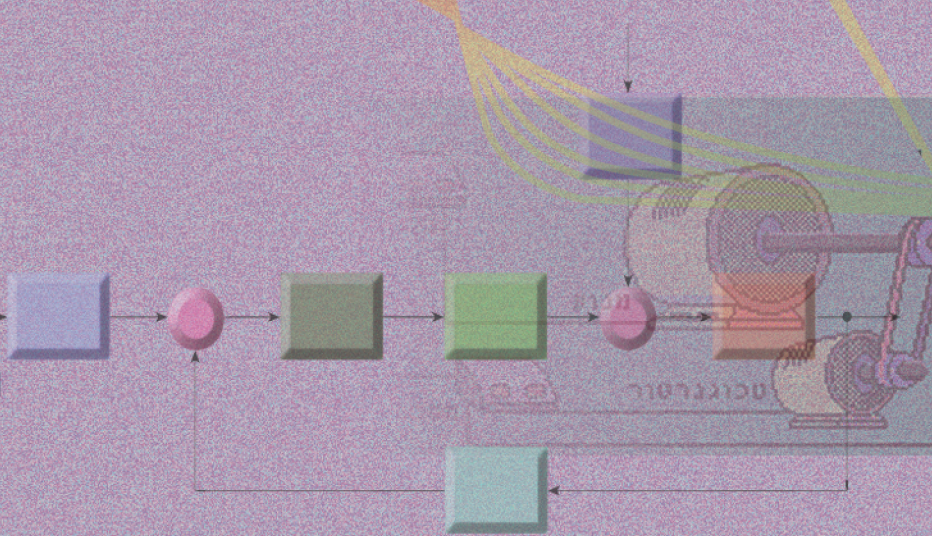




מערכת מיקשוב ובקרה

מערכות בקרה



המרכז הישראלי לחינוך
מדעי-טכנולוגי
ע"ש עמוס דה-שליט



משרד החינוך
התרבות והספורט
האגף לתכנון ולפיתוח תכניות לימודים



האוניברסיטה הפתוחה
בית הספר לטכנולוגיה



המרכז לטכנולוגיה
חינוכית (מט"ח)



מערכת זמנית לזמנים מערכות בקרה

מערכות בקרה



משרד החינוך התרבות והספורט
אישור מס' נ/ 4092

צוות כתיבה

ד"ר רפי יהל
זאב בהיר

קריאה והערות

צבי אזיה
ישראל זילברשטיין
שמעון זיסק
אבי כהן
אבי לופו
שלום קאופמן ז"ל
משה קלרטג

ייעוץ דידיקטי

יעקב שינבויס
ד"ר דוד ברלה

עריכה לשונית

תלמה מוקדי

הפקה

אביבה אבידן

איורים

אירית אשר
בתיא חלף

עיצוב עטיפה

ירמי לזיה

מק"ט 1043810

המרכז הישראלי לחינוך
מדעי-טכנולוגי
ע"ש עמוס דה-שליט



האוניברסיטה הפתוחה
בית-הספר לטכנולוגיה



משרד החינוך
התרבות והספורט
האגף לתכנון ולפיתוח תכניות לימודים



המרכז לטכנולוגיה
חינוכית (מטח)



מהדורת ניסוי

© מהדורת תשס"ו – 2006. כל הזכויות שמורות למשרד החינוך, התרבות והספורט.
בית ההוצאה לאור של המרכז לטכנולוגיה חינוכית, קרית משה רואו, רח' קלאוזנר 16, רמת-אביב,
ת"ד 39513, תל-אביב 61394.

The Centre For Educational Technology, 16 Klausner St., Ramat-Aviv, P.O.Box 39513, Tel-Aviv,
61394. Printed in Israel.

אין לשכפל, להעתיק, לצלם, להקליט, לאחסן במאגר מידע, לשדר או לקלוט בכל דרך או בכל אמצעי אלקטרוני,
אופטי, מכני או אחר כל חלק שהוא מהחומר שבספר זה. שימוש מסחרי בחומר הכלול בספר זה אסור בהחלט, אלא
ברשות מפורשת ובכתב ממדור זכויות יוצרים של המרכז לטכנולוגיה חינוכית.

