ובשיפור המיומנות בפתרון בעיות. אפשר למיין בעיות בשיטות שונות. כאן נמיין אותן לפי הנושאים שבהם דנה הבעיה. נדון בכמה סוגים שכיחים. כפי שנראה בסעיף 2.6, בעיות מסוגים שונים מבחינת התוכן עשויות להיות זהות מבחינת הדרך המתמטית לפתרון.

## 2.1 בעיות מספרים ובעיות כלליות

בעיות מספרים הן הבעיות שלא קיים "סיפור" מאחורי הניסוח שלהן. בבעיה "כללית" קיים סיפור כזה, אך הפתרון איננו מבוסס על שום נוסחה או שיטה כמו אלה שמאפיינות את הסוגים האחרים. הלימוד של פתרון בעיות מתחיל בדרך-כלל מהסוג הזה.

נדגיש: סיווג בעיות לפי תוכנן הוא לעתים די מלאכותי, ויש בעיות שהן "גבוליות", כלומר שאפשר להעבירן מהבעיות הכלליות לאחד הסוגים האחרים, או להפך.

**דוגמאות**

א. נתונים שני מספרים. אם נוסיף 3 למספר הראשון, התוצאה תהיה גדולה פי 3 מהמספר השני; אם נוסיף 2 למספר השני, התוצאה תהיה חצי מהמספר הראשון. מהם שני המספרים?

פתרון:

נסמן את שני המספרים x ו-y בהתאמה. מהנתונים נקבל:

$$\begin{cases} x + 3 = 3y \\ y + 2 = x/2 \end{cases}$$

ומכאן:

$$\begin{cases} x = 18 \\ y = 7 \end{cases}$$

ובכן שני המספרים הם 18 ו-7.

בעיה כללית מתקבלת מבעיית מספרים על-ידי "הלבשת" הניסוח בסיפור. בהקשר של הבעיה הקודמת, למשל, אפשר להציע את הניסוח הבא:

לנועה ואבי יש סכום כסף מסוים (בשקלים). אם נוסיף לסכום של נועה 3 ₪, נקבל סכום הגדול פי 3 מזה שיש לאבי. אם נוסיף 2 ₪ לסכום של אבי, נקבל סכום השווה למחצית מזה שיש לנועה. כמה כסף יש לנועה וכמה לאבי?

ב. הנה עוד בעיה כללית:

לאלי יש שני מדפי ספרים. בתחילה היה מספר הספרים על המדף העליון מחצית מזה שעל המדף התחתון. אלי העביר 6 ספרים מהמדף העליון למדף התחתון. בנוסף, הוא קיבל במתנה עוד שני ספרים, וגם אותם שם על המדף התחתון. עכשיו מספר הספרים שעל המדף התחתון גדול פי 7 מזה שעל המדף העליון. כמה ספרים יש עכשיו על כל אחד משני המדפים?

פתרון:

נסמן ב-x את מספר הספרים שיש עכשיו על המדף העליון. אם כך, על המדף התחתון יש 7x ספרים. לפני שאלי העביר ספרים מהמדף העליון לתחתון ולפני שקיבל שני ספרים במתנה, היו על המדף העליון היו x+6 ספרים, ועל מדף התחתון 8 - 7x ספרים. לפי הנתון, מספר הספרים על המדף התחתון היה אז גדול פי 2 מזה שעל המדף העליון, כלומר:

$$7x - 8 = 2(x + 6)$$

לפני שנפתור את המשוואה, נשים לב למגבלה על הפתרון הנובעת ממשמעותו של הנעלם בהקשר של הבעיה הנדונה: ערך הנעלם חייב להיות מספר שלם אי-שלילי. אם נקבל פתרון שאינו עומד בדרישה הזאת, המסקנה תהיה שלבעיה אין פתרון.

ובכן, נפתור את המשוואה:

$$7x - 8 = 2x + 12$$

$$5x = 20$$

$$x = 4$$

אם כך, על המדף העליון יש עכשיו 4 ספרים, ומכיוון שמספר הספרים על המדף התחתון גדול פי 7, יש על המדף התחתון 28 ספרים.

**הערה**: אפשר היה לסמן את מספר הספרים על המדף התחתון ב-y, ולקבל מערכת של שתי משוואות:

$$\begin{cases} y - 8 = 2(x + 6) \\ y = 7x \end{cases}$$

בדרך-כלל, כאשר המשוואה המתארת ערך כלשהו באמצעות ערכים אחרים היא מאוד פשוטה (כמו במקרה שלנו), אין טעם להכניס נעלם נוסף.

ג. לפעמים עוסקות בעיות מספרים לא במספר עצמו, אלא בספרות שלו. כאן יש לזכור את הקשר בין מספר לספרות שלו. בתרגום בין ספרות למספר יש להכפיל כל ספרה בחזקה של 10. מעריך החזקה נקבע בהתאם למיקום הספרה במספר. למשל, את המספר 2874 אפשר להציג באמצעות הספרות שלו כך:

$$2874 = 2 \cdot 1000 + 8 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 4$$

כאשר לנעלם יש משמעות של ספרה, הפתרון חייב להיות מספר שלם בין 0 ל-9. אם מדובר בספרה השמאלית של מספר, הפתרון אינו יכול להיות 0, וטווח הפתרונות הוא בין 1 ל-9.

דוגמה:

נתון מספר דו-ספרתי. המספר הזה גדול פי 21 מההפרש בין ספרת העשרות שלו לבין ספרת היחידות שלו. אם נחליף בין הספרות במספר ונחסר 12 מהמספר שמתקבל, התוצאה תהיה גדולה פי 3 מסכום הספרות של המספר המקורי. מצאו את המספר.

פתרון:

כיוון שנושא השאלה הוא הספרות של המספר, כדאי לסמן את שתי הספרות כשני נעלמים. נסמן את ספרת היחידות ב-x ואת ספרת העשרות ב-y.

בגלל אופי השאלה חייבים x ו-y להיות מספרים טבעיים חד-ספרתיים, ו-y אינו יכול להיות 0. המספר הנדון עצמו שווה ל- $10y+x$.

מהנתון הראשון מקבלים

$$10y + x = 21(y - x)$$

הנתון השני מתייחס למספר המתקבל מהמספר המקורי על-ידי החלפת הספרות, כלומר למספר $10x+y$.

מהנתון השני מקבלים:

$$(10x + y) - 12 = 3(x + y)$$

ובכן קיבלנו מערכת של שתי משוואות עם שני נעלמים:

$$\begin{cases} 10y + x = 21(y - x) \\ 10x + y - 12 = 3(x + y) \end{cases}$$

נכנס איברים דומים ונקבל:

$$\begin{cases} 22x = 11y \\ 7x - 2y = 12 \end{cases}$$

נבודד את y מהמשוואה הראשונה, נציב במשוואה השנייה, ונקבל: $x = 4$ , $y = 8$, והמספר הוא 84.

ד. בבעיות רבות יש שימוש באחוזים. כאשר נתון מסוים בבעיה מופיע באחוזים מערך כלשהו, יש לתרגם את האחוזים למספר.

נזכור שהמשמעות של p% היא $\frac{p}{100}$, לכן p אחוזים מערך a שווה ל- $\frac{p \cdot a}{100}$.

כשעוסקים באחוזים מדברים לעתים גם על כך שגודל a קטן/גדול **ב**אחוז מסוים מגודל b. משמעותו של ניסוח כזה היא הפרש. לדוגמה: נתונים שני אוספים של פריטים. באוסף הראשון יש a פריטים; האוסף השני קטן ממנו **ב**- 15%.

אם נסמן את מספר הפריטים באוסף השני ב-b, משמעות הנתון היא $b = a - \frac{15a}{100}$.

אפשר לדבר גם על ערכים שהם מעל 100%. למשל, אם ערך b מהווה 250% מערך a, אז $b = \frac{250a}{100} = 2.5a$;

אם ערך c גדול מ-a **ב**- 250%, אז $c = a + \frac{250a}{100} = 3.5a$.

נראה דוגמה:

35% מהעובדים במפעל הם נשים, והשאר גברים. ההפרש בין מספר הגברים למספר הנשים הוא 252 . כמה עובדים יש במפעל?

פתרון 1:

נסמן ב-x את מספר הגברים וב-y את מספר הנשים.

לפי הנתון, $x - y = 252$ ו- $y = 0.35(x + y)$.

ובכן, יש לפתור את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} x - y = 252 \\ y = 0.35(x + y) \end{cases}$$

נבטא את y שבמשוואה הראשונה באמצעות x, ונציב את התוצאה במשוואה השנייה. נקבל:

$$0.35x - 0.65(x - 252) = 0$$

$$0.3x = 0.65 \times 252$$

$$x = 546$$

עכשיו אפשר לחשב את y ולמצוא את x+y.

פתרון 2:

נסמן ב-x את מספר הכולל של עובדי המפעל, ואז מספר הנשים מבין העובדים הוא 0.35x, ומספר הגברים 0.65x. לפי הנתון:

$$0.65x - 0.35x = 252$$

ומכאן:

$$x=840$$

הפתרון הזה פשוט יותר מהפתרון הראשון.

זו דוגמה לכך שלאותה בעיה עשויות להיות דרכים שונות לפתרון, ואחת מהן פשוטה יותר מהאחרות.

ה. בבעיות מסוימות מתקבלת משוואה כזאת, שאחרי כינוס האיברים הדומים הופך המקדם שליד הנעלם לאפס, כלומר הנעלם אינו מופיע במפורש במשוואה שמתקבלת. במקרה כזה הפתרונות נקבעים על-ידי תנאים אחרים (שפותרים בלתי מנוסים נוהגים לזלזל בהם). הנה דוגמה:

אדם רצה להכפיל את המספר 78 במספר דו-ספרתי מסוים. הוא השתמש במחשבון, ובטעות הקליד בסדר הפוך את ספרות המספר השני. התוצאה שקיבל הייתה קטנה ב-2808 מהתשובה שהיה אמור לקבל. מה יכול להיות המספר השני, אם ידוע שההפרש בין ספרותיו הוא 4?

פתרון:

נסמן ב-x את ספרת היחידות במספר הלא-ידוע. אם כך, ספרת העשרות שלו שווה ל- x+4. (אנו מסיקים שספרת העשרות גדולה מספרת היחידות מכך שהתוצאה שהתקבלה בהכפלה במספר שגוי הייתה **קטנה** מהתוצאה הדרושה.)

על כן, המספר שלנו הוא $10(x + 4) + x$ , ואילו המספר השגוי הוא $10x + (x + 4)$.

לפי הנתונים נקבל את המשוואה:

$$78\cdot[10(x+4) + x - 10x - (x+4)] = 2808$$

ואם נחלק ב-78 ונכנס איברים דומים, נקבל:

$$36=36$$

המשוואה היא מהסוג

$$ax - ax + b = b$$

למשוואה עצמה - כל ערך של x מהווה פתרון. המגבלה על מספר הפתרונות מתקבלת מהמשמעות של x שחייב להיות ספרה, כלומר מספר שלם בין 0 ל-9. גם x+4 מוגבל מלמעלה על-ידי 9. ובכן הפתרונות האפשריים הם:

1) $x = 0$, ואז המספר הוא 40 ;
2) $x = 1$, ואז המספר הוא 51 ;
3) $x = 2$, ואז המספר הוא 62 ;
4) $x = 3$, ואז המספר הוא 73 ;
5) $x = 4$, ואז המספר הוא 84 ;
6) $x = 5$, ואז המספר הוא 95.

**הערה**: שינוי קטן בתנאֵי הבעיה עשוי להפוך אותה לבעיה "סטנדרטית" עם פתרון יחיד. ראו שאלה 33 בסעיף 3.1.

ו. לפעמים נדמה שבבעיה חסרים נתונים, אך מתברר שהנתון החסר מתבטל בשלב פתרון המשוואה. לדוגמה: נתונים שלושה מספרים. המכפלה של המספר הראשון בשני גדולה פי 5 ממכפלת המספר השני בשלישי. ההפרש בין המספר הראשון לשני גדול ב-8 מההפרש בין המספר השלישי לשני. מהו המספר הראשון?
פתרון:
נסמן את שלושת המספרים ב-x, y ו-z ; יש למצוא את x. מהנתונים נקבל את המערכת:

$$\begin{cases} xy = 5yz \\ x - y = (z - y) + 8 \end{cases}$$

לכאורה יש כאן מערכת של שתי משוואות עם שלושה נעלמים. אך בפועל y הוא נעלם סרק: מהניסוח ברור שהוא אינו יכול להיות שווה ל-0, ולכן אפשר לחלק בו את שני האגפים של המשוואה הראשונה. ואחרי כינוס האיברים הדומים במשוואה השנייה מקבלים מערכת פשוטה של שתי משוואות עם שני נעלמים:

$$\begin{cases} x = 5z \\ x = z + 8 \end{cases}$$

ומכאן

$$x = 10$$

## 2.2 בעיות תנועה

בעיות תנועה הן בעיות המבוססות על שתי עובדות מתחום הפיזיקה:

1. הנוסחה:

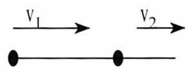
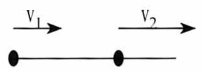
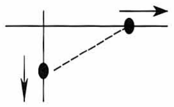
זמן × מהירות = דרך

2. הכלל לחישוב **המהירות היחסית** בין שני גופים נעים:
אם שני גופים נעים בכיוונים מנוגדים - המהירות היחסית שלהם היא סכום המהירויות;
אם שני גופים נעים באותו כיוון - המהירות היחסית שלהם היא ההפרש בין המהירויות.

גופים הנעים בכיוונים מנוגדים עשויים להתקרב זה לזה (לפני נקודת המפגש) או להתרחק זה מזה (אחרי נקודת המפגש).

גם גופים הנעים לאותו כיוון עשויים להתקרב (אם הגוף המהיר מבין השניים משיג את הגוף האִטי יותר) או להתרחק (אם הגוף המהיר מביניהם בורח מהאִטי יותר).

בעיות תנועה עשויות לעסוק גם בגופים הנעים בכיוונים ניצבים זה לזה, ואז יש להיעזר במשפט פיתגורס.

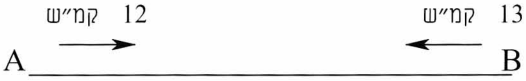
| תנועה בכיוונים מנוגדים<br>המהירות היחסית = סכום המהירויות | | תנועה באותו כיוון<br>המהירות היחסית = הפרש המהירויות | | תנועה בכיוונים מאונכים |
|---|---|---|---|---|
| | |   |   |  |
| א. התקרבות כשהכיוונים מנוגדים | ב. התרחקות כשהכיוונים מנוגדים | ג. התקרבות בתנועה באותו כיוון $(v_1>v_2)$ | ד. התרחקות בתנועה באותו כיוון $(v_1<v_2)$ | ה. שני גופים נעים בניצב זה לזה |

יש לשים לב ליחידות הנתונות בבעיה. למשל, אם הזמן נתון בדקות ואילו המהירות בקמ"ש - אז יש לבצע התאמה. (בדרך-כלל כדאי לתרגם את הזמן לשעות, אך לפעמים יכול להיות נוח יותר לתרגם מהירויות לק"מ לדקה.)

בבעיות תנועה מקובל להניח שהמהירויות הן קבועות, אלא אם כן נאמר אחרת. (אפשר גם לדבר על מהירויות ממוצעות לאורך זמן מסוים.)

**דוגמאות**

א. שני רוכבי אופניים יוצאים בו-זמנית איש לקראת רעהו משתי ערים A ו-B, הנמצאות במרחק של 300 ק"מ זו מזו. מהירות הרוכב הראשון היא 12 קמ"ש, ומהירות השני 13 קמ"ש. מתי ייפגשו הרוכבים ובאיזה מרחק מנקודות היציאה שלהם?




פתרון:

נסמן ב-t את הזמן שייקח לשני הרוכבים להגיע לנקודת המפגש. מתקיים:

$$12t + 13t = 300$$

ומכאן

$$t = 12$$

כלומר הרוכבים ייפגשו אחרי 12 שעות. נקודת המפגש נמצאת במרחק $12\times12=144$ ק"מ מהעיר A ובמרחק $12\times13=156$ ק"מ מהעיר B.

ב. לפעמים דנה בעיית תנועה בגוף אחד ומשווה בין שתי אפשרויות לגביו. נתבונן בדוגמה:

אדם יצא לדרך מנק' A ואחרי זמן מסוים הגיע לנק' B. לו הייתה מהירותו קטנה יותר ב-1 קמ"ש, הייתה הדרך אורכת 6 שעות יותר ממה שארכה בפועל. לו הייתה מהירותו גדולה ב-2 קמ"ש ממהירותו במציאות, הוא היה מסיים את המסלול בשני שלישים מהזמן שלקח לו בפועל. מהו המרחק בין A ל-B, וכמה זמן הלך האדם בין שתי הנקודות האלו?

פתרון:

השאלה אמנם אינה מתייחסת למהירות, אך נוח לקחת כנעלם דווקא את המהירות ( v ) כי רוב הנתונים מתייחסים אליה. בתור נעלם שני ( t ) ניקח את הזמן שלקח לאדם בפועל להגיע מ-A ל-B. ובכן יש לפתור את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} (v-1)(t+6) = vt \\ (v+2)\cdot\frac{2}{3}t = vt \end{cases}$$

אחרי פתיחת סוגריים וכינוס איברים דומים נקבל:

$$\begin{cases} 6v - t = 6 \\ \frac{4}{3}t = \frac{vt}{3} \end{cases}$$

כדי לקבל מערכת לינארית יש לחלק ב-t את שני האגפים של המשוואה השנייה. לשם כך יש להניח $t\neq0$:

$$\begin{cases} 6v - t = 6 \\ \frac{4}{3} = \frac{v}{3} \end{cases} \qquad t \neq 0$$

נקבל:

$$\begin{cases} v = 4 \\ t = 18 \end{cases}$$

ולבסוף:

$$S = vt = 72$$

בתשובה הסופית יש לציין את היחידות שבהן נמדדים ערכי הבעיה: $S=72$ (ק"מ) ; $t=18$ (שעות).

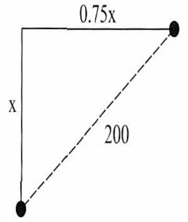
**הערה**: מבחינה מתמטית, כדי להשלים את פתרון המערכת המקורית יש לדון במקרה $t=0$. המקרה הזה אכן מוסיף למערכת פתרון נוסף:

$$\begin{cases} v = 1 \\ t = 0 \end{cases}$$

הפתרון הזה הוא פתרון סרק, כי לפי נתוני הבעיה חייב הזמן המסומן ב-t להיות גדול מ-0.

ג. גם בבעיות תנועה עשויים להופיע אחוזים. הנה דוגמה:
אחרי ששתי מכוניות נפגשו בצומת, הן המשיכו בדרכן עוד שעה וחצי, ובשלב הזה היה המרחק ביניהן 200 ק"מ. מה היו המהירויות הממוצעות של שתי המכוניות, אם המהירות הממוצעת של אחת מהן הייתה קטנה ב- 25% מזו של השנייה? שני הכבישים בצומת ניצבים זה לזה.

פתרון:




נסמן ב-x את המרחק שעברה המכונית המהירה. המרחק שעברה המכונית השנייה הוא

$$x - 0.25x = 0.75x$$

נסמן ב-v את מהירותה של המכונית המהירה, ונקבל: $x = 1.5v$.

כדי לחשב את x נשתמש במשפט פיתגורס. לשם נוחות החישוב נחליף את 0.75 ב- 3/4.

נקבל:

$$\sqrt{x^2 + (\frac{3}{4}x)^2} = 200$$

$$\frac{5x}{4} = 200$$

$$x = 160$$

$$v = \frac{2x}{3} \approx 106.7$$

מהירות המכונית השנייה היא:

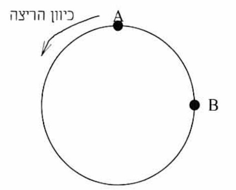
$$\frac{3v}{4} = 80$$

ובכן המהירות הממוצעת של המכונית המהירה הייתה 106.7 קמ"ש, וזו של המכונית האטית 80 קמ"ש.

**הערה**: כפי שראינו במקרה הזה (ובניגוד לדעה הרווחת בין התלמידים) התשובות אינן חייבות להתבטא במספרים מדויקים.

ד. בבעיות של תנועת שני גופים בכיוון אחד, ייתכן מצב שבו הגוף המהיר, אחרי שהשיג את הגוף האִטי פעם אחת, מספיק לסיים מסלול מסוים ולחזור ולפגוש שנית את הגוף האִטי. הגוף המהיר יכול לפגוש את הגוף האִטי בדרך חזרה, כלומר בתנועה לכיוון ההפוך, או, אם המסלול מעגלי - לשוב ולהשיג אותו מאחור. בשאלות כאלה יש לקחת בחשבון את הדרך שעבר הגוף המהיר עד ששב ונפגש עם הגוף האִטי. הנה דוגמה:
שני רצים יצאו בו-זמנית לריצה במסלול מעגלי. 40 דקות אחרי תחילת הריצה הספיק הרץ האִטי מבין השניים לעבור את המסלול פעם אחת, ולהשלים 2/3 מהסיבוב השני. בשלב הזה השיג אותו הרץ המהיר מאחור בפעם הראשונה מתחילת הריצה. מה הייתה מהירותו של הרץ האִטי, אם מהירותו של המהיר הייתה 12 קמ"ש?

פתרון:



נקי' ההתחלה A, נקי' המפגש B

נסמן את אורך המסלול ב-S. עד שהרץ המהיר השיג אותו, הספיק הרץ האִטי לעבור מרחק של

$$S+\frac{2S}{3}=\frac{5S}{3}$$

עד לאותו זמן הספיק הרץ המהיר לעבור את המסלול פעם נוספת, כלומר הוא עבר

$$2S+\frac{2S}{3}=\frac{8S}{3}$$

נתרגם את הזמן לשעות: 40 דקות = 2/3 שעה, כלומר

$$t=2/3$$

יש לפתור את המערכת:

$$\begin{cases} v_1 t = \frac{5S}{3} \\ v_2 t = \frac{8S}{3} \end{cases}$$

נציב את הערכים הידועים ( של t ושל $v_2$):

$$\begin{cases} \frac{2}{3}v_1 = \frac{5S}{3} \\ 12\cdot\frac{2}{3} = \frac{8S}{3} \end{cases}$$

מכאן:

$$S=3 \quad , \quad v_1=7.5$$

כלומר, מהירות הרץ האטי היא 7.5 קמ"ש.

ה. בבעיות תנועה אפשר לדון גם בנתונים שלכאורה אינם קשורים לתנועה עצמה. הנה דוגמה:
מספר הסיבובים שעושה גלגל של אופני ילדים כאשר האופניים עוברים 30 מ', שווה למספר הסיבובים שאופני מירוץ עושים לאורך 40 מ'. היקף הגלגל של אופני המירוץ גדול במטר אחד מזה של אופני הילדים. מהם ההיקפים של שני הגלגלים?

פתרון:

הפתרון מבוסס על הנוסחה

$$\text{מספר הסיבובים} = \frac{\text{אורך המסלול}}{\text{היקף הגלגל}}$$

נסמן ב-x את היקף הגלגל הקטן, ונקבל שהיקף הגלגל הגדול הוא x+1. מהנתונים נקבל את המשוואה:

$$\frac{30}{x}=\frac{40}{x+1}$$

נביא את שני האגפים למכנה משותף, ונקבל:

$$3(x + 1) = 4x$$

$$x = 3$$

אם כך, היקף הגלגל הקטן הוא 3 מ', והיקף הגלגל הגדול הוא 4 מ'.

ו. לא תמיד תואם הניתוח המתמטי את ההערכות האינטואיטיביות. במקרים כאלה, כדי לאשש את תוצאת החישוב כדאי לחפש את הסיבה לסתירה שבין ההערכה לחישוב. הנה דוגמה למקרה כזה:
שני אנשים יצאו בו-זמנית מירושלים לתל-אביב, כל אחד במכוניתו. האחד נסע כל הדרך במהירות של 90 קמ"ש; השני נסע מחצית המרחק במהירות של 100 קמ"ש, ואחר-כך במהירות של 80 קמ"ש. מי מהם הגיע ראשון לתל-אביב? (או אולי הגיעו שניהם יחד?)
פתרון:
הפתרון האינטואיטיבי והשגוי הוא ששניהם הגיעו ביחד. החישוב מראה אחרת.
נסמן את המרחק מירושלים לתל-אביב ב-S. זמן הנסיעה של הרכב הראשון הוא $t_1 = S/90$; נסמן ב- $t_2$ זמן הנסיעה של הרכב השני. נקבל:

$$t_2 = \frac{0.5S}{100} + \frac{0.5S}{80} = \frac{9S}{800}$$

אם כך

$$t_2 = \frac{9S}{800} > t_1 = \frac{S}{90} = \frac{9S}{810}$$

כלומר, הרכב הראשון הגיע **לפני** הרכב השני.

כדי להמחיש את הטעות בהערכה האינטואיטיבית, חשבו על המקרה שאת המחצית הראשונה של הדרך אדם עבר ברגל. במקרה כזה, גם אם את המחצית השנייה הוא יעבור במהירות האור - הוא יגיע אחרי חברו שנסע כל הדרך במהירות סבירה; כי הנוסע במכונית יגיע ליעדו עוד לפני שהולך הרגל יסיים את המחצית הראשונה של הדרך.
הסיבה לטעות בהערכה האינטואיטיבית היא שהפתרון האינטואיטיבי מתייחס למחצית הזמן. כלומר חל בלבול בין מחצית **הזמן** ומחצית **הדרך**.

## 2.3 בעיות עבודה משותפת (הספק)

בעיות עבודה משותפת דנות בהספק. הספק מוגדר כחלק היחסי של עבודה מסוימת המתבצע ביחידת זמן.
אם אדם או מכונה מסיימים משימה כלשהי ב-t יחידות זמן (כאשר העבודה מתבצעת בקצב אחיד), אז ההספק הוא $1/t$.

**דוגמאות**

א. שני פועלים צריכים לבצע עבודה מסוימת. אם הם יעבדו יחד, העבודה תושלם ב-12 שעות. כמה זמן ייקח לפועל הראשון לסיים את העבודה בעצמו, אם ידוע שהזמן הנחוץ לו קצר ב-10 שעות מהזמן הדרוש לפועל השני כדי להשלים את העבודה בעצמו?

פתרון:

נסמן ב-$t$ את הזמן (בשעות) הנחוץ לפועל הראשון להשלים את העבודה בעצמו. אם כן, החלק היחסי של העבודה שהפועל הזה מבצע בשעה אחת הוא $\frac{1}{t}$. החלק היחסי של העבודה שהפועל השני מבצע בשעה אחת הוא $\frac{1}{t+10}$. מכאן שהחלק של העבודה ששני הפועלים ביחד משלימים בשעה שווה ל- $\frac{1}{t+10}+\frac{1}{t}$.

מאידך, לפי הנתון, החלק הזה שווה ל- $\frac{1}{12}$. כך מתקבלת המשוואה:

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{t+10}=\frac{1}{12}$$

נפתור אותה.

$$12t+120+12t=t^2+10t$$
$$t^2-14t-120=0$$

למשוואה הזאת יש שני פתרונות: $t_1=20$ ו- $t_2=-6$.

מהמשמעות של $t$ ברור שהפתרון חייב להיות חיובי, לכן נפסול את הפתרון השני, והתשובה היא $t=20$. כלומר הפועל הראשון, אם יעבוד לבד, יסיים את העבודה ב-20 שעות (והפועל השני ב-30 שעות).

ב. שני צינורות (שונים), כאשר הם מופעלים ביחד, ממלאים את הבריכה ב-16 שעות. את הבריכה מילאו בדרך הבאה: במשך 4 שעות הופעלו שני הצינורות יחד, ואחר-כך סגרו את הצינור הראשון והפעילו את הצינור השני למשך 36 שעות נוספות. בכמה שעות ממלא כל אחד מהצינורות את הבריכה אם הוא מופעל לבדו?

פתרון:

נסמן ב- $t_1$ את הזמן הדרוש למילוי הבריכה באמצעות הצינור הראשון בלבד, וב- $t_2$ את הזמן הדרוש למילוי הבריכה באמצעות הצינור השני בלבד.

מהנתון נקבל שכאשר שני הצינורות עובדים יחד, הספקם הוא 1/16. כלומר:

$$\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}=\frac{1}{16}$$

החלק של הבריכה שאותו ימלא הצינור הראשון ב-4 שעות הוא $4/t_1$. הצינור השני הופעל בסך-הכול 40 שעות (4+36); החלק היחסי של הבריכה שימלא הצינור הזה ב-40 שעות הוא $40/t_2$. סכום שני החלקים היחסיים האלה הוא 1. המשמעות של "1" היא שהעבודה הושלמה במלואה, ובמקרה שלנו - שהבריכה מלאה.

ובכן, קיבלנו את המשוואה:

$$\frac{4}{t_1} + \frac{40}{t_2} = 1$$

פתרון הבעיה מסתכם בפתרון מערכת של שתי משוואות עם שני נעלמים:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{t_1} + \dfrac{1}{t_2} = \dfrac{1}{16} \\ \dfrac{4}{t_1} + \dfrac{40}{t_2} = 1 \end{cases} \qquad (*)$$

מהשלב הזה אפשר להמשיך בשתי דרכים: לפתור את המערכת ישירות, או להחליף משתנים באמצעות הצבה:

$$x = \frac{1}{t_1} \quad ; \quad y = \frac{1}{t_2} \qquad (**)$$

נציג את שתי הדרכים.

1. **דרך ישירה**: כל אחת משתי המשוואות של המערכת (*), כאשר מביאים אותה למכנה משותף, מופיעה באגף ימין שלה מכפלה של שני הנעלמים:[1]

$$\begin{cases} 16t_1 + 16t_2 = t_1 \cdot t_2 \\ 40t_1 + 4t_2 = t_1 \cdot t_2 \end{cases}$$

עכשיו אפשר להשוות בין אגפי שמאל של שתי המשוואות:

$$16t_1 + 16t_2 = 40t_1 + 4t_2$$

מהמשוואה הזאת מחלצים את אחד הנעלמים, ואת התוצאה מציבים באחת המשוואות המקוריות.

התשובה: $t_1 = 24$ ו- $t_2 = 48$ (הזמן נתון בשעות).

2. **פתרון באמצעות הצבה**: נבצע את ההצבה שביצענו ב- (**) במערכת שלנו, ונקבל את המערכת:

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{1}{16} \\ 4x + 40y = 1 \end{cases}$$

נפתור את המערכת ונקבל:

$$x = \frac{1}{24} \quad ; \quad y = \frac{1}{48}$$

כל שנותר עכשיו כדי להגיע לפתרון הבעיה הוא להציב את התוצאות האלה ב- (**).

---

[1] מצב זה הוא טיפוסי למערכת של משוואות מהסוג (*) האופייניות לבעיות של עבודה משותפת.

**הערה**: אין יתרון מובהק לאחת משתי השיטות: פתרון בעזרת הצבה הוא קצר יותר, אך עצם ההצבה מהווה סיבוך מסוים. בסופו של דבר זהו עניין של העדפה אישית.

ג. כאשר בבעיה של עבודה משותפת מופיע שבר שהמונה שלו גדול מ-1, משמעות השבר עשויה להיות הספק של פועל בודד במשך כמה יחידות זמן (מספר יחידות זמן המופיע במונה) כפי שראינו בדוגמה הקודמת, או הספק משותף של כמה פועלים העובדים באותו קצב, ביחידת זמן אחת. נראה דוגמה:

שתי קבוצות של פועלים צריכות לבצע עבודה מסוימת. בקבוצה אחת יש 10 פועלים ובשנייה 20, ובתוך כל אחת מהקבוצות קצב העבודה של הפועלים הוא אחיד. פועל בודד מהקבוצה הראשונה, אם יעשה את כל העבודה בעצמו, יסיים תוך 40 שעות, ולפועל מהקבוצה השנייה תארך העבודה ב- 20% יותר. כמה זמן ייקח לשתי הקבוצות לסיים את העבודה ביחד?

פתרון:

הזמן הנחוץ לפועל בודד מהקבוצה השנייה לבצע את כל העבודה הוא $1.2\times40=48$ שעות.

נסמן ב-t את הזמן הדרוש לביצוע העבודה כולה על-ידי שתי הקבוצות כשהן עובדות ביחד. המשוואה המתארת את ההספק של שתי הקבוצות ביחד היא:

$$\frac{10}{40}+\frac{20}{48}=\frac{1}{t}$$

מכאן $t=1.5$, כלומר שתי הקבוצות יחד ישלימו את העבודה בשעה וחצי.

הכללת הנוסחה של עבודה משותפת

פתרון בעיות הספק מבוסס על הנוסחה המקשרת בין ההספק של כל אחד מהמשתתפים בעבודה לבין ההספק של כל העובדים ביחד. נניח ש-n גורמים (כגון אנשים, או מכונות) השתתפו בעבודה, והגורם ה- k-י, אם יעבוד לבד, יסיים את העבודה בזמן $t_k$. הזמן T הנחוץ לכולם ביחד להשלמת העבודה נתון על-ידי הנוסחה:

$$\frac{1}{T}=\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\ldots+\frac{1}{t_n}$$

נראה איך מתקבלת הנוסחה הזאת: אם הזמן הדרוש לגורם ה- k-י כדי לבצע את העבודה בעצמו הוא $t_k$, אז החלק היחסי של העבודה שהוא משלים ביחידת זמן שווה ל- $\frac{1}{t_k}$. החלק היחסי של העבודה שמבצעים ביחידת זמן אחת כל הגורמים כשהם עובדים ביחד, הוא סכום החלקים היחסיים שתורם כל אחד מהם.

בתרגילים יש בדרך-כלל גם דרישה שהמשוואה המתקבלת תהיה מהסוג הנלמד בבתי-הספר. לכן בתרגילים כאלה מספר העובדים מוגבל לשניים, או לשתי קבוצות שבכל אחת מהן קצב העבודה הוא אחיד.

## 2.4 בעיות תמיסה

בעיות תמיסה מבוססות על השיקול הבא:

אם נתון שבתמיסה של חומרים A ו-B יש a% של החומר A, אז ביחידת משקל של התמיסה יש $\frac{a}{100}$ יחידות משקל של החומר A ו- $1-\frac{a}{100}$ יחידות משקל של החומר B.

נציין שבעיות תמיסה אחוזי הריכוז מחושבים לפי משקל החומרים. כאשר מדובר בנוזלים מהולים במים הערכים ניתנים לעתים בליטרים, ויש להתייחס לנתון הזה כאילו היה יחידת משקל.

אם נערבב m ליטרים של תמיסה שיש בה a% של חומר כלשהו עם תמיסה של k ליטרים שיש בה b% של אותו החומר, נקבל תמיסה של m+k ליטרים שיש בה $\frac{a \cdot m}{100}+\frac{b \cdot k}{100}$ ליטרים של החומר. ריכוז החומר בתערובת באחוזים יהיה $\frac{a \cdot m+ b \cdot k}{m+k}\%$ .

לפעמים, במקום אחוז של חומר מסוים בתמיסה, יופיע בנתונים של בעיה היחס בין כמויות החומרים. אם נתון שב-w ק"ג של תמיסה היחס בין החומרים A ו-B הוא a:b, אז המשקל של חומר A בתמיסה שווה ל- $w\frac{a}{a+b}$ ק"ג, והמשקל של חומר B בתמיסה שווה ל- $w\frac{b}{a+b}$ ק"ג.

**דוגמאות**

א. עובד במעבדה מתבקש להכין תמיסה של 25% של נוזל כלשהו. כמה מהנוזל עליו להוסיף לליטר מים?

פתרון:

נסמן את הערך שאנו מחפשים ב-x. מהנתון נקבל (ביחידות של ליטר):

$$0.25(x + 1) = x$$

מכאן x=1/3 (ליטר).

ב. בחבית יש 48 ליטר של חומצת גופרית בריכוז של 70%. כמה ליטרים של חומצה בריכוז 12% יש להוסיף כדי לקבל תמיסה בריכוז של 28%?

פתרון:

נסמן ב-x את כמות החומצה שיש להוסיף; בסופה של הפעולה נקבל 48+x ליטרים של חומצה בריכוז של 28%. המשוואה שנקבל:

$$0.7\cdot48 + 0.12x = 0.28(x + 48)$$

נקבל x=126, לכן התשובה היא 126 ליטרים.

ג. מ-50 ק"ג תמיסה של חומר מסוים במים הצליחו להפריד באמצעות תהליך כימי 10 ק"ג של החומר (מה שנשאר היה מים בלבד). מה היה ריכוז החומר בתמיסה?

פתרון:

נסמן ב-x את אחוז החומר בתמיסה. נקבל:

$$50\cdot\frac{x}{100}=10$$

$$x = 20\%$$

## 2.5 בעיות קנייה ומכירה (רווח והפסד)

בעיות אלו דומות לבעיות הכלליות, אלא שהמספרים כאן מבטאים סכומי כסף.

גם בבעיות של רווח והפסד קורה לעתים קרובות, שבהעדר ניסיון בתחום זה האינטואיציה מנוגדת לפתרון המתמטי. במיוחד שכיחה התופעה בבעיות הנוגעות לאחוזים של סכומים שונים. מדוע? מפני שכאשר סכום גדל, האחוז שמהווה בתוכו ערך מסוים - יורד.

למשל, נניח שהמחיר ההתחלתי של מוצר מסוים היה P. המחיר עלה ב- a% ולאחר מכן ירד ב- b%; מהו המחיר עכשיו? האם הוא גבוה או נמוך מ-P? במה זה תלוי?

אחרי ההתייקרות יהיה המחיר $P(1+\frac{a}{100})$; ואחרי ההורדה, יהיה המחיר הסופי $P(1+\frac{a}{100})(1-\frac{b}{100})$.

השאלה אם המחיר החדש גדול מהמחיר המקורי או קטן ממנו תלויה ביחס בין הערך $(1+\frac{a}{100})(1-\frac{b}{100})$ ל-1. בפרט, אם b=a המחיר הסופי יהיה $P\left[1-\left(\frac{a}{100}\right)^2\right]$, כלומר מחיר נמוך יותר מהמחיר ההתחלתי.

מדוע לא חזרנו למחיר המקורי? ההסבר האינטואיטיבי לכך הוא שההורדה ב- a% מהמחיר הגבוה היא גדולה יותר (מספרית) מההעלאה ב- a% מהמחיר המקורי.

בדומה לזה, אם המחיר ירד תחילה ב- a%, ואחר-כך עלה ב- b%, נקבל שהמחיר החדש הוא $P(1-\frac{a}{100})(1+\frac{b}{100})$. גם עכשיו, אם a=b, מתקבלת התוצאה $P\left[1-\left(\frac{a}{100}\right)^2\right]$. התוצאה הזאת, הנמוכה מהמחיר המקורי, נובעת מכך שהבסיס לחישוב ההתייקרות נמוך מהבסיס לחישוב ההוזלה.

**דוגמאות**

א. בחנות ספרים יש 75 עותקים של הספר האחרון בסדרת "הארי פוטר", ו-60 עותקים של הספר הקודם בסדרה. מחירם הכולל של כל הספרים הוא 8100 ₪. אם החנות תמכור את הספר האחרון בהנחה של 10% ואת קודמו בהנחה של 15%, היא תקבל תמורת הספרים 7110 ₪. מה מחירו של כל אחד משני הספרים?

פתרון:

נסמן את מחיר הספר האחרון ב-x ואת מחיר הספר הקודם ב-y. נקבל מערכת של שתי משוואות:

$$\begin{cases} 75x + 60y = 8100 \\ 0.9(75x) + 0.85(60y) = 7110 \end{cases}$$

מפתרון המערכת הזאת מקבלים:

$$x = y = 60$$

ובכן, המחיר של כל אחד משני הספרים הוא 60 ₪.

ב. בעל חנות מכר את תכולת החנות שלו בהנחה של 30%, ובכך הפסיד 1000 ₪. כמה עלתה הסחורה לבעל החנות, אם ללא הורדת המחירים הוא היה מוכר אותה ברווח של 40%? (האם תנאֵי הבעיה מתקבלים על הדעת?)

פתרון:

נסמן את עלות הסחורה לבעל החנות ב-x. ללא ההנחה הוא היה מוכר את הסחורה במחיר 1.4x, לכן המחיר אחרי ההנחה הוא:

$$(1-0.3)\times 1.4x = 0.7\times 1.4x = 0.98x$$

מכאן אנו רואים שהמחיר אחרי ההנחה נמוך מהמחיר ששילם בעל החנות על הסחורה, לכן אין סתירה בין נתוני הבעיה. ההפסד של הסוחר הוא

$$(1-0.98)x = 1000$$

או

$$0.02x = 1000$$

מכאן,

$$x=50000$$

ובכן, בעל החנות קנה את הסחורה ב-50000 ₪.

## 2.6* המשותף בין בעיות מסוגים שונים

כוחה של המתמטיקה הוא באפשרות להשתמש באותן תבניות לפתירת בעיות שונות. למשל, אם בניסוח של דוגמה ב׳ בסעיף 2.4 נחליף את המילים ״חומצת גופרית״ במילה ״טמפרטורה״, נקבל בעיה חדשה תקֵפה, כי אותם הכללים חלים על שינויים בריכוזי חומר ועל שינויים בטמפרטורה.

באופן כללי יותר, הבעיות מכל הסוגים שהוזכרו מצטמצמות בסופו של דבר לפתרון משוואות שהן דומות. כדי להבין טוב יותר את האופי הדומה של כל הבעיות הללו, נפתור ״בעיה הפוכה״: נתונה משוואה, ועלינו להמציא בעיה מסוג נתון, שפתרונה מסתכם בפתרון המשוואה הנתונה.

**דוגמאות**

נתונה המשוואה:

$$\frac{40}{x}+\frac{45}{x+10}=1$$

א. נחבר בעיית תנועה שהפתרון שלה יסתכם בפתרון המשוואה הזאת.

פתרון:

כדי שבבעיית תנועה יופיע שבר, יש לפרש את המונה כדרך, ואת המכנה כמהירות או כזמן. נפרש את המכנה כמהירות. באגף שמאל מופיע אם כן סכום של שני זמנים, והוא שווה ליחידת זמן אחת (למשל שעה אחת). הנה ניסוח אפשרי:

אדם נסע מנקי׳ A לנקי׳ B בשני אוטובוסים, והגיע ליעדו אחרי שעת נסיעה אחת. באוטובוס הראשון הוא נסע 40 ק״מ, ובאוטובוס השני 45 ק״מ. מה היו המהירויות הממוצעות של כל אחד משני האוטובוסים, אם האוטובוס השני נסע ב-10 קמ״ש מהר יותר מהאוטובוס הראשון? (הזמן שאורך המעבר בין האוטובוסים הוא זניח.)

ב. נחבר בעיית עבודה משותפת לאותה משוואה עצמה.

פתרון:

כאן מבטא המכנה את הזמן הדרוש לעובד כדי לבצע בעצמו עבודה מסוימת, והמונה מתאר מספר של עובדים שהספקיהם זהים. הנה ניסוח אפשרי:

שני צוותים של עובדים מבצעים עבודה משותפת. בצוות הראשון 40 עובדים, ובצוות השני 45 עובדים. בכל צוות כושר העבודה של העובדים הוא אחיד. ביחד מסיימים שני הצוותים את העבודה בשעה אחת. כמה זמן היה נדרש לעובד בודד של כל אחד מהצוותים לבצע את כל העבודה, אם לעובד מהצוות השני דרושות לשם כך 10 שעות יותר מאשר לעובד מהצוות הראשון?

ג. נחבר בעיית תמיסה למשוואה הנ"ל.

פתרון:

במכנה מופיע הפעם אחוז של חומר מסוים בתמיסה, ובמונה מופיעה כמות החומר מוכפלת ב-100. הנה ניסוח אפשרי:

בשני כלים יש תמיסות של חומצת גופרית. הכמות הכוללת של תמיסה בשני הכלים יחד היא 1 ק"ג. מהו ריכוז החומצה בכל אחד מהכלים, אם ידוע שלהכנת התמיסה בכלי הראשון נדרשו 400 גרם של חומצה נקייה ולכלי השני נדרשו 450 גרם, וכן שריכוז החומצה בכלי השני גדול ב- 10% מהריכוז בכלי הראשון.

ד. נחבר בעיית קנייה ומכירה למשוואה שלנו.

פתרון:

כאן יכולה המנה להתפרש כמחיר לפריט בודד, כאשר במונה מופיע המחיר הכולל של קבוצת פריטים זהים, ובמכנה מופיע מספר הפריטים בקבוצה. הנה ניסוח אפשרי:

אדם קנה סוכריות משני סוגים. הוא שילם 45 ₪ תמורת הסוכריות מהסוג הראשון, ו-40 ₪ תמורת הסוכריות מהסוג השני. כמה סוכריות הוא קנה מכל סוג, אם ידוע שמהסוג השני הוא קנה 10 סוכריות יותר מאשר מהסוג הראשון, והמחיר של זוג סוכריות (אחת מכל סוג) הוא 1 ₪?

בדרך זו יכול כל אחד לחבר מספר בלתי מוגבל של בעיות: לוקחים משוואה מסוימת, "מלבישים" עליה סיפור - והבעיה מוכנה: על הפותר לגלות את המשוואה.

הנה דרך טובה ללמוד את הנושא של בעיות מילוליות: יש להתארגן בקבוצות (של 2 אנשים ומעלה). בשלב הראשון כל אחד מהמשתתפים בוחר משוואה, ומחבר בעיות בהתאם למשוואה שבחר; בשלב השני מנסה כל אחד לגלות את המשוואות העומדות מאחורי הבעיות שחיברו האחרים.

# 3. תרגילים

## 3.1 בעיות מספרים ובעיות כלליות

בעיות מספרים

1) מצאו שני מספרים המקיימים את שתי הדרישות הבאות: הסכום של המספר הראשון עם כפליים המספר השני הוא 20, וסכום המספר השני עם כפליים הראשון הוא 22.

2) אם מגדילים ב-3 את המונה ואת המכנה של שבר נתון, מקבלים 2/3. אם מקטינים ב-2 את המונה ואת המכנה של השבר המקורי, ערך השבר המתקבל הוא 1/2. מצאו את השבר המקורי.

3) פעמיים הסכום של שני מספרים גדול ב-8 משלוש פעמים הפרשם. מחצית סכומם גדולה ב-1 מהפרשם. מצאו את המספרים.

4) נתונים שני מספרים. אם מכפילים את המספר הראשון ב-4, ואת התוצאה מחלקים במספר השני, מקבלים מנה 6 ושארית 2. אם מכפילים את המספר הראשון ב-6 ומחלקים את המכפלה במספר השני, המנה היא 9 והשארית 3. מצאו את שני המספרים.