תוכן העניינים

7	פתח דבר
11	פרק 1 מבוא למערכות בקרה
11	1.1 הקדמה
12	1.2 אותות ומערכות
22	1.3 בקרה בחוג פתוח ובקרה בחוג סגור
36	1.4 סיכום
37	פעילות מחשב מס' 1
39	פרק 2 מערכות בקרה במצב מתמיד
39	2.1 מושג התמסורת במערכות בקרה
48	2.2 פונקציית התמסורת השקולה של מערכות במצב מתמיד
59	2.3 כללים לחישוב פונקציית התמסורת השקולה של מערכות
73	2.4 פונקציית התמסורת של מערכת בקרה מרובת מבואות
79	2.5 שגיאות המצב המתמיד במערכות בקרה עם משו
84	2.6 סיכום
85	פעילות מחשב מס' 2
87	פרק 3 מדידות והתמרות של גדלים פיסיקליים במערכות בקרה
87	3.1 מבוא
90	3.2 יחידות מידה של גדלים פיסיקליים
94	3.3 חישה ומדידה של גדלים פיסיקליים
101	3.4 מאפיינים כלליים של מכשירי מדידה והתמרה
104	3.5 תופעות המשפיעות על הביצועים של מכשירי מדידה
111	3.6 תגובת המתמר בזמן המעבר
114	3.7 סיכום

115	פרק 4 חיישנים ומתמרים במערכות בקרה
115	4.1 חיישנים ומתמרים למדידת טמפרטורה
135	4.2 חיישנים ומתמרים אלקטרו-אופטיים
148	4.3 מתמרי תנועה
175	4.4 מדי כוחות ותאוצות
184	4.5 סיכום
185	פרק 5 מפעילים ושילובם במערכות בקרה
185	5.1 מבוא
186	5.2 מעגלי ויסות חשמליים
197	5.3 מנועים חשמליים
220	5.4 גופי חימום
225	5.5 שסתומי בקרה
233	5.6 סיכום
235	פרק 6 התגובה הדינמית של מערכות בקרה
235	6.1 מהי תגובה דינמית?
239	6.2 התגובה הדינמית של מערכות מסדר ראשון
257	פעילות מחשב מס' 3
258	6.3 התגובה הדינמית של מערכות מסדר שני
277	6.4 סיכום
277	פעילות מחשב מס' 4
279	פרק 7 סוגי בקרים ושילובם במערכות בקרה
279	7.1 מבוא
281	7.2 המשווה ויצירת אות השגיאה
283	7.3 בקרה דו-מצבית
290	7.4 בקרה רציפה
317	7.5 סיכום
318	פעילות מחשב מס' 5

321	פרק 8 תגובת התדר של מערכות בקרה
321	8.1 מהי תגובת תדר?
322	8.2 תגובת התדר של מערכת לאות מבוא סינוסי
329	8.3 תגובת התדר של רכיבים חשמליים מסדר ראשון
338	8.4 התיאור הגרפי של תגובת התדר
350	8.5 תרשימי בודה של מעגלים חשמליים מסדר ראשון
359	8.6 תגובת התדר של מערכות מסדר ראשון
370	8.7 תגובת התדר של מערכות מסדר שני
376	8.8 ניתוח תגובת התדר של מערכות
381	8.9 סיכום
385	פעילות מחשב מס' 6

387 **נספח – ניתוח תגובת המעבר של מעגל RLC**

399 **תשובות לשאלות נבחרות**

פתח דבר

הספר שלפנינו נועד לשמש ספר הלימוד הבסיסי לתלמידי החטיבה העליונה במגמת אלקטרוניקה/מחשבים המעוניינים להתמחות בתת-מגמה **מערכות מחשוב ובקרה**. הספר עוסק במכלול הנושאים הנלמדים במסגרת התמחות זו, ובמיוחד במקצוע **מערכות בקרה**.

נושא הבקרה בכלל, ומערכות בקרה בפרט, אינו זר לתלמידי מגמת אלקטרוניקה/מחשבים. כבר במסגרת מקצוע החובה החדש **מדעי הטכנולוגיה**, לומדים התלמידים בכל מגמות החינוך הטכנולוגי על מודל המערכות ועל התפיסה המערכתית (במסגרת רמת הבסיס של המקצוע), ומאוחר יותר (במסגרת הרמה הרגילה) הם נחשפים ללימודי נושא הבקרה של תהליכים ומערכות. תלמידים הלומדים את המקצוע **מדעי הטכנולוגיה** בהיקף של 5 יח"ל, יכולים להכיר וללמוד מושגים מתקדמים יותר מתחום הבקרה במסגרת לימודי ההתמחות ב"מבוא לטכנולוגיות עתירות מידע וידע".