5) בחרתי מספר;

(1) הוספתי 5 למספר שבחרתי;

(2) החסרתי 3 מהמספר המקורי;

(3) כפלתי זו בזו את התוצאות מ-(1) ו-(2), וקיבלתי 9. איזה מספר בחרתי?

6) בחרתי מספר;

(1) כפלתי אותו ב-2 ולמכפלה הוספתי 1;

(2) חיסרתי 5 מהמספר ההתחלתי;

(3) כפלתי זו בזו את התוצאות של (1) ו-(2), וקיבלתי 30.

ראובן אמר שבחרתי במספר 7, ואילו שמעון טען שזאת איננה האפשרות היחידה.

א. מי משניהם צודק?

ג. אם אוסיף כי בחרתי במספר טבעי, האם יש לשנות את התשובה הקודמת? נמקו.

7) בחרתי מספר;

(1) חילקתי אותו ב-2 והוספתי 1;

(2) כפלתי את המספר הנבחר ב-2 וחיסרתי 1;

(3) כפלתי זו בזו את התוצאות של (1) ו-(2), וקיבלתי 5.

האם תוכלו לשער מדוע איש לא ניחש מהו המספר שבחרתי?

8) ספרת היחידות של מספר תלת-ספרתי שווה לספרת העשרות שלו. כשמחלקים את המספר הנתון בסכום ספרותיו, המנה היא 73. אם מחלקים את המספר הנתון במספר הכתוב באותן הספרות בסדר הפוך, המנה היא 4 והשארית 51. מהו המספר הנתון?

9) נתונים שני מספרים חיוביים. אם מחלקים את המספר הראשון בשני, מתקבלת המנה 12 עם שארית 5. אם מחלקים את המספר הראשון בריבוע המספר השני, המנה היא 2 והשארית 5. מצאו את שני המספרים.

10) מצאו שני מספרים שסכומם 4 ומכפלתם 3.75 .

11) מצאו שני מספרים שסכומם 15, וגם ההפרש בין ריבועיהם הוא 15.

12) סכומם של שני מספרים הוא 31. אם מחלקים את המספר הגדול בקטן, המנה היא 1 והשארית 9. מהם המספרים?

13) נתון מספר דו-סיפרתי; סכום ריבועי ספרותיו הוא 25. המספר הנתון גדול ב-9 מהמספר הכתוב באותן הספרות בסדר הפוך. מצאו את המספר.

14) מצאו שני מספרים שהפרשם 3 וסכום ריבועיהם 65.

15) סכום הספרות של מספר דו-סיפרתי הוא 7. אם מחלקים את המספר במכפלת ספרותיו מקבלים מנה 10 ושארית 1. מהו המספר?

16) סכום הריבועים של שני מספרים אי-זוגיים עוקבים הוא 202. מצאו את המספרים.

17) מכפלתם של שני מספרים, שאחד מהם גדול מהשני ב-3, היא 45. מהם המספרים?

18) סכום שני מספרים הוא 22, וסכום ריבועיהם הוא 250. מצאו את המספרים.

19) מצאו שני מספרים הופכיים זה לזה, שסכומם הוא 5.2 .

20) מצאו שני מספרים שסכומם 3 ומכפלתם 40 .

21) מספר דו-סיפרתי נתון גדול פי 3 ממכפלת ספרותיו. כאשר מוסיפים למספר הנתון 18, מקבלים את המספר הכתוב באותן הספרות בסדר הפוך. מהו המספר?

22) ספרת העשרות של מספר דו-סיפרתי נתון גדולה ב-2 מספרת היחידות. מכפלת המספר הנתון במספר הכתוב באותן הספרות בסדר הפוך היא 1855. מצאו את המספר.

23) מצאו מספר שקטן פי 7 מריבועו.

24) מצאו מספר שגדול פי 3 מריבועו.

25) איזה מספר שווה לריבועו?

26) מצאו מספר שקטן ב-30 מריבועו.

27) מצאו מספר שגדול ב-2/9 מריבועו.

28) באיזה מספר יש לחלק את 248 כדי שהמנה תהיה קטנה מהמחלק פי 50, והשארית תהיה קטנה ממנו ב-52?

29) מצאו שלושה מספרים אי-זוגיים עוקבים, כך שריבועו של הגדול מביניהם יהיה גדול ב-7 מסכום ריבועיהם של שני האחרים.

30) נתונים שלושה מספרים. ההפרש בין השני לראשון שווה להפרש בין השלישי לשני. המכפלה של שני המספרים הקטנים מבין השלושה היא 85, ומכפלת שני המספרים הגדולים היא 115. מהם שלושת המספרים?

31) נתון מספר דו-ספרתי. אם נחלק אותו במכפלת ספרותיו נקבל $2\frac{2}{3}$. אם נחסר מהמספר שלנו את המספר המתקבל ממנו על-ידי החלפת סדר הספרות נקבל 18. מהו המספר?

32) נתונים שני מספרים דו-ספרתיים. ניצור מהם שני מספרים חדשים בני 5 ספרות בדרך הבאה:

א. לגדול מבין השניים נוסיף מימין את הספרה 0, ואחריה את המספר הקטן;

ב. לקטן מבין השניים נוסיף מימין את הספרה 0, ואחריה את המספר הגדול, ומהתוצאה נחסר 18.

הראשון מבין שני המספרים החדשים שקיבלנו גדול פי 2 מהשני. מהם שני המספרים המקוריים, אם גם כאן הראשון גדול פי 2 מהשני?

33) אדם רצה להכפיל 78 במספר דו-ספרתי מסוים. הוא השתמש במחשבון, בטעות הקליד את הספרות של המספר הזה בסדר הפוך, וקיבל תוצאה הקטנה ב- 2808 מהתוצאה המבוקשת. מהו המספר השני, אם ידוע שספרה אחת בו גדולה פי 3 מהאחרת.

בעיות גיאומטריות

34) מהם ממדיו של מלבן שאורכו גדול ב-2.5 מ' מרוחבו, ושטחו שווה ל-44 מ"ר?

35) ההפרש בין הבסיסים של טרפז הוא 5 ס"מ. גובה הטרפז קטן ב-20% מהבסיס הגדול. שטח הטרפז הוא 100 סמ"ר. חשבו את בסיסיו.

36) היקפו של מלבן הוא 60 ס"מ, ושטחו 216 סמ"ר. מצאו את ממדיו.

37) סכום הניצבים של משולש ישר זווית הוא 40 ס"מ, ושטחו 150 סמ"ר. חשבו את אורך היתר.

38) נתונים שני מעגלים בעלי מרכז משותף. שטח הטבעת המוגבלת ביניהם הוא 40 סמ"ר, וההפרש בין ההיקפים שווה ל-20 ס"מ. חשבו את הרדיוסים של שני המעגלים.

39) חשבו את שטחו של משולש ישר זווית, שבו היתר גדול מניצב אחד ב-8 ס"מ, ומהניצב השני בס"מ אחד.

40) אם מגדילים צלע אחת של ריבוע נתון ב-2 ס"מ, ומקטינים את הצלע השנייה ב-3 ס"מ, מקבלים מלבן ששטחו קטן ב-13 סמ"ר משטח הריבוע. חשבו את צלע הריבוע.

41) אם מקצרים את הצלע הגדולה של מלבן ב-3 ס"מ, ומאריכים את הצלע הקטנה שלו ב-2 ס"מ, מקבלים ריבוע השווה בשטחו לשטח המלבן. חשבו את שטח הריבוע.

42) מיתר הנמצא במרחק 3 ס"מ ממרכז המעגל, ארוך מהרדיוס ב-3 ס"מ. חשבו את הרדיוס.

43) נתון משולש שאורכי צלעותיו הם: 10 ס"מ, 12 ס"מ ו-3 ס"מ. מאריכים את שלוש הצלעות באותו גודל, כך שמתקבל משולש ישר זווית. בכמה האריכו כל צלע?

44) סכום ההיקפים של שני ריבועים הוא 48 ס"מ, וסכום שטחיהם 74 סמ"ר. מהם אורכי הצלעות של הריבועים?

45) היתר של משולש בעל זווית ישרה שווה ל- $3\sqrt{5}$ מ'. ידוע שאם נגדיל את אחד הניצבים ב- $133\frac{1}{3}\%$ ואת השני ב- $16\frac{2}{3}\%$, סכום האורכים שלהם יהיה 14 מ'. מצאו את הניצבים.

בעיות שונות

46) פריט מורכב משלושה חלקים. החלק הראשון שוקל 2/3 ממשקל הפריט כולו, החלק השני שוקל 1/4 ממשקל הפריט, והחלק השלישי שוקל 0.8 ק"ג. מצאו את משקל הפריט.

47) משקל הצימוקים שווה ל- 32% ממשקל הענבים שמהם נעשו הצימוקים. איזה כמות של הענבים דרושה ליצירת 2 ק״ג של צימוקים?

48) כמה ילדים קנו במשותף מתנה לחבר שלהם. כולם תרמו סכום אחיד, וכך אספו 72 ₪. לו היו בקבוצה 3 ילדים פחות, היה על כל אחד מהם להוסיף עוד 4 ₪ כדי להגיע לאותו סכום. כמה ילדים היו בקבוצה?

49) בשני שקים יש 140 ק״ג של חול. אם נעביר 12.5% מתכולת השק הראשון לשק השני, ישתוו המשקלים של שני השקים. כמה חול יש בכל אחד מהשקים?

50) ביום האחרון של הלימודים החליפו תלמידי הכיתה ביניהם את תמונותיהם (כל אחד נתן את תמונתו לשאר התלמידים). בסך-הכול הוחלפו 870 תמונות. כמה תלמידים היו בכיתה?

51) שתי מעבדות להרכבת מחשבים קיבלו הזמנות למשלוח מחשבים, שתיהן לאותו מועד. במעבדה הראשונה הוזמנו 810 מחשבים, ובשנייה 900 מחשבים. המעבדה הראשונה סיימה את הכנת המשלוח 3 ימים לפני המועד, והמעבדה השנייה 6 ימים לפני המועד. כמה מחשבים הורכבו ביום בכל אחת מהמעבדות, אם במעבדה השנייה הכינו ביום 4 מחשבים יותר מאשר במעבדה הראשונה?

52) קלדנית קיבלה הזמנה להקליד אוסף מאמרים זהים בגודלם. היא חישבה ומצאה, שאם תגביר את הקצב ותקליד בכל יום שני מאמרים יותר ממה שהייתה רגילה, העבודה תימשך 3 ימים פחות מהרגיל; ואם היא תגביר את הקצב עוד יותר, ותקליד בכל יום 4 מאמרים יותר מהרגיל, - העבודה תימשך 5 ימים פחות מאשר בקצב הרגיל. בכמה ימים הייתה הקלדנית מסיימת את העבודה בקצב עבודתה הרגיל?

53) בהכנת תשתית לבניית בניין היה צורך לחפור בור בגודל של 8000 מ״ק. בכל יום הגדילו את הבור ב-50 מ״ק יותר מהמתוכנן, והעבודה כולה הושלמה 8 ימים לפני המועד הצפוי. כמה זמן הוקצה לחפירת הבור, ובכמה אחוזים עלתה עבודת החפירה היומית על הציפיות?

54) קבוצה תכננה לשכור במשותף אוטובוס לטיול, ואת ההוצאות בסך 1000 ₪ לחלק בין חברי הקבוצה שווה בשווה. 5 אנשים פרשו מהקבוצה, לכן גדלה העלות לכל אחד מהנותרים ב-10 ₪. כמה אנשים מנתה הקבוצה מלכתחילה?

55) תלמיד שהיה עליו לפתור 120 תרגילים במתמטיקה, החליט לפתור בכל יום מספר קבוע של תרגילים. אילו הקדיש לעבודה זאת 5 ימים נוספים, היה מקטין את המכסה היומית ב-2 תרגילים. כמה תרגילים פתר התלמיד בכל יום?

56) שני בתי מלאכה עוסקים בתיקון מכונות. האחד קיבל לתיקון 112 מכונות, והשני קיבל 90. בבית המלאכה השני תיקנו בכל יום 4 מכונות יותר מאשר בראשון, והעבודה בו ארכה שלושה ימים פחות מאשר בראשון; בכמה מכונות טיפל כל אחד מבתי המלאכה ביום?

57) נגר התחייב לספק בתאריך מסוים 216 כיסאות, ותכנן לעבוד בקצב קבוע. לאחר שעבד בקצב זה 3 ימים שונה החוזה, ומספר הכיסאות עלה ל-232. על כן שינה הנגר את קצב העבודה, והגדיל את המכסה היומית ב-8 כיסאות. הוא סיים את העבודה יום אחד לפני התאריך שנקבע. מה הייתה התפוקה היומית בהתחלה?

58) בתחרות שחמט שיחק כל משתתף שני משחקים עם כל אחד משאר המתחרים. בסך-הכול התקיימו 380 משחקים. כמה שחקנים השתתפו בתחרות?

59) א. למצולע נתון יש 20 אלכסונים. מהו מספר צלעותיו?

ב. האם קיים מצולע שמספר האלכסונים שלו הוא 40? נמקו את תשובתכם.

60) במופע מחול, כל אחד מהגברים מופיע בריקוד אחד עם כל אחת מהנשים. מספר הגברים גדול ב-2 ממספר הנשים. כל ריקוד נמשך 3 דקות, ומשתתף בו זוג אחד בלבד; בין ריקוד לריקוד יש הפסקה של 30 שניות; משך מופע הוא שעתיים ו-2 דקות. כמה רקדנים משתתפים במופע?

61) באולם קולנוע יש a כיסאות. הכיסאות מחולקים לשורות (שבכל אחת אותו מספר של כיסאות). אם נוסיף לכל שורה b כיסאות, ונקטין את מספר השורות ב-c, יגדל מספר הכיסאות באולם יגדל ב- 10%. כמה כיסאות יש בכל שורה?

## 3.2 בעיות תנועה

1) שני רכבים יוצאים מעיר אחת לעיר אחרת, שמרחקה מהראשונה 192 ק"מ. הרכב הראשון עובר את המרחק הזה ב-40 דקות יותר מהר מהרכב השני. מהן המהירויות של שני הרכבים, אם ידוע שההפרש בין מהירויותיהם הוא 24 קמ"ש?

2) שתי ערים מחוברות ביניהן בשתי דרכים שונות. אורך הדרך האחת 66 ק"מ, ואורך השנייה 80.5 ק"מ. רוכב אופנוע יצא בדרך הקצרה 4 שעות אחרי שרוכב האופניים יצא בדרך הארוכה, והגיע ליעדו 15 דקות לפניו. מהן המהירויות של שני הרוכבים, אם מהירותו של רוכב האופנוע גבוהה ב-30 קמ"ש מזו של רוכב האופניים?

3) אחרי ששתי אניות נפגשו בלב ים, פנתה אחת דרומה, והשנייה מערבה. לאחר שעתיים הן היו במרחק 60 ק"מ זו מזו. מצאו את המהירויות של כל אחת מהאניות, אם ידוע שמהירותה של אחת מהן הייתה גבוהה ב-6 קמ"ש מזו של האחרת.

4) תלמיד גר במרחק של 30 ק"מ מבית-ספרו. הוא נוהג להגיע לבית-הספר ברכיבה על קטנוע. יום אחד יצא התלמיד 3 דקות מאוחר מהרגיל, וכדי להדביק את האיחור נסע במהירות הגבוהה ממהירותו הרגילה ב-1 קמ"ש. הוא הצליח להגיע בזמן. מה הייתה מהירותו באותו יום?

5) אדם נסע לפגישה ברכבו הפרטי. במרחק של 20 ק"מ ממקום הפגישה נתקע האיש בפקק למשך 4 דקות. לאחר שנחלץ מהפקק הוא הגביר את מהירות הנסיעה ב-10 קמ"ש יחסית למהירותו הרגילה, והגיע לפגישה בזמן. באיזו המהירות נוהג האיש לנסוע?

6) קבוצת מטיילים יצאה למסע בשטח קשה. בשעה הראשונה עברו המטיילים 3.5 ק"מ. הם חישבו ומצאו, שאם ימשיכו ללכת באותו קצב, יאחרו לאוטובוס האחרון בשעה שלמה. לכן הם המשיכו את הדרך בקצב של 5 קמ"ש, והגיעו ליעד חצי שעה לפני יציאת האוטובוס. מה היה אורך המסע?

7) רוכב אופניים יצא לטיול על כביש שאורכו 19 ק"מ. רבע שעה מאוחר יותר יצא אחריו רוכב אחר על אופני מירוץ. הוא השיג את הרוכב הראשון אחרי 10 דקות. שני הרוכבים המשיכו בנסיעה. הרוכב שעל אופני המירוץ הגיע עד סוף הכביש, הסתובב לאחור ונסע חזרה. הוא פגש שנית ברוכב הראשון 40 דקות אחרי המפגש הראשון. מה היו המהירויות של שני הרוכבים?

8) המרחק בין עיר א' לעיר ב' הוא 78 ק"מ. שעה אחרי שרוכב אופניים יצא לדרך מעיר א', יצא לקראתו מעיר ב' רוכב אחר, שמהירותו הייתה גבוהה מזו של הרוכב הראשון ב-4 קמ"ש. הרוכבים נפגשו זה עם זה במרחק של 36 ק"מ מעיר ב'. כמה זמן רכב כל אחד מהם עד למפגש?

9) אדם יצא מנק' A לנק' B, ובו-זמנית יצא אדם אחר מנק' B לנק' A. הם נפגשו אחרי 3 שעות ו-20 דקות של הליכה, והמשיכו כל אחד בדרכו בלי לעצור. כמה זמן הלך כל אחד מהם, אם הראשון הגיע ליעדו 5 שעות אחרי השני?

10) מעיר א' ומעיר ב' יצאו בו-זמנית זו לקראת זו שתי רכבות מהירות. עד לנקודת המפגש עברה הרכבת הראשונה (זו שיצאה מעיר א') 100 ק"מ פחות מהשנייה. הרכבת הראשונה המשיכה לנסוע עוד 3 שעות עד שהגיעה לעיר ב'; הרכבת השנייה הגיעה לעיר א' שעה ועשרים דקות אחרי המפגש. מה היו המהירויות של שתי הרכבות?

11) המרחק בין שני ערים, א' ו-ב', הוא 600 ק"מ. בשעה 12:00 יצאה רכבת מ-א' ל-ב', ובשעה 12:30 יצאה רכבת מ-ב' ל-א'. בשעה 14:00 היה המרחק בין שתי הרכבות 380 ק"מ. בהמשך נפגשו הרכבות באמצע הדרך. כמה זמן ארכה הנסיעה לכל אחת מהרכבות?

12) אדם רכב על אופניים בדרך עפר מרחק של 8 ק"מ. הוא המשיך 30 ק"מ נוספים בדרך סלולה, במהירות הגדולה ב-6 קמ"ש מזו שבדרך העפר. הוא עבר את כל הדרך ב-5 שעות. מה הייתה מהירותו בדרך העפר?

13) שני רוכבי אופניים יצאו לדרך יחד, וכל אחד עבר מרחק של 42 ק"מ. מהירותו של אחד מהם הייתה גדולה ב-4 קמ"ש מזו של השני. הרוכב המהיר התעכב בדרך במשך שעה, והרוכב השני התעכב 20 דקות. הם הגיעו לסוף הדרך באותה שעה. מצאו את המהירויות שלהם.

14) תחנת הרכבת C נמצאת בין הערים A ו-B, במרחק 20 ק"מ מ-A. בשעה 10:00 יצאה רכבת משא מ-A ל-B, במהירות של 45 קמ"ש. בשעה 11:00 יצאה רכבת נוסעים מתחנת הרכבת C לעיר B. היא נסעה במהירות 75 קמ"ש, והגיעה ל-B 20 דקות לפני רכבת המשא. מהו המרחק בין שתי הערים?

15) משאית יצאה מהעיר A לעיר B. שעה לאחר יציאתה יצאה מונית מהעיר B לעיר A. הן נפגשו במרחק 126 ק"מ מהעיר B. מהירות המשאית הייתה קטנה ב-12 קמ"ש ממהירות המונית, והמרחק בין שתי הערים הוא 291 ק"מ. חשבו את המהירויות של שני הרכבים.

16) משתי ערים, A ו-B, שהמרחק ביניהן הוא 27 ק"מ, יצאו בו-זמנית שני רוכבי אופניים זה לקראת זה. כעבור שעה הם נפגשו, והמשיכו בדרכם בלי להתעכב. הרוכב שיצא מ-A הגיע ל-B 27 דקות לפני שחברו הגיע ל-A. מצאו את מהירויותיהם.

17) המרחק בין שני מעגנים שלחוף נהר הוא 18 ק"מ. סירה שטה בנהר ועוברת את המרחק ביניהם הלוך וחזור במשך 8 שעות. מהירות הזרם היא 3 קמ"ש.

א. חשבו את המהירות העצמית של הסירה (כלומר את המהירות שלה ביחס למים).

ב. האם המהירות הממוצעת של הסירה לכל אורך הדרך (כלומר סה"כ הדרך חלקי סה"כ הזמן), שווה לממוצע בין שתי המהירויות שלה, בדרך הלוך ובדרך חזור (פעם עם הזרם ופעם נגדו)? נמקו את תשובתכם.

18) אדם שוחה במהירות של 40 מטר בדקה במים עומדים. הזמן הדרוש לו לשחיית 80 מטר נגד הזרם ארוך ב- 3.75 דקות מהזמן שבו יעבור אותו מרחק עם הזרם. מצאו את מהירות הזרם.

19) שני אנשים מתחרים בהליכה בדרך שאורכה 20 ק"מ. המהיר מבין השניים עובר בכל שעה ק"מ אחד יותר מחברו, על כן הוא מגיע ליעד שעה אחת לפניו. חשבו את המהירויות של השניים.

20) מהירותה של רכבת נוסעים גדולה ב-18 קמ"ש ממהירות רכבת משא, על כן נסיעה של 240 ק"מ אורכת לה 40 דקות פחות מאשר לרכבת המשא. חשבו את מהירות רכבת המשא.

21) הנה ניסוח של בעיה: "שני אנשים יוצאים בו-זמנית למסע באותו מסלול. הראשון מגיע לנקודת היעד שעה לפני השני. באיזו מהירות הולך כל אחד מהאנשים, אם הראשון עובר בשעה 2 ק"מ יותר מהשני?"
אילו ערכים אפשר לבחור כאורך המסלול, כך שהתשובה תהיה סבירה, וערכי המהירויות (ביחידות של קמ"ש) יהיו שלמים? (מהירויות הליכה סבירות הן בין 3 קמ"ש ל-7 קמ"ש.)

### 3.3 בעיות עבודה משותפת (הספק)

1) במפעל שני פסי ייצור. המפעל התחייב לבצע הזמנה תוך 12 ימים, בהנחה ששני פסי הייצור יעבדו באופן תקין. אחרי יומיים התקלקל פס הייצור הראשון, והעבודה הושלמה על פס הייצור השני. התפוקה של פס הייצור השני היא 2/3 מזו של הראשון. תוך כמה זמן בוצעה ההזמנה?

2) שני פועלים ביצעו במשותף עבודה מסוימת. הם סיימו את העבודה תוך 8 שעות. הזמן שדרוש לפועל הראשון כדי לבצע את העבודה בעצמו קצר ב-12 שעות מזה הדרוש לפועל השני. כמה זמן דרוש לכל אחד מהפועלים לבצע את העבודה לבד?

3) באמצעות שני צינורות אפשר למלא את הבריכה תוך 6 שעות. מילוי הבריכה באמצעות הצינור הראשון בלבד יארך 5 שעות פחות מאשר באמצעות הצינור השני בלבד. כמה זמן יימשך מילוי הבריכה אם יופעל רק הצינור השני?

4) מפעל שיש בו שני פסי ייצור קיבל הזמנה. אחרי שפס הייצור הראשון פעל במשך 7 שעות והשני במשך 4 שעות, הם השלימו $\frac{5}{9}$ של ההזמנה. שני פסי הייצור פעלו ביחד עוד 4 שעות, והסתבר שנשאר להם עד לסיום $\frac{1}{18}$ מההזמנה. כמה זמן נחוץ לכל אחד מפסי הייצור לבצע את העבודה בעצמו?

5) ארבעה עגורנים זהים העמיסו אנייה במשך שעתיים, ובשלב זה צורפו למשימה עוד שני עגורנים חלשים יותר, וההעמסה נמשכה עוד 3 שעות. לו התחילו כל ששת העגורנים לעבוד ביחד מההתחלה, הייתה ההעמסה נמשכת 4.5 שעות. תוך כמה זמן היה עגורן אחד מהסוג הראשון מסיים את ההעמסה? תוך כמה זמן היה עושה זאת עגורן אחד מהסוג השני?

6) לחברת הובלות 30 משאיות מסוג אחד ו-9 משאיות מסוג שני. להעברת חומרי בנייה לאתר בנייה חדש נשלחו תחילה כל המשאיות מהסוג הראשון. לאחר שעתיים צורפו גם כל המשאיות מהסוג השני, והעבודה הושלמה 8 שעות אחרי התחלתה. אילו הוקצו לעבודה המשאיות מהסוג השני תחילה, ואחרי שעתיים היו מצורפות המשאיות מהסוג הראשון – הייתה התפוקה באותו פרק זמן רק $\frac{13}{15}$ של המטען. בכמה זמן היו משלימות את העבודה 30 משאיות מהסוג השני?

7) שני אנשים מילאו יחד 200 בלוני גז. האדם השני התחיל לעבוד שעה אחת אחרי הראשון. שלוש שעות אחרי שהראשון התחיל בעבודתו נותרו להם עוד 90 בלונים למלא. בסיום העבודה התברר שכל אחד מהם עשה חצי מהעבודה. בכמה שעות היה כל אחד מהם ממלא בעצמו את כל הבלונים?

8) שני צוותים של מע״צ עסקו בתיקון כביש. כל צוות תיקן 10 ק״מ, אף על פי שהצוות השני עבד יום אחד פחות מהצוות הראשון. שני הצוותים ביחד תיקנו ביום עבודה 4.5 ק״מ של כביש. כמה תיקן כל צוות ביום?

9) שני פועלים סיימו עבודה מסוימת תוך 7 ימים. הפועל השני הצטרף לעבודה יום וחצי אחרי הראשון. הפועל השני לבד היה מסיים את העבודה תוך 3 ימים פחות מהפועל הראשון לו זה עבד לבד. כמה זמן נחוץ לכל אחד מהם לבצע את העבודה בעצמו?

10) על קבלן עבודות עפר הוטל לסלול קטע כביש שאורכו 20 ק״מ. היו לרשותו מכבש גדול ומכבש קטן. אילו הפעיל הקבלן את שני המכבשים, היה מסיים את עבודתו תוך 24 יום. אולם מטעמי חיסכון, ומכיוון שהזמן לא דחק, הוא הפעיל את המכבש הגדול בלבד. אחרי שהמכבש הגדול כבש 12 ק״מ - הוא התקלקל, ואז הכניס הקבלן לפעולה את המכבש הקטן, והשלים את קטע הכביש שנותר. כל העבודה ארכה 48 יום.

א. מה היה ההספק היומי (מספר ק״מ ליום) של כל מכבש?

ב. תוך כמה ימים יכול כל אחד מהמכבשים לבצע את העבודה לבדו, כשהוא תקין?

11) שתי קבוצות פועלים סללו כביש המחבר בין שתי ערים. בתחילת העבודה פעלה רק קבוצה אחת, וסללה 1/3 מהכביש. אחרי כן המשיכה את העבודה הקבוצה השנייה לבד, וסללה 1/6 מהכביש, וזאת עד סופו של היום ה-40 לעבודה. החל מהיום ה-41 עבדו שתי הקבוצות בו-זמנית, וסיימו את הסלילה לאחר 18 ימי עבודה נוספים. תוך כמה זמן יכלה כל קבוצה לסלול את הכביש בעצמה?

12) שני צינורות ממלאים מכל אגירה תוך 6 שעות. אחד הצינורות יכול למלא את המכל תוך 5 שעות פחות מהצינור השני. תוך כמה שעות יכול כל אחד מהצינורות לבד למלא את המכל?

13) לבריכה מחוברים שני צינורות. אחד מהם מזרים מים לבריכה, ואילו השני מרוקן אותה. משך הזמן הדרוש לצינור הראשון כדי למלא את הבריכה קצר בשעה אחת מזה הדרוש לריקון הבריכה על-ידי השני. יום אחד נפתחו בטעות שני הצינורות כשהבריכה הייתה ריקה, והיא התמלאה לאחר 12 שעות. תוך כמה זמן יכול הצינור הראשון למלא את הבריכה?

14) שלושה פועלים יכולים להשלים עבודה מסוימת ב-t שעות. הפועל הראשון לבד יסיים אותה פי 2 יותר מהר מהפועל השלישי, ותוך שעה אחת פחות מהפועל השני. כמה זמן ייקח לפועל הראשון להשלים את העבודה בעצמו?

### 3.4 בעיות תמיסה

1) במי-ים יש 5% מלח. כמה קילוגרמים של מים מתוקים יש להוסיף ל-40 ק״ג של מי-ים כדי שריכוז המלח יהיה 2%?

2) נתך של כסף ונחושת שוקל 2 ק״ג. משקל הכסף בנתך הוא $14\frac{2}{7}$ % ממשקל הנחושת. כמה כסף יש בנתך?

3) במפעל להתכת מתכות יש שני סוגים של פלדה: האחד מכיל 5% ניקל, והשני - 40%. כמה יש לקחת מכל אחד מהסוגים כדי לקבל 140 טונות של פלדה המכילה 30% ניקל?

4) בנתך של נחושת ועופרת שמשקלו 12 ק״ג יש 45% נחושת. כמה עופרת נקייה יש להוסיף לנתך הזה כדי לקבל נתך שבו 40% נחושת?

5) כמה מים יש להוסיף ל-800 גרם של תמיסת כוהל בריכוז של 16% כדי לקבל ריכוז של 10%?

6) במעבדה יש חבית בנפח של 64 ליטר המלאה בכוהל נקי, ושני בקבוקים זהים, האחד ריק, והשני מלא במים. את הבקבוק הראשון מילאו בכוהל מהחבית; אחר-כך שפכו לתוך החבית מים מהבקבוק השני, ואז מילאו את הבקבוק השני בתמיסה שנוצרה בחבית. בשלב זה נשארו בחבית 49 ליטרים של כוהל. כמה כוהל יש עכשיו בכל אחד משני הבקבוקים?

7) כלי שנפחו 20 ליטר מלא בכוהל. שופכים חלק מהכוהל לכלי דומה; אחר-כך משלימים עם מים את מילוי הכלי השני, ושופכים חלק מהתמיסה לכלי הראשון עד למילויו. עכשיו שופכים $6\frac{2}{3}$ ליטרים מהכלי הראשון לשני. בשלב זה כמות הכוהל בשני הכלים שווה. כמה כוהל שפכו מהכלי הראשון לשני בפעולה הראשונה?

8) כלי שנפחו 8 ליטרים מלא באוויר שריכוז החמצן בו 16%. משחררים מהכלי כמות מסוימת של אוויר, וממלאים אותו בכמות דומה של חנקן. שוב מוציאים מהכלי אותה כמות של גז, ושוב מכניסים לתוכו כמות דומה של חנקן. עכשיו ריכוז החמצן בכלי הוא 9%. כמה ליטרים של גזים החליפו בכל פעם?

9) מכלי שהכיל 20 סמ״ק חומצה נקייה שאבו כמות מסוימת של חומצה, והכניסו במקומה כמות זהה של מים. אחר-כך שאבו אותה כמות של מהתמיסה, ושוב מילאו את מקומה במים. בסוף התהליך הייתה כמות החומצה הנקייה שבכלי קטנה פי 3 מכמות המים. כמה סמ״ק חומצה הוצאו בפעם הראשונה?

10) בנתך כסף-זהב גדולה כמות הכסף ב-160 גר׳ מכמות הזהב. כשהוסיפו לנתך 100 גר׳ זהב, גדלה תכולת הזהב שבו ב-14%. כמה גרמים של זהב היו בנתך בהתחלה?

11) ערבבו 60 גר׳ כוהל נקי במים, ואז הוסיפו לתמיסה 30 גר׳ מים ו-30 גר׳ כוהל נקי, וכך גדל ריכוז הכוהל ב-5 אחוזים נוספים. מה הייתה כמות המים בתמיסה מלכתחילה?

12) המסו סוכר במים. משקל הסוכר היה קטן ב-60 גר' ממשקל המים. לאחר התאדות של חלק מהמים פחת משקלם ב-25 גר', וכך עלה ריכוז הסוכר ב-5 אחוזים נוספים. מה הייתה כמות הסוכר בתמיסה?

13) בחבית אחת יש תמיסה של כוהל ומים ביחס של 2:3, בחבית השנייה היחס הוא 3:7. כמה דליים של התמיסה יש לקחת מכל אחת מהחביות כדי להרכיב 12 דליי תמיסה שהיחס בין כוהל למים בה הוא 3:5?

14) לתוך כלי ריק שפכו את תכולתם של שני בקבוקים (שונים), וקיבלו 10 ק"ג תמיסה של חומצת גופרית. מצאו את משקל התמיסה שהייתה בכל אחד משני הבקבוקים, אם ידוע שבבקבוק הראשון היו 800 גרם של חומצה ובבקבוק השני 600 גרם, ושריכוז החומצה בבקבוק הראשון היה גדול ב- 10% מזה בבקבוק השני.

## 3.5 בעיות קנייה ומכירה

1) סוחר מכר את הסחורה שברשותו תמורת 3348 ₪. אחרי מכירת הסחורה התברר שהיא נמכרה בהפסד של 4%. כמה שילם הסוחר תמורת הסחורה?

2) שני רוכלים מכרו חפיסות מסטיק, כל רוכל במחיר אחר. ביחד הם מכרו 100 חפיסות, והסכומים שקיבלו היו שווים. אילו מכר הראשון כמות שווה לזו שמכר השני, הוא היה מקבל 72 ₪; אילו מכר השני כמות שווה לזו שמכר הראשון, הוא היה מקבל 32 ₪. כמה חפיסות מכר כל אחד מהרוכלים?

3) הריבית שהניבה תוכנית חיסכון לחוסך בשנה הראשונה הייתה 1500 ₪. החוסך הוסיף עוד 8500 ₪ והשאיר את הכסף לשנה נוספת בתנאים דומים לאלה של השנה הראשונה. בתום התקופה הוא קיבל 42000 ₪ (הקרן והריבית). איזה אחוז של ריבית נותנת תוכנית החיסכון?

4) לסוחר כמויות שוות של מוצר בשלוש רמות איכות. מחירו של סוג ב' הוא 80% ממחיר סוג א', מחירו של סוג ג' הוא 42.5% ממחיר סוג ב'. הסוחר מכר את כל הסחורה ב- 6420 ₪. כמה קיבל הסוחר תמורת הסחורה מסוג א'?

5) סוחר שקנה סחורה הצליח למכור שליש ממנה ברווח של 30%, עוד שליש ברווח של 20%, ואת השליש האחרון הוא נאלץ למכור בהפסד של 10%. בסופו של דבר הוא הרוויח 10000 ₪. כמה שילם הסוחר תמורת הסחורה?

6) שני רוכלים מוכרים אותה סחורה. המחיר שגובה הרוכל האחד לפריט גדול ב-7 ₪ מזה שגובה הרוכל השני. הרוכל הראשון מכר 90% ממה שמכר הרוכל השני, והרוויח ב- 25% יותר ממנו. מה היה המחיר לפריט אצל כל אחד מהרוכלים?

7) נוסיף לתנאים של הבעיה הקודמת, שביחד הרוויחו שני הרוכלים 2025 ₪. כמה פריטים מכר כל אחד מהם?

8) חברת דלק קיבלה משלוח של דלק. אחרי שמכרה רבע מהכמות ברווח של 30%, ירד מחיר הדלק ב- 10%; אחרי שהחברה מכרה עוד חצי מהכמות שהייתה במשלוח, עלה המחיר ב- 10% ובמחיר זה נמכר הרבע האחרון של המשלוח. כמה שילמה החברה תמורת המשלוח אם הרווח שלה ממכירת הרבע הראשון והרבע האחרון היה גבוה ממכירת החצי ה"אמצעי" ב-6175 ₪?

9) סוחר קנה יין ארוז בבקבוקים ב- 2000 ₪. הוא מכר כל בקבוק ברווח של 2.5 ₪, והרוויח בעסקה 25%. כמה שילם הסוחר עבור כל בקבוק?

10) מחיר של מוצר מסוים עלה פעמיים באותו אחוז, ובסה"כ עלה מחיר המוצר מ-35 ₪ ל-50.4 ₪.

א. בכמה אחוזים עלה המחיר כל פעם?

ב. האם שיעור ההתייקרות הזה (באחוזים) שווה למחצית משיעור ההתייקרות הכללית? נמקו.

11) מחירו של מוצר, שהיה בהתחלה 500 ₪, ירד פעמיים באותו אחוז, והגיע ל-405 ₪. בכמה אחוזים ירד המחיר בכל פעם?

12) הוצאות הייצור של פריט מסוים בבית חרושת הן 30 ₪, ומספר הפריטים המיוצר בחודש הוא 10000. בכדי לייעל את התהליך, הוכנסו בו בזה אחר זה שני שינויים. כל אחד מהם הוזיל את עלות הייצור במספר אחוזים. אחוז החיסכון עקב השנוי השני גדול פי 2 מזה שהתקבל עקב השינוי הראשון. הכנסת השינויים עלתה לבית החרושת 84,000 ₪, והחיסכון בחודש הראשון כיסה הוצאה זו במדויק. מה היה אחוז ההוזלה בעקבות השינוי הראשון?

13) סוחר קנה צלחות וספלים ושילם תמורתם 1200 ₪. ממכירת הצלחות הרוויח הסוחר 48 ₪, והרווח ממכירת הספלים היה 120 ₪. אחוז הרווח על הצלחות היה קטן ב-3 מאחוז הרווח על הספלים. מה היה אחוז הרווח על הצלחות?

14) סיטונאי קנה חולצות ב- 120,000 ₪. חלק מהן נמכר ברווח של 30 ₪ לחולצה, 150 נמכרו במחיר 120 ₪ לחולצה, ואת 50 הנותרות הוא תרם לצדקה. הסיטונאי הרוויח על העסקה 15% מהשקעתו. כמה חולצות רכש?

15) קבוצת צופים התחייבה לאסוף במשך שנה תרומות בסך 1800 ₪ לארגון צדקה. בסוף השנה הם הודיעו לראשי הארגון שהסכום שאספו גדול במספר מסוים של אחוזים מזה שהתחייבו לאסוף. מנהל הארגון בדק את החשבונות ומצא אי-התאמה של 2 שקלים, כי במקום לחשב את האחוזים מסכום ההתחייבות ואת התוצאה להוסיף ל- 1800 ₪, הוא חישב את האחוזים מהסכום שנאסף למעשה, ואת הסכום הזה הוסיף לסכום ההתחייבות. כמה כסף נאסף?

16) חברת טל-תקשורת משכירה טלפונים סלולריים ומספקת שירותי תקשורת. היא מציעה ללקוחותיה לבחור באחד מבין ארבעה מסלולי תשלום חודשי:

מסלול א׳: תשלום קבוע של 30 ₪ לחודש ו-2 ₪ לדקת שיחה;

מסלול ב׳: תשלום קבוע של 60 ₪ לחודש ו-1.5 ₪ לדקת שיחה;

מסלול ג׳ : תשלום קבוע של 150 ₪ לחודש ו-0.5 ₪ לדקת שיחה;

מסלול ד׳ : 3 ₪ לדקת שיחה, ללא תשלום קבוע.

התשלום עבור חלקי דקה יחסי לזמן השיחה (מחצית המחיר עבור חצי דקה, שליש מחיר עבור שליש דקה וכו׳). כיצד יבחר כל לקוח את מסלול התשלום, בהתאם למספר שיחותיו?

הערה: מומלץ להיעזר בתיאור גרפי.

17) חברת המשלוחים העירונית ״סע-מהר״ מציעה ללקוחותיה הקבועים שתי אפשרויות של תשלום חודשי:

(I) תשלום קבוע של 100 ₪, ועוד 5 ₪ לחבילה;

(II) תשלום קבוע של 60 ₪, ועוד 10 ₪ לחבילה.

לקוחות מזדמנים משלמים 30 ₪ לחבילה.

מצאו איזו אפשרות עדיפה ללקוח השולח בממוצע בחודש:

א. 20 חבילות; ב. 6 חבילות; ג. 3 חבילות; ד. 2 חבילות.

18) רשת בתי המרקחת ״מזור״ הקימה מועדון לקוחות. דמי החברות הם 100 ₪ לשנה. חברי המועדון זוכים בהנחה של 5% בקניות תרופות עם מרשם רופא, ובהנחה של 9% בשאר קניותיהם. ההוצאה של לקוח ממוצע על מוצרים הנמכרים ללא מרשם רופא גדולה פי 5 מההוצאה על תרופות עם מרשם. מה צריכה להיות ההוצאה השנתית על תרופות עם מרשם כדי שישתלם ללקוח להצטרף למועדון הלקוחות?

19) שתי מחלבות מכרו חלב בכמות הכוללת של a ליטרים במחירים שונים, וקיבלו תמורת החלב סכומים שווים. אילו נמכר החלב של המחלבה הראשונה במחיר של המחלבה השנייה ולהפך, הייתה המחלבה הראשונה מקבלת m ש"ח, והמחלבה השנייה n ש"ח $(m>n)$. כמה חלב מכרה כל אחת מהמחלבות?

20) הרווח של חברה מסוימת בשנה אחת היה $p\%$, ובשנה שלאחריה $q\%$. מה היה הרווח בשנה השלישית, אם הרווח השנתי הממוצע בשלוש השנים היה $r\%$? (הרווח השנתי הממוצע בשלוש שנים מחושב ביחס להון שהיה לחברה לפני השנה הראשונה.)

# 4. תשובות

## 4.1 בעיות מספרים ובעיות כלליות

1) 8, 6 ; 2) 7/12 ; 3) 7, 3 ; 4) 11, 7 ; 5) 4 או -6 ; 6) א. שמעון ; ב. כן ; 7) בחרתי מספר אי-רציונלי ;
8) 511 ; 9) 77 ; 10) 2.5, 1.5 ; 11) 8, 7 ; 12) 20, 11 ; 13) 43 ; 14) 7, 4 או -4 , -7 ; 15) 61 ;
16) -11 , -9 או 9, 11 ; 17) 9, 6 או -6, -9 ; 18) 9 , 13 ; 19) 5, 1/5 ; 20) -5, 8 ; 21) 24 ; 22) 53 ;
23) 7, 0 ; 24) 1/3 , 0 ; 25) 1, 0 ; 26) 6, -5 ; 27) 2/3, 1/3 ; 28) 100 ; 29) 9, 7, 5 או 3, 1, -1 ;
30) 8.5, 10, 11.5 ; 31) 64 ; 32) 24 ו-12 ; 33) 62 ; 34) 5.5 מ' ו-8 מ' ; 35) 7.5 ס"מ ו-12.5 ס"מ ;
36) 12 ס"מ ו-18 ס"מ ; 37) $10\sqrt{10}$ ס"מ ; 38) 3.59 ס"מ ו- 0.4 ס"מ ; 39) 30 סמ"ר ; 40) 7 ס"מ ;
41) 36 סמ"ר ; 42) 5 ס"מ ; 43) ב-5 ס"מ ; 44) 7 ס"מ ו-5 ס"מ ; 45) 3 מ' ו-6 מ' ; 46) 9.6 ק"ג ;
47) 6.25 ק"ג ; 48) 9 אנשים ; 49) 80 ק"ג ו-60 ק"ג ; 50) 30 תלמידים ; 51) 20 ו-24 מחשבים ;
52) 15 ימים ; 53) 40 יום , 25% ; 54) 25 אנשים ; 55) 8 תרגילים ; 56) 14 מכונות ו-18 מכונות ;
57) 24 כיסאות ; 58) 20 משתתפים ; 59) א. 8 צלעות ב. לא, מספר האלכסונים במצולע בעל n צלעות הוא $\frac{n(n-1)}{2} - n$. לא קיים n שעבורו המספר הזה הוא 40 ; 60) 12 משתתפים ;

61) $\frac{-(a+10bc)+\sqrt{(a+10bc)^2+400abc}}{20c}$ .

## 4.2 בעיות תנועה

1) 72 קמ"ש ו-96 קמ"ש ; 2) 44 קמ"ש ו-14 קמ"ש ; 3) 24 קמ"ש ו-18 קמ"ש ; 4) 25 קמ"ש ; 5) 50 קמ"ש ;
6) 21 ק"מ ; 7) 12 קמ"ש ו-30 קמ"ש ; 8) 3 שעות, ושעתיים ; 9) 10 שעות ו-5 שעות ;
10) 100 קמ"ש ו-150 קמ"ש ; 11) 10 שעות ו-9 שעות ; 12) 4 קמ"ש ; 13) 14 קמ"ש ו-18 קמ"ש ;
14) 120 קמ"ש ; 15) 60 קמ"ש ו-72 קמ"ש ; 16) 12 קמ"ש ו-15 קמ"ש ; 17) א. 6 קמ"ש ב. לא ;
18) 24 מטר לדקה ; 19) 4 קמ"ש ו-5 קמ"ש ; 20) 72 קמ"ש ; 21) 12 ק"מ, 4 קמ"ש ו-6 קמ"ש.

## 4.3 בעיות עבודה משותפת (הספק)

1) 27 ימים ; 2) 12 שניות ו-24 שעות ; 3) 15 שעות ; 4) 18 שעות ו-24 שעות ; 5) 24 שעות ו-36 שעות ;
6) 9 שעות ; 7) 10 שעות ו-8 שעות ; 8) 2 ק"מ ו-2.5 ק"מ ; 9) 14 ימים ו-11 ימים ;
10) א. 1/2 ק"מ ו- 1/3 ק"מ ; ב. 40 יום ו-60 יום ; 11) 60 יום ו-90 יום, או 144 יום ו-48 יום ;
12) 10 שעות ו-15 שעות ; 13) 3 שעות ; 14) $\frac{5t-2+\sqrt{25t^2+4t+4}}{4}$ .

## 4.4 בעיות תמיסה

1) 60 ק"ג ; 2) ¼ ק"ג ; 3) 40 טון מהסוג הראשון ו-100 טון מהסוג השני ; 4) 1.5 ק"ג ; 5) 480 גרם ;
6) 8 ליטרים ו-7 ליטרים ; 7) 10 ליטרים ; 8) 2 ליטרים ; 9) 10 סמ"ק ; 10) 120 גרם ;
11) 180 גרם או 240 גרם ; 12) 7.5 גרם או 70 גרם ; 13) מהחבית הראשונה 9 דליים ומהשנייה 3 דליים ;
14) 4 ק"ג ו-6 ק"ג.