לימוד הספר שלפנינו אינו דורש ידע מוקדם מעבר לידע הנרכש במסגרת הרמה הרגילה של מדעי הטכנולוגיה. ואולם, היקף הנושאים ומידת ההעמקה עולים כמובן בהרבה על מה שנלמד במדעי הטכנולוגיה בהיקף של 5 יח"ל. היות שהמקצוע **מערכות בקרה** מבוסס על מושגים מתקדמים במתמטיקה, נדרש גם ידע מוקדם במקצוע זה. במיוחד אמורים התלמידים להכיר את הפונקציות הטריגונומטריות, ואת הפונקציה המעריכית והלוגריתמית, וכן לדעת לפתור משוואות ליניאריות ומשוואות ריבועיות. לתלמידים שלמדו מהם מספרים מרוכבים ובפרט פעולות חשבון בהם, יהיה קל יותר להתמודד עם הפרק האחרון בספר (העוסק בתגובת התדר), אם כי בפרק עצמו מובא בתמצית כל הידע המתמטי בנושא זה הדרוש ללימוד נושא תגובת התדר. תוכנית הלימודים במקצועות ההתמחות אינה כוללת לימוד נושאים מתמטיים מתקדמים שהם שימושיים מאוד בתחום הבקרה (כגון: השימוש בהתמרות לפלס). לפיכך, בתיבת הספר השתדלנו מאוד שלא לחרוג מהידע המתמטי הנרכש בתיכון בלימודי 4-5 יח"ל במתמטיקה. עם זאת, לא ראינו מקום לוותר על היכרות עם נושאים חשובים ביותר שהם "אבני היסוד" של תחום הבקרה (כגון: התגובה הדינמית של מערכות במישור הזמן). ישנם

אפוא בספר כמה סעיפים (במיוחד בפרקים 6 ו-7 העוסקים בתגובה הדינמית של מערכות) שבהם נרשמו נוסחאות מתמטיות ללא פיתוח מפורט. למותר לציין שתלמידים אינם נדרשים לשנן נוסחאות אלו אלא רק להבינן ולדעת כיצד משתמשים בהן. יתר על כן, כדי להקל על הלומדים, ריכזנו בנספח לספר את הדיון המתמטי הטכני בנוסחאות המובאות בגוף הספר. רוב הסעיפים האלה (לרבות הנספח) הם חומר רשות. כדי להבחין ביניהם ובין שאר החומר, שהוא חובה, הם מודפסים באותיות קטנות יותר.

הספר מחולק לשמונה פרקים, בהתאם לתוכנית הלימודים במקצוע **מערכות בקרה**.

הפרק הראשון הוא למעשה מבוא ללימוד המקצוע, ורובו אינו אלא חזרה על חומר שנלמד בצורה זו או אחרת במסגרת לימוד מדעי הטכנולוגיה. עם זאת, הדוגמאות בפרק זה מורכבות יותר ולהבנתן נדרשת רמת הפשטה גבוהה יותר.

הפרק השני עוסק במערכות במקרה במצב מתמיד. כאן מעמיקים התלמידים בנושא תרשים המלבנים, ובמיוחד לומדים טכניקות לחישוב התמסורת השקולה של מערכות הפועלות במצב מתמיד.

הפרק השלישי מהווה הקדמה חשובה לנושא המדידות של גדלים פיסיקליים, והוא עוסק במיוחד בהתמרה של גדלים פיסיקליים לא חשמליים לגדלים חשמליים – האופיינית למערכות בקרה. בפרק זה לומדים התלמידים על מאפייני מתמרים שימושיים וחישובים למיניהם וכן על תופעות פיסיקליות המשפיעות על ביצועיהם.

בפרק הרביעי מובאת סקירה מקיפה של חיישנים ומתמרים שונים המשמשים במערכות בקרה הפועלות בחוג סגור. במיוחד התרכזנו במתמרי טמפרטורה, מתמרים אלקטרו-אופטיים, מתמרי מהירות ומצב, וכן מתמרי כוח ולחץ. הפרק כולל גם תיאור של מעגלים אלקטרוניים המשלבים חיישנים במערכות, לרבות דוגמאות שימושיות למערכות בקרה.

הפרק החמישי עוסק במפעילים ובאופן שילובם במערכות בקרה. לאחר תיאור והסבר של מעגלי ויסות אלקטרוניים המהווים חלק חיוני במרבית מערכות הבקרה התעשייתיות דן הפרק בשלושה סוגים עיקריים של מפעילים: מנועים חשמליים המשמשים לוויסות מהירות ומצב, גופי חימום ואמצעים לוויסות הטמפרטורה, וכן שסתומים הידראוליים ופנימטיים המשמשים לוויסות ולשליטה במערכות שבהן זורמים נוזלים או גזים.

הפרק השישי עוסק בתגובה הדינמית של מערכות, דהיינו, תגובת המערכת בתלות בזמן. כאמור, פרק זה הוא פרק מתמטי יותר מהפרקים הקודמים, אם כי רוב הדוגמאות עוסקות במערכות פשוטות יחסית, המוכרות לתלמידי חשמל/אלקטרוניקה מלימודיהם הקודמים (לדוגמה, מעגל נגד-קבל, מעגל נגד-קבל-משרן, וכו'). באמצעות מעגלים פשוטים אלו, לומדים התלמידים מושגים יסודיים בתורת הבקרה, כגון תדר טבעי של מערכת, מקדם הריסון של מערכת, ועוד.

בפרק השביעי נעשה ניסיון ללמד על סוגי בקרים ותצורות בקרה שימושיות בלי שימוש במתמטיקה (המסובכת לתלמידי התיכון) הדרושה לניתוח תגובת המערכות שבהן משולבים בקרים אלו. לדוגמה, ההסבר על פעולתו של בקר יחסי-אינטגרלי הוא איכותי בעיקרו, והדוגמאות משמשות להמחשת ההסבר העיוני. עם זאת, כללנו דוגמאות מפורטות של מעגלים אלקטרוניים המממשים בקרים בתצורות שונות.

הפרק השמיני והאחרון בספר זה עוסק בנושא החשוב של תגובת התדר של מערכות. כידוע, ניתוח תגובה זו הוא הבסיס לדיון ביציבות מערכות בכלל ומערכות בקרה בפרט, אולם גם כאן, עקב אילוצים של ידע מתמטי, נאלצנו להסתפק בדיון כללי בנושא. עם זאת, בסוף הפרק מובאת (כחומר רשות) סקירה קצרה על הקשר בין תגובת התדר ליציבות המערכת.

בספר שולבו דוגמאות ושאלות רבות להמחשה ולהעמקת הלימוד העיוני של החומר*. חלק מהשאלות הן קשות יותר, וסומנו על-ידי כוכבית. הספר כולל "פעילויות מחשב" המהוות חלק מחומר הרשות. פעילויות אלו הן למעשה תרגול מובנה של החומר באמצעות לומדת הדמיה שפותחה במיוחד עבור תלמידי תיכון הלומדים את הנושא מערכות בקרה. הלומדה משתמשת בכלים מתמטיים מתקדמים שהם "שקופים" למשתמש, וכוללת, בנוסף לתרגול המובנה, גם אפשרות של עבודה "פתוחה" על-פי רצון המורה או המשתמש.

אנו מאחלים לכולם לימוד מהנה ופורה!

צוות הפיתוח

* הכתיבה הסתייעה בספר: מ. ברק, ש. וקס, **מבוא למערכות המרה ובקרה**, חלק א', הטכניון מכון טכנולוגי לישראל, אורט ישראל והמרכז הישראלי להוראת המדעים, 1991.

פרק 1

מבוא למערכות בקרה

1.1 הקדמה

האדם הוא אולי הדוגמה המופלאה ביותר ל**מערכת בקרה**. אדם בריא יכול לבצע מספר רב של פעולות, כולל קבלת החלטות מסובכות המבוססות על ידע, ניסיון אישי או אמונה. כמה מפעולות אלו, כגון, הרמת עצם משולחן, או הליכה מנקודה לנקודה, נעשות על-פי רוב בצורה מוכנית, ללא תכנון מוקדם. לעומת זאת, במקרים אחרים חשוב לבצע את הפעולות בצורה הטובה ביותר, דבר הדורש מחשבה ותכנון מוקדמים. לדוגמה: אתלט בתחרות ריצה שואף לעבור מרחק נתון בזמן הקצר ביותר. רץ ל-100 מטר, למשל, ישקיע מאמץ מרבי להשגת מטרה זו, תוך שימוש בכל המשאבים העומדים לרשותו. גם רץ מרתון מעוניין לעבור את המרחק הנתון בזמן הקצר ביותר. אולם הפעם מדובר במרחק של 42 ק"מ (לערך) ולכן רץ זה חייב ל**בקר** את צריכת האנרגיה של גופו בצורה שונה מזו של רץ ל-100 מטר. כדי להשיג את מטרתו, עליו לתכנן את מהלכיו ולשלוט עליהם בהתאם לנתוניו הפיסיים, תנאי השטח והסביבה, תנאי מזג האוויר, וכיו. לשני האתלטים יש אפוא **מטרה** שהם מעוניינים להשיג, והתוצאות שהם משיגים כרוכות בפעולתה של **מערכת בקרה**.