## 4.5 בעיות קנייה ומכירה

1) 3487.5 ש"ח ; 2) 40 חפיסות ו-60 חפיסות ; 3) 5% ; 4) 3000 ש"ח ; 5) 75000 ; 6) 25 ש"ח ו-18 ש"ח ;
7) 45 פריטים ו-50 פריטים ; 8) 100000 ש"ח ; 9) 10 ש"ח ; 10) א. 20% ; ב. לא ; 11) 10% ; 12) 10% ;
13) 12% ; 14) 1000 חולצות ; 15) 186 ש"ח ;

16) עד 30 דקות שיחה : מסלול ד' ; 30-60 דקות שיחה : מסלול א' ; 60-90 דקות שיחה : מסלול ב' ; מעל 90 דקות שיחה : מסלול ג' ;

17) א. (I) ; ב. (II) ; ג. (II) או כלקוח מזדמן ; ד. כלקוח מזדמן ; 18) יותר מ-200 ש"ח ;

19) המחלבה הראשונה : $\frac{a\sqrt{n}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}=\frac{a(\sqrt{mn}-n)}{m-n}$ , המחלבה השנייה : $\frac{a\sqrt{m}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}=\frac{a(m-\sqrt{mn})}{m-n}$ ;

20. $\frac{3r-p-q-\frac{pq}{100}}{(1+\frac{p}{100})\cdot(1+\frac{q}{100})}\%$ .

# II. משוואות ואי-שוויונים ליניאריים וריבועיים עם ערך מוחלט

## 1. הקדמה

נזכיר את הגדרת הערך המוחלט

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

או במילים: הערך המוחלט של x שווה ל-x אם x הוא אי-שלילי, ול- (x-) אם x הוא שלילי.[1]

על כן, כל ביטוי הנתון בערך מוחלט מצריך דיון בשני מקרים שונים:

1) המקרה שבו הביטוי אי-שלילי (כלומר חיובי או שווה ל-0);

2) המקרה שבו הביטוי שלילי.

במקרה הראשון פתיחת הערך המוחלט אינה גורמת לשינויים בביטוי, ואילו במקרה השני הביטוי מוכפל ב- (1-) כדי להפוך אותו לחיובי.

**הערה**: הערך המוחלט של 0 שווה ל-0. את המקרה הזה כיסינו בשורה הראשונה בנוסחה **(1.1)**. באותה מידה יכולנו לצרף את המקרה $x = 0$ לשורה השנייה, כי הרי $0 = -0$ .

מהגדרת הערך המוחלט נובע, שאם שני ביטויים מתקבלים זה מזה באמצעות כפל ב- (1-), אז הערכים המוחלטים שלהם שווים. כדי לראות זאת נדון במשמעות הביטוי $|-x|$.

הביטוי בתוך הערך המוחלט הוא חיובי כאשר x שלילי. כלומר כאשר $x<0$ נקבל:

$$|-x| = -x$$

ולהפך, כאשר x חיובי אז x- הוא שלילי. כלומר כאשר $x>0$ נקבל:

$$|-x| = -(-x)=x$$

כאשר $x=0$, נקבל:

$$|-x| = |x| = 0$$

כך שבכל מקרה מתקיים:

$$|-x| = |x| \tag{1.2}$$

הזהות הזאת תקֵפה עבור כל ביטוי שנציב בתוך ערך מוחלט, למשל:

$$|1 - 2x| = |-(2x - 1)| = |2x - 1|$$

וכן:

$$|-x^2 + 3x - 5| = |-(x^2 - 3x + 5)| = |x^2 - 3x + 5|$$

---

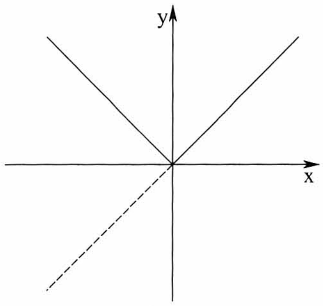
[1] הערה על צורת הכתיבה: במקרים בהם הגדרת פונקציה מתפצלת למספר תחומים, מופיעות בהגדרה מספר שורות, הביטוי המופיע מימין לפסיק בכל שורה מציין את תחום התקיפות של השורה.

נציין שאם לפני הערך המוחלט מופיע מקדם k כלשהו, אז את |k| אפשר להכניס לתוך הערך המוחלט, ואת הסימן של k יש להשאיר בחוץ. הנה שתי דוגמאות:

$$3|x - 1| = |3x - 3|$$

$$-2|x + 4| = -|2x + 8|$$

גרף הפונקציה $y = |x|$ מתקבל מהגרף של הפונקציה $y = x$ באמצעות שיקוף בציר x של החלק של הישר הנמצא מתחת לציר x:




איור 1א

**הערה**: תכונה חשובה של פונקציה ליניארית בערך מוחלט: סימטרייה של גרף הפונקציה ביחס לציר אנכי העובר דרך נקודת המינימום. (עובדה זו תבוא לידי ביטוי בדיון שבסוף סעיף 2.3.) באיור1א רואים מקרה פרטי של התופעה הזאת: גרף הפונקציה $y=|x|$ סימטרי ביחס לציר ה-y.

מהגדרת הערך המוחלט נובעת דרך להסרת סימני הערך המוחלט:

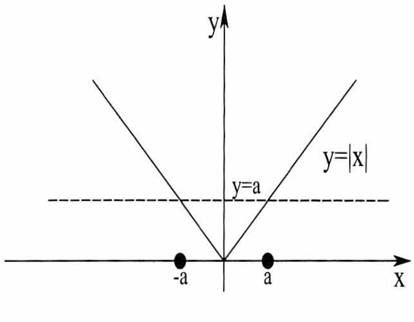
1) אם עבור מספר חיובי כלשהו a מתקיים $|x| < a$, אז $-a < x < a$ .

2) אם מתקיים $|x| = a$, אז $x = a$ או $x = -a$ .

(שימו לב שכאשר $a=0$ שני הפתרונות מתלכדים.)

3) אם נתון $|x| > a$, אז $x > a$ או $x < -a$ .

המחשה ניתן לראות באיור 1ב .




איור 1ב

בפרק הזה נדון בסוגים שונים של משוואות ואי-שוויונים הכוללים ערך מוחלט של ביטוי ליניארי או ריבועי. כל אחד מהדיונים מורכב משני חלקים: בחלק הראשון מוצגות דוגמאות; בחלק השני

מופיע ניתוח כללי של הבעיות מהסוג הנדון. החלק השני אינו כלול בתוכנית הלימודים, ומטרתו היא להדגים איך פועלת השיטה המתמטית, ולתת משמעות עמוקה יותר לחומר הנלמד בפרק. ההסברים הנוספים הללו מופיעים בגופן קטן כדי להבחין בינם לבין חומר הלימוד המחייב.

# 2. משוואות ואי-שוויונים ליניאריים עם ערך מוחלט

## 2.1 משוואות ואי-שוויונים עם ביטוי ליניארי בערך מוחלט ומספר

**דוגמאות**

א. נפתור את המשוואה $|x + 3| = 5$ .

פתרון המשוואה מסתכם בפתרון שתי המשוואות:

$$x + 3 = 5$$

ו-

$$x + 3 = -5$$

לכל אחת מהמשוואות יש פתרון אחד, ובסך-הכול מקבלים שני פתרונות:

$$x_1 = 2$$

ו-

$$x_2 = -8$$

ב. נפתור את האי-שוויון $|3x - 7| < 5$ .

נעבור לאי-שוויונים שקולים ללא ערך מוחלט:

$$-5 < 3x - 7 < 5$$

נחבר 7 לכל האגפים:

$$2 < 3x < 12$$

נחלק ב-3:

$$2/3 < x < 4$$

ובכן פתרונות האי-שוויון הם כל המספרים שבין 2/3 ל-4, לא כולל הקצוות. בלשון המקובלת במתמטיקה: הקטע הפתוח[2] $(2/3 , 4)$, או בסימון של תורת הקבוצות:

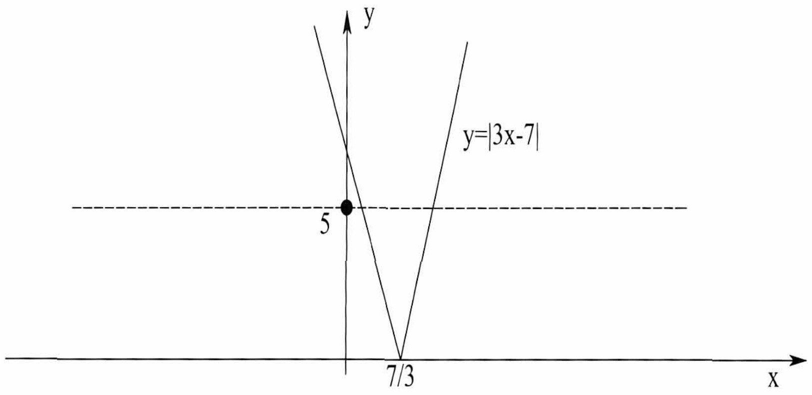
$$\{x: 2/3 < x < 4\}$$

דרך אחרת לפתור אי-שוויון היא באמצעות גרף. הדרך הזאת יכולה לעזור בבדיקת הפתרון (ראו דיון על יתרונותיה וחסרונותיה של השיטה הגרפית בסעיף 4 בהמשך).

נשרטט את גרף הפונקציה $y = |3x - 7|$ :

---

[2] **קטע פתוח** פירושו קטע ללא קצוות, והוא מסומן בסוגריים עגולים. קטע אשר כולל את הקצוות נקרא **קטע סגור** ומסומן בסוגריים מרובעים.




מהגרף אנו רואים שפתרונות האי-שוויון שלנו מהווים קטע. בקצות הקטע נמצאות נקודות שבהן הפונקציה שווה ל-5. כדי לסיים את הבדיקה יש להציב את הערכים שמצאנו בפתרון האנליטי, $x = 2/3$ ו- $x = 4$, ולוודא שבהם אכן מתקיים שוויון. (עשו זאת!)

ג. אפשר לדון גם בשאלה שלא עוסקת דווקא בסוג מסוים של אי-שוויון, אלא במיון של ערכי x בהתאם ליחס בין ביטוי בערך מוחלט (ש-x מופיע בו) לבין מספר כלשהו. הנה דוגמה:

נדון ביחס שבין הביטוי $|2 - x|$ למספר 3 עבור ערכים שונים של x.

השאלה הזאת מתפצלת לשלוש בעיות:

א. המשוואה $|2 - x| = 3$;

ב. האי-שוויון $|2 - x| < 3$;

ג. האי-שוויון $|2 - x| > 3$.

כדי לענות על כל שלוש השאלות, די למצוא פתרון למשוואה א' מהפתרון נקבל שתי נקודות; אי-שוויון ב' מתקיים בקטע הפתוח בין הנקודות האלו, ואילו אי-שוויון ג' מתקיים בקרניים היוצאות מהן.

ובכן נפתור את משוואה א'.

כאשר מסירים את הערך המוחלט מקבלים שתי משוואות:

$$2 - x = 3$$

ו-

$$2 - x = -3$$

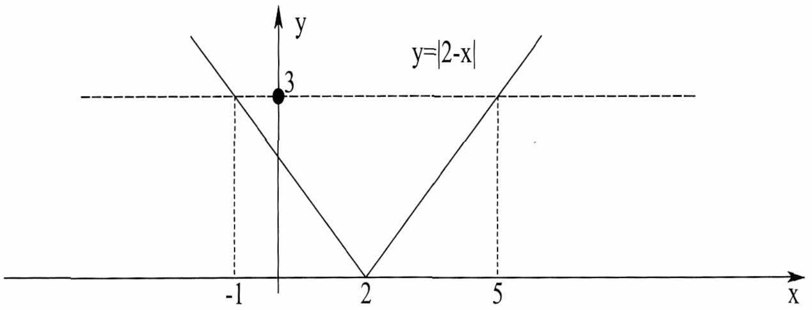
מהפתרון של שתי המשוואות האלו נקבל שתי נקודות:

$$x_1 = -1 \qquad , \qquad x_2 = 5$$

על כן, כאשר $-1 < x < 5$ מתקיים אי-שוויון ב';

כאשר $x > 5$ או כאשר $x < -1$ מתקיים אי-שוויון ג'.

הגרף ממחיש את הפתרון :




ד. נפתור את האי-שוויון הפרמטרי $|x + b| \geq 3$.

מהסרת הערך המוחלט נקבל שני אי-שוויונים :

$$x + b \geq 3$$

ו-

$$x + b \leq -3$$

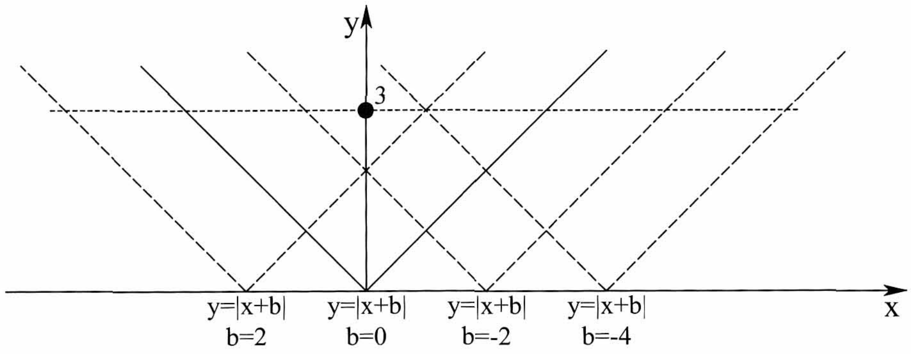
פתרון האי-שוויון הראשון : $x \geq 3 - b$ ;

פתרון האי-שוויון השני : $x \leq -3 - b$ .

לסיכום : קבוצת הפתרונות כוללת את כל המספרים שמופיעים על ציר המספרים מהנקודה 3-b ימינה, עד אינסוף, וכן את כל המספרים המופיעים מן הנקודה 3-b שמאלה, עד אינסוף (ובכלל זה גם שתי נקודות הקצה 3-b ו- 3-b-). בשפה המתמטית נאמר שהאי-שוויון מתקיים בשתי הקרניים הסגורות[3] $(-\infty, -3-b]$ ו- $[3-b, \infty)$ , ובסימון של תורת הקבוצות :

$$\{x|\ x\leq-3-b \text{ או } x\geq3-b\}$$

לשם בדיקה נציג פתרון גרפי עבור כמה ערכים של b :




אנו רואים שלגרף יש צורה קבועה שאינה תלויה ב-b. הערך של b משפיע על מיקום הגרף. כאשר b=0 , נקודת המינימום היא בראשית הצירים. כאשר b<0 הגרף זז |b| יחידות ימינה, ואם b>0 הגרף זז |b| יחידות שמאלה. נקודות החיתוך עם הקו y=3 זזות בהתאם.

[3] **קרן סגורה** היא קרן הכוללת את נקודת הקצה שלה. מציינים זאת באמצעות סוגר מרובע בצד שבו מופיעה נקודת הקצה של הקרן. אם נקודת הקצה לא נכללת בקרן, אז הקרן נקראת **קרן פתוחה** ומשתמשים בסוגר עגול. הסוגר ליד הסימן של אינסוף ∞ הוא בכל מקרה עגול.

שימו לב שבפתרון האנליטי ההפרש (המרחק) בין שתי נקודות החיתוך הוא $6=(3-b)-(-3-b)$ , כלומר הוא אינו תלוי ב- b. הפתרון הגרפי מאשש את המסקנה הזאת.

### המקרה הכללי

בסעיף הזה עסקנו בפתרון המשוואה

$$|ax + b| = c, \quad a\neq 0 \qquad (2.1)$$

והאי-שוויונים

$$|ax + b| \leq c, \quad a\neq 0 \qquad (2.2)$$

$$|ax + b| < c, \quad a\neq 0 \qquad (2.3)$$

$$|ax + b| \geq c, \quad a\neq 0 \qquad (2.4)$$

$$|ax + b| > c, \quad a\neq 0 \qquad (2.5)$$

נציג עכשיו גישה כללית, שדנה בכל הסעיפים הללו ביחד.

לשם כך נבדוק את היחס בין הגודל $|ax+b|$ למספר c.

1) אם $c<0$, אז c הוא קטן מכל ערך מוחלט שהוא, ולכן לכל מספר ממשי מתקיים $|ax + b| > c$ .

2) אם $c=0$, יש שתי אפשרויות:

א) אם $x = -b/a$ אז הביטוי שבתוך הערך המוחלט הוא 0, ולכן מתקיים שוויון, $|ax + b| = c$;

ב) אחרת, כלומר עבור כל $x \neq -b/a$, הביטוי בתוך הערך המוחלט אינו שווה ל-0, ולכן הערך המוחלט חיובי, ומתקיים $|ax + b| > c$ .

3) אם $c>0$, יש להפריד בין כמה מקרים:

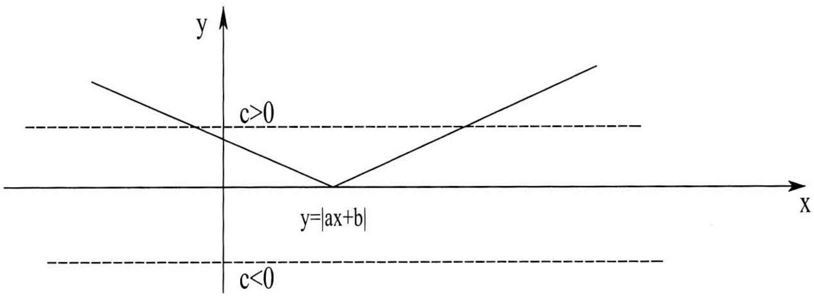
א) כאשר $-c < ax + b < c$ הערך המוחלט קטן מ-c, כלומר מתקיים אי-שוויון (2.3): $|ax + b| < c$;

ב) כאשר $ax+b=\pm c$ (כלומר כאשר $x = \pm(c- b)/a$ ) מתקיים שוויון;

ג) כאשר $-c > ax + b$ או $ax + b > c$ הערך המוחלט גדול מ-c, כלומר מתקיים אי-שוויון (2.5): $|ax + b| > c$.

כדי להשלים את הפתרון, יש לפתור את האי-שוויונים המופיעים בסעיפים א׳ ו- ג׳. נשאיר זאת כתרגיל (ראו שאלה 3 בסוף הפרק).

איור 2 ממחיש את הפתרון הכללי:




איור 2

## 2.2 משוואות ואי-שוויונים עם ביטוי ליניארי בערך מוחלט וביטוי ליניארי ללא ערך מוחלט

**דוגמאות**

א. נפתור את המשוואה $|x + 3| = 2x - 1$ .

נפתח את הערך המוחלט ונקבל שתי משוואות:

$$\text{I. } x + 3 = 2x - 1 \qquad \text{II. } -(x + 3) = 2x - 1$$

המשוואה I תקפה בתחום שבו מתקיים $x + 3 \geq 0$, כלומר בתחום $x \geq -3$.

זאת אומרת שאם פתרון המשוואה עונה על התנאי הזה, הוא יחשב כתקף. אם נקבל פתרון קטן מ- $-3$, הוא יהיה פתרון סרק.

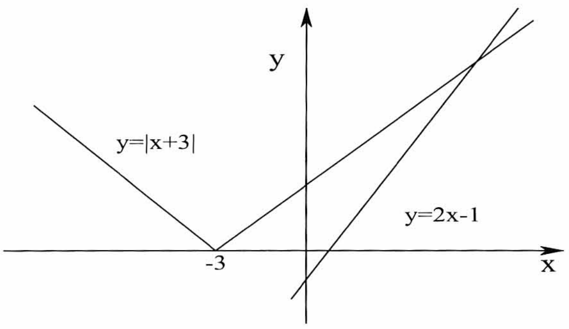
המשוואה II תקפה כאשר $x + 3 < 0$, כלומר בתחום $x < -3$.

פתרון המשוואה הראשונה הוא $x = 4$; הפתרון הזה מתיישב עם התנאי $x \geq -3$.

פתרון המשוואה השנייה הוא $x = -2/3$; הפתרון הזה אינו שייך לתחום התקפות של המשוואה (כי הרי $-3<-2/3$ ) ולכן זהו פתרון סרק.

לסיכום: למשוואה יש פתרון אחד, $x = 4$.

הפתרון הגרפי:




מהגרף רואים שלמשוואה יש פתרון יחיד בתחום $x > -3$ . כדי לוודא שהפתרון שמצאנו בדרך אנליטית הוא נכון, די להציב אותו במשוואה.

נראה עתה דרך אחרת לפתור את המשוואה שלנו. הדרך שנדגים היא כללית יותר מזו שלמדנו בסעיף 2.1. השיטה החדשה מבוססת על הסרת הערכים המוחלטים לפי ההגדרה (ראו הגדרה 1.1 בהקדמה לפרק הזה). זאת השיטה המקובלת לפתירת משוואות ואי-שוויונים הכוללים ערכים מוחלטים. הדרך שלמדנו בסעיף 2.1 מתאימה רק למשוואות ואי-שוויונים שבהם מופיע הערך המוחלט בביטוי אחד בלבד.

ובכן, נתונה המשוואה $|x + 3| = 2x - 1$ .

נפתח את הערך המוחלט המופיע באגף שמאל של המשוואה, ונקבל:

$$|x + 3| = \begin{cases} x + 3 , & x + 3 \geq 0 \\ -(x + 3) , & x + 3 < 0 \end{cases}$$

כדי להשלים את הסרת הערך המוחלט יש לפתור את האי-שוויונים המופיעים בתנאים (מימין לפסיק בכל אחת משתי השורות). נקבל:

$$|x + 3| = \begin{cases} x + 3 , & x \geq -3 \\ -(x + 3) , & x < -3 \end{cases}$$

נציב את התוצאה במשוואה שלנו. נקבל שתי מערכות, שכל אחת מהן מורכבת ממשוואה ומאי-שוויון המציין את תחום התקֵפות של המשוואה.

$$\text{I. } \begin{cases} x + 3 = 2x - 1 \\ x \geq -3 \end{cases} \qquad \text{II. } \begin{cases} -(x + 3) = 2x - 1 \\ x < -3 \end{cases}$$

נפתור את המשוואות המופיעות במערכות האלו. נקבל:

$$\text{I. } \begin{cases} x = 4 \\ x \geq -3 \end{cases} \qquad \text{II. } \begin{cases} x = -2/3 \\ x < -3 \end{cases}$$

למערכת II אין פתרון, כי המשוואה והאי-שוויון אינם מתיישבים זה עם זה .

למשוואה יש רק פתרון אחד: $x = 4$.

ב. נפתור את המשוואה $x - |x + 3| = 0$ .

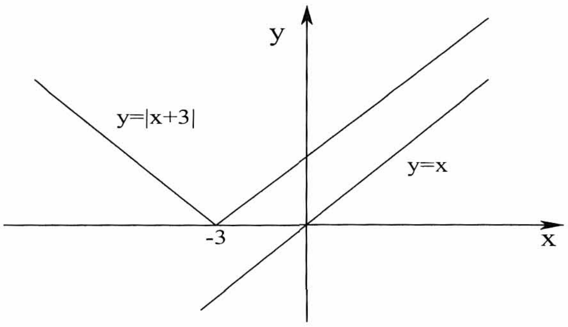
נתחיל עם פתרון גרפי כדי להיעזר בו בפתרון האנליטי.

יש שתי דרכים אפשריות:

הדרך האחת היא לשרטט את גרף הפונקציה $y = x - |x + 3|$;

הדרך השנייה היא להעביר אגפים, לשרטט את הגרפים של שתי הפונקציות $y = x$ ו- $y = |x + 3|$, ולחפש נקודות חיתוך ביניהן.

בדרך הראשונה, לפני השרטוט יש להסיר את הערך המוחלט ולפתור את המשוואה. אבל הרי מטרתנו בשרטוט הגרף היא להיעזר בו לצורך הפתרון האנליטי, לכן הדרך הזאת אינה מתאימה. נלך אם כן בדרך השנייה.




הקרן הימנית של הפונקציה $y = |x + 3|$ מקבילה לגרף של $y = x$, ולכן לשתי הפונקציות האלו אין נקודות חיתוך, כלומר למשוואה שלנו אין פתרון.

נאשש את המסקנה בפתרון אנליטי:

גם כאן אפשר להעביר את המחובר השני בסכום לאגף ימין, אך בניגוד לפתרון הגרפי – כאן אין שום יתרון להעברת אגפים בתחילת תהליך הפתרון.

נפתח את הערך המוחלט ונקבל שתי מערכות:

$$\text{I.}\begin{cases} x - (x+3) = 0 \\ x \ge -3 \end{cases} \qquad \text{II.}\begin{cases} x + x + 3 = 0 \\ x < -3 \end{cases}$$

אחרי שנכנס איברים דומים במשוואות נקבל:

$$\text{I.}\begin{cases} -3 = 0 \\ x \ge -3 \end{cases} \qquad \text{II.}\begin{cases} x = -3/2 \\ x < -3 \end{cases}$$

המשוואה במערכת הראשונה היא סתירה.

פתרון המשוואה במערכת השנייה אינו מתאים לתנאי, ולכן גם למערכת הזאת אין פתרון.

מסקנה: למשוואה אין פתרון.

אכן, לתשובה זו ציפינו לאור הפתרון הגרפי.

ג. נפתור את האי-שוויון $|3x + 1| + x < 2$ .

נפתח הערך המוחלט ונפתור שתי מערכות:

$$\text{I.}\begin{cases} 3x + 1 + x < 2 \\ x \ge -1/3 \end{cases} \qquad \text{II.}\begin{cases} -(3x+1) + x < 2 \\ x < -1/3 \end{cases}$$

נפתור כל אחת מהן:

$$\text{I.}\begin{cases} 4x + 1 < 2 \\ x \ge -1/3 \end{cases} \qquad \text{II.}\begin{cases} -(3x+1) + x < 2 \\ x < -1/3 \end{cases}$$

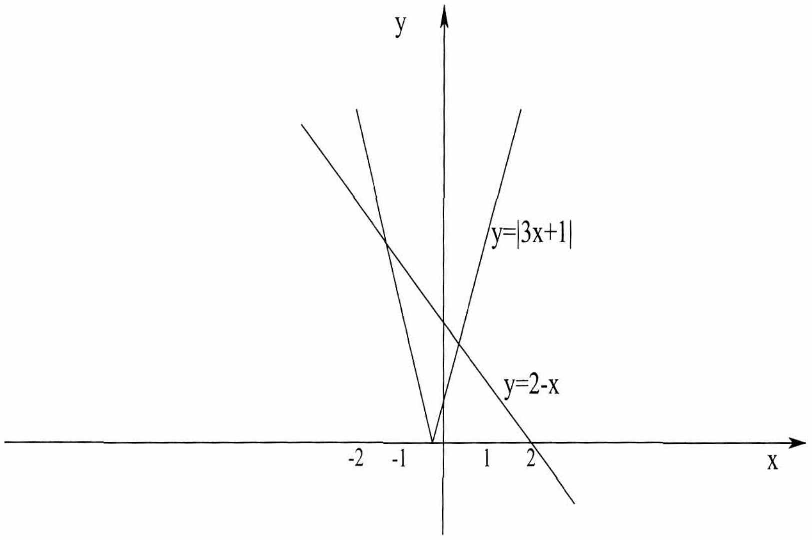
$$\begin{cases} 4x < 1 \\ x \ge -1/3 \end{cases} \qquad \begin{cases} -3 < 2x \\ x < -1/3 \end{cases}$$

$$-1/3 \le x < 1/4 \qquad -3/2 < x < -1/3$$

אפשר לאחד את שני התחומים: $-3/2 < x < 1/4$ .

לשם בדיקה נביא פתרון גרפי. כמו בדוגמה הקודמת, גם הפעם נוח יותר להעביר את x לאגף ימין כדי לבודד את פונקציית הערך המוחלט באגף שמאל. כך נקבל את האי-שוויון

$$|3x + 1| < 2 - x$$




מהפתרון הגרפי רואים שלמשוואה המקבילה יש שני פתרונות, והאי-שוויון הדרוש מתקיים בקטע שביניהם.

להשלמת הבדיקה יש להציב במקום x את ערכי הקצה של הקטע שמצאנו בפתרון האנליטי. יש לוודא שעבור הערכים האלה מתקיים שוויון בין האגפים.

סיכום: פתרון האי-שוויון הוא הקטע הפתוח $(-3/2, 1/4)$, או בסימון של תורת הקבוצות:

$$\{x| -3/2 < x < 1/4\}$$

ד. נפתור את האי-שוויון $|2 - 2x| \geq 2(x - 1)$ .

נפתח את הערך המוחלט ונפתור שתי מערכות:

$$\text{I.}\begin{cases} 2 - 2x \geq 2(x-1) \\ x \leq 1 \end{cases} \qquad \text{II.}\begin{cases} 2x - 2 \geq 2(x-1) \\ x > 1 \end{cases}$$

נפתור כל אחת מהמערכות:

$$\text{I.}\begin{cases} 2 - 2x \geq 2(x-1) \\ x \leq 1 \end{cases} \qquad \text{II.}\begin{cases} 2x - 2 \geq 2(x-1) \\ x > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \geq x \\ x \leq 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \geq 0 \\ x > 1 \end{cases}$$

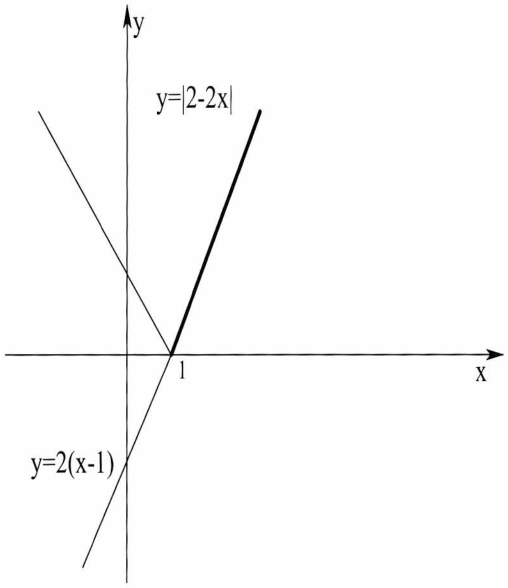
פתרון מערכת I הוא $x \leq 1$ ; פתרון מערכת II הוא $x > 1$.

הסבר: שני האי-שוויונים של מערכת I שקולים זה לזה (כלומר יש להם אותו פתרון) ;

האי-שוויון הראשון של מערכת II מתקיים ללא תלות ב-x,[4] לכן פתרון המערכת מתקבל מהאי-שוויון השני (מהתנאי).

אפשר לאחד את שני התחומים ולקבל שהאי-שוויון מתקיים עבור כל ערך של x.[5]

נבדוק בעזרת פתרון גרפי:




הקו העבה מסמן את החלק המשותף של שני הגרפים.

הגרף מאשש את התוצאה שקיבלנו בפתרון האנליטי:

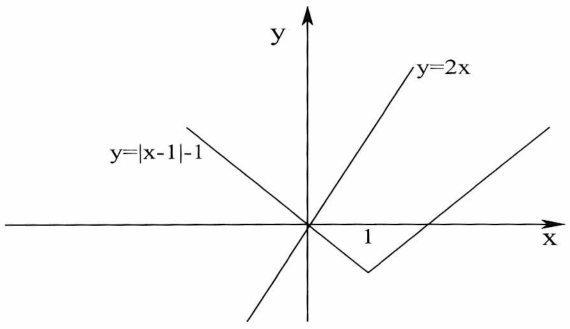
כאשר $x<1$ , אגף שמאל של האי-שוויון ממש גדול מאגף ימין;

כאשר $x\geq1$ מתקיים שוויון בין שני האגפים.

וכך, עבור כל ערך של x , אגף שמאל $\geq$ אגף ימין.

ה. נדון בשאלה מהו היחס בין $|x - 1| - 1$ לבין $2x$.

פתרון גרפי:




מהגרף רואים שלמשוואה $|x-1| - 1 = 2x$ יש פתרון יחיד.

---

[4] טענה (במקרה שלנו משוואה או אי-שוויון) שמתקיימת תמיד, ללא תלות בערכים של הפרמטרים והנעלמים, נקראת **טאוטולוגיה** (tautology).

[5] דרך אחרת לרשום זאת: $-\infty<x<\infty$

מכיון שנקודת החיתוך של שתי הפונקציות היא "פשוטה", רואים גם את הפתרון המדויק $x=0$ .

עבור $x>0$ מתקיים $|x-1| - 1 < 2x$ ; עבור $x<0$, $|x-1| - 1 > 2x$ .

ונעבור לפתרון האנליטי

נפתח את הערך המוחלט ונפתור שתי מערכות :

$$\text{I.}\begin{cases} x-1-1>2x \\ x\geq 1 \end{cases} \qquad \text{II.}\begin{cases} -(x-1)-1>2x \\ x<1 \end{cases}$$

נפתור כל אחת מהמערכות :

$$\text{I.}\begin{cases} x-2>2x \\ x\geq 1 \end{cases} \qquad \text{II.}\begin{cases} -(x-1)-1>2x \\ x<1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2>x \\ x\geq 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0>3x \\ x<1 \end{cases}$$

פתרון מערכת II הוא $x<0$.

שתי הדרישות אינן יכולות להתקיים ביחד כיוון ש- $-2<1$ , לכן למערכת I אין פתרון.

לסיכום :

כאשר $x>0$ מתקיים $|x-1| - 1 < 2x$ ;

כאשר $x=0$ מתקיים $|x-1| -1 = 2x$ ;

כאשר $x<0$ מתקיים $|x-1| - 1 > 2x$.

דיון כללי

בסעיף הזה עסקנו במשוואה מהסוג

$$|ax + b| = cx + d\ ,\ \ a,c\neq 0 \tag{2.7}$$

ובאי-שוויונים מהסוגים

$$|ax + b| \leq cx + d\ ,\ \ a,c\neq 0 \tag{2.8}$$

$$|ax + b| < cx + d\ ,\ \ a,c\neq 0 \tag{2.9}$$

$$|ax + b| \geq cx + d\ ,\ \ a,c\neq 0 \tag{2.10}$$

$$|ax + b| > cx + d\ ,\ \ a,c\neq 0 \tag{2.11}$$

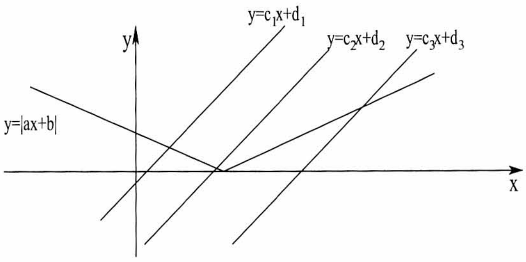
במשוואה ובאי-שוויונים הנ"ל מופיעים ארבעה פרמטרים. הבעיה מורכבת יותר מזו הנדונה בסעיף 2.1. במקרים כאלה לא נהוג לפתור את הבעיה הכללית.

ניעזר בגרפים כדי לקבל הערכה איכותית מה עשויה להיות צורת הפתרון של המשוואה והאי-שוויונים הנ"ל במקרים שונים.

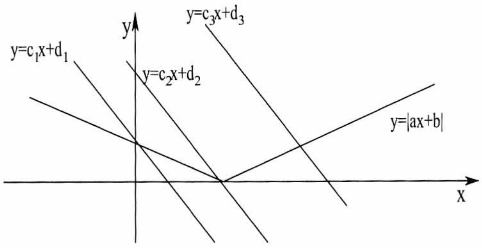
**הערה:** הערכה מהסוג הזה מתייחסת למבנה הכללי של הפתרון (כגון האם הפתרון הוא קטע - סגור או פתוח - או קרן, סגורה או פתוחה, או מספר ערכים בודדים, וכו') בלי להתייחס לערכים מספריים ספציפיים. בתחומים מתקדמים של מתמטיקה שימושית ממלאות הערכות איכותיות תפקיד חשוב ביותר בהבנת התנהגויות של מערכות שונות.

לצורך ההערכה האיכותית נראה מהן האפשרויות השונות של היחס בין הפונקציות $y = |ax + b|$ ו- $y = cx + d$.

1. שתי הפונקציות חותכות זו את זו בנקודה אחת

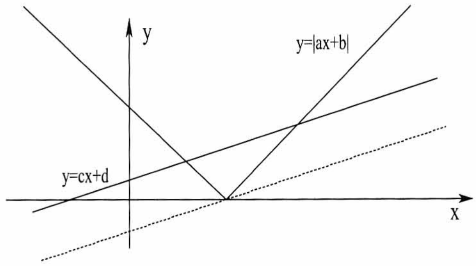



איור 3א: המקרה c>0

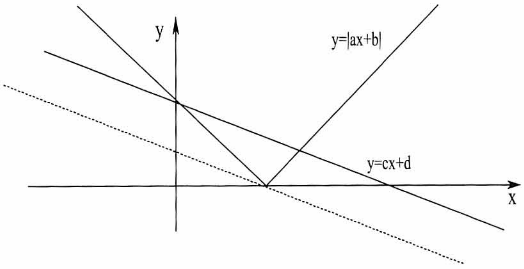



איור 3ב: המקרה c<0

2. שתי הפונקציות חותכות זו את זו בשתי נקודות

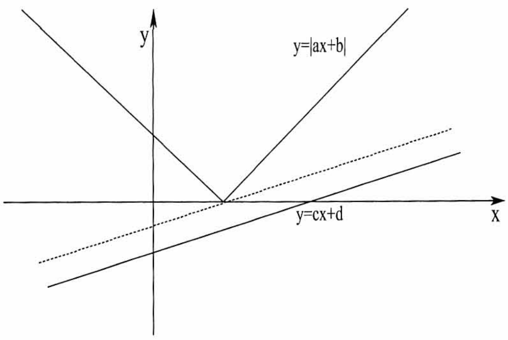



איור 3ג: המקרה c>0

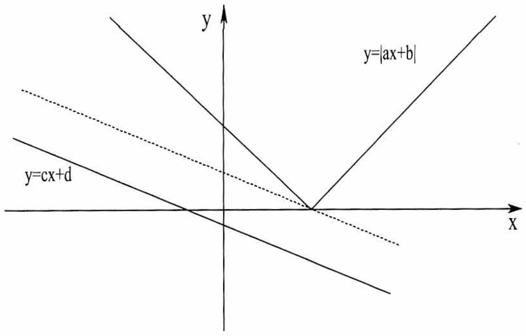



איור 3ד: המקרה c<0

3. אין נקודות חיתוך בין שתי הפונקציות

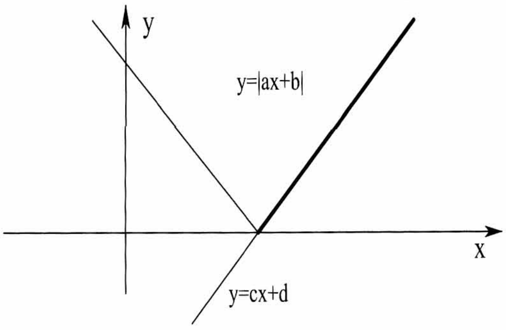



איור 3ה: המקרה c>0

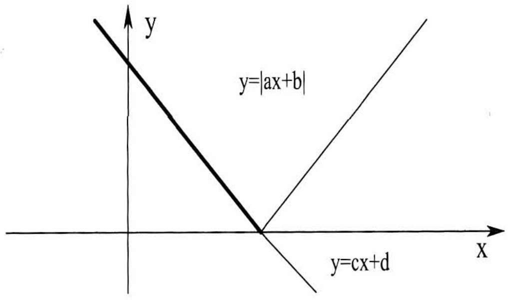



איור 3ו: המקרה c<0

4. נקודות החיתוך בין שתי הפונקציות מהוות קרן. המקרה הזה מתרחש כאשר $ax + b = \pm(cx + d)$.




איור 3ז: המקרה $ax + b = \pm(cx + d)$ כאשר $c>0$




איור 3ח: המקרה $ax + b = \pm(cx + d)$ כאשר $c<0$

מהגרפים רואים:

1) (איורים 3א ו- 3ב): למשוואה (2.7) יש פתרון יחיד; הפתרונות של כל אחד מארבעת האי-שוויונים (2.8)-(2.11) מרכיבים קרן (סגורה או פתוחה בהתאם לסוג האי-שוויון).

2) (איורים 3ג ו- 3ד): למשוואה (2.7) יש שני פתרונות; פתרונות האי-שוויונים (2.8) ו- (2.9) מהווים קטע (קטע סגור במקרה של אי-שוויון (2.8), וקטע פתוח במקרה של אי-שוויון (2.9) ); פתרונות האי-שוויונים (2.10) ו- (2.11) מהווים זוג קרניים (סגורות במקרה של אי-שוויון (2.10) ו פתוחות במקרה של אי-שוויון (2.11) ).

3) (איורים 3ה ו- 3ו): למשוואה (2.7) ולאי-שוויונים (2.8) ו- (2.9) אין פתרון; כל ערך של x מהווה פתרון לאי-שוויונים (2.10) ו- (2.11).

4) (איורים 3ז ו- 3ח): פתרונות המשוואה (2.7) מהווים קרן, זה המצב גם לגבי אי-שוויון (2.8); לאי-שוויון (2.9) אין פתרון; כל ערך של x מהווה פתרון לאי-שוויון (2.10) ואילו הפתרונות של אי-שוויון (2.11) מהווים קרן (אשר משלימה לישר את הקרן שמרכיבים הפתרונות של אי-שוויון (2.8) ).

5) שימו לב לקו המקווקו באיורים 3ג-3ו: המקרה הגבולי בין המצב שיש שתי נקודות חיתוך לבין העדר נקודות חיתוך הוא המקרה שבו בין שתי הפונקציות קיימת נקודת השקה אחת. המקרה הזה שונה מהמקרים המתוארים באיורים 3א ו- 3ב, כי כאן בניגוד לשם שני הקווים אינם חותכים.

## 2.3 משוואות ואי-שוויונים עם שני ביטויים ליניאריים בערך המוחלט ומספר

**דוגמאות**

א. נפתור את המשוואה $|x + 3| = |5x - 2|$ .

נפתח את הערכים המוחלטים בשני הביטויים המופיעים במשוואה :

$$|x+3| = \begin{cases} x+3, & x \ge -3 \\ -(x+3), & x < -3 \end{cases} \qquad |5x-2| = \begin{cases} 5x-2, & x \ge 2/5 \\ -(5x-2), & x < 2/5 \end{cases}$$

פתרון המשוואה אחרי פתיחת הערכים המוחלטים מתפצל לשלושה מקרים, כל אחד מהם בתחום אחר :

$$\text{I. } x \ge 2/5 \qquad \text{II. } 2/5 > x \ge -3 \qquad \text{III. } -3 > x$$

לכל אחד מהתחומים האלה נקבל משוואה משלו.

I. בתחום $x \ge 2/5$ נקבל את המשוואה

$$x + 3 = 5x - 2$$

II. בתחום $-3 \le x < 2/5$ נקבל את המשוואה $2/5 > x \ge -3$

$$x + 3 = 2 - 5x$$

III. בתחום $x < -3$ נקבל את המשוואה $-3 > x$

$$-(x + 3) = 2 - 5x$$

דרך אחרת לרשום את הנתונים האלה היא באמצעות שלוש מערכות, שכל אחת מהן מורכבת ממשוואה ומאי-שוויון המציין את תחום התקפות של המשוואה :

I. $\begin{cases} x+3 = 5x-2 \\ x \geq 2/5 \end{cases}$ II. $\begin{cases} x+3 = 2-5x \\ 2/5 > x \geq -3 \end{cases}$ III. $\begin{cases} -(x+3) = 2-5x \\ x < -3 \end{cases}$

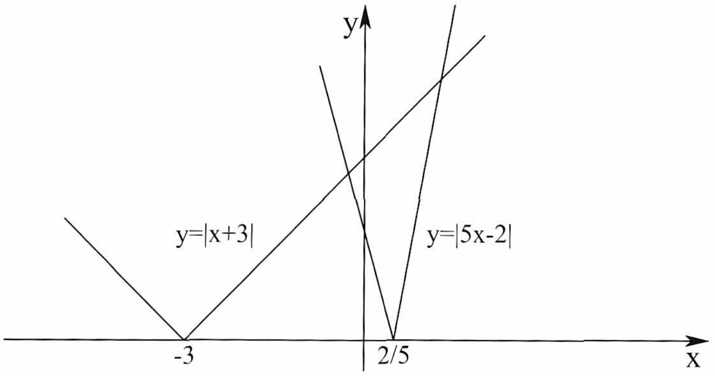
נפתור את המשוואות המופיעות בשלוש המערכות האלו, ונקבל:

I. $\begin{cases} x = 5/4 \\ x \geq 2/5 \end{cases}$ II. $\begin{cases} x = -1/6 \\ 2/5 > x \geq -3 \end{cases}$ III. $\begin{cases} x = 5/4 \\ x < -3 \end{cases}$

רק הפתרונות שקיבלנו במערכות I ו- II מתיישבות עם התנאים, לכן יש למשוואה שני פתרונות:

$x = 5/4$ ו- $x = -1/6$ .

כדי לאשש את התוצאה נביא גם פתרון גרפי:




בגרף רואים שלמשוואה יש שני פתרונות. השלמת הבדיקה תיעשה באמצעות הצבת הפתרונות במשוואה.

ב. נפתור את המשוואה $|2x - 1| = |x| - 2$ .

נפתח את הערכים המוחלטים המופיעים במשוואה:

$|x| = \begin{cases} x \ , & x \geq 0 \\ -x \ , & x < 0 \end{cases}$ $|2x - 1| = \begin{cases} 2x - 1 \ , & x \geq 1/2 \\ -(2x - 1) \ , & x < 1/2 \end{cases}$

פתרון המשוואה אחרי פתיחת הערכים המוחלטים מתפצל לשלושה מקרים, כל מקרה בתחום אחר:

I. $x \geq 1/2$ II. $1/2 > x \geq 0$ III. $x < 0$

לכל אחד מהתחומים האלה נקבל משוואה משלו. נרשום שלוש מערכות, שכל אחת מורכבת ממשוואה ומאי-שוויון המציין את תחום התקפות של המשוואה:

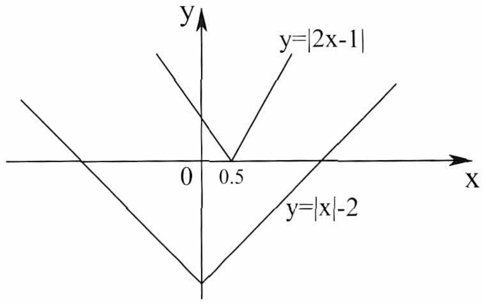
I. $\begin{cases} 2x-1 = x-2 \\ x \geq 1/2 \end{cases}$ II. $\begin{cases} 1-2x = x-2 \\ 1/2 > x \geq 0 \end{cases}$ III. $\begin{cases} 1-2x = -x-2 \\ x < 0 \end{cases}$

נפתור את המשוואות בשלוש המערכות, ונקבל:

I. $\begin{cases} x = -1 \\ x \geq 1/2 \end{cases}$ II. $\begin{cases} x = 1 \\ 1/2 > x \geq 0 \end{cases}$ III. $\begin{cases} x = 3 \\ x < 0 \end{cases}$

בכל אחד משלושת מקרים מובילה פתירת המשוואה לתוצאה שאינה מתיישבת עם התנאי, ולכן למשוואה אין פתרונות.