המערכת "אדם" היא מערכת בקרה טבעית. בניגוד למערכות בקרה טבעיות, מערכות בקרה **טכנולוגיות** הן מערכות מעשה ידי אדם. קשה לתאר את החיים בחברה המודרנית ללא שימוש במערכות בקרה טכנולוגיות. בבית, מכשירים רבים הם מערכות בקרה, או שהם כוללים בתוכם מערכת בקרה. כל מפסק חשמלי בבית הוא "מערכת בקרה". מזגן, מצנע (טוסטר), מכונת כביסה ומקרר חשמלי הם דוגמאות למכשירים ביתיים שאפשר להסתכל עליהם כעל מערכות בקרה טכנולוגיות. מערכות בקרה ממלאות תפקיד חשוב בכל ענפי התעשייה. מערכות אלו משמשות לבקרת תהליכים, לבקרת איכות מוצרים, לפיקוח על קווי ייצור אוטומטיים, לבקרת מכונת-כלים, ועוד. כיום לא ניתן לתפעל מערכות הספק, מערכות שינוע, או אמצעי תחבורה למיניהם, ללא שימוש באמצעי בקרה. מכשירי מדידה, מחשבים ורובוטים הם חלק חשוב

במערכות בקרה רבות. אפילו את התנהגותן של מערכות כלכליות, כגון מערכות מוניטריות או מערכות שיווק, ניתן להבין בצורה טובה יותר, אם מנתחים אותן באותם כלים שבהם מנתחים מערכות בקרה טבעיות וטכנולוגיות.

בכל אחת מהדוגמאות שמנינו לעיל, תהליכי בקרה מופעלים על מערכת. **מערכת** (system) היא **צירוף של כמה מרכיבים שקיימת ביניהם פעולת גומלין, והיא פועלת לשם השגת מטרה מסוימת**. אם נתאר את המערכת כמלבן, הרי המטרה היא **אות המבוא למלבן, והתוצאה של פעולת המערכת, היא אות המוצא מהמלבן** (איור 1.1). התוצאה משקפת אפוא עד כמה הושגה המטרה בפעולת המערכת.

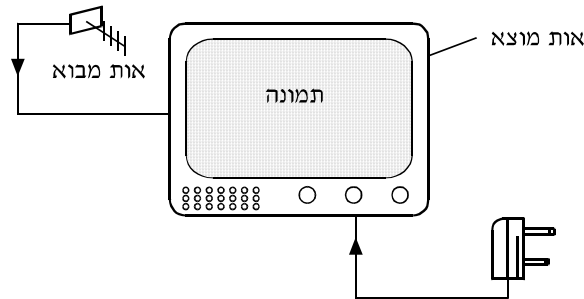
הספר שלפנינו נועד ללמד את מושגי היסוד של תחום חשוב זה: מה הן מערכות בקרה, כיצד הן פועלות, ולמה הן משמשות.



איור 1.1 מערכת

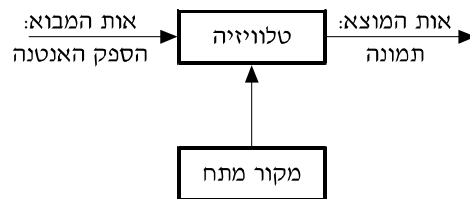
1.2 אותות ומערכות

המערכות שנכיר במסגרת לימודי המקצוע הן **מערכות פיסיקליות**, כלומר, מערכות שהמרכיבים שלהן הם **התקנים פיסיקליים** או **תהליכים** שמעורבים בהם גדלים פיסיקליים. הטלוויזיה בביתנו, למשל, היא מערכת פיסיקלית (איור 1.2). אות המבוא למערכת זו הוא אות ההספק החשמלי הנקלט מהאנטנה, ואות המוצא הוא אות התמונה המתקבלת על מרקע המכשיר.



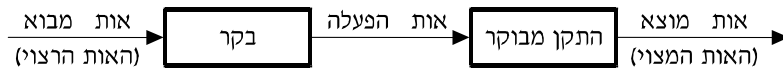
איור 1.2 מערכת טלוויזיה

ניתן לתאר מערכת בעזרת **תרשים מלבנים** שבו כל מלבן מייצג רכיב או תהליך במערכת. למשל, את מערכת הטלוויזיה אפשר לתאר בעזרת תרשים כדוגמת התרשים שבאיור 1.3. **החיצים** בתרשים המלבנים של המערכת מייצגים את כיוון זרימת המידע במערכת. שימו לב כי למונח "זרימת מידע" יש כאן משמעות רחבה יותר מאשר סתם "העברת ידע": גם זרם חשמלי ממקור מתח יכול לציין "זרימת מידע".



איור 1.3 תרשים מלבנים של מערכת הטלוויזיה

מערכת בקרה (control system) היא מערכת הכוללת **לפחות** שני רכיבים: בקר (controller) והתקן (או תהליך) מבוקר (controlled process), כמתואר באיור 1.4. תפקיד הבקר הוא לווסת את אות המוצא מהמערכת, על-ידי שליטה מתאימה בהתקן המבוקר. לעתים קרובות, השליטה מושגת על-ידי שינוי אות המבוא להתקן המבוקר, ולפיכך נהוג לכנות את אות המבוא להתקן המבוקר גם בשם **אות ההפעלה** (actuating signal), ואילו אות המוצא מכונה **הערך המבוקר** (controlled signal) או "האות המצוי". **הערך הרצוי** של האות המבוקר (או האות הרצוי) הוא אות המבוא לבקר, כמתואר באיור 1.4.



איור 1.4 תרשים מלבנים של מערכת הכוללת בקר והתקן מבוקר

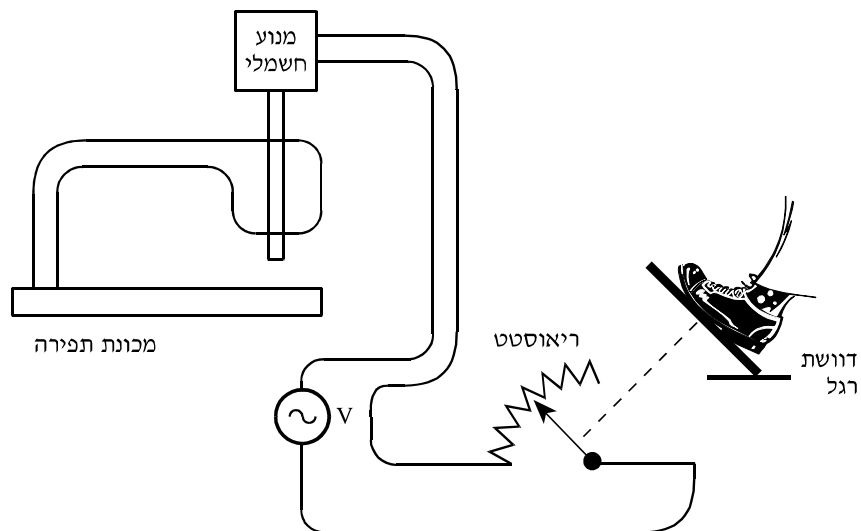
בקרים רבים כוללים שני רכיבים נפרדים שלכל אחד מהם תפקיד שונה: רכיב מבקר (controlling element) המעבד או אוגר את המידע הנדרש לשליטה ולבקרת ההתקן (איור 1.5), ורכיב הפעלה (actuating element) שתפקידו להפעיל את ההתקן המבוקר. אות המבוא לרכיב ההפעלה הוא אות התיקון, ואות המוצא מרכיב ההפעלה הוא אות ההפעלה (איור 1.5).



איור 1.5 בקר הכולל רכיב מבקר ורכיב הפעלה

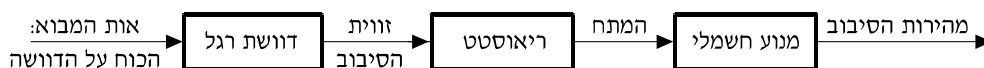
1.1 דוגמה

באיור 1.6 מתואר תרשים עקרוני של מערכת להפעלת מכונת תפירה.