נאשש את התוצאה הזאת בעזרת פתרון גרפי :




מהאיור רואים שהפונקציה המופיעה באגף שמאל תמיד גדולה מזו שבאגף ימין, לכן למשוואה אין פתרון.

ג. נפתור את האי-שוויון $|x - 2| < |x + 3|$ .

הפתרון מתחלק לטיפול בשלושה מקרים בהתאם לערך של x :

III. $x < -3$      II. $2 > x \geq -3$      I. $x \geq 2$

אחרי פתיחת הערכים המוחלטים נקבל שלושה זוגות של אי-שוויונים :[6]

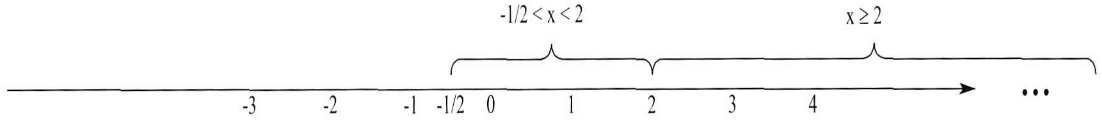
III. $\begin{cases} -x-3 > 2-x \\ x < -3 \end{cases}$      II. $\begin{cases} x+3 > 2-x \\ 2 > x \geq -3 \end{cases}$      I. $\begin{cases} x+3 > x-2 \\ x \geq 2 \end{cases}$

מהמערכות האלו נקבל :

III. $\begin{cases} -3 > 2 \\ x < -3 \end{cases}$      II. $\begin{cases} 2x > -1 \\ 2 > x \geq -3 \end{cases}$      I. $\begin{cases} 3 > -2 \\ x \geq 2 \end{cases}$

אין פתרון      $2 > x > -1/2$      מתקיים עבור כל התחום : $x \geq 2$

קיבלנו שני תחומים "נושקים", ואפשר לאחד אותם.

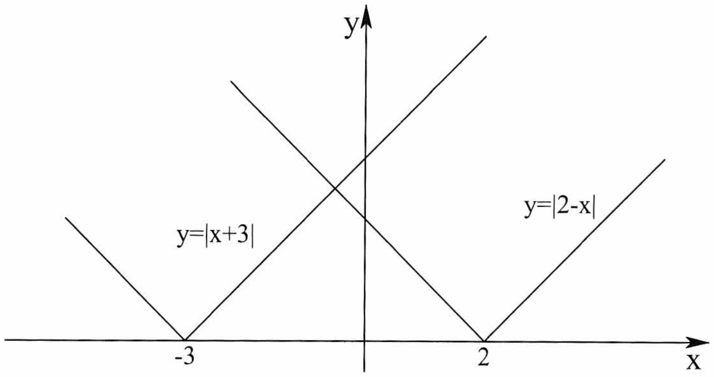



ובכן, פתרון האי-שוויון הוא $x > -1/2$ .

ניעזר בפתרון גרפי לצורך הבדיקה :

---

[6]שימו לב : פתיחת הערך המוחלט של |2-x| תיתן תוצאה זהה לפתיחת הערך המוחלט של |x-2| ; ראו נוסחה 1.2 בהקדמה לפרק זה.




הקרן השמאלית של הפונקציה $y = |2 - x|$ מקבילה לקרן השמאלית של הפונקציה $y = |x + 3|$:
הרי שתיהן מתקבלות מפונקציות ליניאריות שיש בהן אותו מקדם ליד x ( $y = x - 2$ ו- $y = x + 3$ ). לכן אין חיתוך בין הקרניים האלו. מהאיור רואים ש- $|x + 3| > |2 - x|$ החל מנקודה מסוימת בתחום $-3 < x < 2$ . באותה נקודה מתקיים שוויון.
להשלמת הבדיקה יש להציב את נקודת הקצה של התחום (כלומר $x = -1/2$) באי-שוויון, כדי לוודא שבנקודה זאת מתקיים שוויון בין שני האגפים.

ד. נפתור את האי-שוויון $|x + 1| > -|2x - 1| + 3$ .
אחרי פתיחת הערכים המוחלטים נקבל שלושה זוגות של אי-שוויונים:

$$\text{III.} \begin{cases} -x-1 > (2x-1)+3 \\ x < -1 \end{cases} \qquad \text{II.} \begin{cases} x+1 > (2x-1)+3 \\ 1/2 > x \geq -1 \end{cases} \qquad \text{I.} \begin{cases} x+1 > -(2x-1)+3 \\ x \geq 1/2 \end{cases}$$

או

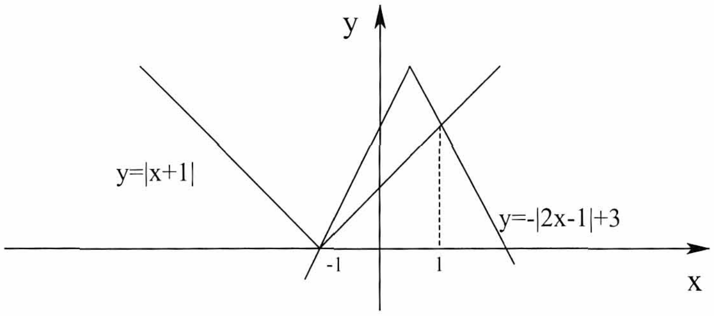
$$\text{II.} \begin{cases} -x-1 > 2x+2 \\ x < -1 \end{cases} \qquad \text{II.} \begin{cases} x+1 > 2x+2 \\ 1/2 > x \geq -1 \end{cases} \qquad \text{I.} \begin{cases} x+1 > -2x+4 \\ x \geq 1/2 \end{cases}$$

או

$$\text{III.} \begin{cases} -1 > x \\ x < -1 \end{cases} \qquad \text{II.} \begin{cases} -1 > x \\ 1/2 > x \geq -1 \end{cases} \qquad \text{I.} \begin{cases} x > 1 \\ x \geq 1/2 \end{cases}$$

פתרון מערכת I: $x>1$; למערכת II אין פתרון; פתרון מערכת III: $x<-1$ .
ובכן, הפתרון המלא: $x>1$ או $x<-1$.

פתרון גרפי מאשש את התוצאה:




ה. נפתור את האי-שוויון $|x+1| - |x+3| \geq -2$ .

אחרי פתיחת הערכים המוחלטים נקבל שלושה זוגות של אי-שוויונים :

$$\text{I.}\begin{cases} x+1 \geq (x+3)-2 \\ x \geq -1 \end{cases} \qquad \text{II.}\begin{cases} -(x+1) \geq (x+3)-2 \\ -1 > x \geq -3 \end{cases} \qquad \text{III.}\begin{cases} -(x+1) \geq -(x+3)-2 \\ x < -3 \end{cases}$$

או

$$\text{I.}\begin{cases} x+1 \geq x+1 \\ x \geq -1 \end{cases} \qquad \text{II.}\begin{cases} -x-1 \geq x+1 \\ -1 > x \geq -3 \end{cases} \qquad \text{III.}\begin{cases} -x-1 \geq -x-5 \\ x < -3 \end{cases}$$

או

$$\text{I.}\begin{cases} 0 \geq 0 \\ x \geq -1 \end{cases} \qquad \text{II.}\begin{cases} -1 \geq x \\ -1 > x \geq -3 \end{cases} \qquad \text{III.}\begin{cases} 0 \geq -4 \\ x < -3 \end{cases}$$

בכל אחת מהמערכות האלו, האי-שוויון הראשון מתקיים בכל תחום התקפות שלהן, כלומר עבור כל ערך של x המתאים לאי-שוויון השני במערכת. לכן פתרונה של כל אחת משלוש המערכות מתואר על-ידי האי-שוויון השני של המערכת.

האי-שוויונים השניים של שלוש המערכות מכסים ביחד את כל ציר המספרים, לכן האי-שוויון מתקיים עבור כל ערך של x, או בשפה של תורת הקבוצות :

{ x: מספר ממשי x}

ובדרך כתיבה אחרת :

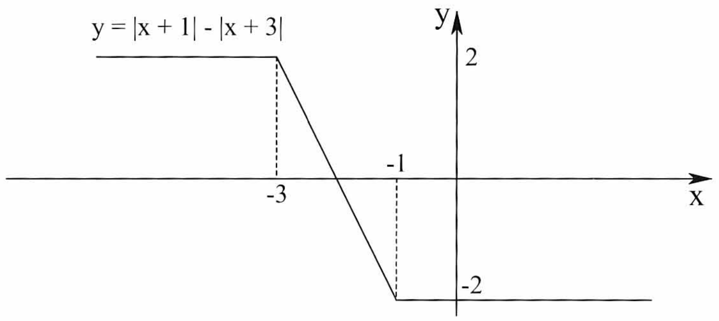
$$\{ x: -\infty < x < \infty \}$$

נדגים הפעם פתרון גרפי ללא העברת אגפים. בדרך הזאת עלינו לשרטט את הפונקציה המופיעה באגף שמאל, ולהשוות אותה ל- 2- .

כאשר נפתח את הערכים המוחלטים, נוכל לרשום את הפונקציה באגף שמאל באופן הבא :

$$y = \begin{cases} -2 \ , & x \geq -1 \\ -2x-4 \ , & -1 > x \geq -3 \\ 2 \ , & x < -3 \end{cases}$$

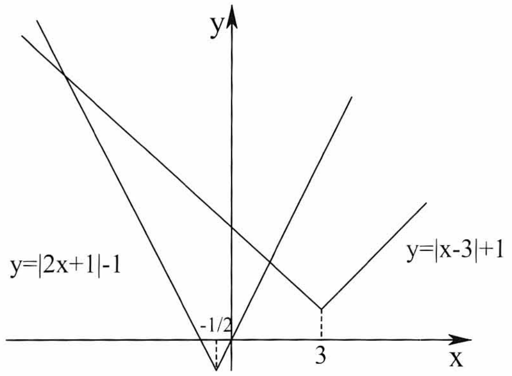
הנה הגרף של הפונקציה הזאת :




עבור שום ערך של x הגרף אינו יורד מתחת לקו y=-2. לכן, כפי שמצאנו בפתרון האנליטי, כל ערך של x מהווה פתרון לאי-שוויון.

ו. נדון ביחס בין $|2x + 1| - 1$ לבין $|x - 3| + 1$ .

נתחיל בגרפים של שתי הפונקציות :




אנו רואים ששתי הפונקציות נחתכות בשתי נקודות : אחת בתחום $-1/2 < x < 3$ , והשנייה בתחום $x < -1/2$ . בתחום שמימין לנקודת החיתוך הימנית (עבור x-ים גדולים) ובתחום שמשמאל לנקודת החיתוך השמאלית (עבור x-ים קטנים) מתקיים :

$$|2x + 1| - 1 > |x - 3| + 1$$

ובין שתי נקודות החיתוך מתקיים :

$$|2x + 1| - 1 < |x - 3| + 1$$

את נקודות החיתוך נמצא באמצעות הפתרון האנליטי.

נחלק את ציר המספרים לשלושה תחומים המתקבלים מפתיחת הערכים המוחלטים :

I. $x \geq 3$ II. $3 > x \geq -1/2$ III. $x < -1/2$

נמצא את הערכים של x שעבורם מתקיים שוויון. לשם כך נפתור שלוש מערכות המורכבות כל אחת ממשוואה ואי-שוויון:

I. $\begin{cases} 2x+1 = x-3+2 \\ x \geq 3 \end{cases}$   II. $\begin{cases} 2x+1 = 3-x+2 \\ 3 > x \geq -1/2 \end{cases}$   III. $\begin{cases} -2x-1 = 3-x+2 \\ x < -1/2 \end{cases}$

או

I. $\begin{cases} x = -2 \\ x \geq 3 \end{cases}$   II. $\begin{cases} x = 4/3 \\ 3 > x \geq -1/2 \end{cases}$   III. $\begin{cases} x = -6 \\ x < -1/2 \end{cases}$

הפתרון אינו מתיישב עם התנאי   פתרון תקף   פתרון תקף

התשובה המלאה:

כאשר $x = 4/3$ או $x = -6$ מתקיים שוויון;

עבור $x > 4/3$ או $x<-6$ מתקיים $|2x + 1| - 1 > |x - 3| + 1$;

עבור $-6 < x < 4/3$ מתקיים $|2x + 1| - 1 < |x - 3| + 1$.

לשם בדיקה יש לבדוק את היחס בנקודות החיתוך. מומלץ גם לבחור נקודה בכל אחד משלושת התחומים $x > 4/3$, $-6 < x < 4/3$ ו- $x < -6$ ולבדוק שהאי-שוויונים שמצאנו אכן מתקיימים בנקודות האלו.

דיון כללי

בסעיף הזה עסקנו במשוואות

$$|ax + b| = |cx + d| + e\ , \quad a,c\neq 0 \qquad (2.12)$$

$$|ax + b| = -|cx + d| + e\ , \quad a,c\neq 0 \qquad (2.13)$$

ובאי-שוויונים מהסוגים

$$|ax + b| \leq |cx + d| + e\ , \quad a,c\neq 0 \qquad (2.14)$$

$$|ax + b| < |cx + d| + e\ , \quad a,c\neq 0 \qquad (2.15)$$

$$|ax + b| \leq -|cx + d| + e\ , \quad a,c\neq 0 \qquad (2.16)$$

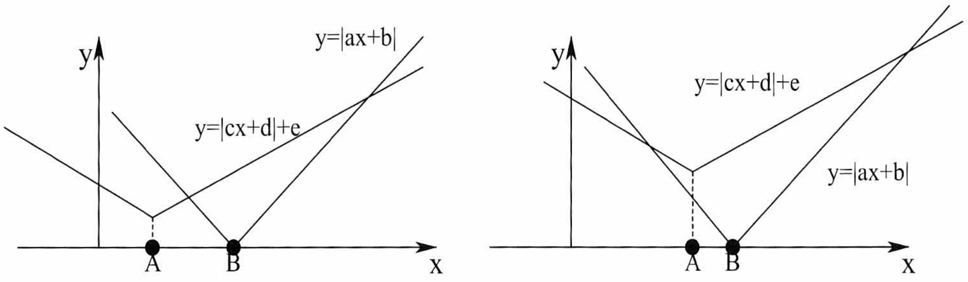
$$|ax + b| < -|cx + d| + e\ , \quad a,c\neq 0 \qquad (2.17)$$

הפעם תלוי המקרה הכללי בחמישה פרמטרים שונים, ולכן מיון כל המקרים הוא מסובך מכדי להיות יעיל. נראה איך בכל זאת אפשר להשיג מידע לא-טריוויאלי מדיון "לא ממצה".

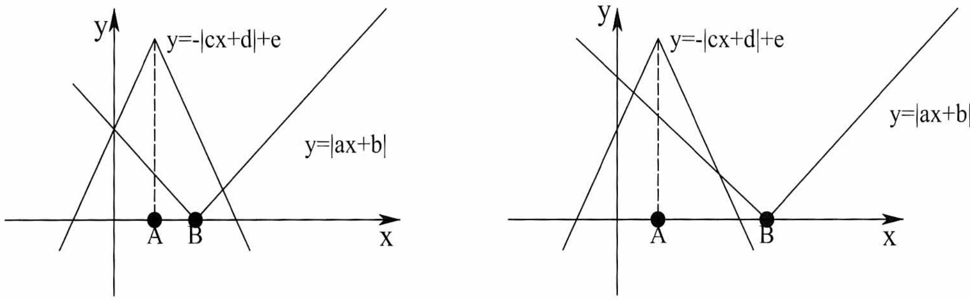
אפשר להגיד שהשאלה הכללית היא היחס בין שתי צורות "V". שתי הצורות עשויות להיות שונות זו מזו בזווית הפתיחה של ה"קרניים" שלהן ובמיקומן היחסי במערכת הצירים. בנוסף, אחת מה- "V"-ם עשויה להיות הפוכה.

נראה מהן האפשרויות השונות של היחס בין הפונקציות $y = |ax + b|$ ו- $y = |cx + d| + e$.

1. שתי הפונקציות חותכות זו את זו בשתי נקודות:

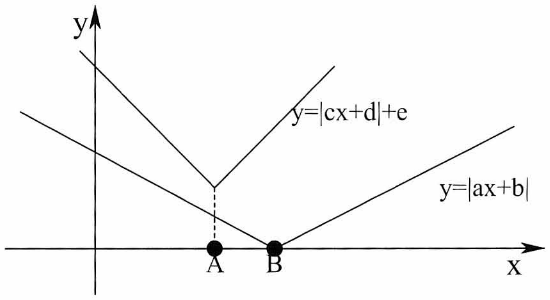



איור 4א: באגף ימין מופיע $|cx + d| + e$

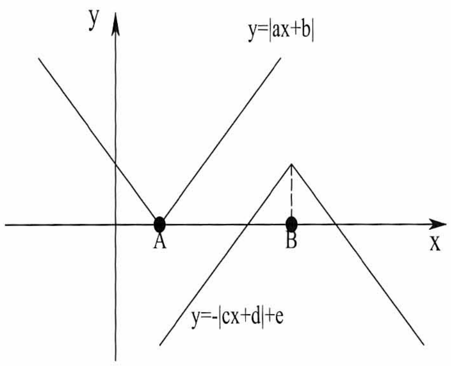



איור 4ב: באגף ימין מופיע $-|cx + d| + e$

2. אין נקודות חיתוך בין שתי הפונקציות:

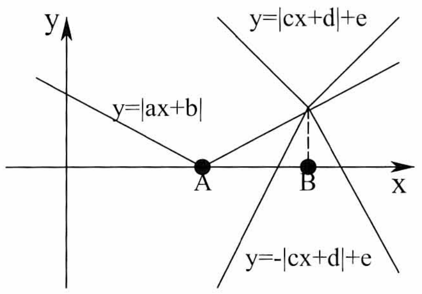



איור 4ג: באגף ימין מופיע $|cx + d| + e$

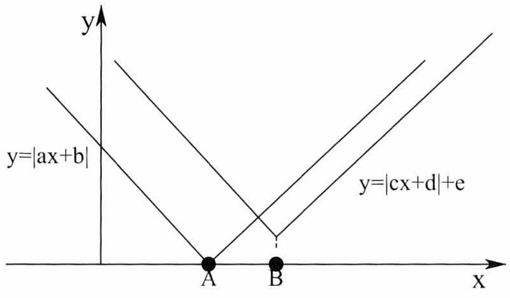



איור 4ד: באגף ימין מופיע $-|cx + d| + e$

3. שתי הפונקציות חותכות זו את זו בנקודה אחת:




איור 4ה: שתי פונקציות נושקות

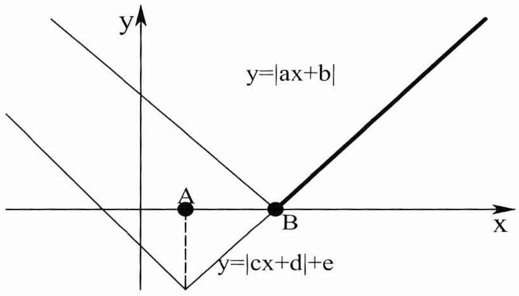



איור 4ו: שתי פונקציות חותכות: |c| = |a| ו- a/b≠c/d

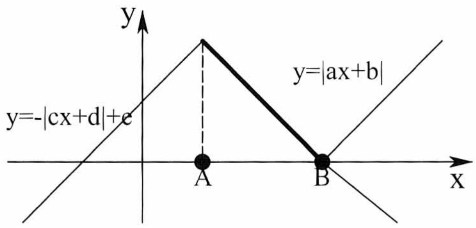
בגלל הסימטריות של פונקציה ליניארית בערך מוחלט ביחס לציר האנכי העובר דרך נקודת המינימום שלה (ראו הערה בהקדמה לפרק הזה אחרי איור 1א), המקרה המתואר באיור 4ו' של נקודת חיתוך יחידה בין שתי הפונקציות $y=|ax + b|$ ו- $y = |cx + d| + e$ מתקיים רק כאשר $|a| = |c|$ ואז ה"קרניים" של הפונקציות מקבילות. בכל מקרה אחר תתקבל נקודת חיתוך שנייה: או בין הקרניים השמאליות או בין הקרניים הימניות של שתי הפונקציות.

העובדה שרק במקרים מיוחדים למשוואה $|ax + b| = |cx + d| + e$ יש פתרון יחיד היא בהחלט עובדה לא-טריוויאלית. הבדיקה הגרפית אינה מוכיחה זאת (ייתכן ש"פספסנו" מקרה כלשהו), אך אם במהלך פתירת משוואה מסוג זה נמצא ששתי פונקציות (שבהן $|c| \neq |a|$ ) חותכות זו את זו בנקודה אחת בלבד - אנו אמורים להיות מופתעים.

4. נקודות החיתוך בין שתי הפונקציות מהוות קטע או קרן; המקרה הזה מתאפיין בכך שבאחד משלושת התחומים המתקבלים בתהליך הסרת הערכים המוחלטים, מופיעים בשני אגפי המשוואה ביטויים זהים.




איור 4ז: באגף ימין מופיע $|cx + d| + e$




איור 4ח: באגף ימין מופיע $-|cx + d| + e$

מאיורים 4א- 4ח רואים שיש שני מקרים בסיסיים:

1) שתי הפונקציות אינן חותכות זו את זו;

2) שתי הפונקציות חותכות זו את זו בשתי נקודות.

ויש שני סוגים של מקרים מיוחדים:

1) המקרים שיש בהם פתרון יחיד: או ששני הגרפים נושקים זה לזה ולא חותכים זה את זה, או שהגרפים של שתי הפונקציות מתקבלים זה מזה באמצעות הזזה על מערכת הצירים.

2) המקרה של אינסוף פתרונות - התלכדות של שני הגרפים בקטע או בקרן.

## 2.4 מנה של שני ביטויים ליניאריים הנתונים בערכים מוחלטים, ומספר

נפתור את האי-שוויון $\frac{|x-3|}{|2x+1|} > 2$ .

נדרוש $x \neq -1/2$. נכפיל את שני האגפים ב- $|2x+1|$, ונכניס את 2 לתוך הערך המוחלט באגף ימין.
נקבל את האי-שוויון

$$|x-3| > |4x+2| \quad , x \neq -1/2$$

קיבלנו אי-שוויון שנדון כבר בסעיף הקודם, בתוספת תנאי.
נעבור לפתרון.
א. פתיחת ערכים מוחלטים:

$$|4x+2| = \begin{cases} 4x+2 \;, & x \geq -1/2 \\ -(4x+2) \;, & x < -1/2 \end{cases} \qquad |x-3| = \begin{cases} x-3 \;, & x \geq 3 \\ -(x-3) \;, & x < 3 \end{cases}$$

ציר המספרים מתחלק אם כן לשלושה תחומים:

$$\text{III. } x < -1/2 \qquad \text{II. } 3 > x > -1/2 \qquad \text{I. } x \geq 3$$

בכל אחד מהתחומים האלה נקבל מערכת של שני אי-שוויונים (בדיוק כמו בדוגמאות שראינו בסעיף הקודם). ההבדל בין המקרה הזה לדוגמאות שראינו בסעיף הקודם הוא התנאי שנוסף כאן, המבטיח שהמכנה של הביטוי באגף השמאלי של האי-שוויון שלנו יהיה שונה מאפס. התנאי מתבטא בתיאור של התחום השני: $x \neq -1/2$.

ובכן פתרון האי-שוויון שלנו מורכב מפתרון שלושה זוגות של אי-שוויונים:

$$\text{III. } \begin{cases} -(x-3) > -(4x+2) \\ x < -1/2 \end{cases} \qquad \text{II. } \begin{cases} -(x-3) > 4x+2 \\ 3 > x > -1/2 \end{cases} \qquad \text{I. } \begin{cases} x-3 > 4x+2 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

או

$$\text{III. } \begin{cases} 3x > -5 \\ x < -1/2 \end{cases} \qquad \text{II. } \begin{cases} 1 > 5x \\ 3 > x \geq -1/2 \end{cases} \qquad \text{I. } \begin{cases} -5 > 3x \\ x \geq 3 \end{cases}$$

למערכת I אין פתרון, כי $-5/3<3$;

הפתרון של מערכת II הוא: $1/5>x>-1/2$;

הפתרון של מערכת III הוא: $-1/2>x>-5/3$ .

דרך אחרת לרשום את הפתרון היא לאחד את שני התחומים שקיבלנו, תוך הוצאת הערך $-1/2$:

$$-1/5>x>-5/3 \quad , \quad x \neq -1/2$$

דיון כללי

המתמטיקה פועלת בשיטה של צמצום בעיות חדשות לכדי בעיות קודמות. בדוגמה האחרונה ראינו שהבעיה הצטמצמה לבעיה מהסוג שנדון בסעיף הקודם. נראה שאת כל הבעיות מהסוג הנ"ל אפשר לצמצם לבעיות שטיפלנו בהן בסעיף הקודם.

קודם כול נדון בשאלה אם יש הבדל בין שני הביטויים $\left|\frac{A}{B}\right|$ ו- $\frac{|A|}{|B|}$ . לשם כך נבדוק את כל המקרים האפשריים.

1) $0<A$ , $0<B$; במקרה הזה שני הביטויים שווים ל- A/B.

2) $0<A$ , $0>B$; במקרה הזה מתקיים:

$$\left|\frac{A}{B}\right| = -\frac{A}{B} \quad ; \quad \frac{|A|}{|B|} = \frac{A}{-B} = -\frac{A}{B}$$

לכן,

$$\left|\frac{A}{B}\right| = \frac{|A|}{|B|}$$

3) $0>A$ , $0<B$; במקרה הזה מתקיים:

$$\left|\frac{A}{B}\right| = -\frac{A}{B} \quad ; \quad \frac{|A|}{|B|} = \frac{-A}{B} = -\frac{A}{B}$$

לכן,

$$\left|\frac{A}{B}\right| = \frac{|A|}{|B|}$$

4) $0>A$ , $0>B$; במקרה הזה מתקיים:

$$\left|\frac{A}{B}\right| = \frac{A}{B} \quad ; \quad \frac{|A|}{|B|} = \frac{-A}{-B} = \frac{A}{B}$$

ולכן גם כאן מתקיים:

$$\left|\frac{A}{B}\right| = \frac{|A|}{|B|}$$

ובכן בכל המקרים מתקיים שוויון. לכן כששבר נתון בערך מוחלט תמיד אפשר להפריד בין המונה למכנה ולעבוד עם הצורה $\frac{|A|}{|B|}$.

נדון באי-שוויון מהצורה

$$\frac{|ax + b|}{|cx + d|} > k\ , \quad a\neq 0, \quad c\neq 0 \qquad (2.18)$$

נבחן את המקרים השונים בהתאם לערך של k.

אם $k<0$, האי-שוויון מתקיים עבור כל ערך של x שעבורו הפונקציה שבאגף השמאלי מוגדרת (כלומר המכנה שונה מ-0); במילים אחרות, כל $x \neq -d/c$ מהווה פתרון לאי-שוויון.

אם $k=0$, האי-שוויון מתקיים עבור כל $x \neq -d/c, -b/a$. כאשר $x = -b/a$ אגף שמאל מתאפס, אלא אם כן $-b/a = -c/d$ .

נניח ש- $k>0$. אפשר להכפיל את שני האגפים במכנה, כאשר יש להבטיח ש- $cx+d \neq 0$, כלומר $x \neq -d/c$ , ולקבל

$$|ax + b| > k|cx + d| \quad , \quad x \neq -d/c$$

אם נכניס את k לתוך הערך המוחלט, נקבל אי-שוויון מהצורה

$$|ax + b| > |c'x + d'| \quad , x \neq -d'/c',$$

כאשר $c' = kc$ ו- $d' = kd$ .

אי-שוויון כזה הוא מקרה פרטי של אי-שוויון (2.14) כאשר $e=0$.

באופן דומה, אי-שוויון מהסוג

$$|ax + b| \geq k|cx + d| \quad , \quad x \neq -d/c$$

הוא מקרה פרטי של אי-שוויון (2.13).

אפשר לומר שצמצמנו את בעיה (2.18) לכדי בעיה שכבר פתרנו. ההבדל היחיד הוא הצורך להבטיח ש- $x \neq -d/c$ (או $x \neq -d'/c'$) .

## 3. משוואות ואי-שוויונים עם ביטוי ריבועי בערך מוחלט ומספר

**דוגמאות**

א. נפתור את האי-שוויון $|x^2 - 5x + 6| \leq 2$ .

נפתח את הערך המוחלט (כפי שעשינו בסעיף 2.1) ונקבל:

$$-2 \leq x^2 - 5x + 6 \leq 2$$

כדי לפתור את האי-שוויון שלנו עלינו למצוא את ערכי הנעלם המספקים את שני האי-שוויונים, כלומר לפתור מערכת של שני אי-שוויונים ריבועיים רגילים:

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 \leq 2 \\ x^2 - 5x + 6 \geq -2 \end{cases}$$

או

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 4 \leq 0 \\ x^2 - 5x + 8 \geq 0 \end{cases}$$

האי-שוויון השני מתקיים עבור כל x, כי הדיסקרמיננטה של הביטוי הריבועי שלילית;

האי-שוויון הראשון מתקיים עבור $1 \leq x \leq 4$ ;

אם כך, פתרון האי-שוויון שלנו הוא

$$\{x: 1 \leq x \leq 4\}$$

ב. נפתור את האי-שוויון $|x^2 + 3x + 4| > 1$ .

נפתח את הערך המוחלט ונקבל שהאי-שוויון מתקיים בשני מקרים:

I. כאשר $x^2 + 3x + 4 > 1$ או II. כאשר $x^2 + 3x + 4 < -1$

פתרון האי-שוויון שלנו הוא איחוד הפתרונות של שני האי-שוויונים.[7]

בכל אחד מהאי-שוויונים נעביר את אגף ימין לאגף שמאל, ונקבל את שני האי-שוויונים הבאים :

$$\text{I. } x^2 + 3x + 3 > 0 \qquad \text{II. } x^2 + 3x + 5 < 0$$

בשני המקרים הדיסקרמננטה של הביטויים באגף שמאל שלילית, כלומר שני הביטויים גדולים מ-0 עבור כל ערך של $x$. אי-שוויון I מתקיים עבור כל ערך של $x$. אין ערכי $x$ שעבורם מתקיים אי-שוויון II. לכן פתרון האי-שוויון שלנו זהה לפתרון של אי-שוויון I.

לסיכום, פתרון האי- שויון הוא :

$$\{ x: -\infty < x < \infty \}$$

ג. נפתור את האי-שוויון $|x^2 + 4x - 2| > 3$ .

נפתח את הערך המוחלט ונקבל שהאי-שוויון מתקיים בשני מקרים :

I. כאשר $x^2 + 4x - 2 > 3$ או II. כאשר $x^2 + 4x - 2 < -3$

גם הפעם פתרון האי-שוויון שלנו הוא איחוד הפתרונות של שני האי-שוויונים.

בכל אחד מהאי-שוויונים נעביר את אגף ימין לאגף שמאל, ונקבל את שני האי-שוויונים הבאים :

$$\text{I. } x^2 + 4x - 5 > 0 \qquad \text{II. } x^2 + 4x + 1 < 0$$

אי-שוויון I מתקיים בשני תחומים : $x > 1$ ו- $x < -5$ .

אי-שוויון II מתקיים בתחום : $-2-\sqrt{3} < x < -2+\sqrt{3}$

לסיכום : פתרון האי-שוויון מורכב משתי הקרניים הפתוחות $(1, \infty)$ ו- $(-\infty, -5)$ ומהקטע הפתוח $(-2-\sqrt{3}, -2+\sqrt{3})$ , או בשפה של תורת הקבוצות :

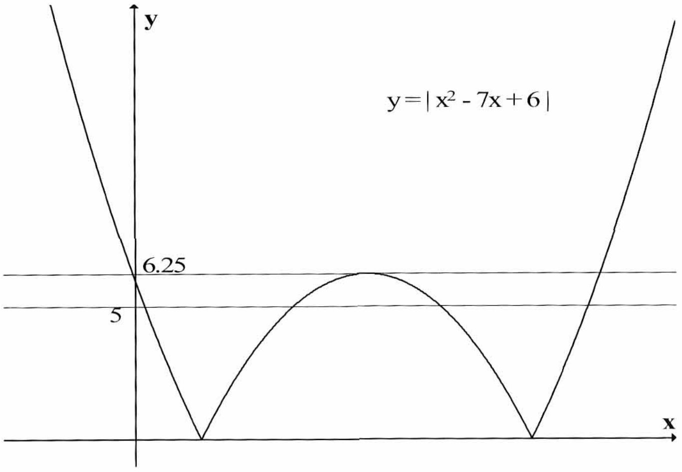
$$\{x : x > 1 \text{ או } x < -5 \text{ או } (-2-\sqrt{3}) < x < (-2+\sqrt{3})\}.$$

ד. מהו היחס בין $|x^2 - 7x + 6|$ למספר 5?

ניעזר בפתרון גרפי.

מחקירת הפונקציה $y = x^2 - 7x + 6$ מקבלים שהשורשים שלה הם $x_1=1$ ו- $x_2=6$, ונקודת המינימום $x=3.5$ . ערך הפונקציה בנקודת המינימום הוא $y(3.5)=-6.25$ . מכאן שערך הפונקציה $y = |x^2 - 7x + 6|$ בנקי' 3.5 הוא 6.25.

[7] שימו לב : זאת איננה מערכת של שני אי-שוויונים : במערכת צריך אותו ערך של הנעלם לעמוד בכמה דרישות. ערך ששייך לפתרון של מערכת משוואות או אי-שוויונים הוא ערך פותר את **כל** המשוואות ו\או האי-שוויונים של המערכת. כאן, לעומת זאת, ערך שפותר לפחות אחד מהאי-שוויונים מתאים. (בלשון תורת הקבוצות, פתרון של מערכת הוא **חיתוך** הפתרונות של כל המשוואות ו\או האי-שוויונים המרכיבים את המערכת, ואילו כאן מדובר **באיחוד** הפתרונות.)




אנו רואים ששוויון מתקיים ב- 4 נקודות.

הביטוי $|x^2 - 7x + 6|$ גדול מ-5 בשתי קרניים ובקטע ה"אמצעי".

הביטוי $|x^2 - 7x + 6|$ קטן מ-5 בשני קטעים הנמצאים בין הקרניים לקטע האמצעי.

נעבור לפתרון האנליטי.

נפתור את המשוואה $|x^2 - 7x + 6| = 5$ . פתרון המשוואה הזאת מסתכם בפתרון שתי משוואות ריבועיות:

$x^2 - 7x + 6 = -5$ ו- $x^2 - 7x + 6 = 5$

פתרונות המשוואה $x^2 - 7x + 6 = 5$ הם $x = \frac{7 \pm \sqrt{45}}{2}$;

פתרונות המשוואה $x^2 - 7x + 6 = -5$ הם $x = \frac{7 \pm \sqrt{5}}{2}$.

ובכן, למשוואה שלנו יש ארבע פתרונות.

הפתרונות האלה הם נקודות הקצה של הקטעים והקרניים שקיבלנו בפתרון הגרפי.

לסיכום:

1) השוויון $|x^2 - 7x + 6| = 5$ מתקיים כאשר $x = \frac{7 \pm \sqrt{5}}{2}$ או $x = \frac{7 \pm \sqrt{45}}{2}$.

2) האי-שוויון $|x^2 - 7x + 6| > 5$ מתקיים בשלושה תחומים (שתי קרניים וקטע):

$x < \frac{7 - \sqrt{45}}{2}$ ; $\frac{7 - \sqrt{5}}{2} < x < \frac{7 + \sqrt{5}}{2}$ ; $x > \frac{7 + \sqrt{45}}{2}$

3) האי-שוויון $|x^2 - 7x + 6| < 5$ מתקיים בשני קטעים:

$\frac{7 + \sqrt{5}}{2} < x < \frac{7 + \sqrt{45}}{2}$ ; $\frac{7 - \sqrt{45}}{2} < x < \frac{7 - \sqrt{5}}{2}$

ה. מהו היחס בין $|x^2 - 7x + 6|$ למספר 7?

נעזר בפתרון הגרפי מהדוגמה הקודמת. אנו רואים שהגרף נמצא מתחת לקו $y = 7$ בקטע האמצעי, ומעל לקו הזה בשתי קרניים.

נעבור לפתרון האנליטי:

נפתור את המשוואה $|x^2 - 7x + 6| = 7$ . הפתרון מסתכם בפתרון שתי משוואות ריבועיות:

$$x^2 - 7x + 6 = -7 \quad \text{ו-} \quad x^2 - 7x + 6 = 7$$

פתרונות המשוואה $x^2 - 7x + 6 = 7$ הם $x = \frac{7 \pm \sqrt{53}}{2}$ ;

למשוואה $x^2 - 7x + 6 = -5$ אין פתרונות.

ובכן, למשוואה שלנו שני פתרונות. הפתרונות האלה הם נקודות הקצה של הקטע האמצעי והקרניים שקיבלנו בפתרון הגרפי.

לסיכום:

1) השוויון $|x^2 - 7x + 6| = 7$ מתקיים כאשר $x = \frac{7 \pm \sqrt{53}}{2}$ .

2) האי-שוויון $|x^2 - 7x + 6| > 7$ מתקיים בשתי קרניים:

$$x < \frac{7 - \sqrt{53}}{2} \quad ; \quad x > \frac{7 + \sqrt{53}}{2}$$

3) האי-שוויון $|x^2 - 7x + 6| < 7$ מתקיים בקטע:

$$\frac{7 - \sqrt{53}}{2} < x < \frac{7 + \sqrt{53}}{2}$$

ו. מהו היחס בין $|x^2 + 2x + 6|$ למספר 3?

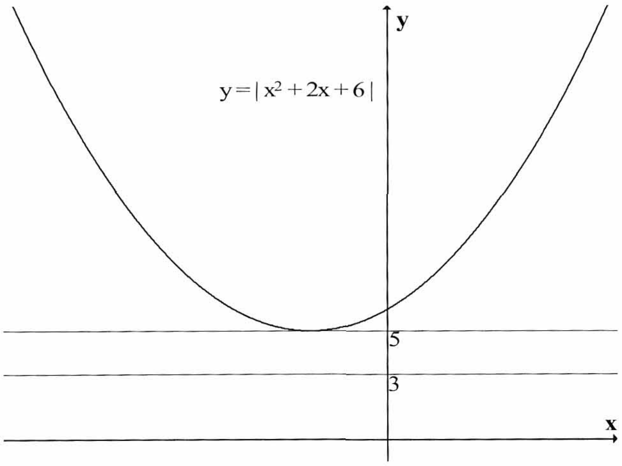
נפתור את המשוואה $|x^2 + 2x + 6| = 3$ . פתרון המשוואה מסתכם בפתרון שתי משוואות ריבועיות:

$$x^2 + 2x + 6 = -3 \quad \text{ו-} \quad x^2 + 2x + 6 = 3$$

לאף אחת משתי המשוואות אין פתרון, כלומר עבור כל ערך של x מתקיים

$$|x^2 + 2x + 6| > 3$$

נאשש את התוצאה הזאת באמצעות פתרון גרפי:




אנו רואים שגרף הפונקציה $y = |x^2 + 2x + 6|$ נמצא מעל הקו $y = 3$ .

דיון כללי

עסקנו במשוואה

$$|ax^2 + bx + c| = d \quad , \quad a\neq 0 \qquad (3.1)$$

ואי-שוויונים

$$|ax^2 + bx + c| < d \quad , \quad a\neq 0 \qquad (3.2)$$

$$|ax^2 + bx + c| \leq d \quad , \quad a\neq 0 \qquad (3.3)$$

$$|ax^2 + bx + c| > d \quad , \quad a\neq 0 \qquad (3.4)$$

$$|ax^2 + bx + c| \geq d \quad , \quad a\neq 0 \qquad (3.5)$$

בהתאם לערך הדיסקרימיננטה של הביטוי הריבועי מתקיים אחד מהמקרים המתוארים באיורים 5 א-ג.

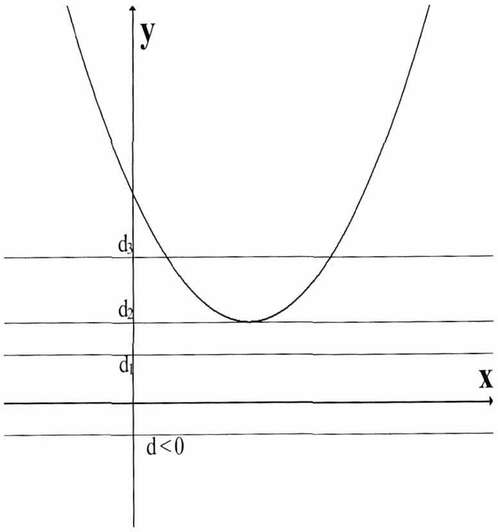
1) המקרה $\Delta<0$ (איור 5א); מספר הפתרונות האפשריים למשוואה (3.1) נע בין 0 ל-2 בהתאם לערך של d.

2) המקרה $\Delta=0$(איור 5ב); כאן אפשר לקבוע את מספר הפתרונות של המשוואה בהתאם לסימן של d.

בשני המקרים האלה הפתרונות של אי-שוויונים (3.2) ו- (3.3) , אם יש כאלה, מהווים קטע (קטע פתוח במקרה של (3.2) וקטע סגור במקרה של (3.3)[8] );הפתרונות של כל אחד מהאי-שוויונים (3.4) ו- (3.5) מהווים זוג קרניים (זוג קרניים פתוחות במקרה של (3.4) וזוג קרניים סגורות במקרה של (3.5) ).

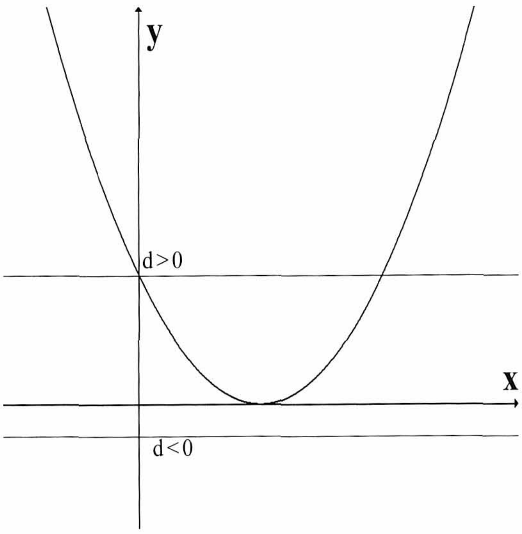
---

[8] קטע סגור עשוי "להתנוון" לנקודה בודדה, ראה מקרה $d=d_2$ באיור 5א או $d=0$ באיור 5ב.




איור 5א

$y=|ax^2+bx+c|\ ,\ \Delta<0$




איור 5ב

$y=|ax^2+bx+c|\ ,\ \Delta=0$

3) המקרה $\Delta>0$ (איור 5ג).

אם $d<0$, אין פתרון למשוואה (3.1);

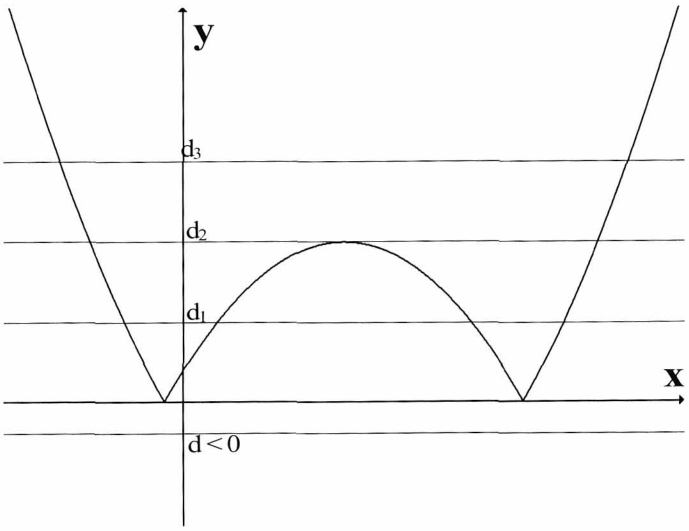
אם $d\geq 0$, מספר הפתרונות של המשוואה נע בין 2 ל-4.

המקרה הזה מתפצל למספר אפשרויות:

אם $d=0$ או $d>\left|c-\frac{b^2}{4a}\right|$ למשוואה יש שני פתרונות.

קיים רק ערך אחד של d, $d=\left|c-\frac{b^2}{4a}\right|$, שעבורו יש למשוואה שלושה פתרונות;

אם $0<d<\left|c-\frac{b^2}{4a}\right|$ יש למשוואה ארבעה פתרונות.




איור 5 ג.

$y=|ax^2+bx+c|\ ,\ \Delta>0$

נדגיש שהניתוח הנ"ל (וגם דיונים דומים על פתרונות כלליים שהופיעו בסוף הסעיפים הקודמים) נועדו להדגים דרך חשיבה על בעיות מתמטיות. אין כאן כוונה להציג עובדות שיש לזכור אותן!

## *4. על שימוש בגרפים לפתרון משוואות ואי-שוויונים

בכל משוואה או אי-שוויון מסוימים אפשר לראות בעיה בפני עצמה. אפשר גם למיין משוואות או אי-שוויונים לפי סוגים ולדון בפתרון כללי ל**סוג מסוים** של בעיה. במקרה כזה, במקום מספרים מופיעים פרמטרים.

כאשר מציגים פתרון למשוואה ריבועית, למשל, רושמים נוסחה כללית המתייחסת למשוואה $ax^2+bx+c=0$. הגישה הכללית נותנת מתכון לפתרון של בעיות רבות בבת-אחת.

בשתי הגישות יכולים גרפים להיות לעזר.