איור 1.6 מכונת תפירה המופעלת על-ידי דוושת רגל

מכונת תפירה חשמלית המופעלת באמצעות דוושת רגל היא דוגמה למערכת בקרה הכוללת רכיב מבקר, רכיב הפעלה, והתקן מבוקר. במערכת זו, המנוע החשמלי של המכונה הוא ההתקן המבוקר, והריאוסטט, שהוא פוטנציומטר סיבובי המווסת את המתח המסופק למנוע, הוא רכיב ההפעלה. דוושת הרגל היא הרכיב המבקר: מצבה קובע את מצב הריאוסטט, ולכן גם את עוצמת המתח על המנוע. במערכת מכונת התפירה אות המבוא הוא הכוח על הדוושה, ואות המוצא, או האות המבוקר, הוא מהירות הסיבוב של המנוע. אות ההפעלה הוא עוצמת המתח החשמלי בין הדקי המנוע, והאות המבקר הוא זווית הסיבוב של הפוטנציומטר (הנקבעת על-פי מצב הדוושה). הבקר במערכת זו כולל אפוא שני רכיבים – דוושת הרגל והריאוסטט. באיור 1.7 מתואר תרשים המלבנים של המערכת.



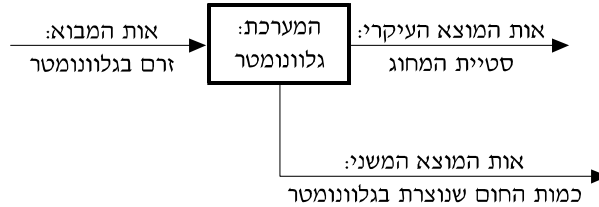
איור 1.7 תרשים מלבנים של מערכת מכונת התפירה

למערכת יכולים להיות כמה אותות מבוא וכמה אותות מוצא. על-פי רוב, ניתן להגדיר היטב את אותות המבוא והמוצא הללו, אך לא תמיד כך הדבר. למשל, סערות חשמליות באטמוספירה יכולות להפריע לקליטת שידורי רדיו, ולגרום לכך שהרמקולים ישמיעו רעש בלתי רצוי. תפוקה זו של "רעש" איננה נחשבת בדרך כלל כחלק מהנתונים של "מערכת הקול", ולכן לא נהוג להתייחס אליה כאל אות מוצא מהמערכת. בהגדרת מערכת ניתן אפוא להתעלם מסוגים שונים של אותות מוצא לא רצויים. עם זאת, כאשר בוחנים מערכת לפרטיה, נדרש לפעמים תיאור מדוקדק של כל אותות המבוא ואותות המוצא האפשריים של המערכת. הגדרת המערכת, וגם הגדרת אותות המבוא ואותות המוצא, הנה אפוא פועל יוצא של הגדרת המטרה והתוצאה (או התוצאות) של פעולת המערכת.

דוגמה 1.2

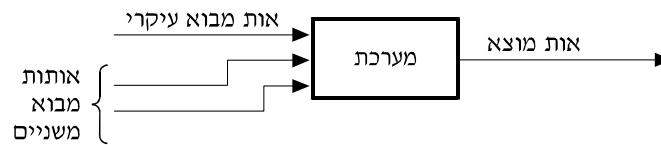
כידוע, הגליונומטר הוא מכשיר למדידת זרמים חשמליים. אפשר להתייחס אל הגליונומטר כאל מערכת, שאות המבוא אליה הוא הזרם הנמדד בין הדקי המכשיר, ואות המוצא הוא סטיית המחוג של המכשיר. אך ניתן להגדיר אות מוצא נוסף: כמות החום הנוצרת בסליל הגליונומטר. ברור שאות המוצא הנוסף הוא משני בחשיבותו, היות שהגליונומטר נועד למדידת

זרמים, ולכן ברוב המקרים נוכל להזניח אות משני זה. באיור 1.8 מופיע תרשים מלבנים של המערכת, עם אות המבוא ואותות המוצא.



איור 1.8 מערכת שיש לה שני אותות מוצא

כשם שבדוגמה האחרונה הבחנו בין **אות המוצא העיקרי** לבין **אות המוצא המשני**, כך במערכות רבות נהוג להבחין בין **אות מבוא עיקרי**, לבין **אות מבוא משני** (או כמה אותות). למשל, בדוגמה 1.2, הזרם הנמדד הוא אות המבוא העיקרי. תנאים חיצוניים (כגון טמפרטורת הסביבה), שיכולים להשפיע על קריאת הגליונומטר, נחשבים לאותות מבוא משניים. במערכות בקרה, הערך הרצוי של אות המוצא העיקרי נחשב לרוב לאות המבוא העיקרי. תנאי הסביבה המשפיעים על המערכת וגורמים חיצוניים הם על-פי רוב **אותות מבוא משניים** (איור 1.9).