דרך נוחה להתייחס למשוואות ואי-שוויונים שונים היא לראות בשני אגפים של המשוואה או האי-שוויון שתי פונקציות, ולדון ביחס ביניהן. (במקרים מסוימים נוח להעביר חלק מהגורמים בין האגפים של המשוואה או האי-שוויון, ורק אז להתייחס לשתי הפונקציות.)

יתרונה של הדרך הגרפית הוא בהצגה הוויזואלית הברורה של היחס בין שתי פונקציות; החיסרון הוא בהעדר הדיוק: את הנקודות ה"חשובות" (כגון נקודות חיתוך בין שתי פונקציות) אפשר לסמן במדויק רק כאשר מדובר ב"ערכים פשוטים" (למשל מספרים שלמים).

פתרון מקורב של משוואה או אי-שוויון ספציפי באמצעות גרף יכול לשמש כלי בקרה לפתרון האנליטי. למשל, אם בגרף מופיעים שני ישרים שאינם מקבילים, ובפתרון האנליטי מצאנו שאין למשוואה פתרון - זה סימן שעלינו לחפש טעות.

פתרון גרפי יכול גם לפשט פתרון אנליטי כאשר הוא מנחה את חיפוש הנקודות החשובות (ראו דוגמה ד' בסעיף 3).

בגישה הכללית גרפים מאפשרים הערכה איכותית: הם משקפים מה עשוי להיות היחס ההדדי בין שתי פונקציות מסוגים נתונים. המידע הזה מאפשר למיין את המקרים השונים של פתרון משוואות ואי-שוויונים.

למשל, אנו יודעים ששני ישרים שאינם מקבילים נחתכים בנקודה אחת בלבד, וישרים מקבילים אינם נחתכים כלל. לכן למשוואה שבשני האגפים שלה מופיעים ביטויים ליניאריים לא יכול להיות יותר מפתרון אחד.

**נדגיש: השיטה הגרפית אינה מהווה תחליף לפתרון האנליטי!**

הדיון ביעילות השימוש בגרפים איכותיים לניתוח בעיות כלליות מדגים התלבטות שכיחה מאוד בגישה לבעיות מתמטיות, כאשר השיקול של כלליות עומד מול השיקול של סיבוכיות.

כאשר מספר הפרמטרים המתארים בעיה כללית הוא קטן, נוח לדון במקרה הכללי ולקבל נוסחה המתאימה לכל המקרים של הבעיה. כאשר מספר הפרמטרים בבעיה אלגברית הולך וגדל, פתרון הבעיה הכללית נהיה יותר ויותר מסובך וקשה לשימוש. במקרים כאלה עדיף לפתור כל בעיה מסוימת בפני עצמה מאשר לטפל במקרה הכללי.

אי-אפשר לקבוע באופן מוחלט מתי עדיפה גישה אחת ומתי עדיפה השנייה. אם בבעיה אלגברית יש פרמטר אחד או שניים (כמו במשוואה ליניארית: $ax+b=0$) בדרך-כלל הפתרון הכללי עדיף. מקרה עם שלושה פרמטרים תלוי בחשיבות הבעיה ובפשטות הפתרון. כך את המשוואה הריבועית, למשל, בגלל חשיבותה והפשטות היחסית של נוסחת השורשים, פותרים באופן כללי.

כאשר מספר הפרמטרים של הבעיה הכללית הוא גדול משלושה, הולכת הבעיה ומסתבכת בגלל מספר המקרים שיש לדון בהם. אם אין לבעיה חשיבות מיוחדת, לא נהוג לפתור אותה באופן הכללי.

דרך ביניים בין טיפול במקרה הכללי לפתרון בעיות ספציפיות היא פתרון גרפי ברמה איכותית. פתרון כזה מאפשר התרשמות מהפתרונות של המקרים השונים של משוואה או אי-שוויון מסוג מסוים. הדגמנו את השיטה הזאת בסעיפים 2.2 ו-3.

בסעיף 2.3 עסקנו בסוג של בעיה שהפתרון הכללי שלה תלוי ב-5 פרמטרים. מספר המקרים השונים כאן גדול למדי, לכן יעילות הדיון בכל המקרים באופן כללי מוטלת בספק. עדיף לפתור כל משוואה או אי-שוויון ספציפי לגופו תוך שימוש בשיטות האלגבריות המקובלות. הפתרון הגרפי בא בהקשר הזה לעזור בבקרה על הפתרון האנליטי של בעיה מסוימת. בכל זאת, כפי שראינו בסעיף 2.3, אפשר להסיק מסקנות מסוימות מניתוח כללי "בלתי ממצה".

## 5. תרגילים

1. פתרו את המשוואות והאי-שוויונים הבאים:

א. $|2x + 3| = 5$

ב. $3 - |x - 8| = 0$

ג. $3|x + 4| - 5 = 6$

ד. $|5x - 2| < 5$

ה. $|4x + 1| \geq 3$

ו. $1 - |x + 12| \geq 0$

ז. $3|1 - 3x| + 5 < 0$

ח. $4 + |2 - 9x| > 0$

ט. $\frac{3}{|x+1|} \leq 5$

י. $\frac{1}{|5-2x|} > 2$

יא. $a|x + 2| \leq 4$

יב. $|ax + b| \geq 3$, $a \neq 0$

2. עבור ערכים שונים של x קבעו מהו היחס

א. בין $2|5x + 2|$ ל-7;

ב. בין $|3 - 2x|$ ל-4;

ג. בין $|1 - 7x|$ ל-1;

ד. בין $|6x + 1|$ ל-3;

ה. בין $|0.5x - 3|$ ל-2;

ל. בין $|3 - 4x|$ ל-1/3;

ז. בין $|2x + b|$ ל-3;

ח. בין $|1 - 2x|$ לפרמטר c;

ט. בין $|ax - 1|$ כאשר $a \neq 0$ ל-3;

י. בין $|ax|$ כאשר $a \neq 0$ לפרמטר c.

*3. קבעו מהו היחס בין $|ax+b|$ (כאשר $a \neq 0$) לבין c עבור ערכים שונים של x, בהינתן הפרמטרים a, b ו-c (ראו את הבעיה שנדונה בסוף סעיף 2.1).

4. פתרו את המשוואות והאי-שוויונים הבאים:

א. $|x| + 3 = 2x$

ב. $|2x - 1| = 3 - 4x$

ג. $2 - 3x = 3 - |3x + 1|$

ד. $|5x - 2| < 2x - 5$

ה. $|4 - x| \geq 3x - 1$

ו. $|3 - 7x| + 5 > 2x$

ז. $2|5x + 2| + 5x < 11$

ח. $3x - |1 - 2x| \leq 5$

ט. $|x| > 2x - b$

י. $|x + 1| \leq b - 3x$

5. עבור ערכים שונים של x קבעו מהו היחס (גדול/קטן/שווה):

א. בין $|x-3|$ ל- $5-2x$ ;

ב. בין $|1-2x|$ ל- $x+2$ ;

ג. בין $|3x-4|$ ל- $4-3x$ ;

ד. בין $4-|x+2|$ ל- $3x$ .

*6. עבור כל אחד מהמקרים המתוארים באיורים 3א-3ח (ראו עמוד 44) תנו דוגמה לתרגיל מהסוג של תרגיל 5 כך שהפתרון יתאים לאיור.

7. פתרו את המשוואות והאי-שוויונים הבאים:

א. $|2x + 3| = |3x + 2|$

ב. $|x - 2| = |x| - 2$

ג. $|3x + 4| = |2x - 1| + 1$

ד. $|5x - 3| - 1 < |x + 5| + 1$

ה. $2 - |4x + 1| \geq 4 - 3|x - 1|$

ו. $|3x - 1| + |x + 2| > 5$

ז. $2|5x + 2| < |2 - 10x| + 3$

ח. $|3x + 1| > |4 - 3x| + 5$

ט. $|2x + 3| \leq |3x + 4| - 5$

י. $|x - 4| - |2x + 1| > -3$

יא. $|5x - 23| + |9 - 17x| + 4 \geq 0$

8. עבור ערכים שונים של x, קבעו מהו היחס (גדול/קטן/שווה)

א. בין $|2x - 3| + 2$ ל- $|1 - 2x|$ ;

ב. בין $|4x| - 3$ ל- $2|2x + 1|$ ;

ג. בין $|3x - 1| + 1$ ל- $|5x - 1|$ ;

ד. בין $|6 - 5x| + 4$ ל- $|2x - 5|$.

*9. עבור כל אחד מהמקרים המתוארים באיורים 4א-4ח תנו דוגמה לתרגיל מהסוג של תרגיל 8 כך שהפתרון יתאים לאיור.

10. פתרו את האי-שוויונים הבאים:

א. $\frac{|2x-9|}{|x+1|} \le 2$

ב. $\frac{|4x-5|}{|5-4x|} \ge 1$

ג. $\left|\frac{2x+3}{3x+2}\right| < 6$

ד. $\left|\frac{2-3x}{x+2}\right| \le 4$

ה. $\left|\frac{7x+1}{x-2}\right| \le 3$

ו. $\frac{4-|x+5|}{|4-5x|} < -1$

ז. $\frac{2+|4x-1|}{|3-5x|} \ge 4$

ח. $\frac{1+|5-2x|}{|x+3|} < 2$

*11. פתרו את האי-שוויונים הבאים:

א. $\frac{|3x+2|}{5-|1-2x|} > 3$

ב. $\frac{2}{|2x-3|-|x+1|} \le 0$

12. פתרו את האי-שוויונים הבאים :

א. $|x^2-4| > 0$

ב. $|25 - 36x^2| \leq 0$

ג. $|x^2 + 5x| > 0$

ד. $|x^2 - 2| > 2$

ה. $|x^2 - 10x| < 24$

ו. $|x^2 + 2x - 12| \leq 12$

ז. $|x^2 - 6x + 4| \geq 4$

ח. $|x^2 - 10x + 20| > 4$.

ט. $|(x - 3)(2x + 1)| < 5$

י. $|(3x - 1)(5 - 2x)| \geq 3$

יא. $\frac{5}{|(x-3)(2x+1)|} > 1$

יב. $\frac{3}{|(3x-1)(5-2x)|} \leq 1$

13. עבור ערכים שונים של x קבעו מהו היחס (גדול\קטן\שווה) :

א. בין $|7x^2 - 3x + 3|$ ל-4;

ב. בין $|x^2 + 4x - 2|$ ל-5;

ג. בין $|3x^2 - x + 4|$ ל-1;

ד. בין $|6 - 5x - x^2|$ ל-7.

# 6. תשובות

1. א. $x=1$ או $x=-4$; ב. $x=11$ או $x=5$; ג. $x=-7/3$ או $x=-17/3$;

ד. $-3/5<x<8/5$; ה. $x\geq 1/2$ או $x<-1$; ו. $-13\leq x\leq -11$; ז. אין פתרון;

ח. מתקיים עבור כל ערך של x; ט. $x\geq -2/5$ או $x\leq -8/5$; י. $9/4<x<11/4$;

יא. אם $a\leq 0$, האי-שוויון מתקיים עבור כל x ממשי;

אם $a>0$, האי-שוויון מתקיים כאשר $-2-\frac{4}{a} \leq x \leq -2+\frac{4}{a}$.

יב. אם $a\leq 0$, $x \geq \frac{-3-b}{a}$ או $x < \frac{3-b}{a}$;

אם $0<a$, $x \geq \frac{-b+3}{a}$ או $x < \frac{-3-b}{a}$.

2. א. כאשר $x>3/10$ או $x<-11/10$, מתקיים $2|5x + 2|>7$;

כאשר $x=3/10$ או $x=-11/10$, מתקיים $2|5x + 2| = 7$;

כאשר $-11/10<x<3/10$, מתקיים $2|5x+2|<7$.

ב. כאשר $x>7/2$ או $x<-1/2$, מתקיים $|3 - 2x|>4$;

כאשר $x=7/2$ או $x=-1/2$, מתקיים $|3 - 2x|=4$;

כאשר $-1/2<x<7/2$, מתקיים $|3 - 2x|<4$.

ג. כאשר $x>2/7$ או $x<0$, מתקיים $|1 - 7x|>1$;

כאשר $x=2/7$ או $x=0$, מתקיים $|1 - 7x|=1$;

כאשר $0<x<2/7$, מתקיים $|1 - 7x|<1$.

ד. כאשר $x>1/3$ או $x<-2/3$, מתקיים $|6x + 1|>3$;

כאשר $x=1/3$ וכאשר $x=-2/3$, מתקיים $|6x + 1|=3$;

כאשר $-2/3<x<1/3$, מתקיים $|6x+1|<3$.

ה. כאשר $x>10$ וכאשר $x<2$, מתקיים $|0.5x-3|>2$;

כאשר $x=10$ או $x=2$, מתקיים $|0.5x-3|=2$;

כאשר $2<x<10$, מתקיים $|0.5x-3|<2$.

ו. כאשר $x>5/6$ או $x<2/3$, מתקיים $|3-4x|>1/3$;

כאשר $x=5/6$ או $x=2/3$, מתקיים $|3-4x|=1/3$;

כאשר $2/3<x<5/6$, מתקיים $|3-4x|<1/3$.

ז. כאשר $x > \frac{3-b}{2}$ או $x < \frac{-(3+b)}{2}$ , מתקיים $|2x+b|>3$ ;

כאשר $x = \frac{3-b}{2}$ או $x = \frac{-(3+b)}{2}$, מתקיים $|2x+b|=3$ ;

כאשר $\frac{-(3+b)}{2} < x < \frac{3-b}{2}$ , מתקיים $|2x+b|<3$.

ח. אם $c<0$, עבור כל ערך של x מתקיים $|1-2x|>c$ ;

אם $c=0$, עבור כל $x\neq 1/2$ מתקיים $|1-2x|>c$, ועבור $x=1/2$ מתקיים שוויון ;

אם $c>0$, אז כאשר $x > \frac{1+c}{2}$ או $x < \frac{1-c}{2}$ מתקיים $|1-2x|>c$ ;

כאשר $x = \frac{1+c}{2}$ או $x = \frac{1-c}{2}$ , מתקיים $|1-2x|=c$ ;

כאשר $\frac{1-c}{2} < x < \frac{1+c}{2}$ מתקיים $|1-2x|<c$.

ט. כאשר $x=-2/a$ או $x=4/a$, $|ax-1|=3$ ;

כאשר x בין שני הערכים האלה, מתקיים $|ax-1|<3$ . (לא ניתן לרשום את התשובה באופן פשוט, כי הסדר בין הערכים $-2/a$ ו- $4/a$ , כלומר מי גדול ממי, תלוי בסימן של a.) בשתי הקרניים הפתוחות היוצאות מהנקודות $x=-2/a$ ו- $x=4/a$ מתקיים $|ax-1|>3$.

י. אם $c<0$, עבור כל ערך של x מתקיים $|ax|>c$ ;

אם $c=0$, עבור $x=0$ מתקיים שוויון, ועבור $x\neq 0$ מתקיים $|ax|>c$ ;

אם $c>0$, כאשר $x=c/a$ או $x=-c/a$ מתקיים $|ax|=c$ ;

כאשר x בין שני הערכים האלה מתקיים $|ax|<c$ . (לא ניתן לרשום את התשובה באופן פשוט כי הסדר בין הערכים $c/a$ ו- $-c/a$ תלוי בסימן של a.) בשתי הקרניים פתוחות היוצאות מהנקודות $x=c/a$ ו- $x=-c/a$ מתקיים $|ax|>c$.

3. כאשר $x = \frac{-b+c}{a}$ או $x = \frac{-b-c}{a}$ , מתקיים $|ax+b|=c$ ;

בין הערכים האלה מתקיים $|ax+b|<c$ (הסדר בין שני הערכים שבהם מתקיים שוויון תלוי בסימן של a) ; בשתי הקרניים היוצאות מן הנקודות $x = \frac{-b+c}{a}$ ו- $x = \frac{-b-c}{a}$ מתקיים $|ax+b|>c$ .

4. א. $x=3$ ; ב. $x=2/3$ ; ג. $x\geq -1/3$ ; ד. אין פתרון ;

ה. $5/4\geq x$ ; ו. מתקיים עבור כל ערך של x ; ז. $-3<x<-7/15$ ; ח. $x\leq 4$ ;

ט. אם $b>0$, מתקיים עבור $x<b$ ; אם $b\leq 0$, מתקיים עבור $x<b/3$.

י. אם $b>-3$, מתקיים עבור $x \leq \frac{b-1}{4}$ ; אם $b\leq -3$, מתקיים עבור $x \leq \frac{b+1}{2}$ .

5. א. כאשר $x>2$, $|x-3|>5-2x$ ; כאשר $x=2$, $|x-3|=5-2x$ ; כאשר $x<2$, $|x-3|<5-2x$.

ב. כאשר $x=-1/3$ או $x=3$, $|1-2x|=x+2$; כאשר $x>3$ או $x<-1/3$, $|1-2x|>x+2$;
כאשר $-1/3<x<3$, $|1-2x|<x+2$.

ג. כאשר $x>4/3$, $|3x-4|>4-3x$; כאשר $x\le 4/3$, $|3x-4|=4-3x$.

ד. כאשר $x>1/2$, $4-|x+2|<3x$; כאשר $x=1/2$, $4-|x+2|=3x$; כאשר $x<1/2$, $4-|x+2|>3x$.

7. א. $x=1$ או $x=-1$; ב. $x\ge 2$; ג. $x=-2/5$ או $x=-6$; ד. $-2/3<x<5/2$;
ה. $-2\le x\le 0$; ו. $x>1$ או $x<-1$; ז. $x<1/20$; ח. אין פתרון;
ט. $x\ge 4$ או $x\le -6$; י. $-8<x<2$; יא. $-\infty<x<\infty$.

8. א. כאשר $x\ge 3/2$, $|2x-3|+2=|2x-1|$; כאשר $x<3/2$, $|2x-3|+2>|2x-1|$.
ב. עבור כל x מתקיים $|4x|-3<2|2x+1|$.
ג. כאשר $x=\pm 1/2$, $|3x-1|+1=|5x-1|$; כאשר $-1/2<x<1/2$, $|3x-1|+1>|5x-1|$;
כאשר $x>1/2$ או $x<-1/2$, $|3x-1|+1<|5x-1|$.
ד. עבור כל x מתקיים $|6-5x|+4>|2x-5|$.

10. א. $x\ge 7/4$; ב. $x\ne 5/4$; ג. $x>-9/16$ או $x<-3/4$; ד. $x\ge -6/7$ או $x\le -10$;
ה. $-7/4\le x\le 1/2$; ו. $1/2<x<5/4,\ x\ne 4/5$; ז. $11/24\le x\le 13/16,\ x\ne 3/5$; ח. $x>0$.

11. א. $16/9<x<3$ או $-2<x<14/9$; ב. $2/3<x<4$.

12. א. $x\ne\pm 2$; ב. $x=\pm 5/6$; ג. $x\ne 0$; ד. $x<-2$ או $x>2$;
ה. $6<x<12$ או $-2<x<4$; ו. $0\le x\le 4$ או $-6\le x\le -2$;
ז. $x\ge 6$ או $2\le x\le 4$ או $x\le 0$; ח. $x>8$ או $4<x<6$ או $x<2$.
ט. $2<x<\frac{5+\sqrt{89}}{4}$ או $\frac{5-\sqrt{89}}{4}<x<\frac{1}{2}$;
י. $x\ge\frac{17+\sqrt{241}}{12}$ או $\frac{17-\sqrt{97}}{12}\le x\le\frac{17+\sqrt{97}}{12}$ או $x\le\frac{17-\sqrt{241}}{12}$;
יא. $3<x<\frac{5+\sqrt{89}}{4}$ או $2<x<3$ או $-1/2<x<1/2$ או $\frac{5-\sqrt{89}}{4}<x<-\frac{1}{2}$
(שימו לב שהפתרון הוא כמו זה של סעיף ט' בתוספת ההגבלות $x\ne 3$ ו- $x\ne -1/2$.)
יב. כמו סעיף י'.

13. א. בשתי הנקודות $x=\frac{3\pm\sqrt{37}}{14}$ מתקיים $|7x^2-3x+3|=4$;

בתחומים $x > \frac{3+\sqrt{37}}{14}$ ו- $x < \frac{3-\sqrt{37}}{14}$ מתקיים $|7x2 - 3x + 3|>4$;

בתחום $\frac{3+\sqrt{37}}{14} < x < \frac{3-\sqrt{37}}{14}$ מתקיים $|7x2 - 3x + 3|<4$.

ב. בארבע נקודות, $x = -2 \pm \sqrt{11}$, x=-1 ו- x=-3 מתקיים $|x^2 + 4x - 2|=5$;

בתחומים $x > -2+\sqrt{11}$, -3<x<-1 ו- $x < -2-\sqrt{11}$ מתקיים $|x^2 + 4x - 2|>5$;

בתחומים $-1 < x < -2+\sqrt{11}$ ו- $-2-\sqrt{11} < x < -3$ מתקיים $|x^2 + 4x - 2|<5$.

ג. עבור כל x מתקיים $|3x^2 - x + 4|>1$.

ד. בארבע נקודות, $x = \frac{-5\pm\sqrt{77}}{2}$ ו- $x = \frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$ מתקיים $|6 - 5x - x^2|=7$;

בתחומים $x > \frac{-5+\sqrt{77}}{2}$, $\frac{-5+\sqrt{21}}{2} < x < \frac{-5-\sqrt{21}}{2}$, ו- $x < \frac{-5-\sqrt{77}}{2}$ מתקיים $|6 - 5x - x^2|>7$;

בתחומים $\frac{-5+\sqrt{77}}{2} < x < \frac{-5+\sqrt{21}}{2}$ ו- $\frac{-5-\sqrt{21}}{2} < x < \frac{-5-\sqrt{77}}{2}$ מתקיים $|6 - 5x - x^2|<7$.

# III. מבוא לאינדוקציה מתמטית

## 1. הקדמה

בין ההיגדים המבטאים טענות כלשהן קיימים שני סוגים חשובים: טענות כלליות וטענות פרטיות.
טענות כלליות מתייחסות ל**כל** עצם מהסוג שאליו מתייחסת הטענה. טענות כלליות על אנשים, למשל, מתייחסות ל**כל** אדם, טענות כלליות על מספרים מתייחסות ל**כל** מספר, וכו׳.
לא תמיד מופיעה המילה "כל" במפורש בטענה כללית, וכדי לגלות אותה לעתים קרובות יש צורך לשנות את נוסח הטענה. למשל:

א. אזרחי ישראל מעל גיל 18 זכאים להצביע בבחירות לכנסת.

פירושו

**כל** אזרח של מדינת ישראל שמלאו לו 18 שנים זכאי להצביע בבחירות לכנסת.

ב. מספרים ראשוניים הגדולים מ-2 הם אי-זוגיים.

פירושו

**כל** מספר ראשוני גדול מ-2 הוא אי-זוגי.

ג. סכום הזוויות במשולש הוא $180^\circ$.

פירושו

סכום הזוויות ב**כל** משולש הוא $180^\circ$.

טענות פרטיות מתייחסות לעצם בודד. למשל:

א. אבי הוא אזרח מדינת ישראל.

ב. 17 הוא מספר ראשוני.

ג. סכום הזוויות במשולש הזה הוא $180^\circ$.

מטענות כלליות אפשר להסיק מסקנות על אודות מקרים פרטיים. המעבר מטענות כלליות לטענות פרטיות נקרא **דֶדוּקְצִיה**. משמעות המלה "דדוקציה" היא "מסקנה" (deductio בלטינית). המתמטיקה בנויה על השיטה הדדוקטיבית: המטרה בהוכחת משפטים כלליים במתמטיקה היא השימוש בהם למקרים פרטיים. למשל, מוכיחים שסכום הזוויות של **כל** משולש הוא $180^\circ$, ומכך מסיקים מהו סכום הזוויות של משולש מסוים.
הדדוקציה כדרך להסקת מסקנות מקובלת גם מחוץ למתמטיקה. למשל:
מכך שאזרחי ישראל מעל גיל 18 זכאים להצביע בבחירות, אפשר להסיק מסקנה על זכות ההצבעה של (כל) אזרח מסוים שמלאו לו 18 שנים.

מעבר מטענות פרטיות לטענות כלליות נקרא **אִינְדוּקְצִיה**. משמעות המילה "אינדוקציה" היא "השראה" (inductio בלטינית), ובהקשר שלנו השראה לרעיון כלשהו או לנוסחה כלשהי.

באינדוקציה משתמשים כאשר רוצים להסיק כלל ממספר מקרים פרטיים. שימוש אופייני שעושה המדע באינדוקציה הוא קביעת חוקי הטבע על-סמך מופעים רבים של התנהגות או תופעה התואמת את החוק. השיטה הזאת נהוגה גם בחיי יום-יום. אם רואים פעמים רבות שתופעה כלשהי מתרחשת בנסיבות מסוימות, מסיקים שהיא **תמיד** מלווה את הנסיבות הללו.

כך למשל אנו יודעים שאֵש מחממת, שאחרי לילה בא יום ואחרי יום בא לילה, וכו'. גם כאשר אנו מצפים להתנהגות מסוימת של האנשים מוכרים, אנו מיישמים את שיטת האינדוקציה. ההבדלים בין המסקנות השונות שמוסקות באמצעות אינדוקציה הם ברמת המהימנות שלהן. הביטחון בציפייה לגבי התנהגות של אדם מסוים נמוך בדרך-כלל מהביטחון בחוק טבע.

האינדוקציה משמשת אותנו גם במתמטיקה. למשל, נתונה סדרה של מספרים :

$$a_1 = 2\ ,\ \ a_2 = 4\ ,\ \ a_3 = 8\ ,\ \ldots \qquad (1)$$

על-סמך שלושת האיברים הראשונים של הסדרה אפשר לנסח השערה על איברי הסדרה באופן כללי :

$$a_n = 2^n$$

עכשיו, על-סמך הנוסחה הזאת, **בשיטת הדדוקציה** אפשר לנבא ש- $a_4 = 16$ .

דוגמה אחרת היא הנוסחה לאיבר הכללי של סדרה חשבונית. כזכור, סדרה חשבונית מוגדרת באמצעות איבר ראשון $a_1$ וכלל למעבר מאיבר לאיבר הבא אחריו : $a_{n+1} = a_n + d$ . אם מציבים את הכלל הזה לחישוב האיברים של סדרה חשבונית, מקבלים את הסדרה :

$$a_1\ ,\ \ a_2 = a_1 + d\ ,\ \ a_3 = a_1 + 2d\ ,\ \ a_4 = a_1 + 3d\ ,\ \ldots$$

מכאן מסיקים שבאופן כללי עבור איברי סדרות חשבוניות מתקיים $a_n = a_1 + (n-1)d$ .

שתי הדוגמאות שראינו מדגימות שגם במתמטיקה יש שונות רבה במהימנות של מסקנות שונות המוסקות מכמה דוגמאות. המסקנה לגבי הסדרה החשבונית נראית יותר בטוחה מאשר המסקנה לגבי הסדרה (1). במקרה של הסדרה (1) לא נתון כלל מפורש למעבר מאיבר לאיבר, וכל מה שדרוש כדי להטיל ספק בהשערה שלנו הוא דוגמה לנוסחה נוספת שמתאימה לשלושת האיברים הראשונים של הסדרה, אך שונה מהם בהמשך. למשל הנוסחה

$$a_n = n^2 - n + 2$$

יוצרת את הסדרה

$$a_1 = 2\ ,\ \ a_2 = 4\ ,\ \ a_3 = 8\ ,\ \ a_4 = 14\ ,\ \ldots$$

שלושת האיברים הראשונים של הסדרה הזאת זהים לאלו של הסדרה $a_n = 2^n$ , אך באיבר הרביעי שתי הסדרות שונות זו מזו.

נכונות של טענה כלשהי למקרים פרטיים רבים אינה ערובה לכך שהיא מתקיימת ב**כל** המקרים. קיימים אינסוף מספרים טבעיים, לכן טענות עליהם אינן ניתנות לבדיקה באופן פרטני. כך נשאלת השאלה, איך אפשר לדעת שטענה כלשהי על המספרים הטבעיים מתקיימת **תמיד**?

את התשובה לשאלה הזאת מספק עקרון האינדוקציה המתמטית.

## 2. עקרון האינדוקציה המתמטית

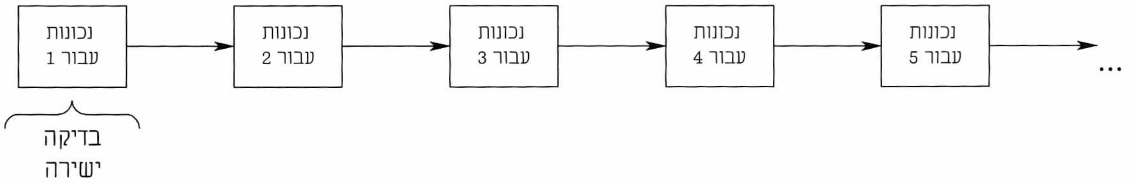
**אם טענה על המספרים הטבעיים מקיימת את שתי הדרישות הבאות:**

**I. הטענה נכונה עבור 1;**

**II. מנכונות הטענה עבור מספר טבעי כלשהו נובע שהיא נכונה עבור המספר הבא;**

**אז הטענה נכונה עבור כל מספר טבעי.**[1]

נתאר את האינטואיציה שעומדת מאחורי עקרון האינדוקציה המתמטית:
נניח שדנים בטענה כלשהי על המספרים הטבעיים, שמקיימת את שתי הדרישות.
לפי I הטענה מתקיימת עבור 1; אם כך, לפי II היא מתקיימת עבור 2 (המספר הבא אחרי 1); מכך שהטענה מתקיימת עבור 2 (שוב לפי II) היא מתקיימת עבור 3. מנכונותה עבור 3 נובעת נכונותה עבור 4, וכו'. הנה המחשה גרפית של הרעיון:




כדי להשתמש בעקרון האינדוקציה להוכחת טענות ספציפיות, יש צורך לתרגם את הביטויים "מספר טבעי כלשהו" ו"המספר הבא" לסימנים מתמטיים. ננסח את עקרון האינדוקציה המתמטית באופן שישמש אותנו בהוכחות:

**אם טענה על המספרים הטבעיים מקיימת את שתי הדרישות הבאות:**

**I. הטענה נכונה עבור n=1;**

**II. מנכונות הטענה עבור n=k (עבור n שווה ל-k טבעי) נובע שהיא נכונה עבור n=k+1;**

**אז הטענה נכונה עבור כל n טבעי.**

ובכן הוכחה באינדוקציה מורכבת משני שלבים: שלב I נקרא **בסיס האינדוקציה**; ושלב II נקרא **צעד האינדוקציה**.[2]

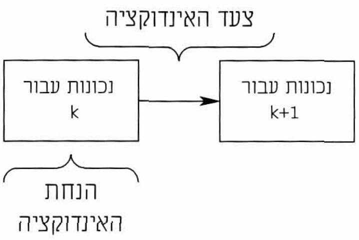
**הערות:**

1) התפקידים של k ושל n בניסוח הזה שונים מאוד זה מזה: k מסמל מספר טבעי **מסוים** ואילו n הוא "מספר רץ".

---

[1] יש ספרים שכוללים גם את 0 בין המספרים הטבעיים. אין לנושא הזה שום חשיבות להוכחות באינדוקציה. בספר הזה איננו כוללים את 0 בין מספרים טבעיים.

[2] יש ספרי לימוד שמחלקים את שלב II לשלושה תת-שלבים: ניסוח ההנחה, ניסוח הטענה שיש להוכיח עבור k+1, וההוכחה עצמה. אין ספק שבצעד האינדוקציה יש לבצע את כל פעולות הנ"ל, ואין זה עקרוני אם להקצות לכל אחת מהן סעיף מיוחד משלה או לא.




2) כדי לא להתבלבל בין התפקידים של k ו-n אפשר להשתמש בניסוח החלופי הבא:

אם טענה על מספרים טבעיים מקיימת את שתי הדרישות הבאות:

I. הטענה נכונה עבור 1 (עבור $n=1$);

II. מנכונות שהטענה עבור k ( $k\geq1$ ) נובע שהיא נכונה עבור $k+1$;

אז הטענה נכונה עבור כל מספר טבעי (עבור כל n טבעי).

לפני שנעבור לדוגמאות נדגיש, שבאינדוקציה אפשר להוכיח רק נוסחה\טענה שכבר הגיעו אליה בדרך כלשהי (למשל בניחוש על-סמך בדיקת מספר מקרים פרטיים). **ההוכחה באינדוקציה היא שיטה לאשש טענות ונוסחאות שכבר נוסחו, ולא דרך להגיע אליהן.**

## 2.1 סכומים של סדרות בנות n איברים

**דוגמאות**

א. נוכיח שלכל n טבעי מתקיים: $1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$

הוכחה:

I. בדיקת בסיס האינדוקציה: עבור 1 (כלומר עבור$n=1$ ) הטענה נכונה: באגף שמאל של הנוסחה במקום הסכום מופיע 1 בלבד; אם נציב 1 במקום n באגף ימין של הנוסחה נקבל $\frac{1\cdot(1+1)}{2}=1$ .

II. צעד האינדוקציה:

נניח שהטענה נכונה עבור k, כלומר נניח שמתקיים

$$1+2+...+k = \frac{k(k+1)}{2}$$

ונוכיח אותה עבור $k+1$.

לפני שנעבור להוכחה נראה מה אנו צריכים לקבל, כלומר נציב בנוסחה את $k+1$ במקום n.

עלינו להוכיח:

$$1+2+...+k+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

הוכחה:

$$1+2+...+k+(k+1) = (1+2+...+k)+(k+1) \overset{*}{=} \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) =$$

$$= (k+1)(\frac{k}{2}+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

* לפי הנחת האינדוקציה

קיבלנו שהטענה מתקיימת עבור $k+1$, ובכך הוכחנו את צעד האינדוקציה.

אם כן הטענה מתקיימת עבור כל $n$ טבעי.

**הערות**

1. לפני שניגשים להוכחת צעד האינדוקציה יש לנסח בכתב את הטענה עבור $k+1$, כדי שיהיה ברור מה עלינו להוכיח. מומלץ גם לכתוב במפורש את הנחת האינדוקציה, אשר מתקבלת מהצבת $k$ במקום $n$ בנוסחה שאותה יש להוכיח.
2. כאשר חישוב מתמטי מתפרש על פני מספר שורות, נהוג לרשום את הסימן האחרון שהופיע בשורה העליונה גם בתחילת השורה התחתונה. (מדובר ביחס כגון "=" או "<", או בסימן פעולה, כגון "+").
3. סימון יעיל הוא כלי מתמטי חשוב מאוד. בטענות שיש בהן תפקיד מרכזי לסכום של איברים רבים, כדאי לעתים לסמן את הסכום בסימון מיוחד. סימון כזה עשוי לפשט את הכתיבה ולעשות את ההוכחה לברורה יותר. נדגים את השיטה הזאת בהוכחה שראינו זה עתה.

הוכחה:

נסמן את הסכום המופיע מצד שמאל של השוויון (סכום המספרים השלמים מ-1 עד $n$) ב- $S_n$ (סכום = Sum); האינדקס ליד $S$ מסמן את המספר שעבורו מנוסחת הטענה. בסימון הזה יש להוכיח את הנוסחה:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

I. בדיקת בסיס האינדוקציה: עבור 1 הטענה נכונה, שכן $S_1=1$, ואם נציב 1 במקום $n$ באגף ימין של הנוסחה נקבל $\frac{1\cdot(1+1)}{2}=1$.

II. צעד האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה עבור $k$, כלומר נניח שמתקיים $S_k = \frac{k(k+1)}{2}$,

ונוכיח אותה עבור $k+1$, כלומר נוכיח שמתקיים $S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

נעבור להוכחה:

$$S_{k+1} = \underbrace{1+2+...+k}_{S_k}+(k+1) = S_k+(k+1) \overset{*}{=} \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) =$$

$$= (k+1)(\frac{k}{2}+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

* לפי הנחת האינדוקציה

קיבלנו שהטענה מתקיימת עבור $k+1$, ובכך הוכחנו את צעד האינדוקציה.

אם כך, הטענה מתקיימת עבור כל $n$ טבעי.

ב. נוכיח את נוסחת הסכום של סדרה הנדסית. טענה: עבור כל n טבעי,

$$S_n = a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q} \quad , \quad (q \neq 1)$$

I. עבור 1 הטענה נכונה, כי $S_1 = a$ וגם $a = \frac{a(1-q^1)}{1-q}$ .

II. נניח שהטענה נכונה עבור k (כלומר $S_k = \frac{a(1-q^k)}{1-q}$);

נוכיח אותה עבור k+1 (צ"ל $S_{k+1} = \frac{a(1-q^{k+1})}{1-q}$).

$$S_{k+1} = a + aq + ... + aq^k = S_k + aq^k \overset{*}{=} \frac{a(1-q^k)}{1-q} + aq^k = \frac{a(1-q^k)}{1-q} + \frac{aq^k(1-q)}{1-q} =$$

$$= \frac{a(1-q^k+q^k-q^{k+1})}{1-q} = \frac{a(1-q^{k+1})}{1-q}$$

* לפי הנחת האינדוקציה

קיבלנו שהטענה מתקיימת עבור k+1, ובכך הוכחנו את צעד האינדוקציה.

אם כך, הטענה מתקיימת עבור כל n טבעי.

**הערות**

1. לעתים, כדי שנוסחה מתמטית תהיה נכונה, יש להציב תנאים כלשהם לגבי גורמים מסוימים המופיעים בה. את התנאים האלה מקובל לרשום אחרי הנוסחה, כשהם מופרדים ממנה באמצעות פסיק. במקרה שלנו הנוסחה תקֵפה כאשר $q \neq 1$.

2. האיבר האחרון שמופיע בסכום בטענה שראינו הוא $aq^{n-1}$. לפעמים עולה השאלה: מדוע לא רושמים כאיבר אחרון את $aq^n$? הסיבה היא שבאיבר הראשון בסכום q מופיע בחזקת 0 ($a=aq^0$), באיבר השני q מופיע בחזקת 1, באיבר השלישי בחזקת 2, וכו'; לכן באיבר ה-n-י בסכום q מופיע בחזקת n-1.

3. כאשר $q>1$ נהוג לרשום את נוסחת הסכום של הסדרה ההנדסית באופן הבא:

$$a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} = \frac{a(q^n-1)}{q-1}$$

(המונה והמכנה באגף ימין של הנוסחה שהוכחנו הוכפלו ב- (-1).)

ג. נוכיח שעבור כל n טבעי מתקיים:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

I. עבור 1 הטענה נכונה: $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{1\cdot 2}$ .

II. נניח שהטענה נכונה עבור k (כלומר $S_k = \frac{k}{k+1}$);

נוכיח אותה עבור k+1 (צ"ל $S_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}$).

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \overset{*}{=} \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} =$$

$$= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

* לפי הנחת האינדוקציה

קיבלנו שהטענה מתקיימת עבור k+1, ובכך הוכחנו את צעד האינדוקציה.

אם כך, הטענה מתקיימת עבור כל n טבעי.

### 2.1.1 מקרים שבהם במעבר מ-k ל-(k+1) מצורף לסכום יותר מאיבר אחד

יש מקרים שבמעבר מ-k ל-(k+1) מצורף לסכום יותר מאיבר אחד.

דוגמה: נוכיח שעבור כל n טבעי מתקיים

$$S_n = 1+2+\ldots+2n = n(2n+1)$$

I. עבור 1 הטענה נכונה: $S_1 = 1+2 = 3$ וגם $1\cdot(2+1)=3$ .

II. נניח שהטענה נכונה עבור k, כלומר $S_k = k(2k+1)$;

נוכיח אותה עבור k+1 (צ"ל $S_{k+1} = (k+1)(2k+3)$ או $S_{k+1} = (2k^2+5k+3)$ ).

לפני שנעבור להוכחה, נדון בהבדל בין $S_k$ לבין $S_{k+1}$.

$S_k = 1 + 2 + \ldots + 2k$

$S_{k+1} = 1 + 2 + \ldots + 2k + (2k+1) + 2(k+1)$

כלומר במעבר מ-k ל-(k+1) צורפו לסכום שני איברים: (2k+1) ו- 2(k+1) .

ובכן:

$$S_{k+1} = S_k + (2k+1) + 2(k+1) = S_k + 4k + 3 =^* k(2k+1) + 4k + 3 = 2k^2 + 5k + 3$$

* לפי הנחת האינדוקציה

קיבלנו שהטענה מתקיימת עבור $k+1$, ובכך הוכחנו את צעד האינדוקציה.

אם כך, הטענה מתקיימת עבור כל $n$ טבעי.

### 2.1.2 מקרים שבהם במעבר מ-$k$ ל-$(k+1)$ נגרעים איברים מהסכום

יש גם מקרים שבמעבר מ-$k$ ל-$(k+1)$ נגרעים איברים מהסכום. הנה דוגמה:

נוכיח שעבור כל $n$ טבעי מתקיים

$$S_n = n + (n+1) + ... + 3n = 2n(2n+1)$$

I. עבור 1 הנוסחה נכונה: $S_1 = 1 + 2 + 3 = 6$ וגם $2\cdot(2+1) = 6$ .

II. נניח שהטענה נכונה עבור $k$, כלומר $S_k = 2k(2k+1)$;

נוכיח אותה עבור $k+1$ (צ"ל $S_{k+1} = 2(k+1)(2k+3)$ או $S_{k+1} = 2(2k^2 + 5k + 3)$ ).

לפני שנעבור להוכחה, נדון בהבדל בין $S_k$ לבין $S_{k+1}$.

$$S_k = k + (k+1) + \ldots + 3k$$

$$S_{k+1} = (k+1) + \ldots + 3k + (3k+1) + (3k+2) + 3(k+1)$$

כלומר, במעבר מ-$k$ ל-$(k+1)$ צורפו לסכום שלושה איברים: $(3k+1)$, $(3k+2)$ ו- $3(k+1)$ , ונגרע ממנו איבר אחד: $k$.

ובכן,

$$S_{k+1} = S_k + (3k+1) + (3k+2) + 3(k+1) - k =$$

$$= S_k + 8k + 6 =^* 2k(2k+1) + 8k + 6 = 2(2k^2 + 5k + 3)$$

* לפי הנחת האינדוקציה

קיבלנו שהטענה מתקיימת עבור $k+1$, ובכך הוכחנו את צעד האינדוקציה.

אם כך, הטענה מתקיימת עבור כל $n$ טבעי.

## 2.2 מכפלות

טענות על מכפלות של איברי סדרות מוכחות באופן דומה לטענות על הסכומים. הנה דוגמה:

נוכיח שעבור כל $n$ טבעי מתקיים

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

בדומה לסכומים נסמן גם את המכפלה באות, והפעם נשתמש ב- $P_n$ (מכפלה= Production). ובכן,

$$P_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n+1}$$

יש להוכיח אם כן,

$$P_n = \frac{1}{n+1}$$

I. עבור 1 הנוסחה נכונה: $P_1 = 1/2$.

II. נניח שהטענה נכונה עבור k, כלומר $P_k = 1/(k+1)$;

נוכיח אותה עבור k+1 (צ"ל $P_{k+1} = 1/(k+2)$).

הנה:

$$P_{k+1} = \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{k}{k+1}}_{P_k}\cdot\frac{k+1}{k+2} = P_k\cdot\frac{k+1}{k+2} \overset{*}{=} \frac{1}{k+1}\cdot\frac{k+1}{k+2} = \frac{1}{k+2}$$

* לפי הנחת האינדוקציה

קיבלנו שהטענה מתקיימת עבור k+1, ובכך הוכחנו את צעד האינדוקציה.

אם כך, הטענה מתקיימת עבור כל n טבעי.

## 2.3 תכונות התחלקות

א. נוכיח באינדוקציה שכל מספר מהצורה $7^n - 2^n$ (כאשר n טבעי) מתחלק ב-5 ללא שארית.

I. עבור 1 טענה נכונה: $7^1 - 2^1 = 5$.

II. נניח שהטענה נכונה עבור k; נוכיח אותה עבור k+1.

$$7^{k+1} - 2^{k+1} = 7\cdot 7^k - 2\cdot 2^k = (5+2)\cdot 7^k - 2\cdot 2^k = 5\cdot 7^k + 2\cdot(7^k - 2^k)$$

לפי הנחת האינדוקציה $7^k - 2^k$ מתחלק ב-5 לכן הסכום כולו מתחלק ב-5.

קיבלנו שהטענה מתקיימת עבור k+1, ובכך הוכחנו את צעד האינדוקציה.

אם כך, הטענה מתקיימת עבור כל n טבעי.

ב. נוכיח שעבור n טבעי הביטוי $n^3+2n$ מתחלק ב-3 ללא שארית.

הוכחה:

I. עבור 1 התכונה מתקיימת: $1^3+2\cdot 1=3$ מתחלק ב-3.

II. נניח שהטענה מתקיימת עבור k (כלומר $k^3+2k$ מתחלק ב-3 ללא שארית);

נוכיח אותה עבור k+1 (צ"ל $(k+1)^3+2(k+1)$ מתחלק ב-3 ללא שארית).

$$(k+1)^3 + 2(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 2k + 2 = k^3 + 2k + 3(k^2 + k + 1)$$

לפי הנחת אינדוקציה $k^3+2k$ מתחלק ב-3, לכן הביטוי כולו מתחלק ב-3.

קיבלנו שהטענה מתקיימת עבור $k+1$, ובכך הוכחנו את צעד האינדוקציה.

ואם כך, הטענה מתקיימת עבור כל $n$ טבעי.

**הערה על החשיבות של בדיקת בסיס האינדוקציה:**

טעות נפוצה היא לזלזל בבדיקת בסיס האינדוקציה. יש להדגיש את חשיבותו של השלב הזה. אם לא מקפידים לוודא את נכונות הבסיס, עלולים "להוכיח" טענות שגויות!

נראה דוגמה:

"נוכיח" שכל מספר מהצורה $7^n - 2^n$ (כאשר $n$ טבעי) מתחלק ב-7 ללא שארית.

נניח שהטענה נכונה עבור $k$, ונוכיח אותה עבור $k+1$.

$$7^{k+1} - 2^{k+1} = 7\cdot 7^k - 2\cdot 2^k = (5+2)\cdot 7^k - 2\cdot 2^k = 5\cdot 7^k + 2\cdot(7^k - 2^k)$$

המחובר $5\cdot 7^k$ מתחלק ב-7; לפי הנחת האינדוקציה גם $7^k - 2^k$ מתחלק ב-7, לכן הסכום כולו מתחלק ב-7.

קיבלנו שהטענה מתקיימת עבור $k+1$, ובכך הוכחנו את צעד האינדוקציה;

ואם כך, הטענה מתקיימת עבור כל $n$ טבעי.

האומנם?

בפועל הטענה הזאת אינה מתקיימת לשום $n\geq 1$!

הטעות היא כמובן בכך שלא בדקנו את בסיס האינדוקציה.

## 2.4 אי-שוויונים

א. נוכיח שעבור $n$ טבעי מתקיים $n < 2^n$.

הוכחה:

I. עבור 1 מתקיים $1 < 2^1$;

II. נניח שהטענה נכונה עבור $k$ (כלומר $k < 2^k$);

נוכיח אותה עבור $k+1$ (צ"ל $k+1 < 2^{k+1}$).

$$k+1 <^{*} 2^k + 1 \leq^{\#} 2^k + 2^k = 2\cdot 2^k = 2^{k+1}$$

* לפי הנחת האינדוקציה

\# כי $1\leq 2^k$

קיבלנו שהטענה מתקיימת עבור $k+1$, ובכך הוכחנו את צעד האינדוקציה.

אם כך, הטענה מתקיימת עבור כל $n$ טבעי.

ב. נוכיח שעבור כל $n$ טבעי מתקיים $(1+a)^n \geq 1+na$ כאשר $a > -1$.

I. עבור 1 נקבל $(1+a)^1 \geq 1+1\cdot a$.

II. נניח שהטענה נכונה עבור $k$ (כלומר $(1+a)^k \geq 1+ka$);

נוכיח אותה עבור k+1 (צ"ל $(1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a$ ).

$$(1+a)^{k+1} = (1+a)^k(1+a) \geq^{*} (1+ka)(1+a) =$$

$$= 1 + (k+1)a + ka^2 \geq^{\#} 1 + (k+1)a$$

* הביטויים באי-שוויון חיוביים (כי $a>-1$) ולכן הקטנת גורם במכפלה (לפי הנחת האינדוקציה) מקטינה את המכפלה כולה.

# הושמט איבר אי-שלילי, לכן ערך הביטוי בצד ימין קטן או שווה לזה שבצד שמאל. (השתמשנו בביטוי "איבר אי-שלילי" כי אם $a=0$ האיבר שהושמט שווה ל-0, לכן אי-אפשר להגיד שהוא חיובי. )

**הערה על הוכחת אי-שוויונים**:

יש לשים לב להבדל בין **הוכחת** אי-שוויון לבין **פתרון** אי-שוויון. כאשר פותרים אי-שוויון, קיום האי-שוויון **נתון**, והשאלה היא עבור אילו ערכים של הנעלמים הוא מתקיים.[3] בהוכחת אי-שוויון השאלה היא עצם קיומו של יחס האי-שוויון בין שני האגפים. היחס הזה מוטל בספק כל עוד לא הוכח.

השיטה המקובלת **לפתור** אי-שוויון היא תוך טיפול בשני האגפים במקביל (למשל כינוס של איברים דומים, או העברות בין אגפים). את תוצאות הטיפול רושמים בשורה הבאה. הנחת היסוד מאחורי השיטה היא שהאי-שוויונים בכל השורות שקולים זה לזה (כלומר הם מתקיימים עבור אותם ערכים של נעלמים).

**בהוכחות** של אי-שוויונים המצב שונה. הטיפול במקביל בשני האגפים של האי-שוויון לצורך הוכחתו ייצור הוכחות בעלות מבנה לוגי מסובך, כי האי-שוויונים שבשורות השונות אינם בהכרח שקולים.

**הדרך המומלצת להוכיח אי-שוויונים היא באמצעות שרשרת של שוויונים ואי-שוויונים, כך שבתחילת השרשרת מופיע אגף אחד של האי-שוויון המבוקש, ובסופה מופיע האגף השני** (ראו דוגמה בהוכחה שלמעלה.)

דרך אחרת היא לצאת מהאי-שוויון שהנחנו את נכונותו (עבור k) וממנו להגיע לאי-שוויון שאותו אנו מוכיחים.

נדגים את הדרך הזאת בהוכחה נוספת של האי-שוויון שהוכחנו לעיל.

במקרה שלנו, נתון לפי הנחת האינדוקציה:

$$(1+a)^k \geq 1+ka \qquad (1)$$

נכפיל את שני האגפים ב-$(1+a)$; זהו ביטוי חיובי (כי נתון $a>-1$ ), לכן הפעולה מותרת. ובכן,

$$(1+a)^{k+1} \geq (1+ka)(1+a) \qquad (2)$$

$$(1+a)^{k+1} \geq 1+ka+a+ka^2 \qquad (3)$$

המחובר האחרון באגף הימני הוא אי-שלילי, לכן אם נשמיט אותו, האי-שוויון יישאר תקף (אבל לא שקול לאי-שוויון (3)!)

$$(1+a)^{k+1} \geq 1+ka+a \qquad (4)$$

$$(1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a \qquad (5)$$

קיבלנו שהטענה מתקיימת עבור k+1, ובכך הוכחנו את צעד האינדוקציה.

הנה השרשרת של המעברים הלוגיים בין השורות בהוכחה שראינו. (חץ דו-כווני פירושו ששתי השורות שקולות; חץ חד-כיווני פירושו שהשורה שאליה מכוון החץ **נובעת** מהשורה שממנו הוא יוצא, אך לא להפך.)

$$(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3) \Rightarrow (4) \Leftrightarrow (5)$$

ללא הסברים באמצע (ובמיוחד ללא הטיעון הרשום בין (3) ל-(4) ) הייתה ההוכחה הזו שגויה: הרי כאשר רושמים אי-שוויונים זה מתחת לזה (כפי שמקובל **בפתרון** של אי-שוויונים) מתכוונים לכך שהאי-שוויונים הרשומים בשורות השונות **שקולים** זה לזה, ואילו כאן הם אינם שקולים, אלא אחד מהם (3) חזק מהאחר (4).

דרך נוספת היא לעבוד עם האי-שוויון שאותו יש להוכיח (המתייחס ל- k+1) בשאיפה להראות שהוא נובע מאיזשהו אי-שוויון תקף (למשל מהאי-שוויון שמופיע בהנחת האינדוקציה). כלומר מנסים למצוא אי-שוויון תקף שממנו נובע האי-שוויון שלנו. השיטה הזאת מסובכת מבחינה לוגית ואינה מומלצת בדרך-כלל. נדון בכך בדוגמה הבאה:

ג. נוכיח שעבור כל n טבעי מתקיים $(1-a)^n < \frac{1}{1+na}$ (כאשר $0<a<1$ ).

I. עבור 1 יש לוודא שמתקיים $(1-a)^1 < \frac{1}{1+1\cdot a}$. ובכן,

$$1-a =^{*} \frac{(1-a)(1+a)}{1+a} = \frac{1-a^2}{1+a} <^{\#} \frac{1}{1+a}$$

* הכפלנו מונה ומכנה בגורם השונה מ-0;

# הגדלנו את המונה על-ידי השמטת ביטוי שלילי ($-a^2$).

II. נניח שהטענה נכונה עבור k (כלומר $(1-a)^k < \frac{1}{1+ka}$ );

נוכיח אותה עבור k+1 (צ"ל $(1-a)^{k+1} < \frac{1}{1+(k+1)a}$ ).

תחילה נוכיח את הטענה תוך מעבר מאגף שמאל לאגף ימין באמצעות שרשרת של שוויונים ואי-שוויונים:

---

[3] במקרים מסוימים עשוי אי-שוויון שלא להתקיים עבור שום ערך של הנעלמים, אך התשובה "תחום התקפות של האי-שוויון הוא ריק" היא מקרה פרטי של פתרון: פתרון של אי-שוויון הוא קבוצה (קבוצת ערכים של הנעלמים). במקרים מסוימים הקבוצה הזאת עשויה להיות קבוצה ריקה.

$$(1-a)^{k+1} = (1-a)^k(1-a) <^{*} \frac{(1-a)}{1+ka} =^{\#} \frac{(1-a)}{1+ka}\cdot\frac{1+(k+1)a}{1+(k+1)a} =$$

$$= \frac{1-a+ka+a-(k+1)a^2}{(1+ka)[1+(k+1)a]} = \frac{1+ka}{(1+ka)[1+(k+1)a]} - \frac{(k+1)a^2}{(1+ka)[1+(k+1)a]} <^{\$}$$

$$< \frac{1+ka}{(1+ka)[1+(k+1)a]} = \frac{1}{1+(k+1)a}$$

* על-סמך הנחת האינדוקציה. השתמשנו בכך ש- 1-a>0. זה מבטיח שהביטויים באי-שוויון הם חיוביים.
# הכפלנו מונה ומכנה בגורם השונה מ-0.
$ השמטנו גורם שלילי (המחסר) וכך הגדלנו את הביטוי.

קיבלנו שהטענה מתקיימת עבור k+1, ובכך הוכחנו את צעד האינדוקציה.

אם כך, הטענה מתקיימת עבור כל n טבעי.

נראה הוכחה אחרת המבוססת על טיפול בשני האגפים של האי-שוויון שאותו יש להוכיח. כדי להדגיש שהאי-שוויון הזה עדיין לא הוכח - נרשום מעליו סימן שאלה. ובכן,

$$(1-a)^{k+1} \overset{?}{<} \frac{1}{1+(k+1)a} \qquad (1)$$

נרשום את אגף שמאל בצורה המתאימה לשימוש בהנחת האינדוקציה:

$$(1-a)(1-a)^k \overset{?}{<} \frac{1}{1+(k+1)a} \qquad (2)$$

לפי הנחת האינדוקציה $(1-a)^k < \frac{1}{1+ka}$, לכן די אם נוכיח את האי-שוויון:

$$\frac{(1-a)}{1+ka} \overset{?}{<} \frac{1}{1+(k+1)a} \qquad (3)$$

האי-שוויון הזה **חזק** מהאי-שוויונים (1) ו-(2), לכן אם נוכיח אותו נוכל להסיק ממנו את נכונותו של (1).
כדי להוכיח את אי-שוויון (3) נכפול את המונה והמכנה של אגף ימין ב-(1-a). (נזכיר: נתון לנו שהגורם הזה הוא חיובי.)

$$\frac{(1-a)}{1+ka} \overset{?}{<} \frac{1-a}{(1-a)[1+(k+1)a]} \qquad (4)$$

נקבל שהמונים של שני האגפים שווים, ולכן (כיוון שהביטויים חיוביים) די להוכיח שהמכנה באגף שמאל גדול מזה שבאגף ימין, כלומר,

$$1+ka \overset{?}{>} [1+(k+1)a](1-a) \qquad (5)$$

או

$$1+ka \overset{?}{>} 1-a+(k+1)a-(k+1)a^2 \qquad (6)$$

נעביר את אגף שמאל לאגף ימין ונקבל שאי-שוויון (6) שקול לאי-שוויון :

$$0 > -(k+1)a^2 \qquad (7)$$

האי-שוויון הזה תקף כי באגף ימין מופיע ביטוי שלילי. מתקפותו של אי-שוויון (7) אפשר להסיק שגם אי-שוויון (6) תקף, ואז גם אי-שוויון (5) תקף וכו׳. בסופו של דבר מקבלים שגם אי-שוויון (1) תקף.

את הלוגיקה של ההוכחה הזאת אפשר להציג באמצעות חצים כך :

$$(7) \Leftrightarrow (6) \Leftrightarrow (5) \Leftrightarrow (4) \Leftrightarrow (3) \Rightarrow (2) \Leftrightarrow (1)$$

נשים לב לחץ החד-כיווני בשרשרת המעברים. המבנה הלוגי של ההוכחה הוא מהסוף להתחלה. הכיוון הזה מסובך יותר להבנה מהכיוון הטבעי מההתחלה אל הסוף.

נראה דוגמה להוכחה יותר מסובכות מבחינה אלגברית

ד. נוכיח שעבור כל n טבעי ועבור כל שני מספרים ממשיים שונים זה מזה a ו-b המקיימים $(a+b) > 0$, מתקיים האי-שוויון:

$$2^n(a^{n+1} + b^{n+1}) > (a+b)^{n+1}, \qquad (a\neq b,\ a+b>0) \qquad (1)$$

I. עבור 1 יש לוודא ש-

$$2(a^2 + b^2) > (a+b)^2$$

האי-שוויון הזה שקול לאי-שוויון

$$2(a^2 + b^2) - (a+b)^2 > 0$$

והאי-שוויון הזה אכן תקף, כי הרי

$$2(a^2 + b^2) - (a+b)^2 = 2a^2 + 2b^2 - a^2 - 2ab - b^2 = (a - b)^2 > 0$$

(בקביעה ש- $(a-b)^2$ ממש גדול מ-0 הסתמכנו על הנתון $a\neq b$.)

II. נניח שהטענה נכונה עבור k (כלומר $2^k(a^{k+1} + b^{k+1}) > (a + b)^{k+1}$ );

נוכיח אותה עבור k+1 (צ״ל $2^{k+1}(a^{k+2} + b^{k+2}) > (a+b)^{k+2}$ ).

במקרה הזה ההוכחה מתקבלת ביתר קלות אם יוצאים מהאי-שוויון שאת תקפותו מניחים בצעד האינדוקציה.

ובכן לפי הנחת האינדוקציה

$$2^k(a^{k+1} + b^{k+1}) > (a + b)^{k+1}$$

נכפול את שני האגפים ב-(a+b). (מותר לעשות זאת בזכות הנתון $a+b>0$.) נקבל:

$$2^k(a^{k+1} + b^{k+1})(a + b) > (a + b)^{k+2}$$

כדי להשלים את ההוכחה די להראות שמתקיים האי-שוויון

$$2^{k+1}(a^{k+2} + b^{k+2}) > 2^k(a^{k+1} + b^{k+1})(a + b) \qquad (2)$$

או

$$2(a^{k+2} + b^{k+2}) - (a^{k+1} + b^{k+1})(a + b) > 0$$

ובכן,

$$2(a^{k+2}+b^{k+2})-(a^{k+1}+b^{k+1})(a+b) = 2a^{k+2}+2b^{k+2}-a^{k+2}-ba^{k+1}-ab^{k+1}-b^{k+2} =$$

$$= a^{k+2}+b^{k+2}-ba^{k+1}-ab^{k+1} = (a-b)(a^{k+1}-b^{k+1})$$

קיימות שתי אפשרויות:

1) $b < a$, ואז גם $b^{k+1} < a^{k+1}$, כלומר המכפלה חיובית;

2) $b > a$, ואז גם $b^{k+1} > a^{k+1}$, וגם כאן המכפלה חיובית;

כלומר בכל מקרה מתקיים

$$2(a^{k+2}+b^{k+2})-(a^{k+1}+b^{k+1})(a+b) = (a-b)(a^{k+1}-b^{k+1}) > 0$$

ומכאן מתקבל אי-שוויון (2) שהיינו צריכים להוכיח כדי להסיק את תקפותו של אי-שוויון (1).

## 3. עקרון האינדוקציה עם ערכי בסיס שונים

בכל הדוגמאות הקודמות ראינו טענות שחלות על כל מספר טבעי החל מ-1. אין במספר 1 שום ייחוד בכל הנוגע לאינדוקציה, וקיימות טענות שהן נכונות לכל המספרים הטבעיים החל ממספר טבעי אחר, לאו דווקא 1.

הערך שאליו מתייחסת בדיקת בסיס האינדוקציה הוא הערך הקטן ביותר שעבורו רוצים להראות שהטענה נכונה. כך נקבל את עקרון האינדוקציה בניסוח מורחב מזה שראינו בסעיף הקודם:

**אם טענה על מספרים טבעיים מקיימת את שתי הדרישות הבאות:**

**I. הטענה נכונה עבור $n_0$;**

**II. מנכונות הטענה עבור k טבעי ( $n_0 \le k$ ) נובעת נכונותה עבור k+1;**

**אז הטענה נכונה עבור כל $n_0 \le n$.**

**דוגמאות**

א. נוכיח שעבור $n \ge 3$ טבעי מתקיים $n^2 > 2n+1$ .

הוכחה:

I. עבור $n=3$ הטענה מתקיימת: $3^2 > 2\cdot3+1$ .

II. נניח שהטענה נכונה עבור k (כלומר $k^2 > 2k+1$ ), ונוכיח אותה עבור k+1.

נציב k+1 במקום n, נקבל

$$(k+1)^2 > 2(k+1)+1 = 2k+3$$

ובכן עלינו להוכיח: $(k+1)^2 > 2k+3$.

$$(k+1)^2 = k^2+2k+1 >^{*} (2k+1)+2k+1 >^{\#} 2k+2+1 = 2k+3$$

* לפי הנחת האינדוקציה

\# כי $k>1$

קיבלנו שהטענה מתקיימת עבור k+1, ובכך הוכחנו את צעד האינדוקציה.

אם כך, הטענה מתקיימת עבור כל $n \ge 3$.

ב. נוכיח שעבור $n\geq 2$ טבעי מתקיים $S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$.

הוכחה:

I. עבור n=2 מתקיים: $S_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} = \frac{14}{24} > \frac{13}{24}$.

II. נניח שהטענה נכונה עבור k כלשהו (כלומר $S_k > \frac{13}{24}$)

נוכיח אותה עבור k+1 (צ״ל $S_{k+1} > \frac{13}{24}$).

שימו לב: במעבר מ- $S_k$ ל- $S_{k+1}$ נשמט מהסכום מחובר אחד ומצורפים שני מחוברים חדשים:

$$S_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \ldots + \frac{1}{2k}$$

$$S_{k+1} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \ldots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}$$

נחשב את ההפרש בין $S_{k+1}$ ל- $S_k$:

$$S_{k+1} - S_k = \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2(k+1)} = \frac{1}{2(k+1)(2k+1)} > 0$$

כלומר $S_{k+1} > S_k$.

נצרף למסקנה הזו את הנחת האינדוקציה ונקבל:

$$S_{k+1} > S_k > \frac{13}{24}$$

קיבלנו שהטענה מתקיימת עבור k+1, ובכך הוכחנו את צעד האינדוקציה.

אם כך, הטענה מתקיימת עבור כל $n\geq 2$.

ג. נוכיח שעבור $n\geq 2$ טבעי מתקיים:

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$

הוכחה:

I. עבור n=2 מתקיים (בדיקה ישירה):

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} > 1 + \frac{1}{2} = 1.5 > \sqrt{2} \approx 1.41$$

II. נניח שהטענה נכונה עבור k כלשהו (כלומר $S_k > \sqrt{k}$);

נוכיח אותה עבור k+1 (צ"ל $S_{k+1} > \sqrt{k+1}$).

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{\sqrt{k+1}} >^{*} \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k}\cdot\sqrt{k+1}+1}{\sqrt{k+1}} >^{\#}$$

$$> \frac{\sqrt{k}\cdot\sqrt{k}+1}{\sqrt{k+1}} = \frac{k+1}{\sqrt{k+1}} = \sqrt{k+1}$$

* לפי הנחת האינדוקציה
\# הוקטן המחובר הראשון במונה

**קיבלנו שהטענה מתקיימת עבור k+1, ובכך הוכחנו את צעד האינדוקציה.**

**אם כך, הטענה מתקיימת עבור כל $n \geq 2$.**

חשוב להדגיש את הקשר בין שני השלבים של הוכחה באינדוקציה - בסיס האינדוקציה וצעד האינדוקציה. יש לוודא שצעד האינדוקציה תקף עבור הערך שהופיע בבדיקה של הבסיס, אחרת אפשר להגיע לתוצאות שגויות. נדגים את הנקודה הזאת ב"הוכחת" הטענה הבאה.

טענה: לכל הסוסים בעולם יש אותו צבע. (מי שלא אוהב סוסים יכול לדון בעפרונות, כדורים פורחים או כל סוג אחר של עצמים שניסיוננו מלמד שהם עשויים להיות בצבעים שונים.)

"הוכחה":

עבור n=1 הטענה ברורה.

נניח שהוכחנו את הטענה עבור k (כלומר שלכל קבוצה של k סוסים מתקיים שהם בעלי אותו צבע),

נוכיח אותה עבור k+1.

ניתן לסוסים שמות: $H_1,\ldots,H_{k+1}$ ונכניס אותם לאורווה.

נוציא מהאורווה סוס אחד, נגיד את $H_{k+1}$. קיבלנו באורווה קבוצה של k סוסים, ולפי הנחת האינדוקציה הם בעלי צבע אחד; בפרט, $H_1$ ו- $H_k$ הם בעלי אותו צבע.

עכשיו נוציא מהאורווה את $H_k$ ונחזיר אליה את $H_{k+1}$. שוב קיבלנו באורווה קבוצה של k סוסים, ולכן גם הם כולם בעלי אותו צבע; בפרט, $H_1$ ו- $H_{k+1}$ הם בעלי אותו צבע.

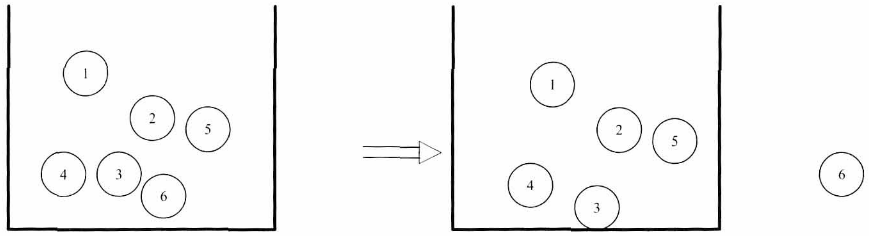
ובכן מצאנו שצבעו של $H_k$ זהה לזה של $H_1$, וגם צבעו של $H_{k+1}$ זהה לזה של $H_1$, לכן גם ל- $H_k$ ול- $H_{k+1}$ יש אותו צבע. ולכן לקבוצה של k+1 סוסים $H_1,\ldots,H_{k+1}$ יש אותו צבע. הוכחנו שבקבוצה **שרירותית** של k+1 סוסים כל הסוסים הם בעלי צבע אחד. לכן **כל** קבוצה של k+1 סוסים הם בעלי אותו צבע.

קיבלנו שהטענה מתקיימת עבור k+1, ובכך הוכחנו את צעד האינדוקציה.

אם כך, הטענה מתקיימת עבור כל n טבעי.

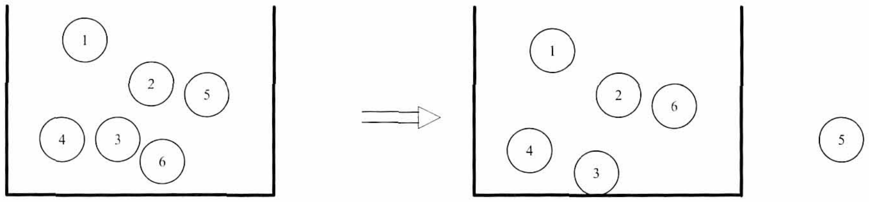
נראה המחשה של הטיעון הזה באיור, כאשר k=5. (בשל מגבלות גרפיות נתייחס לכדורים בתוך כלי במקום לסוסים באורווה.)

נוציא מהכלי את כדור מס' 6.



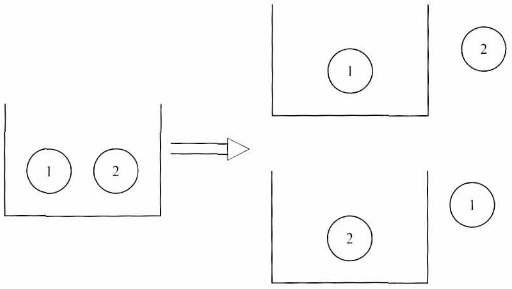
לפי הנחת האינדוקציה, לכדורים 1,2,3,4,5 יש אותו צבע, ובפרט יש אותו צבע לכדורים 1 ו-5.

נחזיר את כדור מס' 6 לכלי, ונוציא ממנו את כדור מס' 5. שוב קיבלנו קבוצה של k כדורים, 1,2,3,4,6, ולפי הנחת האינדוקציה יש להם אותו צבע, ובפרט יש אותו צבע לכדורים 1 ו-6.



אם צבעו של כדור 1 זהה לזה של כדור 5 ולזה של כדור 6, אז גם כדורים 5 ו-6 זהים בצבעם. וכך לכל הכדורים מהקבוצה 1,2,3,4,5,6 יש אותו צבע.

כדי להבין מה לא בסדר ב"הוכחה" הזאת, נדון במקרה שיש שני כדורים בלבד (כלומר n=2). האיור ממחיש שבתהליך שביצענו לא נקבל שכדורים 1 ו-2 הם בעלי אותו צבע.



אין כאן כדור שמקשר בין 1 ל-2 כפי שהיה בהמחשה הקודמת, שהתבססה על ההנחה שלכל קבוצה של 5 כדורים יש אותו צבע.

ה"הוכחה" מבוססת לא על ההנחה שהטענה נכונה עבור n=1 (הערך שעבורו בדקנו את בסיס האינדוקציה בתחילת ה"הוכחה") אלא על ההנחה (המוטעית) שהטענה נכונה עבור n=2; כי במהלך ה"הוכחה" השתמשנו בקבוצה בת שני סוסים ($H_1$ ו- $H_k$ או $H_1$ ו- $H_{k+1}$ ) והנחנו (באופן לא מפורש) שהיא תת-קבוצה של קבוצה גדולה יותר.

# 4. הגדרות של סדרות, נוסחאות נסיגה

סדרות של מספרים ניתן להגדיר בשתי דרכים :

(1) נוסחה המפורשת - איבר בסדרה מוגדר רק לפי מקומו בסדרה (כפונקציה של האינדקס שלו), ללא תלות באיברים אחרים של הסדרה. למשל, $a_n=n^2$.

(2) נוסחת נסיגה (הדרך **הרקורסיבית**) - האיברים הראשונים בסדרה (אחד או יותר) מוגדרים באופן מפורש ; האיברים הבאים אחריהם מוגדרים באמצעות איברים קודמים שכבר הוגדרו.[4]

למשל, נגדיר $a_1=1$, ואת שאר איברי הסדרה (שמספרם הסידורי גדול מ-1) נגדיר באמצעות האיבר הקודם :

$$a_{n+1} = a_n +2n+1$$

לפי הגדרה זאת נקבל :

$$a_2 = a_1 + 2\cdot 1 + 1 = 1 + 2 + 1 = 4$$
$$a_3 = a_2 + 2\cdot 2 + 1 = 4 + 4 + 1 = 9$$
$$a_4 = a_3 + 2\cdot 3 + 1 = 9 + 6 + 1 = 16$$

וכו'.

נדון עתה בשאלה הזו : נתונה הגדרה של סדרה באמצעות נוסחת נסיגה, והגדרה נוספת - מפורשת. האם שתי ההגדרות מגדירות את אותה סדרה?

הדרך המקובלת להוכחת ההתלכדות של שתי הסדרות היא הוכחה באינדוקציה.

לפעמים מנוסחת השאלה באופן אחר : נתונה רק נוסחת נסיגה, ויש למצוא (לנחש) את ההגדרה המפורשת של איברי הסדרה, ורק אז להוכיח שהניחוש נכון.

נדגיש ששיטת ההוכחה באינדוקציה איננה עוזרת למצוא את הנוסחה המפורשת. באינדוקציה משתמשים אך ורק כדי להוכיח את נכונות הנוסחה לאחר שכבר מצאנו אותה.

## 4.1 הגדרת סדרות באמצעות איבר בסיסי יחיד

**דוגמאות**

א. את סדרת הריבועים של המספרים הטבעיים אפשר להגדיר בשתי הדרכים :

$$1)\quad a_n = n^2\ ,\quad n \ge 1$$

$$2)\quad \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + 2n - 1\ ,\ n > 1 \end{cases}$$

נוכיח באינדוקציה ששתי הגדרות מגדירות את אותה סדרה.

---

[4] המילה "רקורסיבי" נגזרת מהשורש הלועזי "recur" אשר משמעותו "לחזור": הכוונה היא שכדי למצוא ערכים חדשים של הסדרה יש לחזור לערכים הקודמים בתהליך החוזר עד לאיברים הבסיסיים. יש מידה של הקבלה בין הגדרה באמצעות נוסחת נסיגה לבין הוכחה באינדוקציה, על-אף ההבדל, שכאן המטרה היא הגדרה ולא הוכחה של תכונה. לפעמים הגדרה כזאת נקראת גם "הגדרה אינדוקטיבית".

I. לפי שתי ההגדרות $a_1=1$ (כלומר הטענה נכונה עבור $n=1$).

II. נניח שהטענה מתקיימת עבור k (כלומר $a_k$ המוגדר באמצעות נוסחת הנסיגה שווה ל- $k^2$),

ונוכיח אותה עבור k+1 (צ"ל $a_{k+1}$ המוגדר באמצעות נוסחת נסיגה שווה ל- $(k+1)^2$ ).

$$a_{k+1} =^{*} a_k + 2(k+1) - 1 =^{\#} k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$

* לפי נוסחת הנסיגה
\#לפי הנחת האינדוקציה

קיבלנו שהטענה מתקיימת עבור k+1, ובכך הוכחנו את צעד האינדוקציה.

אם כך, הטענה מתקיימת עבור כל n טבעי.

**הערה על צורת הכתיבה של נוסחאות נסיגה:**

לעתים מגדירים בהגדרות מהסוג הזה את $a_{n+1}$ ולא את $a_n$; במקרה כזה **אי-אפשר** לכתוב בשורה השנייה של ההגדרה את התנאי $n>1$, כי אז נקבל $n+1>2$ ולא תהיה לנו הגדרה עבור $a_2$. מבחינה פורמלית, אם בנוסחת נסיגה רוצים להגדיר דווקא את $a_{n+1}$ ולא את $a_n$, יש לכתוב בתנאי $n\geq 1$ או לא לכתוב שום תנאי בכלל, כי השורה נכונה עבור כל n. אין עדיפות מובהקת לאחת משתי השיטות. מבחינה פסיכולוגית, גם העדר תנאי וגם הופעה של האפשרות ש- $n=1$ בהגדרת איברים שמקומם בסדרה גדול מ-1, עלולים שניהם להטעות.

ב. את הסדרה $a_n = \frac{1}{n}$ אפשר לקבל גם כך:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right), \ n > 1 \end{cases}$$

נוכיח באינדוקציה ששתי הגדרות אכן מגדירות את אותה סדרה.

I. לפי שתי ההגדרות $a_1=1$.

II. נניח שהטענה מתקיימת עבור k (כלומר, נניח ש- $a_k$ המוגדר באמצעות נוסחת הנסיגה שווה ל- $\frac{1}{k}$),

ונוכיח אותה עבור k+1 (צריך להוכיח ש- $a_{k+1}$ המוגדר באמצעות נוסחת הנסיגה שווה ל- $\frac{1}{k+1}$ ).

ובכן,

$$a_{k+1} =^{*} a_k \cdot \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) =^{\#} \frac{1}{k} \cdot \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{k} \cdot \frac{k}{k+1} = \frac{1}{k+1}$$

* לפי נוסחת הנסיגה
\#לפי הנחת האינדוקציה

קיבלנו שהטענה מתקיימת עבור k+1, ובכך הוכחנו את צעד האינדוקציה.

אם כך, הטענה מתקיימת עבור כל n טבעי.

ג. נדגים ניחוש של נוסחה מפורשת כשנתונה נוסחת נסיגה. נגדיר:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1}\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right), \ n>1 \end{cases}$$

ננסה לנחש את הנוסחה המפורשת של איברי הסדרה. לשם כך נחשב כמה איברים בסדרה:

$$a_2 = a_1\cdot\left(1+\frac{1}{1}\right) = 2$$

$$a_3 = a_2\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right) = 3$$

$$a_4 = a_3\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right) = 4$$

וכו'.

הניחוש המתקבל מהתוצאות האלה לנוסחה מפורשת עבור $a_n$ הוא $a_n = n$ .

נוכיח את נכונות הנוסחה הזאת באמצעות אינדוקציה.

הוכחה:

I. עבור $n=1$ הנוסחה נכונה: $a_1=1$.

II. נניח שהטענה (על נכונות הנוסחה) נכונה עבור $k$ (כלומר $a_k = k$);

נוכיח אותה עבור $k+1$ (צ"ל $a_{k+1} = k+1$).

הנה ההוכחה:

$$a_{k+1} \overset{*}{=} a_k\cdot\left(1+\frac{1}{k}\right) \overset{\#}{=} k\cdot\left(1+\frac{1}{k}\right) = k+1$$

* לפי נוסחת הנסיגה

\# לפי הנחת האינדוקציה

קיבלנו שהטענה מתקיימת עבור $k+1$, ובכך הוכחנו את צעד האינדוקציה.

אם כך, הטענה מתקיימת עבור כל $n$ טבעי.

**הערה**: במקרה הזה הניחוש היה פשוט מאוד; אבל אי-אפשר לתת מתכון כללי לניחוש נכון של נוסחאות מפורשות לסדרות.[5] זהו עניין של ניסיון בלבד. בדרך-כלל בשאלות מהסוג הזה מניחים שהפותר מכיר איברים ראשונים של כמה סדרות סטנדרטיות (כגון ריבועים של מספרים טבעיים, או חזקות של 2).

[5] נציין שיש סדרות שלא קיימת נוסחה מפורשת עבורן כי הכלים שבאמצעותם רושמים נוסחאות מפורשות דלים למדי.

ד. הנה עוד דוגמה לניחוש נוסחה מפורשת. נגדיר:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = 2a_{n-1}+1, \ n>1 \end{cases}$$

מההגדרה נקבל:

$$a_1 = 1, \ a_2 = 3, \ a_3 = 7, \ a_4 = 15, ...$$

מכאן אפשר לנחש את הנוסחה המפורשת של איברי הסדרה:

$$a_n = 2^n - 1$$

נוכיח את נכונות הנוסחה הזאת באמצעות אינדוקציה.

הוכחה:

I. עבור n=1 הנוסחה נכונה: $a_1 = 2^1-1$.

II. *נניח שהטענה (על נכונות הנוסחה) נכונה עבור k (כלומר* $a_k=2^k-1$);

נוכיח אותה עבור k+1 (צ"ל $a_{k+1} = 2^{k+1}-1$).

$$a_{k+1} \overset{*}{=} 2a_k+1 \overset{\#}{=} 2\cdot\left(2^k-1\right)+1 = 2^{k+1}-2+1 = 2^{k+1}-1$$

* לפי נוסחת נסיגה

# לפי הנחת האינדוקציה

קיבלנו שהטענה מתקיימת עבור k+1, ובכך הוכחנו את צעד האינדוקציה.

אם כך, הטענה מתקיימת עבור כל n טבעי.

ה. נוסחה מפורשת המתארת איבר כללי של סדרה מתפצלת לפעמים לכמה תחומים. קורה, למשל, שיש נוסחה אחת עבור איברי הסדרה הנמצאים במקומות הזוגיים ונוסחה אחרת עבור האיברים במקומות האי-זוגיים. את הנוסחאות האלה נוהגים לאחד לנוסחה אחת המורכבת מכמה שורות.

נדון בסדרה שהגדרתה הרקורסיבית היא כדלקמן:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = \dfrac{2}{a_{n-1}}, \ n>1 \end{cases}$$

נחשב כמה איברים של הסדרה, כדי לנסות ולנחש את הצורה של האיבר הכללי:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 1, \quad a_4 = 2, \ldots$$

קל לראות שהאיברים במקומות האי-זוגיים שווים ל-1, ואילו האיברים במקומות הזוגיים שווים ל-2. הנה הדרך המקובלת לרשום נוסחה כזאת:

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{n איזוגי} \\ 2, & \text{n זוגי} \end{cases}$$

נוכיח את הנכונות הנוסחה הזאת באמצעות האינדוקציה.

הוכחה:

I. עבור $n=1$ הנוסחה נכונה: $a_1=1$.

II. נניח שהטענה (הנוסחה) נכונה עבור $k$, ונוכיח אותה עבור $k+1$.

עלינו לבדוק שני מקרים: א. המקרה ש- $k+1$ זוגי; ב. המקרה ש- $k+1$ אי-זוגי.

נדון בכל אחד מהמקרים האלה בנפרד.

א. נניח ש- $k+1$ זוגי, ואז $k$ אי-זוגי. לפי הנחת האינדוקציה $a_k = 1$, ועלינו להראות ש- $a_{k+1} = 2$.

ובכן,

$$a_{k+1} \overset{*}{=} \frac{2}{a_k} \overset{\#}{=} \frac{2}{1} = 2$$

* לפי נוסחת נסיגה

\# לפי הנחת האינדוקציה

ב. נניח ש- $k+1$ אי-זוגי, ואז $k$ זוגי. לפי הנחת האינדוקציה $a_k = 2$, ועלינו להראות ש- $a_{k+1} = 1$.

ובכן,

$$a_{k+1} \overset{*}{=} \frac{2}{a_k} \overset{\#}{=} \frac{2}{2} = 1$$

* לפי נוסחת נסיגה

\# לפי הנחת האינדוקציה

קיבלנו שהטענה מתקיימת עבור $k+1$, ובכך הוכחנו את צעד האינדוקציה.

אם כך, הטענה מתקיימת עבור כל $n$ טבעי.

**הערה על כתיבת הגדרות המפוצלת**:

לעתים הגדרות מתמטיות מורכבות מכמה נוסחאות, שלכל אחת תחום תקֵפות שונה (במקרה לעיל יש הגדרות שונות לאיברים שבמקומות הזוגיים ולאלה שבמקומות האי-זוגיים של הסדרה). בכל שורה מופיעות נוסחה, ולצדה תנאי הקובע מתי הנוסחה תקֵפה. את התנאי רושמים מימין לנוסחה, ופסיק מפריד ביניהן.

מצב נוסף של הגדרה מפוצלת הוא מקרה שבסדרה יש איברים "חריגים", שאינם מתאימים לנוסחה הכללית.

ו. נדון בסדרה

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = \max(1,\ a_{n-1} - 1)\ ,\ n > 1 \end{cases}$$

נחשב כמה מאיברי הסדרה כדי לנחש את צורת האיבר הכללי:

$a_1 = 3$ , $a_2 = 2$ , $a_3 = 1$ , $a_4 = 1$ , ...

רואים שהחל מ- $a_3$ כל איברי הסדרה שווים ל-1, כלומר

$$a_n = \begin{cases} 3, & n = 1 \\ 2, & n = 2 \\ 1, & n \geq 3 \end{cases}$$

נוכיח את הנוסחה.

נכונות עבור n=1 ו- n=2 בדקנו ישירות. את השורה השלישית בהגדרה נוכיח באינדוקציה.

I. עבור n=3 הנוסחה נכונה (בדקנו ישירות ש- $a_3=1$).

II. נניח שהטענה (על נכונות הנוסחה) נכונה עבור k (כלומר נניח $a_k=1$),

ונוכיח אותה עבור k+1 (צ״ל $a_{k+1}=1$).

ובכן:

$$a_{k+1} =^{*} \max(1, a_k-1) =^{\#} \max(1, 0) = 1$$

* לפי נוסחת הנסיגה

\# לפי הנחת האינדוקציה

קיבלנו שהטענה מתקיימת עבור k+1, ובכך הוכחנו את צעד האינדוקציה.

אם כך, הטענה מתקיימת עבור כל n טבעי.

**הערה**: בדוגמה הזאת הוכחנו באינדוקציה רק את השורה השלישית של הנוסחה, כלומר הוכחנו את הטענה הבאה: עבור $n\geq3$ הנוסחה המפורשת לאיברי הסדרה היא $a_n=1$.

יכולנו להוכיח באינדוקציה את כל הנוסחה (החל מ- n=1 ). במקרה כזה היה בסיס האינדוקציה n=1, ובצעד האינדוקציה היה עלינו לדון בשני מקרים נפרדים: $(k+1) = 2$ ו- $(k+1) > 2$.

## 4.2 הגדרת סדרות באמצעות כמה איברים בסיסיים

כאשר סדרה מוגדרת באמצעות נוסחת נסיגה, קורה לעתים שמספר האיברים הבסיסיים המופיעים בהגדרה גדול מאחד. במקרים כאלה, כדי להוכיח טענות שונות על איברי הסדרה אין די בעקרון האינדוקציה כפי שהכרנו אותו עד כה, ויש להשתמש בעיקרון כללי יותר. השיטה החדשה נקראת האינדוקציה המורחבת. במקרים שלפנינו לא נחוץ עקרון האינדוקציה המורחבת במלוא כלליותו, אי-לכך נדחה את הדיון הכללי בשיטה הזאת לסעיף הבא. כאן נדגים את העיקרון הזה רק בהיקף הדרוש לצרכינו.

**דוגמאות**

א. לפנינו נוסחת נסיגה המגדירה סדרה:

$$a_n = \begin{cases} 1\ , & n=1 \\ 2\ , & n=2 \\ 3a_{n-1}-2a_{n-2}\ , & n>2 \end{cases}$$

מהי הנוסחה המפורשת של איברי הסדרה?

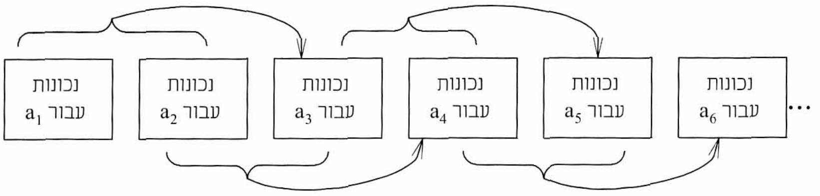
נחשב כמה ערכים של איברי הסדרה:

$$a_3 = 6-2=4\ ,\quad a_4 = 12-4=8\ ,\quad a_5 = 24-8=16\ ,\ \ldots$$

מכאן ניתן לנחש:

$$a_n = 2^{n-1}$$

לפני שנעבור להוכחת הנוסחה נדון בשיטה שבאמצעותה נוכיח אותה.
הסדרה הזו מוגדרת באמצעות שני האיברים הראשונים שלה. ערכו של האיבר השלישי תלוי בערכיהם של שני האיברים הראשונים, ערכו של $a_4$ תלוי בערכי $a_2$ ו- $a_3$, ערכו של $a_5$ תלוי בערכי $a_3$ ו- $a_4$, וכו'. מכאן שנכונות הטענה לגבי $a_3$ תלויה בנכונותה עבור $a_1$ ו- $a_2$; נכונות הטענה לגבי $a_4$ תלויה בנכונותה עבור $a_2$ ו- $a_3$, וכך
האיור מתאר את הקשר הלוגי של נכונות הטענה עבור איברים שונים.




ובכן כדי שטענה על איברים של סדרה המוגדרת באמצעות שני איברים בסיסיים תהיה נכונה, יש לדרוש את נכונותה עבור שני האיברים האלה, וכן עבור איבר כלשהו על-סמך נכונותה עבור שני האיברים הקודמים לו.

הנה הניסוח המלא של עקרון האינדוקציה שבו נשתמש:
אם טענה על איברים של סדרה המוגדרת באמצעות שני איברים בסיסיים ונוסחת נסיגה מקיימת את שתי הדרישות הבאות:

I. הטענה נכונה עבור שני האיברים הבסיסיים (הדרישה הזאת נקראת בסיס האינדוקציה);

II. מנכונות הטענה עבור שני איברים במקומות $(k-1)$ ו-$k$ נובע שהיא מתקיימת עבור האיבר ה-$(k+1)$ (הדרישה הזאת נקראת צעד האינדוקציה);

אז הטענה נכונה עבור כל איברי הסדרה.

נחזור להוכחת הנוסחה עבור הסדרה שלנו.

I. בבדיקת בסיס האינדוקציה יש לבדוק את נכונות הטענה עבור שני איברים $a_1$ ו-$a_2$ .

ובכן :

$$a_1 = 2^0 \quad , \quad a_2 = 2^1$$

II. נניח שהטענה נכונה עבור $a_{k-1}$ ו-$a_k$, ונוכיח אותה עבור $a_{k+1}$ (צ״ל $a_{k+1}=2^k$) .

נבטא את $a_{k+1}$ באמצעות נוסחת הנסיגה, ונציב בה את הערכים של $a_k$ ו- $a_{k-1}$ שאת נכונותם הנחנו בהנחת האינדוקציה :

$$a_{k+1} = 3a_k - 2a_{k-1} = 3\cdot 2^{k-1} - 2\cdot 2^{k-2} = 3\cdot 2^{k-1} - 2^{k-1} = 2\cdot 2^{k-1} = 2^k$$

קיבלנו שהטענה מתקיימת עבור $a_{k+1}$, ובכך הוכחנו את צעד האינדוקציה.

אם כך, הטענה מתקיימת עבור כל איברי הסדרה.

ב. הדוגמה הבאה ממחישה את חשיבותם של הערכים הראשונים בסדרה המוגדרת באמצעות נוסחת נסיגה. שינוי בערכים של האיברים הראשונים עשוי לגרום לשינויים גדולים בנוסחה המפורשת.

נתון :

$$a_n = \begin{cases} 0 \ , & n = 1 \\ 3 \ , & n = 2 \\ 3a_{n-1} - 2a_{n-2} \ , & n > 2 \end{cases}$$

שימו לב שנוסחת הנסיגה כאן זהה לזו מהדוגמה הקודמת, ההבדל הוא אך ורק בערכים של האיברים ראשונים של הסדרה.

נחשב ערכים של כמה מאיברי הסדרה :

$$a_3 = 9 \ , \quad a_4 = 27 - 6 = 21 \ , \quad a_5 = 63 - 18 = 45 \ , \quad a_6 = 135 - 42 = 93 \ , \ldots$$

כאן הניחוש קשה יותר מאשר בדוגמה הקודמת. אחת הדרכים לחפש את החוקיות במעבר בין איברי הסדרה היא בדיקת ההפרשים בין איברים עוקבים :

$$a_2 - a_1 = 3 \ , \quad a_3 - a_2 = 6 \ , \quad a_4 - a_3 = 12 \ , \quad a_5 - a_4 = 24 \ , \quad a_6 - a_5 = 48 \ ,\ldots$$

רואים שההפרשים גדלים פי 2 בכל מעבר. ההפרש בין שני האיברים הראשונים הוא 3. מכאן ניתן לנחש :

$$a_n - a_{n-1} = 3\cdot 2^{n-2}$$

**הערה** : הקשר בין ערך החזקה של 2 לאינדקס של איברי הסדרה נקבע בבדיקה ישירה :

$$a_2 - a_1 = 3\cdot 2^0 , \quad a_3 - a_2 = 3\cdot 2^1 , \quad a_4 - a_3 = 3\cdot 2^2 , \quad a_5 - a_4 = 3\cdot 2^3 , \quad a_6 - a_5 = 3\cdot 2^4 ,\ldots$$

נציב את הניחוש שלנו בנוסחת הנסיגה :

$$a_n = 3\cdot 2^{n-2} + a_{n-1} = 3\cdot 2^{n-2} + 3\cdot 2^{n-3} + a_{n-2} = \ldots = 3 + 3\cdot 2 + 3\cdot 4 + \ldots + 3\cdot 2^{n-2}$$

לכן עבור $n\geq 3$ מתקיים

$$a_n = 3(1 + 2 + 4 + ... + 2^{n-2}) = 3(2^{n-1} - 1)$$

ניתן להגיע לנוסחה הזאת בדרך נוספת, אם נשים לב שאיברי הסדרה הם כפולות של 3, ונבדוק מהו הגורם השני במכפלה המהווה את האיבר:

$$a_3 = 9 = 3\cdot 3\ ,\quad a_4 = 21 = 3\cdot 7\ ,\quad a_5 = 45 = 3\cdot 15\ ,\quad a_6 = 93 = 3\cdot 31\ , ...\ ,\quad a_n = 3(2^{n-1}-1)$$

ובכן, נוכיח את הנוסחה.

טענה: הנוסחה המפורשת לסדרה הנדונה היא:

$$a_n = 3(2^{n-1} - 1)$$

הוכחה:

I. עבור $a_1$ ו-$a_2$ הטענה מתקיימת:

$$a_1 = 3(2^0 - 1) \qquad , \qquad a_2 = 3(2^1 - 1)$$

II. נניח שהטענה נכונה עבור $a_{k-1}$ ו-$a_k$, ונוכיח אותה עבור $a_{k+1}$ (צ"ל $a_{k+1}=3(2^k - 1)$ ).

$$a_{k+1} = 3a_k - 2a_{k-1} =^{*} 3(3\cdot 2^{k-1} - 3) - 2(3\cdot 2^{k-2} - 3) =$$

$$=9\cdot 2^{k-1} - 9 - 6\cdot 2^{k-1} + 6 = 9\cdot 2^{k-1} - 3\cdot 2^{k-1} - 3 = 6\cdot 2^{k-1} - 3 = 3(2^k - 1)$$

* לפי הנחת האינדוקציה

קיבלנו שהטענה מתקיימת עבור $a_{k+1}$, ובכך הוכחנו את צעד האינדוקציה.

אם כך, הטענה מתקיימת עבור כל איברי הסדרה.

**הערות** על מגבלות העיקרון שנוסח בתחילת הסעיף זה:

1. בניסוח של עקרון האינדוקציה שבו השתמשנו בשתי הטענות בסעיף הזה, התייחסנו לאיבר של הסדרה ($a_n$) ולא למספר (n). עקרונות האינדוקציה אינם מוגבלים לסדרות - הם דנים במספרים טבעיים. במקרה שלנו מופיעים המספרים הטבעיים כאינדקסים של איברי הסדרה. אפשר היה לנסח את העיקרון במונחים של מספרים כפי שעשינו בסעיפים הקודמים וכפי שנעשה בסעיף הבא.

2. בספרות המתמטית לא נהוג להשתמש בעיקרון המוגבל לשני ערכים בסיסיים: במקרה שבדיקת בסיס האינדוקציה מתבצעת עבור יותר ממספר אחד, מקובל להשתמש בעקרון האינדוקציה המורחבת שנדון בו בסעיף הבא.

ג. נדון בסדרת מספרים חשובה הנקראת **מספרי פיבונאצ'י**.

הנה הגדרתה:

$$a_n = \begin{cases} 1\ , & n = 1 \\ 1\ , & n = 2 \\ a_{n-1} + a_{n-2}\ , & n > 2 \end{cases}$$

הסדרה הזאת ממלאת תפקיד חשוב ביישומים שונים. היא התגלתה במאה ה-13 על-ידי מתמטיקאי איטלקי בשם פיבונאצ׳י (בן של בונאצ׳י= filius Bonacci =Fibonacci ). ההקשר שבו הופיעה הסדרה היה הבעיה הבאה: פלוני קנה זוג ארנבות שנולדו באותו יום; כמה ארנבות יהיו לפלוני אחרי שנה, אם כל זוג ארנבות מוליד זוג חדש מדי חודש החל מחודשיים אחרי היוולדו. הספירה מתבצעת בתחילת כל חודש, וכוללת את הזוגות שזה-עתה נולדו.

נסמן ב-n את מספר החודש, וב- $a_n$ את מספר הזוגות בתחילת החודש ה- n-י.

בתחילת החודש הראשון יש זוג אחד, לכן $a_1=1$; אחרי חודש, בתחילת החודש השני, עדיין יש זוג אחד, ולכן $a_2 = 1$. אחרי חודשיים (כלומר בתחילת החודש השלישי) נולד זוג חדש: $a_3 = 1 + 1 = 2$; אחרי שלושה חודשים (בתחילת החודש הרביעי) הזוג הראשון מוליד זוג חדש נוסף: $a_4 = 2 + 1 = 3$; אחרי ארבעה חודשים (בתחילת החודש החמישי) מולידים שני הזוגות הראשונים: $a_5 = 3 + 2 = 5$.

באופן כללי, בתחילת החודש ה- n-י שווה מספר הזוגות ($a_n$) למספר הזוגות שהיה בחודש הקודם ($a_{n-1}$) בתוספת מספר הזוגות החדשים שנולדו לארנבות שגילם חודשיים ומעלה ($a_{n-2}$):

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

נתבונן באיברים הראשונים של סדרת פיבונאצ׳י:

$$a_1 = a_2 = 1\ ,\quad a_3 = 1+1 = 2\ ,\quad a_4 = 2+1 = 3\ ,\quad a_5 = 3+2 = 5\ ,$$

$$a_6 = 5+3 = 8\ ,\quad a_7 = 8+5 = 13\ ,\quad a_8 = 13+8 = 21\ ,\quad a_9 = 21+13 = 34\ ,\ \dots$$

מציאת נוסחה מפורשת עבור $a_n$ במקרה זה היא בעיה יותר מסובכת מאשר בדוגמאות הקודמות (ראו שאלה 11 ה׳ בתרגילים).

מספרי פיבונאצ׳י מתארים סדרות רבות מתחומי מדע שונים. נראה דוגמה:

ננסה למצוא את מספר הסדרות הבינאריות (כלומר המורכבות רק מהספרות 0 ו-1) באורך נתון שאין בהן שני 1-ים סמוכים.

נסמן ב- F(n) את מספר הסדרות הבינאריות באורך n שעונות לדרישה הנ״ל.

טענה: F(n) , מספר הסדרות הבינאריות באורך n שאין בהן שני 1-ים סמוכים, מקיים:

$$F(1) = 2$$

$$F(2) = 3$$

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2)\ ,\quad n>2.$$

הוכחה:

בטענה שלפנינו יש שני חלקים:

1) עבור n=1 ועבור n=2 נתונים ערכים מפורשים שיש לבדוק את נכונותם.

ובכן, עבור n=1 קיימות שתי סדרות מתאימות: 0 או 1; עבור n=2 קיימות שלוש סדרות מתאימות: 10 ,01 ,00.

2) עבור n>2 יש להוכיח את טענה.

נתבונן בסדרה באורך n עבור n>2. הסדרה יכולה להסתיים ב-0 או ב-1.

במקרה הראשון, אם נוריד את האפס האחרון מצד ימין, נקבל סדרה באורך n-1 בעלת התכונה הדרושה. כלומר כל סדרה בעלת התכונה הנדרשת באורך n-1 מייצרת סדרה דומה באורך n המסתיימת ב-0.

במילים אחרות, מכל סדרה באורך n-1 המקיימת את הדרישה, אפשר לקבל סדרה מהסוג הנדרש באורך n , על-ידי הוספת 0 בצד ימין.

ובכן, מספר הסדרות באורך n המסתיימות ב-0 שווה למספר הסדרות באורך n-1.

אם סדרה באורך n מסתיימת ב-1, אז לפניו חייב להימצא 0. אם נוריד את 01 מסוף הסדרה, נקבל סדרה באורך n-2 המקיימת את הדרישה. לכן כל סדרה בעלת התכונה הנדרשת שאורכה n-2 מייצרת סדרה כזו באורך n המסתיימת ב-1.

במילים אחרות, מכל סדרה באורך n-2 המקיימת את הדרישה אפשר לקבל סדרה מהסוג הנדרש באורך n על-ידי הוספת 01 בצד ימין.

ובכן מספר הסדרות באורך n המסתיימות ב-1 שווה למספר הסדרות באורך n-2.

בסך-הכול, מספר הסדרות מהסוג הנדרש באורך n , שווה לסכום של מספר הסדרות מהסוג הזה באורך n-1 ומספר הסדרות הדומות באורך n-2.

מש"ל

מכאן מתקבל הקשר בין מספר הסדרות מסוג זה באורך n לבין מספרי פיבונאצ'י:

שני האיברים הראשונים של הסדרה שווים לאיברים השלישי והרביעי של סדרת פיבונאצ'י.

שאר האיברים של הסדרה הזאת מוגדרים באמצעות נוסחת נסיגה זהה לזו המגדירה את מספרי פיבונאצ'י. לכן גם האיברים של הסדרה הזאת זהים לאלה של סדרת פיבונאצ'י החל מהאיבר השלישי שלה. אם $a_n$ מסמן מספר פיבונאנצ'י ה- n-י, אז

$$F(n)=a_{n+2}$$

שימו לב: ההוכחה איננה הוכחה באינדוקציה! לא השתמשנו בנכונות הטענה עבור ערכים קודמים, אלא הוכחנו אותה ישירות עבור n.

ננסה להבין את הקשר בין זוגות הארנבות לבין הסדרות הללו.

נקשר בין 1-ים לזוגות של ארנבות. אחד במקום הראשון מתאר את הזוג הראשון שנולד בתחילת החודש השלישי. אחד במקום השני מתאר את הזוג הראשון שנולד בתחילת החודש הרביעי. באופן כללי, 1 המופיע במקום ה- k-י בסדרה מתאר את הזוג שנולד בתחילת החודש ה- k+2.

נשים לב שזוג ארנבות מוגדר באופן חד-משמעי באמצעות תיאור כל האבות שלו. לכל זוג כזה מותאמת סדרת 0-ים ו- 1-ים באופן הבא:

נסרוק את הסדרה משמאל לימין. אם ה-1 האחרון מופיע במקום ה-k, אז הסדרה מתארת את השושלת של הזוג שנולד בתחילת החודש ה- k+2 מאבות שזמן לידתם מתואר על-ידי ה-1 שלפני כן; וכך הלאה.

לדוגמה, הסדרה $\overset{}{0}\overset{2}{1}00\overset{5}{1}0\overset{7}{1}000\overset{11}{1}0$ מותאמת לזוג שנולד בתחילת החודש ה- 13 (1 במקום ה-11), ההורים שלו נולדו בתחילת החודש ה-9 (1 במקום ה-7), ההורים של ההורים נולדו בתחילת החודש ה-7, והורים שלהם בתחילת החודש ה-4. תאריך הלידה של הזוג הראשון (המקורי) אינו מופיע בסדרה. הזוג המקורי מוליד את הזוג שאליו מתייחס ה-1 הראשון משמאל.

ובכן הגדרנו התאמה (פונקציה חד-חד-ערכית) בין סדרות בינאריות באורך n ללא צמדים של 1-ים, לבין זוגות הארנבות שנולדו עד לתחילת החודש ה- n+2 (כולל).

ההתאמה הזאת מסבירה את הקשר בין מספר הסדרות מסוג זה למספר זוגות הארנבות, דהיינו למספר פיבונאצ'י.

## 5. עקרון האינדוקציה המורחבת

כפי שראינו בסעיף הקודם, כדי להוכיח שטענה כלשהי נכונה עבור k+1, לא תמיד מספיק להניח שהיא נכונה עבור k בלבד, ולעתים יש להסתמך על כך שהטענה נכונה עבור ערכים הקטנים מ-k. הכלי המקובל במקרה כזה הוא **עקרון האינדוקציה המורחבת**. העיקרון הזה מכליל את עקרונות האינדוקציה שהשתמשנו בהם בסעיף הקודם. בעיקרון הכללי לא מתייחסים למספר ספציפי של איברים רצופים שנכונות הטענה עבורם מבטיחה את הנכונות עבור האיבר הבא. במקום זה מניחים שהטענה נכונה עבור כל

ערך עד מספר מסוים (כל ערך עד k, כולל) ועל-סמך זה מוכיחים שהטענה נכונה עבור הערך הבא (עבור k+1). הנה ניסוח של עקרון אינדוקציה המורחבת:

יהיו a,b שני מספרים טבעיים כך ש- a<b.

**אם טענה כלשהי על המספרים הטבעיים מקיימת את שתי הדרישות הבאות:**

**I. הטענה מתקיימת עבור ערכים עוקבים החל מהערך a עד לערך b ;**

**II. מנכונות הטענה עבור כל הערכים החל מ-a עד ל-k ($k \geq b$) נובע שהיא נכונה עבור k+1;**

**אזי הטענה נכונה עבור כל מספר טבעי החל מ-a.**

נשים לב שמ-a עד b (כולל a ו-b בעצמם) יש b-a+1 מספרים. למשל מ-1 עד 2 יש שני מספרים, 1 ו-2:

$$2 = 2 - 1 + 1$$

מ-2 עד 4 יש שלושה מספרים, 2, 3, ו-4:

$$3 = 4 - 2 + 1$$

וכו'. נסמן:

$$b-a+1=p$$

אם נבטא את b באמצעות a ו-p נקבל:

$$b=a+p-1$$

בניסוח המקובל של העיקרון משתמשים במספר p (ואילו b אינו מופיע במפורש). הנה עקרון האינדוקציה המורחבת בנוסח המקובל:

**אם טענה כלשהי על המספרים הטבעיים מקיימת את שתי הדרישות הבאות:**

**I. הטענה מתקיימת עבור p ערכים עוקבים החל מהערך a;**

**II. מנכונות הטענה עבור כל n המקיים $a \leq n \leq k$ ( $k \geq a + p - 1$ ) נובע שהיא נכונה עבור k+1;**

**אזי הטענה נכונה עבור כל מספר טבעי החל מ-a.**

**דוגמאות**

א. נוכיח שכל מספר $n \geq 4$ טבעי ניתן להציג כסכום של כפולה של 2 וכפולה של 5.

למשל,

$$4 = 2\cdot2 + 0\cdot5 \ , \ 5 = 0\cdot2 + 1\cdot5 \ , \ 6 = 3\cdot2 + 0\cdot5 \ , \ 7 = 1\cdot2 + 1\cdot5 \ , \ 8 = 4\cdot2 + 0\cdot5 \ , 9 = 2\cdot2 + 1\cdot5 \ ...$$

נניח שהטענה שלנו נכונה עבור k כלשהו; איננו יכולים להסיק מכך שום מסקנה לגבי דרך ההצגה של k+1 בצורה הנדרשת. לעומת זאת, אילו ידענו שהטענה נכונה עבור k–1, היינו יכולים להוכיח בקלות שהיא נכונה עבור k+1, מכיוון ש-

$$k + 1 = (k - 1) + 2$$

ובכן נשתמש בעקרון האינדוקציה המורחבת.

I. את בסיס האינדוקציה בדקנו לעיל.

II. נניח שהטענה מתקיימת עבור כל n מ-4 עד k, ונוכיח אותה עבור k+1.

לפי הנחת האינדוקציה קיימים שני מספרים טבעיים c ו-d כך ש-

$$k - 1 = 2c + 5d$$

על כן,

$$k+1 = (k-1) + 2 = 2c + 5d + 2 = 2(c+1) + 5d$$

וכך גם k+1 הוצג כסכום של כפולה של 2 וכפולה של 5.

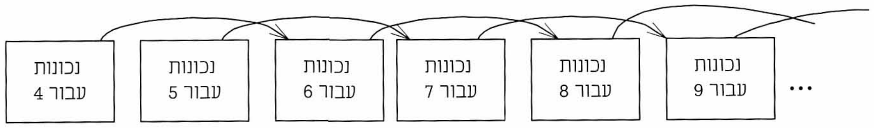
קיבלנו שהטענה מתקיימת עבור k+1, ובכך הוכחנו את צעד האינדוקציה.

אם כך, הטענה מתקיימת עבור כל $n \geq 4$.

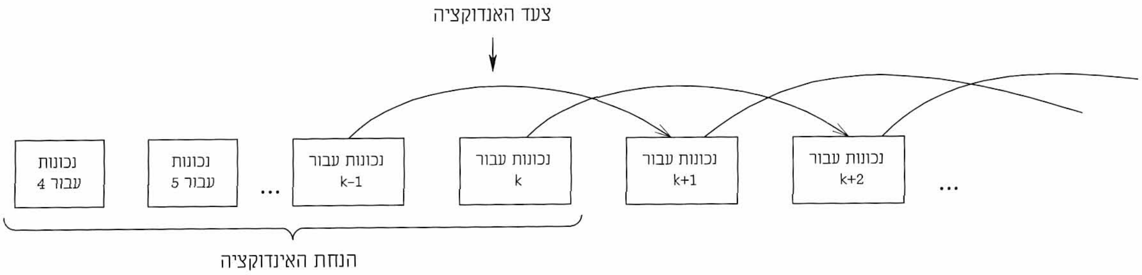
**הערות**

1. בדוגמה האחרונה, בשונה מדוגמאות שראינו בנושא של נוסחאות נסיגה, נכונות הטענה עבור k+1 נובעת מנכונותה עבור ערך אחד בלבד: עבור k-1, ולא מנכונותה עבור שני ערכים (גם k-1 וגם k) כמו במקרה של נוסחאות נסיגה. לכאורה אין צורך להניח את נכונות הטענה עבור k. את נכונות הטענה עבור k אנו צריכים כדי להבטיח **רצף של ערכים** שעבורם הטענה נכונה. מנכונות הטענה עבור k נוכל להסיק את נכונותה עבור k+2. נכונות הטענה עבור k+3 נובעת מנכונותה עבור k+1 אשר נובעת מנכונותה עבור k–1. כלומר כאן כבר לא נחוצה שום הנחה חדשה. לכן בשלב של בסיס האינדוקציה יש לבדוק את נכונות הטענה עבור שני ערכים: n=4 ו- n=5. שני האיורים הבאים עשויים להמחיש את הרעיון.

האיור שלפנינו מתאר את הקשר הלוגי בין נכונות הטענה עבור ערכים שונים.




והנה איור המתאר את המבנה הלוגי של ההוכחה:




2. גם הפעם, כמו בדוגמאות של סדרות בסעיף הקודם, לא ניצלנו את מלוא העוצמה של הנחת האינדוקציה. אפשר היה להניח את נכונות הטענה רק עבור k-1 ו-k. אך ניסוח כזה אינו מקובל בספרות המתמטית: אם צעד האינדוקציה מצריך שימוש בנכונות הטענה עבור יותר מערך אחד, מפעילים את עקרון האינדוקציה המורחבת.

ב. בהגדרת סדרה באמצעות נוסחת נסיגה עשויים להופיע יותר משני איברים בסיסיים.

נתבונן בסדרה

$$a_n = \begin{cases} 1\ , & n = 1 \\ 2\ , & n = 2 \\ 3\ , & n = 3 \\ a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}\ , & n > 3 \end{cases}$$

נוכיח שלכל n טבעי מתקיים $a_n < 2^n$.

שימו לב: הנושא כאן איננו מציאה או הוכחה של נוסחה מפורשת לאיברי הסדרה, אלא תכונה מסוימת של האיברים האלה.

כיוון שבהגדרה מופיעים שלושה ערכים בסיסיים, את בסיס האינדוקציה יש לבדוק עבור שלושה ערכים אלה. בצעד האינדוקציה יש להניח שהטענה נכונה עבור שלושה ערכים רצופים ( k-2, k-1 ו-k ) ועל-סמך ההנחה הזאת יש להוכיח את הטענה עבור k+1.

הוכחה:

I. בבדיקת הבסיס בודקים את נכונות הטענה עבור n=1, 2, 3:

$$a_1 < 2^1 \quad , \quad a_2 < 2^2 \quad , \quad a_3 < 2^3$$

ובכן, עבור כל $n \le 3$ הטענה מתקיימת.

II. נניח שהטענה מתקיימת עבור k-2, k-1 ו-k,

ונוכיח אותה עבור k+1 (צ"ל $a_{k+1} < 2^{k+1}$).

שימו לב: אנו דנים במקרה ש- 3<k+1, לכן בהוכחה נשתמש בשורה הרביעית של הגדרת הסדרה.

על כן,

$$a_{k+1} = a_k + a_{k-1} + a_{k-2} <^* 2^k + 2^{k-1} + 2^{k-2} =$$

$$= 2^{k-2}(4 + 2 + 1) = 7 \cdot 2^{k-2} < 8 \cdot 2^{k-2} = 2^3 \cdot 2^{k-2} = 2^{k+1}$$

* לפי הנחת האינדוקציה

קיבלנו שהטענה מתקיימת עבור k+1, ובכך הוכחנו את צעד האינדוקציה.

אם כך, הטענה מתקיימת עבור כל n טבעי.

ג. לטענה הבאה נביא שלוש הוכחות שונות: הוכחה המשתמשת בעקרון האינדוקציה המורחבת; הוכחה המשתמשת בניסוח הרגיל, והוכחה שגויה שמכילה טעות נפוצה שיש להיזהר ממנה.

טענה: כל מספר טבעי n ניתן להציג בצורה $n = 3a - 2b$, כאשר $a,b \ge 0$ שלמים.

**הערה בנוגע לסימון**

אחד המאפיינים של המתמטיקה הוא הסימון המיוחד. לסימון מתאים יש לפעמים השפעה גדולה מאוד על אפשרות לבצע מהלכים מתמטיים.[6] במקרה שלפנינו נצטרך לדון במקדמים של 2 ושל 3 בהצגות של מספרים שונים. בכל הצגה יש שני מקדמים. במהלך ההוכחה נתייחס למקדמים כאלו עבור $k+1$, $k$, $k-1$, ואף $k-2$. אם לא יהיה ברשותנו סימון מתאים, נסתבך בין המקדמים המשמשים בהצגה של המספרים השונים. לכן נכניס את הסימון הבא: את המקדמים של 2 ושל 3 הנחוצים להצגת מספר מסוים נסמן באמצעות אינדקסים המציינים את המספר הזה:

$$n = 3a_n - 2b_n$$

נעבור להוכחות השונות של הטענה.

הוכחה ראשונה:

I. נבדוק את הטענה עבור שלושה ערכים:

$1 = 1\cdot3 - 1\cdot2$, כלומר $a_1 = b_1 = 1$;

$2 = 2\cdot3 - 2\cdot2$, כלומר $a_2 = b_2 = 2$;

$3 = 1\cdot3 - 0\cdot2$, כלומר $a_3 = 1$ ו- $b_3 = 0$.

II. נניח שהטענה מתקיימת עבור כל n טבעי שהוא קטן או שווה ל-k, ונוכיח אותה עבור $k+1$.

ובכן,

$$k + 1 = (k - 2) + 3 \overset{*}{=} 3a_{k-2} - 2b_{k-2} + 3 = 3(a_{k-2} + 1) - 2b_{k-2}$$

* לפי הנחת האינדוקציה, את $k-2$ ניתן להציג כ- $k - 2 = 3a_{k-2} - 2b_{k-2}$.

אם כן מצאנו עבור $k+1$ ייצוג כדרוש:

$$k + 1 = 3a_{k+1} - 2b_{k+1}$$

כאשר

$$a_{k+1} = a_{k-2} + 1 \quad , \quad b_{k+1} = b_{k-2}$$

קיבלנו שהטענה מתקיימת עבור $k+1$, ובכך הוכחנו את צעד האינדוקציה.

אם כך, הטענה מתקיימת עבור כל n טבעי

**הערות**

1. בצעד האינדוקציה השתמשנו בנכונות הטענה עבור $k-2$, כלומר חזרנו מ- $k+1$ שלושה ערכים אחורנית ($k$, $k-1$, $k-2$), לכן בשלב בדיקת בסיס האינדוקציה היה עלינו לבדוק את נכונות הטענה לשלושה ערכים.

2. שימו לב: לא מדובר בהצגה יחידה מהסוג הנדון. לאותו מספר עשויות להיות הצגות רבות. הנה כמה דרכים אפשריות להציג את 3:

$$3 = 1\cdot3 - 0\cdot2 = 3\cdot3 - 3\cdot2 = 5\cdot3 - 6\cdot2 = \ldots$$

[6] הדוגמה הבולטת ביותר היא האלגברה, שהתפתחותה נבלמה במשך מאות שנים עד שהומצא עבור הנעלמים סימון מתאים - הסימון שבו אנו משתמשים גם היום.

הוכחה שנייה:

נוכיח את הטענה ללא שימוש בעקרון האינדוקציה המורחבת.

I. נבדוק את הטענה עבור n=1: $1 = 1\cdot 3 - 1\cdot 2$ .

II. נניח שהטענה מתקיימת עבור k, ונוכיח אותה עבור k+1.

את המספר (k+1) נציג כסכום של שני המספרים k ו-1 (כגון 1+1 = 2, 2+1 = 3, 3+1 = 4, וכו'):

$$(k+1) = k+1 =^{*} 3a_k - 2b_k + 1 = 3(a_k + 1) - 2(b_k + 1)$$

* לפי הנחת האינדוקציה ניתן להציג את k כ- $k = 3a_k - 2b_k$.

ובכן מצאנו ייצוג מתאים עבור k+1:

$$k+1 = 3a_{k+1} - 2b_{k+1}$$

כאשר

$$a_{k+1} = a_k + 1 \quad , \quad b_{k+1} = b_k + 1$$

קיבלנו שהטענה מתקיימת עבור k+1, ובכך הוכחנו את צעד האינדוקציה.

אם כך, הטענה מתקיימת עבור כל n טבעי.

"הוכחה" שלישית (הוכחה **שגויה**)

I. נבדוק את הטענה עבור שני ערכים:

$$1 = 1\cdot 3 - 1\cdot 2 \ , \ 2 = 2\cdot 3 - 2\cdot 2$$

II. נניח שהטענה מתקיימת עבור כל n קטן או שווה ל-k, נוכיח אותה עבור k+1.

$$k+1 = (k-1) + 2 =^{*} 3a_{k-1} - 2b_{k-1} + 2 = 3a_{k-1} - 2(b_{k-1} - 1)$$

* לפי הנחת האינדוקציה ניתן להציג את k-1 כ- $k-1 = 3a_{k-1} - 2b_{k-1}$.

ובכן מצאנו ייצוג מתאים עבור k+1:

$$k+1 = 3a_{k+1} - 2b_{k+1}$$

כאשר

$$a_{k+1} = a_{k-1} \quad , \quad b_{k+1} = b_{k-1} - 1$$

השגיאה בהוכחה הזאת היא בשימוש במספר $(b_{k-1} - 1)$: אם $b_{k-1}=0$ אז $(b_{k-1}-1)$ הוא מספר שלילי, ולכן ההצגה שמתקבלת אינה עונה על דרישות הטענה; כלומר, אם בהצגה של k–1 הערך של b הוא 0, אז עבור k+1 קיבלנו הצגה לא מתאימה.

שימו לב, שבשתי ההוכחות הקודמות( הנכונות) המקדמים שמצאנו עבור ההצגה של k+1 לא התקבלו באמצעות הקטנה של המקדמים מההצגות של מספרים אחרים.

ד. נראה עוד דוגמה לטענה שאפשר להוכיח אותה גם ללא שימוש בעקרון האינדוקציה המורחבת, אך אז יש צורך ב"טריק" מתמטי.

נוכיח שעבור כל n טבעי, הביטוי $a^n - b^n$ מתחלק ב- $(a-b)$ ללא שארית.

I. הפעם לא ברור מראש מה צריך להיות עומק בסיס אינדוקציה. נבדוק את נכונות הטענה עבור כמה ערכים של n. אם יתברר במהלך ההוכחה שיש צורך להעמיק את הבסיס - נחזור אל השלב הזה אחרי צעד האינדוקציה.

ובכן, הטענה מתקיימת עבור $n=1,2,3$ , כי $(a^1-b^1)$, $(a^2-b^2)$ ו- $(a^3-b^3)$ מתחלקים ב- $(a-b)$ ללא שארית.

II. נניח שהטענה מתקיימת עבור כל n קטן או שווה ל-k, ונוכיח אותה עבור $k+1$ .

(צ"ל $(a^{k+1} - b^{k+1})$ מתחלק ב- $(a-b)$ .)

ננסה לקשר בין הטענה עבור k לבין הטענה עבור $k+1$ ; לשם כך נכפול את $(a^k - b^k)$ ב- $(a+b)$ :

$$(a^k - b^k)(a + b) = a^{k+1} - ab^k + a^kb - b^{k+1} = (a^{k+1} - b^{k+1}) + ab(a^{k-1} - b^{k-1})$$

מכאן,

$$a^{k+1} - b^{k+1} = (a^k - b^k)(a + b) - ab(a^{k-1} - b^{k-1})$$

אם הטענה נכונה עבור k ו- $k-1$, אז היא נכונה גם עבור $k+1$ ; אם כך, עומק הבסיס צריך להיות שני ערכים (כלומר די בבסיס שבדקנו).

קיבלנו שהטענה מתקיימת עבור $k+1$, ובכך הוכחנו את צעד האינדוקציה.

אם כך, הטענה מתקיימת עבור כל n טבעי.

לטענה הזאת קיימת הוכחה אחרת, שאינה מצריכה שימוש בעקרון האינדוקציה המורחבת. ההוכחה הזאת מבוססת על מעבר מנכונות הטענה עבור k לנכונותה עבור $k+1$ באמצעות "טריק" אלגברי :

נחבר את $ab^k$ ל- $(a^{k+1}-b^{k+1})$ , ונחסר אותו :

$$a^{k+1} - b^{k+1} = a^{k+1} - b^{k+1} + ab^k - ab^k = a(a^k - b^k) - b^k(a - b)$$

האיבר הראשון בביטוי שקיבלנו מתחלק ב- $(a-b)$ ללא שארית לפי הנחת האינדוקציה, והאיבר השני הוא כפולה של $(a-b)$, לכן ההפרש כולו מתחלק ב- $(a-b)$ ללא שארית.

נכונות הטענה עבור $k+1$ מוכחת כאן רק על-סמך נכונותה עבור k.

הקושי בהוכחה השנייה הוא להגיע לרעיון להשתמש ב- $ab^k$. כמו בהרבה מקרים במתמטיקה, יש כאן "טריק" שמפשט את ההוכחה. היכולת למצוא רעיונות כאלה נרכשת בעזרת ניסיון.

ה. נדגים כעת "הוכחה" לטענה שגויה. הדוגמה הזאת ממחישה את החשיבות שבקביעה נכונה של עומק בסיס האינדוקציה.

טענה : כל מספר טבעי $n \geq 7$ ניתן להצגה כסכום של כפולה של 7 וכפולה של 11.

I. בסיס האינדוקציה : עבור $n=7$ הטענה נכונה :

$$7 = 1 \cdot 7 + 0 \cdot 11$$

II. נניח שהטענה נכונה עבור כל n מ-7 עד k, ונוכיח אותה עבור $k+1$.

ובכן,

$$(k + 1) = (k - 6) + 7$$

לפי הנחת האינדוקציה קיימים שני מספרים טבעיים a ו-b כך ש- $k - 6 = 7a + 11b$ . ניתן אם כן לרשום:

$$(k + 1) = (k – 6) + 7 = 7a + 11b + 7 = 7(a + 1) + 11b$$

וכך גם (k+1) הוצג כסכום של כפולה של 7 וכפולה של 11.

אבל הטענה איננה נכונה: למשל את 8 לא ניתן להציג כסכום של כפולה של 7 וכפולה של 11!

הטעות היא בכך שבמהלך ההוכחה השתמשנו בהנחה שהטענה נכונה עבור k-6, אך בשלב בדיקת בסיס האינדוקציה בדקנו את נכונות הטענה עבור ערך אחד בלבד. מנכונות הטענה עבור 7 לא נובעת נכונותה עבור 8, לכן צעד האינדוקציה נעשה באופן לא נכון.

**הערות על השימוש בעקרון האינדוקציה המורחבת**

1. כאשר מתחילים בהוכחה לא תמיד ניתן לקבוע מראש בכמה ערכים קודמים נשתמש לצורך הוכחת צעד האינדוקציה (מהו **עומק הבסיס** הדרוש). במקרים כאלה יש לחזור לשלב בסיס האינדוקציה **אחרי** ביצוע צעד האינדוקציה, ולהשלים את בדיקת הבסיס בהתאם למספר הערכים הקודמים ל-k שבהם השתמשנו בצעד האינדוקציה.

   צורת הכתיבה: בהוכחות נהוג לדון בבסיס האינדוקציה **לפני** צעד האינדוקציה, לכן אם לא ידוע מראש עומק הבסיס הנחוץ להוכחה, יש להשאיר מקום להשלמתו.

   נדון במספר האיברים שיש לבדוק בבסיס האינדוקציה.

   אם בהוכחה נעשה שימוש בנכונות הטענה עבור k-1, בשלב בסיס האינדוקציה יש לבדוק את שני הערכים הראשונים; אם בהוכחה השתמשנו בנכונות הטענה עבור k-2, בשלב בסיס האינדוקציה יש לבדוק נכונות עבור שלושת הערכים הראשונים, וכן הלאה. ובאופן כללי: אם בהוכחה נעשה שימוש בנכונות הטענה עבור k–m, בשלב בסיס האינדוקציה יש לבדוק את נכונות הטענה עבור m+1 הערכים הראשונים.

2. כדי להימנע מטעות בהבנת התפקידים של k ו-n בניסוח צעד האינדוקציה, מומלץ לא לרשום "$n \leq k$" אלא לנסח במילים "n קטן או שווה ל-k", כי את הביטוי בסימנים אפשר לקרוא גם "k גדול או שווה ל-n", ובניסוח הזה ההנחה היא חסרת משמעות. במקום הניסוח הזה אפשר גם לכתוב "עבור כל n מ-1 עד k".

3. נדגיש שעקרון האינדוקציה המורחבת אינו עיקרון חדש, וניתן לנסח אותו במונחים של העיקרון בניסוח הרגיל שעסקנו בו קודם, תוך סרבול מסוים של ניסוח הטענות.

## *6. עוד על התקֵפות של שיטת האינדוקציה המתמטית

לסיכום נדון בהצדקה לשימוש בעקרון האינדוקציה. כדי להיווכח בתקֵפות העיקרון, נבדוק מה משמעות הדבר אם הוא אינו תקף. פירוש הדבר הוא, שעלולה להיות טענה בלתי נכונה שהוכחה באינדוקציה. (השיטה שאנו נוקטים כעת נקראת הוכחה בדרך השלילה.)

נניח שקיימת טענה שגויה כלשהי שהוכחה באמצעות אינדוקציה. קיים אם כן ערך כזה שעבורו הטענה איננה מתקיימת.

יהי m הערך המינימלי שעבורו הטענה אינה מתקיימת.

שלב בדיקת בסיס האינדוקציה אישש את הטענה עבור 1, לכן $m>1$.

ובכן הטענה שלנו מתקיימת עבור $1, 2, \ldots (m-1)$, ואילו עבור m היא איננה מתקיימת.

צעד האינדוקציה הראה שעל-סמך נכונות הטענה עבור k ניתן לקבוע את נכונותה עבור $(k+1)$, ובפרט, אם נציב במקום k את $(m-1)$, נקבל שהטענה מתקיימת גם עבור $m=k+1$. הגענו לסתירה עם ההנחה שעבור m הטענה לא מתקיימת.

וכך, ההנחה שקיים m כלשהו שהטענה אינה מתקיימת עבורו הביאה אותנו לסתירה. באופן כללי יותר, ההנחה שקיימת טענה שגויה שניתן להוכיחה באמצעות עקרון האינדוקציה - מביאה לסתירה. הסתירה הזאת מאששת את עקרון האינדוקציה.

**הערות**

1. בהוכחה של נכונות עקרון האינדוקציה לעיל השתמשנו ב**עקרון המספר המינימלי**. העיקרון הזה אומר שאם יש מספרים טבעיים בעלי תכונה כלשהי, אז קיים **מספר מינימלי** בעל אותה תכונה. במקרה שלנו התכונה היא שעבור המספרים האלה לא מתקיימת טענה שהוכחה באינדוקציה.

   עקרון המספר המינימלי מאוד ברור מבחינה אינטואיטיבית על-סמך ההכרות שלנו עם המספרים הטבעיים, אך מתברר שעקרון האינדוקציה ועקרון המספר המינימלי נובעים זה מזה. לכן אפשר גם לקבל את עקרון האינדוקציה כאקסיומה ולהוכיח באמצעותו את עקרון המספר המינימלי.

2. כפי שראינו, באינדוקציה מוכיחים טענות שהגיעו אליהן בדרך אחרת, למשל על-ידי התבוננות במקרים פרטיים והכללת המסקנה למקרה הכללי. כלומר החלק של אינדוקציה במשמעות המילולית של המילה (מעבר מהפרט אל הכלל) מתמצה בהגעה לנוסחה. החלק הזה מסתיים עוד **לפני** ההוכחה, ואילו ההוכחה עצמה היא ב**שיטה הדדוקטיבית** הנהוגה במתמטיקה. כלומר, למרות השם "אינדוקציה", למעשה העיקרון הנדון הוא דדוקטיבי: בצעד האינדוקציה מוכיחים שהמעבר מנכונות הטענה עבור מספר כלשהו לנכונותה עבור המספר הבא אחריו נכונה עבור **כל** מספר!

כדי להבדיל את השיטה המתמטית מזו של מדעי הטבע, האינדוקציה הנהוגה במתמטיקה נקראת **אינדוקציה שלמה** (כלומר כזו המכסה את כל המקרים). זאת בניגוד לאינדוקציה הלא-מלאה שבאמצעותה מגיעים לחוקי הטבע. חוקי הטבע מנוסחים על-סמך ניסיון בלבד, ועשויים להתגלות כבלתי נכונים במקרים מסוימים (זאת למשל דרכה של הפיזיקה, שמגלה חוקים חדשים ומצמצמת את תחום התקפות של חוקים שכבר מוכרים). טענות המוכחות באמצעות אינדוקציה מתמטית (מלאה) אי-אפשר שיתגלו כבלתי נכונות.

## 7. תרגילים[7]

1. הוכיחו באינדוקציה שהזהויות הבאות מתקיימות עבור כל n טבעי:

א.

$$S_n = a+(a+d)+(a+2d)+\dots+[a + (n-1)d]=\frac{n[2a+(n-1)d]}{2}$$

(נוסחת הסכום של סדרה חשבונית)

ב.

$$5 + 7 + 9 +\dots+ (2n+3) = n(n+4)$$

ג.

$$2+5+8+\dots+(3n-1) = \frac{n(3n+1)}{2}$$

ד.

$$1-3+5-7+9-\dots+(-1)^{n+1}(2n-1)=(-1)^{n+1}n$$

ה.

$$1-2+3-4+5-6+\dots+(-1)^{n+1}n=\frac{1+(-1)^{n+1}(2n+1)}{4}$$

ו.

$$1\cdot 2+3\cdot 4+5\cdot 6+\dots+(2n-1)\cdot(2n)=\frac{n(n+1)(4n-1)}{3}$$

ז.

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\dots+n\cdot(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

ח.

$$2\cdot 5+3\cdot 6+4\cdot 7+\dots+(n+1)(n+4) = \frac{n(n+4)(n+5)}{3}$$

ט.

$$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

י.

$$1^3+2^3+3^3+\dots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

יא.

$$1^2\cdot 2 + 2^2\cdot 3 + 3^2\cdot 4 +\dots+ n^2\cdot(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}$$

---

[7] לתרגילים המסומנים ב- # מופיע פתרון בסעיף 8.

יב.

$$2^2\cdot 1 + 3^2\cdot 2 + 4^2\cdot 3 + \ldots + (n+1)^2\cdot n = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+5)}{12}$$

יג.

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

יד.

$$1^2 + 4^2 + 7^2 + \ldots + (3n-2)^2 = \frac{n(6n^2-3n-1)}{2}$$

טו.

$$2^2 + 5^2 + 8^2 + \ldots + (3n-1)^2 = \frac{n(6n^2+3n-1)}{2}$$

טז.

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n+1} n^2 = (-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2}$$

יז.

$$(1 - 4) + (9 - 16) + \ldots + [(2n-1)^2 - (2n)^2] = -n(2n+1)$$

השוו בין הטענה הזאת לטענה הקודמת. שימו לב לחשיבות האיבר הכללי בתיאור של סדרות.

יח.

$$(1+2+3+\ldots+n)^2 = n^3 + (1+2+3+\ldots+(n-1))^2$$

(את הנוסחה הזאת הוכיח ר' לוי בן גרשום, הרלב"ג, במאה ה-14 ; ראו סעיף 9.)

יט.

$$(1 + 2 + 3+\ldots +n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3+\ldots+ n^3$$

השוו בין הטענה הזאת לטענה הקודמת : שימו לב שאגפי שמאל של שתי הנוסחאות זהים.

כ.

$$1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + 3\cdot 4\cdot 5 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

כא.

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

כב.

$$\frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 8} + \frac{1}{8\cdot 11} + \ldots + \frac{1}{(3n-1)\cdot(3n+2)} = \frac{n}{2(3n+2)}$$

כג.

$$\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+\frac{1}{5\cdot6}+\ldots+\frac{1}{(n+2)\cdot(n+3)}=\frac{n}{3(n+3)}$$

כד.

$$\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\frac{1}{9\cdot13}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)\cdot(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$$

כה.

$$\frac{1^2}{1\cdot3}+\frac{2^2}{3\cdot5}+\frac{3^2}{5\cdot7}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

כו. עבור כל $a \neq 0, -1, -2, \ldots, -n, \ldots$ מתקיים:

$$\frac{1}{a\cdot(a+1)}+\frac{1}{(a+1)\cdot(a+2)}+\ldots+\frac{1}{(a+n-1)\cdot(a+n)}=\frac{n}{a(a+n)}$$

כז.

$$1+2+3+4+5+6+\ldots+3n=\frac{3n(3n+1)}{2}$$

כח.

$$1+2+3+4+5+6+7+8+\ldots+4n=2n(4n+1)$$

כט.

$$1+2+3+4+5+6+\ldots+an=\frac{an(an+1)}{2}$$

כאשר a מספר טבעי גדול מ-1.

ל.

$$1+3+5+7+\ldots+(4n-1)=4n^2$$

לא.

$$2+5+8+11+\ldots+(6n-1)=n(6n+1)$$

לב.

$$3+7+11+15+\ldots+(8n-1)=2n(4n+1)$$

לג.

$$4+9+14+19+\ldots+(10n-1)=n(10n+3)$$

לד.

$$5+11+17+12+\ldots+(12n-1)=4n(3n+1)$$

לה.

$$(a-1) + (2a-1) + (3a-1) + (4a-1) + \ldots + (2an-1) = n(2an + a - 2)$$

כאשר a מספר טבעי גדול מ-1.

לו.

$$3 + 7 + 11 + 15 + 19 + 23 + \ldots + (12n-1) = 3n(6n + 1)$$

לז.

$$n + (n+1) + \ldots + 2n = \frac{3n(n+1)}{2}$$

לח.

$$(2n + 1) + (2n+ 3) + \ldots + [2n + (2n + 1)] = (3n + 1)(n + 1)$$

לט.

$$3n + (3n+1) + \ldots + 4n = \frac{7n(n+1)}{2}$$

מ.

$$an + (an+1) + \ldots + (a+1)n = \frac{(2a+1)n(n+1)}{2}$$

כאשר a מספר טבעי.

מא.

$$n(n+1) + (n+1)(n+2) + \ldots + (2n-1)\cdot(2n) = \frac{n(7n^2-1)}{3}$$

מב.

$$n^2 + (n+1)^2 + \ldots + (2n)^2 = \frac{n(n+1)(14n+1)}{6}$$

מג.

$$\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)2n} = \frac{1}{2n}$$

מד.

$$\frac{1}{n(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+4)} + \frac{1}{(n+4)(n+6)} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)3n} = \frac{1}{3n}$$

מה.

$$2^n + 2^{n+1} + \ldots + 2^{2n} = 2^n\left(2^{n+1}-1\right)$$

מו.

$$2^n + 2^{n+1} + \ldots + 2^{3n} = 2^n\left(2^{2n+1}-1\right)$$

מז.

$$2^n + 2^{n+1} + \ldots + 2^{an} = 2^n\left(2^{(a-1)n+1}-1\right)$$

כאשר a מספר טבעי גדול מ-1.

מח.

$$(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{1}{n^2})=\frac{n+1}{2n}\quad,\quad n\geq 2$$

מט.

$$(1-\frac{3}{4})(1-\frac{5}{9})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{2n+1}{(n+1)^2})=\frac{1}{(n+1)^2}$$

נ.

$$(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{1}{n})=\frac{1}{n}\quad,\quad n\geq 2$$

נא.

$$(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})\cdot\ldots\cdot(1+\frac{1}{n})=\frac{n+1}{2}\quad,\quad n\geq 2$$

נב.

$$(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{8})\cdot\ldots\cdot(1+\frac{1}{n^2-1})=\frac{2n}{n+1}\quad,\quad n\geq 2$$

נג.

$$(\frac{1}{2}+\frac{1}{4})(\frac{1}{3}+\frac{1}{9})\cdot\ldots\cdot(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})=\frac{n+1}{2(n!)}\quad,\quad n\geq 2$$

נד.

$$(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})(\frac{1}{3}-\frac{1}{9})\cdot\ldots\cdot(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2})=\frac{1}{n(n!)}\quad,\quad n\geq 2$$

2. הוכיחו באינדוקציה את תכונות ההתחלקות הבאות:

א. עבור כל $n\geq 1$ טבעי מתקיים: $(3^n - 1)$ מתחלק ב-2 ללא שארית.

ב. עבור כל $n\geq 1$ טבעי מתקיים: $(5^n - 1)$ מתחלק ב-4 ללא שארית.

ג. עבור כל $n\geq 1$ טבעי מתקיים: $(7^n - 1)$ מתחלק ב-6 ללא שארית.

ד. נסחו טענה כללית על-סמך שלושת הסעיפים הקודמים, והוכיחו אותה באינדוקציה.

3. הוכיחו באינדוקציה את תכונות ההתחלקות הבאות:

א. עבור כל $n\geq 1$ טבעי מתקיים: $(n^3 - n)$ מתחלק ב-3 ללא שארית.

ב. עבור כל $n\geq 1$ טבעי מתקיים: $(n^3 - 4n + 6)$ מתחלק ב-3 ללא שארית.

ג. עבור כל $n\geq 1$ טבעי מתקיים: $(2n^3 - 3n^2 + n)$ מתחלק ב-6 ללא שארית.

ד. עבור כל $n\geq 1$ טבעי מתקיים: $(2^{2n+1} + 3^{2n+1})$ מתחלק ב-5 ללא שארית.

ה. עבור כל $n\geq 1$ טבעי מתקיים: $(11^{n+2} + 12^{2n+1})$ מתחלק ב-133 ללא שארית.

ו. עבור כל $n\geq 1$ טבעי מתקיים: $(7^{2n} - 48n - 1)$ מתחלק ב-2304 ללא שארית.

ז. עבור כל $n\geq 1$ טבעי מתקיים: $(3^{2n+2} + 8n - 9)$ מתחלק ב-16 ללא שארית.

ח.# עבור כל $n\geq 1$ טבעי מתקיים: $(3^n + 7^n - 2)$ מתחלק ב-8 ללא שארית.

ט.# עבור כל $n\geq 1$ טבעי מתקיים: $2^{3^n}+1$ מתחלק ב- $3^{n+1}$ ללא שארית.

4. הוכיחו באינדוקציה את האי-שוויונים הבאים:

א. עבור $n\geq3$ טבעי מתקיים $2^n > 2n+1$.

ב. עבור $n\geq4$ טבעי מתקיים $n! > 2^n$.

ג. עבור $n\geq5$ טבעי מתקיים $2^n > n^2$.

ד. עבור $n\geq2$ טבעי מתקיים $n^3 > 3n$.

ה. עבור $n\geq2$ טבעי מתקיים $n^5 > 5n$. רמז: היעזרו בעובדה ש- $(a + 1)^5 = a^5 + 5a^4+...> a^5 + 5a^4$. את העובדה הזאת אפשר להוכיח ישירות על-ידי פתיחת הסוגריים, או תוך שימוש בנוסחת הבינום של ניוטון.

ו. עבור $n\geq4$ טבעי מתקיים $3^n > 8n+5$.

ז. עבור $n\geq2$ טבעי מתקיים $3^n + 4^n \leq 5^n$.

ח. אם $a>3$ אז עבור כל $n\geq2$ טבעי מתקיים $a^n + (a + 1)^n > (a + 2)^n$.

ט. עבור $n\geq2$ טבעי מתקיים $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{4^n} + \frac{1}{3^n}$.

י. עבור כל $n\geq7$ טבעי מתקיים $3^n < n!$.

יא. עבור כל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2} \leq 2-\frac{1}{n}$$

יב. עבור כל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!} \leq 2-\frac{1}{n}$$

יג. עבור כל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{3n+1} > 1$$

יד. עבור כל $n\geq2$ טבעי מתקיים:

$$(1-\frac{1}{\sqrt{2}})\cdot(1-\frac{1}{\sqrt{3}})\cdot...\cdot(1-\frac{1}{\sqrt{n}}) < \frac{2}{n^2}$$

טו. עבור כל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot...\cdot\frac{2n-1}{2n} \leq \frac{2}{\sqrt{3n+1}}$$

טז.# עבור כל $n\geq4$ טבעי מתקיים $(n+1)! < 2^{\frac{n^2}{2}}$.

יז.# עבור כל $n\geq2$ טבעי מתקיים $\frac{(2n)!}{(n!)^2} > \frac{4^n}{n+1}$.

יח.# עבור כל $n\geq4$ טבעי מתקיים $(n-1)^n > n^{n-1}$.

רמז: את שני האגפים של האי-שוויון שאת נכונותו מניחים בצעד האינדוקציה, הכפילו ב- $(k+1)^k$.

5. מצאו החל מאיזה n מתקיים האי-שוויון, והוכיחו את הטענה באינדוקציה:

א.

$$3n + 1 < 2^n$$

ב.

$$4n + 1 < 2^n$$

ג.

$$an + 1 < 2^n$$

כאשר a מספר טבעי כלשהו.

ד.

$$2n^2 < 2^n$$

ה.

$$3n^2 < 2^n$$

ו.

$$4n^2 < 2^n$$

ז.

$$n^3 < 3^n$$

ח.

$$n^3 < 4^n$$

6. הוכיחו ששתי הגדרות מגדירות את אותה סדרה:

א.

$$(1)\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_n = a_{n-1} + 6n - 1\ ,\ n > 1 \end{cases} \qquad (2)\ a_n = (n-1)(3n+5)$$

ב.

$$(1)\begin{cases} a_1 = p \\ a_n = a_{n-1} + 2qn + r\ ,\ n > 1 \end{cases} \qquad (2)\ a_n = qn^2 + (r+q)n + (p-r-2q)$$

כאשר p, q ו-r מספרים ממשיים כלשהם.

ג.

$$(1)\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + (-2)^{n-1},\ n > 1 \end{cases} \qquad (2)\ a_n = \frac{1-(-2)^n}{3}$$

ד.

$$(1)\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + (-2)^n,\ n > 1 \end{cases} \qquad (2)\ a_n = \frac{4\left(1-(-2)^{n-1}\right)}{3} + 1$$

ה.

$$(1)\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = a_{n-1} + n^2 + n\ ,\ n > 1 \end{cases} \qquad (2)\ a_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

ו.

$$(1)\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_n = a_{n-1} + n^2 - n\ ,\ n > 1 \end{cases} \qquad (2)\ a_n = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}$$

ז.

$$(1)\begin{cases} a_1 = p \\ a_n = a_{n-1} + qn^2 + rn \ , \ n>1 \end{cases} \qquad (2)\ a_n = p - q - r + \frac{n(n+1)}{6}(2qn + q + 3r)$$

כאשר p, q ו- r, מספרים ממשיים כלשהם.

ח.

$$(1)\begin{cases} a_1 = 13 \\ a_n = 3a_{n-1} + 10 \ , \ n>1 \end{cases} \qquad (2)\ a_n = 2\cdot 3^{n+1} - 5$$

ט.

$$(1)\begin{cases} a_1 = p + q \\ a_n = pa_{n-1} + q \ , \ n>1 \end{cases} \qquad (2)\ a_n = p^n + \frac{q(p^n - 1)}{p-1}$$

כאשר p ו-q מספרים ממשיים כלשהם ($p\neq 1$).

7. לכל אחת מהסדרות הבאות מצאו את הנוסחה המפורשות לאיבר הכללי והוכיחו אותה באינדוקציה:

א.

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_n = 1 + 2a_{n-1} \ , \ n>1 \end{cases}$$

ב.# רמז: מצאו את האיבר הכללי של סדרת ההפרשים בין האיברים העוקבים.

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = 1 + 3a_{n-1} \ , \ n>1 \end{cases}$$

ג. רמז: דומה לסעיף הקודם.

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = 2 + 3a_{n-1} \ , \ n>1 \end{cases}$$

ד.

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = 1 - a_{n-1} \ , \ n>1 \end{cases}$$

ה.# רמז: הנוסחה מורכבת מכמה שורות

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = 1 + (-1)^{n-1} a_{n-1} \ , \ n>1 \end{cases}$$

ו.

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 2 \\ a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} \ , \ a>2 \end{cases}$$

ז.

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 2 \\ a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2} \ , \ a > 2 \end{cases}$$

8. א. נתונה הסדרה:

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_n = \sqrt{a_{n-1} + 2} \end{cases}$$

הוכיחו: 1) עבור כל איברי הסדרה מתקיים $a_n<2$;

2) הסדרה היא סדרה עולה, כלומר עבור כל n מתקיים $a_n<a_{n+1}$.

ב. נתונה הסדרה:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} \ , \ a > 2 \end{cases}$$

הוכיחו שמתקיים:

$$a_n = \frac{3^{n-1} - (-1)^n}{2}$$

9. מה לא נכון ב"הוכחות" הבאות?

א. "נוכיח" שעבור כל n טבעי מתקיים $n>100$.

"הוכחה": נניח ש- $k > 100$; אם כך, עבור (k+1) מתקיים $100 < k < k+1$.

לכן עבור כל n טבעי מתקיים $n > 100$.

ב. "נוכיח" שעבור כל n טבעי, המספר $2n + 1$ הוא מספר זוגי.

"הוכחה": נניח שהטענה נכונה עבור k (כלומר $2k + 1$ זוגי) ונוכיח אותה עבור k+1 (צ"ל $2(k + 1) + 1$ מספר זוגי). ובכן,

$$2(k + 1) + 1 = (2k + 1) + 2$$

לפי הנחת האינדוקציה, באגף ימין רשום סכום של שני מספרים זוגיים. סכום של שני מספרים זוגיים הוא זוגי, לכן $2(k + 1) + 1$ זוגי.

ג.# "נוכיח" שכל שני מספרים טבעיים שווים זה לזה.

"הוכחה": נסמן ב- max(a,b) את הגדול מבין המספרים a ו-b (אם $a = b$ אז $\max(a,a) = a$).

כדי להשתמש באינדוקציה ננסח את הטענה כך:

עבור כל n מתקיים: אם a ו-b מספרים טבעיים כאלה ש- $\max(a,b) = n$ אזי $a = b$.

I. עבור $n = 1$ הטענה מתקיימת: אם a ו-b מספרים טבעיים כאלה ש- $max(a,b) = 1$ אזי $a = b = 1$.

II. נניח שהטענה נכונה עבור k, ונוכיח אותה עבור $k+1$.

(צ"ל: אם a ו-b מספרים טבעיים המקיימים $max(a,b) = (k+1)$ אזי $a = b$).

ניקח את a ו-b כך ש- $max(a,b)=k+1$. נתבונן במספרים $(a-1)$ ו- $(b-1)$. מכך ש- $max(a,b) = k+1$ נובע ש- $max(a-1,b-1) = k$.

ואז, לפי הנחת האינדוקציה, $a-1 = b-1$, לכן גם $a = b$.

ד.[#] "נוכיח" באמצעות עקרון האינדוקציה המורחבת, שהסדרה:

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_2 = 2 \\ a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}, \quad n > 2 \end{cases}$$

היא סדרה יורדת, כלומר מתקיים $a_n > a_{n+1}$.

"הוכחה":

I. עבור $n=1$ הטענה נכונה כי $a_1 > a_2$.

II. נניח שהטענה נכונה עבור כל n קטן או שווה ל-k, ונוכיח אותה עבור $n=k+1$ (צ"ל $a_{k+1} > a_{k+2}$).

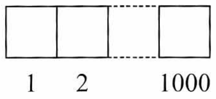
$$a_{k+2} = \frac{a_{k+1} + a_k}{2} \overset{*}{=} \frac{\frac{a_k + a_{k-1}}{2} + a_k}{2} \overset{\#}{<} \frac{\frac{a_{k-1} + a_{k-1}}{2} + a_k}{2} = \frac{a_{k-1} + a_k}{2} = a_{k+1}$$

* לפי ההגדרה של $a_{k+1}$.

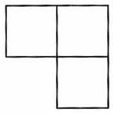
[#] לפי הנחת האינדוקציה $a_k < a_{k-1}$.

לכאורה הוכחנו את הטענה, אך הטענה הזו אינה נכונה, כי $a_2 = 2$ ואילו $a_3 = 2.5$, כלומר $a_3 > a_2$.

10. א. כמה גפרורים דרושים לבניית 1000 ריבועים המסודרים כמו באיור? (נסחו טענה כללית והוכיחו אותה באינדוקציה.)




ב.[#] נתון לוח משבצות רבוע, שאורכו ורוחבו $2^n$ משבצות ומשבצת אחד בתוכו חסרה. הוכיחו באינדוקציה, שללא תלות במקום שבו חסרה המשבצת, תמיד ניתן לרצף את הלוח באמצעות מרצפות הבנויות משלוש משבצות המסודרות בצורת זווית, כמו באיור:



(מותר לסובב את המרצפות.)

נוכל לראות המחשה באיור הבא. כל המשבצות המכוסות על-ידי מרצפת אחת סומנו במספר הסידורי של אותה מרצפת. המשבצת החסרה בלוח סומנה ב- X.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 5 | 5 |
| 1 | **X** | 3 | 5 |
| 2 | 3 | 3 | 4 |
| 2 | 2 | 4 | 4 |

| | |
|---|---|
| n | n |
| | n |

ג.# על בסיס הדוגמאות הבאות, נסחו השערה כללית והוכיחו אותה.

1. $1=1$
2. $2+3+4=1+8$
3. $5+6+7+8+9=8+27$
4. $10+11+12+13+14+15+16=27+64$
5. $\dots$

11. הוכיחו באינדוקציה את הטענות הבאות על מספרי פיבונאצ׳י.

א.

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_{n+2} - 1$$

ב.

$$a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1} = a_{2n}$$

ג.

$$a_2 + a_4 + \dots + a_{2n} = a_{2n+1} - 1$$

ד.

$$a_n < 2^n$$

ה.

$$a_n = \frac{B^n - C^n}{\sqrt{5}}$$

כאשר

$$B = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad , \quad C = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

רמז : השתמשו בזהויות :

$$B^2 = B+1 \quad , \quad C^2 = C+1$$

(בדקו את נכונותן.)

זאת הנוסחה המפורשת למספרי פיבונאצ׳י; היא מסובכת יותר מהנוסחאות שראינו בדוגמאות אחרות, ולא ניתן להגיע אליה באמצעות התבוננות בכמה איברים של הסדרה וניחוש.

# 8. פתרונות לתרגילים נבחרים

3. ח.

I. עבור n=1 מתקיים: $3^1 + 7^1 - 2 = 8$ , והטענה נכונה.

II. נניח שהטענה נכונה עבור k (כלומר $3^k + 7^k - 2$ מתחלק ב-8),

ונוכיח אותה עבור k+1 (צ"ל $3^{k+1} + 7^{k+1} - 2$ מתחלק ב-8 ללא שארית).

$$3^{k+1} + 7^{k+1} -2 = 3\cdot 3^k + 3\cdot 7^k + 4\cdot 7^k - 2 =$$

$$= 3(3^k+7^k -2) +4\cdot 7^k + 4 = 3(3^k+7^k -2) + 4(7^k+1)$$

המחובר הראשון בסכום הזה מתחלק ב-8 לפי הנחת האינדוקציה; המחובר השני הוא כפולה של 4 במספר זוגי, לכן גם הוא מתחלק ב-8 , וכך מתחלק הסכום כולו ב-8.

קיבלנו שהטענה מתקיימת עבור k+1, ובכך הוכחנו את צעד האינדוקציה.

אם כך, הטענה מתקיימת עבור כל n טבעי.

3. ט.

I. עבור כל n=1 מתקיים: $2^{3^1} + 1 = 9$ .

II. נניח שהטענה נכונה עבור k (כלומר $2^{3^k} + 1$ מתחלק ב- $3^{k+1}$),

ונוכיח אותה עבור k+1 (צ"ל $2^{3^{k+1}} + 1$ מתחלק ב- $3^{k+2}$ ללא שארית).

נשים לב לעובדה הבאה:

$$2^{3^{k+1}} = \left(2^{3^k}\right)^3$$

לשם נוחות נסמן $A = 2^{3^k}$ ; בעזרת הסימון הזה נקבל:

$$2^{3^{k+1}} + 1 = A^3 + 1 = (A+1)(A^2 - A + 1)$$

אנו יודעים (לפי הנחת האינדוקציה) ש- (A+1) מתחלק ב- $3^{k+1}$ ללא שארית, לכן כדי להשלים את ההוכחה יש להראות ש- $A^2 - A + 1$ מתחלק ב-3 ללא שארית.

מכך ש- (A+1) מתחלק ב- $3^{k+1}$ נובע בפרט שהמספר הזה מתחלק ב-3 ללא שארית, לכן שארית החילוק של A ב-3 היא 2, כלומר A הוא מהצורה A=3m+2 עבור m טבעי כלשהו. נראה מהי שארית החילוק של $A^2$ ב-3:

$$A^2 = (3m+2)^2 = 9m^2 + 12m + 4 = 3(3m^2 + 4m + 1) + 1$$

כלומר שארית החילוק של $A^2$ ב-3 היא 1, וניתן להציג את $A^2$ בצורה $A^2 = 3p+1$ עבור p טבעי כלשהו.

מכאן:

$$A^2 - A + 1 = 3p + 1 - 3m - 2 + 1 = 3(p - m)$$

המספר הזה הוא אכן כפולה של 3, וזה משלים את הוכחת הטענה כולה.

קיבלנו שהטענה מתקיימת עבור k+1, ובכך הוכחנו את צעד האינדוקציה.

אם כך, הטענה מתקיימת עבור כל n טבעי.

4. טז.

I. עבור n=4 נקבל

$$2^8 = 256 > 5! = 120$$

II. נניח שהטענה נכונה עבור k;

נוכיח אותה עבור k+1 (צ"ל $(k+2)! < 2^{\frac{(k+1)^2}{2}}$).

$$2^{\frac{(k+1)^2}{2}} = 2^{\frac{k^2+2k+1}{2}} >^* (k+1)!.2^{\frac{2k+1}{2}}$$

*לפי הנחת האינדוקציה

כדי להשלים את הוכחת הטענה יש להראות שמתקיים $2^{\frac{2k+1}{2}} \geq k+2$.

ניעזר לשם כך בטענת עזר. את טענת העזר, כמו כל טענה שמוכיחים באינדוקציה, נהוג לנסח במונחים של n. לשם כך נחליף בנוסחה הזאת את k+1 ב-n.

טענת עזר: עבור n≥4 מתקיים

$$2^{\frac{2n-1}{2}} \geq n+1$$

הוכחה של טענת העזר:

I. עבור n=4 נקבל

$$2^{3.5} > 2^3 = 8 > 5$$

II. נניח שהטענה נכונה עבור k, ונוכיח אותה עבור k+1 (צ"ל $2^{\frac{2k+1}{2}} \geq k+2$).

$$2^{\frac{2k+1}{2}} = 2 \cdot 2^{\frac{2k-1}{2}} \geq^* 2(k+1) = 2k+2 > 2k+1$$

*לפי הנחת האינדוקציה

קיבלנו שהטענה מתקיימת עבור k+1, ובכך הוכחנו את צעד האינדוקציה.

אם כך, הטענה מתקיימת עבור כל n≥4 טבעי.

הוכחנו את טענת העזר, וההוכחה הזאת משלימה את הוכחת צעד האינדוקציה של הטענה המקורית.

אם כך, הטענה מתקיימת עבור כל n טבעי.

4. יז.

I. עבור n=2 הטענה מתקיימת (בדקו זאת).

II. נניח שהטענה נכונה עבור k,

ונוכיח אותה עבור k+1 (צ"ל $\frac{4^{k+1}}{k+2} < \frac{(2k+2)!}{((k+1)!)^2}$).

אנו יוצאים מהביטוי $\frac{4^{k+1}}{k+2}$ , וצריכים לקשר אותו לביטוי שבהנחת האינדוקציה, כלומר ל- $\frac{4^k}{k+1}$ :

$$\frac{4^{k+1}}{k+2} = \frac{4(k+1)}{k+2} \cdot \frac{4^k}{k+1}$$

לפי הנחת האינדוקציה נקבל:

$$\frac{4^{k+1}}{k+2} = \frac{4(k+1)}{k+2} \cdot \frac{4^k}{k+1} < \frac{4(k+1)}{k+2} \cdot \frac{(2k)!}{(k!)^2}$$

כדי להשלים את ההוכחה נראה שמתקיים

$$\frac{4(k+1)}{k+2} < \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2} \qquad (*)$$

ואז נקבל:

$$\frac{4^{k+1}}{k+2} = \frac{4(k+1)}{k+2} \cdot \frac{4^k}{k+1} < \frac{4(k+1)}{k+2} \cdot \frac{(2k)!}{(k!)^2} <$$

$$< \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2} \cdot \frac{(2k)!}{(k!)^2} = \frac{(2k+2)!}{((k+1)!)^2}$$

ובכן נוכיח את (*). ננסח את הטענה במונחים של n (נחליף את (k+1) ב-n באי-שוויון (*). )

טענת עזר : עבור $n \geq 3$ מתקיים (ניסחנו את הטענה החל מ-3 כי בטענה המקורית $3 \leq (k+1)$ ):

$$\frac{4n}{n+1} < \frac{2n(2n-1)}{n^2} \qquad (**)$$

האי-שוויון הזה שקול לאי-שוויון

$$\frac{2n}{n+1} < \frac{(2n-1)}{n} \qquad (***)$$

המתקבל מ- (**) על-ידי הכפלת שני האגפים של (**) ב- $\frac{n}{2}$ .

נשים לב שאת שני האגפים של (***) אפשר להציג בדרך אחרת:

$$\frac{2n}{n+1} = 2 - \frac{2}{n+1} \quad ; \quad \frac{(2n-1)}{n} = 2 - \frac{1}{n}$$

לכן את (***) אפשר לרשום בצורה

$$2 - \frac{2}{n+1} < 2 - \frac{1}{n} \qquad (****)$$

נחסר משני האגפים של (****) 2 , נכפיל אותם ב- (-1) תוך שינוי הכיוון של האי-שוויון, ונקבל:

$$\frac{2}{n+1} > \frac{1}{n}$$

האי-שוויון הזה שקול לאי-שוויון

$$\frac{n+1}{2} < n$$

אשר מתקיים לכל $n>2$.

הוכחנו את טענת העזר. מטענת העזר נובעת הנכונות של (*), ומהנכונות (*) נובעת נכונות הטענה הראשית עבור $k+1$ .

קיבלנו שהטענה מתקיימת עבור $k+1$, ובכך הוכחנו את צעד האינדוקציה.

אם כך, הטענה מתקיימת עבור כל $n$ טבעי.

4. יח.

I. עבור $n=4$ האי-שוויון מתקיים : $3^4>4^3$.

II. נניח שהטענה נכונה עבור $k$, (כלומר $(k-1)^k > k^{k-1}$ ),

ונוכיח אותה עבור $k+1$ (צ"ל $k^{k+1} > (k+1)^k$ ).

ובכן, לפי הנחת האינדוקציה :

$$(k-1)^k > k^{k-1}$$

נכפיל את שני האגפים של האי-שוויון הזה ב- $(k+1)^k$ :

$$(k+1)^k(k-1)^k > k^{k-1}(k+1)^k$$

מתקיים אם כן :

$$(k+1)^k(k-1)^k = \left( (k+1)(k-1) \right)^k = (k^2-1)^k < (k^2)^k = k^{2k}$$

לכן,

$$k^{2k} > (k^2-1)^k = (k+1)^k(k-1)^k > k^{k-1}(k+1)^k$$

נחלק את שני האגפים ב- $k^{k-1}$, ונקבל :

$$k^{k+1} > (k+1)^k$$

קיבלנו שהטענה מתקיימת עבור $k+1$, ובכך הוכחנו את צעד האינדוקציה.

אם כך, הטענה מתקיימת עבור כל $n$ טבעי.

7. ב.

נחשב כמה איברים של הסדרה :

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = 13, \quad a_4 = 40, \quad a_5 = 121, \ldots$$

נחשב את ההפרשים בין איברים עוקבים של הסדרה :

$$a_2 - a_1 = 3, \quad a_3 - a_2 = 9, \quad a_4 - a_3 = 27, \quad a_5 - a_4 = 81, \ldots$$

אנו רואים שההפרשים הם חזקות של 3 : $a_n - a_{n-1} = 3^{n-1}$. אם נחבר את כל ההפרשים, יתבטלו כל האיברים בסכום הזה חוץ מהראשון והאחרון :

$$(a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \ldots + (a_3 - a_2) + (a_2 - a_1) = a_n - a_1$$

מאידך, הסכום הזה שווה לסכום n האיברים הראשונים של סדרה הנדסית:

$$(a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_n) + \ldots + (a_3 - a_2) + (a_2 - a_1) = 3^{n-1} + 3^{n-2} + \ldots + 3 = \frac{3^n - 3}{2}$$

אם כך,

$$a_n - a_1 = \frac{3^n - 3}{2}$$

או

$$a_n = 1 + \frac{3^n - 3}{2}$$

נוכיח את הנוסחה הזאת באינדוקציה.

I. עבור n=1 מתקיים $a_1 = 1 + \frac{3^1 - 3}{2}$ .

II. נניח שהטענה נכונה עבור k (כלומר $a_k = 1 + \frac{3^k - 3}{2}$ ),

ונוכיח אותה עבור k+1 (צ"ל $a_{k+1} = 1 + \frac{3^{k+1} - 3}{2}$ ).

$$a_{k+1} = 1 + 3a_k = 1 + 3\left(1 + \frac{3^k - 3}{2}\right) = 1 + 3 + \frac{3^{k+1} - 9}{2} = 1 + \frac{3^{k+1} - 3}{2}$$

קיבלנו שהטענה מתקיימת עבור k+1, ובכך הוכחנו את צעד האינדוקציה.

אם כך, הטענה מתקיימת עבור כל n טבעי.

7. ה.

נחשב כמה איברים של הסדרה כדי לנחש את צורת האיבר הכללי:

$$a_1 = 2\ ,\quad a_2 = -1\ ,\quad a_3 = 0\ ,\quad a_4 = 1\ ,\quad a_5 = 2\ ,\quad a_6 = -1\ ,\ldots$$

רואים שהערכים של איברי הסדרה חוזרים על עצמם במחזור של 4. את העובדה הזאת אפשר לתאר תוך התייחסות לשארית החלוקה של אינדקס האיבר ב-4. הנה הדרך המקובלת לרשום את הנוסחה הזאת:

$$a_n = \begin{cases} 2\ , & \text{אם n מתחלק ב - 4 עם שארית 1} \\ -1\ , & \text{אם n מתחלק ב - 4 עם שארית 2} \\ 0\ , & \text{אם n מתחלק ב - 4 עם שארית 3} \\ 1\ , & \text{אם n מתחלק ב - 4 עם שארית 0} \end{cases}$$

נוכיח את הנוסחה הזאת באינדוקציה:

I. עבור n=1 הנוסחה נכונה (בדיקה ישירה).

II. נניח שהטענה (הנוסחה) נכונה עבור k, ונוכיח אותה עבור k+1.

יש לבדוק ארבעה מקרים - עבור כל שארית של חלוקת k+1 ב-4.

1) נניח ש- $(k+1)$ מתחלק ב-4 עם שארית 0 (כלומר מתחלק ללא שארית); אם כך k מתחלק ב-4 עם שארית 3 (במקרה הזה k אי-זוגי). לפי הנחת האינדוקציה $a_k=0$, ועלינו להראות ש- $a_{k+1} = 1$; ובכן,

$$a_{k+1} =^{*} 1 + (-1)^k a_k = 1 - a_k =^{\#} 1 - 0 = 1$$

* לפי נוסחת הנסיגה
# לפי הנחת האינדוקציה

2) נניח ש- $(k+1)$ מתחלק ב-4 עם שארית 1; אם כך k מתחלק ב-4 ללא שארית (במקרה הזה k זוגי). לפי הנחת האינדוקציה $a_k = 1$ ואנחנו צריכים להראות ש- $a_{k+1} = 2$; ובכן,

$$a_{k+1} =^{*} 1 + (-1)^k a_k = 1 + a_k =^{\#} 1 + 1 = 2$$

* לפי נוסחת הנסיגה
# לפי הנחת האינדוקציה

3) נניח ש- $(k+1)$ מתחלק ב-4 עם שארית 2; אם כך k מתחלק ב-4 עם שארית 1 (במקרה הזה k אי-זוגי). לפי הנחת האינדוקציה $a_k = 2$ ואנחנו צריכים להראות ש- $a_{k+1} = -1$; ובכן,

$$a_{k+1} =^{*} 1 + (-1)^k a_k = 1 - a_k =^{\#} 1 - 2 = -1$$

* לפי נוסחת הנסיגה
# לפי הנחת האינדוקציה

4) נניח ש- $(k+1)$ מתחלק ב-4 עם שארית 3; אם כך k מתחלק ב-4 עם שארית 2 (במקרה הזה k זוגי). לפי הנחת האינדוקציה $a_k = -1$ ועלינו להראות ש- $a_{k+1} = 0$; ובכן,

$$a_{k+1} =^{*} 1 + (-1)^k a_k = 1 + a_k =^{\#} 1 - 1 = 0$$

* לפי נוסחת הנסיגה
# לפי הנחת האינדוקציה

קיבלנו שהטענה מתקיימת עבור $k+1$ בכל המקרים, ובכך הוכחנו את צעד האינדוקציה.

אם כך, הטענה מתקיימת עבור כל n טבעי.

9. ג.

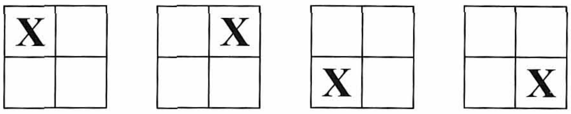
במעבר מהטענה עבור 1 לטענה עבור 2 הנחנו (הנחה לא מפורשת ולכן מסוכנת) שקיימת אפשרות להחסיר 1 מ-a ומ-b. אבל אם $a=1$ ו- $b=2$ לא ניתן לעבור מ-a ל- $(a-1)$, כי $(a-1)$ אינו מספר טבעי.

9. ד.

בצעד האינדוקציה ב"הוכחה" השתמשנו בנכונות הטענה עבור $k-1$, לכן בבסיס האינדוקציה היינו צריכים לבדוק את הטענה עבור שני ערכים, ובפועל בדקנו אותה עבור ערך אחד בלבד.

10. ב.

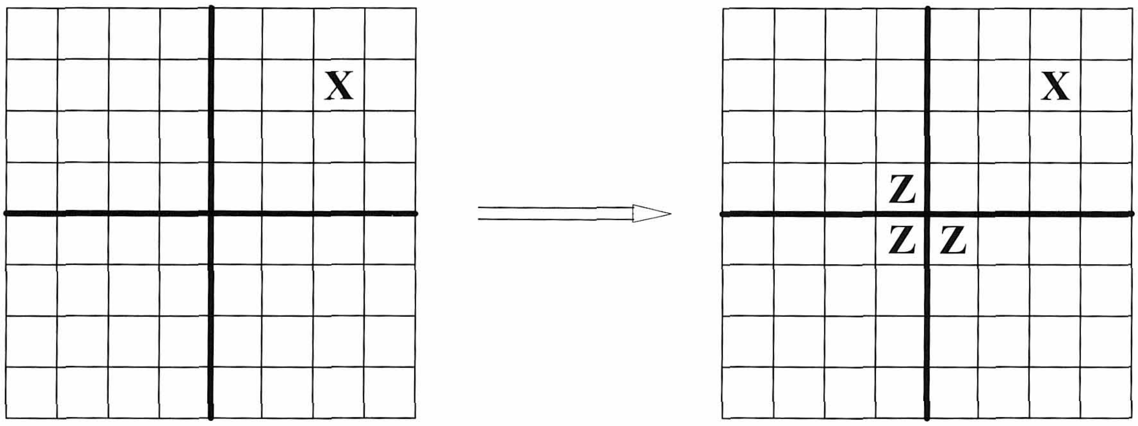
I. עבור $n=1$ הטענה נכונה, כי ללוח $2\times2$ ללא משבצת אחת תמיד יש צורה של המרצפת הנתונה.




(הרי את המרצפת מותר לסובב.)

II. נניח שהטענה נכונה עבור k ונוכיח אותה עבור $k+1$.

לוח מהצורה $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ אפשר לחלק לארבעה לוחות בגודל $2^k \times 2^k$. אחרי החלוקה תימצא המשבצת הריקה באחד מארבעת הלוחות בגודל $2^k \times 2^k$ , ואילו שלושת לוחות אחרים יהיו מלאים (ראו איור). נשלב במרכז הלוח מרצפת (המסומנת **Z** באיור) אשר חותכת משבצת אחת מכל אחד משלושת הלוחות שהיו מלאים. עכשיו נשאר לרצף לוחות בגודל $2^k \times 2^k$ אשר בכל אחד מהם חסרה משבצת. לפי הנחת האינדוקציה הבעיה הזאת ניתנת לפתרון, ומכאן נובעת נכונות הטענה.




10. ג.

ניסוח הטענה : לכל n טבעי מתקיים

$$[(n-1)^2 + 1] + [(n-1)^2 + 2] + \ldots + n^2 = (n-1)^3 + n^3$$

הוכחה :

הסדרה שבאגף שמאל היא סדרה חשבונית. מספר האיברים בסכום הוא

$$n^2 - [(n-1)^2 + 1] + 1 = 2n - 1$$

(מספר האיברים בסדרה של מספרים שלמים עוקבים מ-a עד b הוא $b-a+1$ .)

לפי נוסחת הסכום של סדרה חשבונית נקבל באגף שמאל :

$$[(n-1)^2+1]+\ldots+n^2=(2n-1)\frac{[(n-1)^2+1]+n^2}{2}=(2n-1)\frac{(2n^2-2n+2)}{2}=$$

$$(2n-1)(n^2-n+1) = 2n^3-3n^2+3n-1 = (n-1)^3+n^3$$

ובכן, הוכחנו את הטענה.

שימו לב : לא היה צורך להשתמש באינדוקציה לשם הוכחה.

## 9. התפתחות עקרון האינדוקציה: סקירה היסטורית

ההיסטוריה של עקרון האינדוקציה היא דוגמה להתפתחות הדרגתית של שיטה מתמטית שלא ניתן לייחס אותה באופן הדוק לתקופה מסוימת או למתמטיקאי מסוים.

בכתבים של מתמטיקאים ופילוסופים רבים במהלך ההיסטוריה, החל מיוון העתיקה, הופיעו שיקולים המזכירים במידת-מה את הגישה שמאחורי עקרון האינדוקציה. העובדה הזאת מזינה ויכוחים רבים בין חוקרים לגבי השאלה מי היה הראשון שהשתמש בעקרון האינדוקציה. כאשר נתקלים בטיעון שכזה אשר הופיע כדרך "טבעית" להצדקת טענה מסוימת, ואשר השימוש בו נעשה ללא ניסוח פורמלי או דיון בשיטה, עולה השאלה האם ניתן לזהות את הטיעון עם עקרון האינדוקציה. כך בספר התשיעי של "אלמנטים" של אוקלידס[8] (טענה 20) מוכח שיש אינסוף מספרים ראשוניים. בדרך ההוכחה אפשר לראות שימוש בעקרון האינדוקציה (או לפחות בשיקולים דמויי העיקרון הזה). הנה שחזור של ההוכחה המבליט את המבנה האינדוקטיבי שלה:

1. אנו יודעים שקיימים מספרים ראשוניים;

2. נניח שמצאנו $k$ מספרים ראשוניים ($p_1,...,p_k$) ונוכיח שקיים מספר ראשוני נוסף $p_{k+1}$.

נדון במספר

$$q = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k + 1$$

המספר הזה אינו מתחלק באף אחד מהמספרים הראשוניים שמצאנו עד כה, לכן קיימות שתי אפשרויות:

א. המספר $q$ הוא ראשוני בעצמו, ואז $q = p_{k+1}$;

ב. המספר $q$ אינו ראשוני, ואז ניתן לפרק אותו לגורמים ראשוניים השונים מאלה שמצאנו עד כה. במקרה הזה אפשר לבחור אחד מהגורמים האלה (למשל הקטן שביניהם) כ- $p_{k+1}$.

ומכאן נובע שמספרם של המספרים הראשוניים אינו יכול להיות סופי, לכן יש אינסוף מספרים ראשוניים.

החוקרים מצביעים על כמה מקורות בולטים מתקופת ימי הביניים. נזכיר מביניהם את המתמטיקאי הערבי אל-קרג'י שחי בבגדד בסוף המאה ה-10 ותחילת המאה ה-11. הטיעון הטיפוסי שלו בנוי מהשלבים הבאים:

1) בדיקת נכונות הטענה עבור $n=1$;

2) הוכחה עבור $n=2$ על בסיס הנכונות עבור $n=1$;

3) הוכחה עבור $n=3$ על-סמך נכונות הטענה עבור $n=2$;

4) הוכחה עבור $n=4$ על-סמך נכונות הטענה עבור $n=3$;

5) הוכחה עבור $n=5$ על-סמך נכונות הטענה עבור $n=4$;

6) בשלב הזה מציין אל-קרג'י שבדרך הזאת אפשר להמשיך ללא הגבלה, וקובע בזה את נכונות הטענה לכל $n$ טבעי.

---

[8] הספר הזה, שהופיע ביוון העתיקה, הוא זה שעיצב את כל ההתפתחות של המתמטיקה המערבית. בפרט, הוא המקור של השיטה האקסיומתית שמייחדת את המתמטיקה המערבית ביחס למתמטיקה של תרבויות אחרות (כגון הודית או סינית).

בדיקה של מקרה בסיסי, הדגמה של כמה מעברים ראשונים, והכללה - זאת השיטה שחוזרת על עצמה בשימוש בשיקולים אינדוקטיביים במשך מאות שנים. מובן שאי-אפשר לטעון שזאת הוכחה באינדוקציה במובן המודרני, אך הדרך הזאת טומנת בתוכה את הרעיון העיקרי של השיטה ומהווה צעד חשוב בעיצובה ובניסוחה הפורמלי.

מקום נכבד בדיונים על התפתחותו של עקרון האינדוקציה מוקצה בספרות המחקרית לר' לוי בין גרשון (רלב"ג, 1288-1344). על חייו לא ידוע הרבה ואין בידינו שום תמונה עם דיוקנו. רלב"ג חי בפרובנס שבדרום צרפת ועסק בין היתר באסטרונומיה, מתמטיקה ופילוסופיה, וכן כתב פירוש לתנ"ך ולחלקים של התלמוד. בזמנו הוא נחשב למדען דגול, והראיה היא שעל-אף שאת כל ספריו המדעיים כתב בעברית (והיה בזה חריג בין החכמים היהודים של אותם זמנים), הם תורגמו לשפה הלטינית, חלקם עוד בחייו. בגלל דעותיו הפילוסופיות היה רלב"ג דמות שנויה במחלוקת בתוך העולם היהודי.

בספרו "מעשה חושב" המוקדש למתמטיקה השתמש רלב"ג בשיקולים אינדוקטיביים בכמה הקשרים.

בדיון על חוקי הקיבוץ של הכפל הוכיח רלב"ג את החוק למקרה של שלושה מספרים: $a\cdot(b\cdot c)=b\cdot(a\cdot c)$ .

בהסתמך על התוצאה הזאת הוא הוכיח את נכונות החוק לארבעה מספרים: $a\cdot(b\cdot c\cdot d)= b\cdot(a\cdot c\cdot d)$ . בשלב הזה מכליל רלב"ג את התוצאה למקרה הכללי, באומרו שבאמצעות מעברים דומים ממספר למספר העוקב הטענה נכונה עד אינסוף, או בלשונו המיוחדת "יהיה העולה זה, בזאת ההדרגה, יתבאר לבלתי תכלית."

[ העולה=מתקבלת התוצאה; יתבאר=הוכח; בלתי תכלית=אינסוף]

השיטה נקראת "הדרגה", כלומר מעבר צעד-אחר-צעד ממספר למספר הבא אחריו.

בדרך דומה הוכיח רלב"ג מספר נוסחאות לגבי סדרות של מספרים, למשל נוסחת נסיגה לחישוב מספר התמורות (סידורים שונים) של n עצמים: $P_{n+1}=(n+1)P_n$; נוסחה לחישוב הריבוע של סכום המספרים הטבעיים מ-1 עד n: $\left(\sum_{i=1}^{n-1} i\right)^2 + n^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$ ועוד.

בדומה למדענים אחרים של ימי הביניים שהשתמשו בשיטה הזאת, גם רלב"ג לא ניסח את עקרון האינדוקציה אלא ניצל אותו כברור מאליו.

במאה ה-16 אנו פוגשים את השימוש בשיטת הטיעון האינדוקטיבית (עדיין ללא ניסוח מפורש של העיקרון) אצל המתמטיקאי האיטלקי פרנצ'סקו מאורוליקוס (Maurolycus, 1494-1575). בספרו על אריתמטיקה הוא מיין מספרים לסוגים שונים:

| שלמים<br>$n$ | זוגיים<br>$E_n=2(n-1)$ | אי-זוגיים<br>$O_n=2n-1$ | משולשים<br>$T_n$ | מרובעים<br>$S_n=n^2$ | מלבניים<br>$L_n=n(n-1)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 2 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 9 | 6 |
| 4 | 6 | 7 | 10 | 16 | 12 |
| 5 | 8 | 9 | 15 | 25 | 20 |
| 6 | 10 | 11 | 21 | 36 | 30 |
| 7 | 12 | 13 | 28 | 49 | 42 |
| … | … | … | … | … | … |

המספרים המשולשים הם מספרים שמתקבלים לאורך הצלע הימנית של המשולש הבנוי מהמספרים הטבעיים בצורה כזו:

1
2 3
4 5 6
7 8 9 10
11 12 13 14 15
16 17 18 19 20 21
22 23 24 25 26 27 28

מאורוליקוס השתמש באינדוקציה כדי להוכיח קשרים שונים בין הסדרות הללו; למשל:

(a) $2T_n = L_{n+1}$

(b) $L_n + n = S_n$

(c) $T_n + T_{n-1} = S_n$

(d) $S_n + O_{n+1} = S_{n+1}$

הנה דוגמה להוכחה מספרו של מאורוליקוס:

טענה: סכום n המספרים האי-זוגיים הראשונים שווה למספר המרובע ה- n-י. כלומר:

$$O_1 + O_2 + \ldots + O_n = S_n$$

הוכחה: כפי שהוכחנו קודם [ראו זהות (d) לעיל] כאשר מחברים את המספר המרובע הראשון [כלומר 1] למספר האי-זוגי הבא [כלומר המספר האי-זוגי השני בסדרת האי-זוגיים, דהיינו 3] מקבלים את המספר המרובע הבא [כלומר המספר השני בסדרת המרובעים, דהיינו 4]. ואם מחברים את המספר המרובע שקיבלנו בשלב הקודם [את 4] למספר האי-זוגי השלישי [ל-5] מקבלים את המספר המרובע השלישי [את 9]. באופן דומה, אם מחברים את המספר המרובע השלישי [9] למספר האי-זוגי הרביעי [7] מקבלים את המספר המרובע הרביעי [16]. וכך ממשיכים ללא סוף, והנכונות נובעת משימוש חוזר בזהות (d) שראינו לעיל.

את הוכחה הזאת אפשר לתרגם לניסוח המקובל של הוכחה באינדוקציה:

I. הטענה נכונה עבור $n=1$;

II. נניח שהטענה נכונה עבור k (כלומר $\sum_{i=1}^{k} O_i = S_k$), ונוכיח אותה עבור $k+1$.

נוסיף את $O_{k+1}$ לשני האגפים של השוויון שאת נכונותו הנחנו, ונקבל $\sum_{i=1}^{k+1} O_i = S_k + O_{k+1}$. על-סמך זהות (d) שהוכחה קודם לכן נקבל:

$$O_1 + O_2 + \ldots + O_k + O_{k+1} = S_k + O_{k+1} = S_{k+1}$$

פרנצ׳סקו מאורוליקוס

בְּלֶז פַּסְקָל

לצד הצלחות רבות הביא השימוש האינטואיטיבי בשיקולים אינדוקטיביים גם לתוצאות שגויות; לכן חשוב היה לעגן את עקרון האינדוקציה בניסוח מפורש, ולקבוע כללים ברורים לשימוש בו. הראשון שהשתמש בעקרון האינדוקציה בצורה המקובלת היום, כלומר חלוקת ההוכחה לשלב בסיס האינדוקציה ושלב צעד האינדוקציה, היה, המתמטיקאי והפילוסוף הצרפתי בלז פסקל (Blaise Pascal, 1623-1662). הוא הוכיח באינדוקציה נוסחאות רבות מתחומי הקומבינטוריקה ותורת ההסתברות. עבודותיו של פסקל נתנו פרסום רב לשיטת ההוכחה באינדוקציה. במשך רוב המאה ה-19 נחשב פסקל לאבי השיטה, אך מעדויות שהצטברו לקראת תחילת מאה ה-20 ומקריאה דקדקנית של טקסטים רלוונטיים, גילו המדענים תמונה מסובכת יותר. תשומת לבם של החוקרים הופנתה למשל למכתב שבו מזכיר פסקל את עבודתו של מאורוליקוס.

את השם ״אינדוקציה מתמטית״ קבע הלוגיקאי האנגלי אוגוסטוס דה-מורגן (Augustus De Morgan, 1806-1871) המפורסם בחוקי לוגיקה הנושאים את שמו. המונח הזה הופיע לראשונה במאמר שכתב דה-מורגן באנציקלופדיה כללית בשנת 1838.

ג׳וזֶפֶּה פֵּאָנוֹ

אוגוסטוס דה-מורגן

את מקומו הנוכחי בתוך המתמטיקה מצא עקרון האינדוקציה בתהליך הביסוס האקסיומטי של המספרים הטבעיים, שגיבש המתמטיקאי האיטלקי ג'וזפה פֶּאָנו (Giuseppe Peano, 1858-1932). ב-1895 פרסם פאנו את מערכת האקסיומות המגדירות את מושג המספר הטבעי במתמטיקה המודרנית; בין חמש האקסיומות הידועות היום כאקסיומות פֶּאָנו מופיע עקרון האינדוקציה כאקסיומה החמישית.

## אקסיומות פֶּאָנו

**אקסיומה 1.** 0 הוא מספר טבעי, (כלומר הקבוצה שלנו איננה ריקה).

**אקסיומה 2.** עבור כל n קיים מספר טבעי אחד ויחיד הנקרא העוקב של n. המספר הזה מסומן ב- 'n.

כלומר, אם n הוא מספר טבעי אז גם 'n הוא מספר טבעי, ו- n=m גורר n'=m'.

נסמן 1=0'.

**אקסיומה 3.** עבור כל n מתקיים n'≠0; כלומר לא קיים מספר אשר 0 הוא העוקב שלו.

**אקסיומה 4.** n'=m' גורר n=m; כלומר כל מספר משמש עוקב לכל היותר למספר אחד.

**אקסיומה 5.** אם 0 מקיים תכונה כלשהי, ואם קיום התכונה למספר מסוים גורר את קיומה למספר העוקב – אז כל המספרים הטבעיים מקיימים את התכונה.

יש להדגיש את ההבדל המהותי בין האקסיומה החמישית לשאר האקסיומות. בניגוד לאקסיומות 1-4, אקסיומה 5 איננה אקסיומה בודדת אלא **סכמה של אקסיומות** (הכוללת אינסוף אקסיומות: אחת עבור כל תכונה).

בסוף המאה ה-19 עברה המתמטיקה מהפכה כאשר גיאורג קנטור (מתמטיקאי גרמני שאביו היה יהודי מומר) פרסם את תורת הקבוצות שלו. החל מתחילת המאה ה-20 הפכה תורת הקבוצות לבסיס של המתמטיקה. התחום שבו זכתה התורה הזאת להצלחות מרשימות ביותר הוא טיפול בקבוצות אינסופיות. כתוצאה מריכוז תשומת הלב של המתמטיקאים בקבוצות אינסופיות עבר גם עקרון האינדוקציה הרחבה, ולצד העיקרון עבור המספרים הטבעיים קיים גם עקרון אינדוקציה המתייחס למספרים אינסופיים (transfinite induction).