איור 1.9 מערכת שיש לה אות מבוא עיקרי ואותות מבוא משניים

מערכת שיש לה אות מבוא יחיד ואות מוצא יחיד, נקראת בעגת אנשי המקצוע, **מערכת בעלת מבוא אחד ומוצא אחד** (Single Input, Single Output – SISO). לעומת זאת, מערכת עם אותות מבוא ומוצא משניים נקראת גם **מערכת מרובת מבואות ומוצאים** (MIMO – Multi Input, Multi Output).

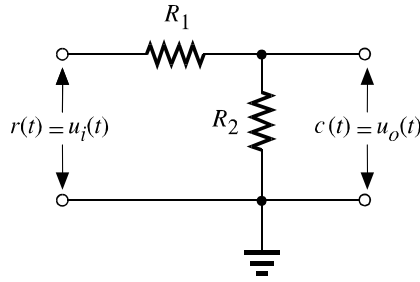
הן אותות המבוא והן אותות המוצא של מערכות טכנולוגיות הם גדלים פיסיקליים שיכולים להשתנות בזמן. כדי להדגיש את העובדה ששני סוגי האותות הללו הם פונקציה של הזמן t , נסמן את אות המבוא העיקרי למערכת ב- $r(t)$, ואת אות המוצא העיקרי ב- $c(t)$.



איור 1.10 מערכת שיש לה אות מבוא $r(t)$ ואות מוצא $c(t)$

דוגמה 1.3

נתונה מערכת המורכבת משני נגדים המחוברים בטור למקור מתח (מחלק מתח, איור 1.11). נניח כי אות המוצא מהמערכת הוא המתח u_0 על הנגד R_2 , ואות המבוא למערכת הוא מתח המקור u_i . כלומר, $c(t) = u_0(t)$ ו- $r(t) = u_i(t)$. הראו כי אם ברגע מסוים מכפילים את אות המבוא, גם אות המוצא גדל כפליים.



איור 1.11 מחלק מתח

פתרון

כידוע, ברשת נגדים זו, הקשר בין מתח המוצא הרגעי u_0 למתח המבוא הרגעי u_i , נתון על-ידי משוואת מחלק המתח:

$$u_0(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_i(t)$$

ממשוואה זו נובע כי אם מכפילים את המתח u_i אזי גם u_0 גדל כפליים. למעשה, אם כופלים את אות המבוא בגודל α (כשהוא $\alpha > 0$), גם אות המוצא גדל פי α . ואמנם, אם u_0^* הוא אות מתח המוצא המתאים למתח מבוא αu_i , אזי מתקיים:

$$u_0^* = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) \alpha u_i = \alpha \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) u_i = \alpha u_0$$

כפי שנראה בהמשך, תכונה זו היא תכונה חשובה המאפיינת את מרבית המערכות שנעסוק בהן.

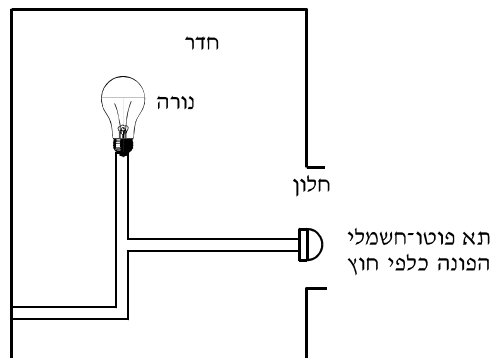
שאלה 1.1

בכל אחד מהמקרים הבאים, הגדירו את המערכת על חלקיה: המערכת המבוקרת והבקר. הגדירו את אות המבוא העיקרי ואת אות המוצא העיקרי מהמערכת, וכן את אותות המבוא והמוצא המשניים (אם קיימים כאלה). תארו את המערכות השונות בעזרת תרשים מלבנים עם אותות המבוא והמוצא המתאימים.

א. מכונת כביסה ביתית המכילה קוצב זמן (timer) לקביעת זמני הפעולה השונים של המכונה (ערבול, שטיפה, וסחיטה).

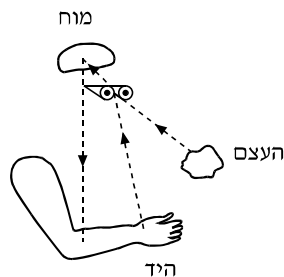
ב. מצנם חשמלי המכיל בורר לקביעת זמן החימום.

ג. מערכת המדליקה אוטומטית נורה בחדר בשעת הדמדומים, ומכבה אותה עם שחר (איור 1.12).



איור 1.12 מערכת בקרת אור

ד. מערכת הבקרה הטבעית "אדם מושיט יד להרים עצם" (איור 1.13).



איור 1.13 אדם מושיט את ידו להרים עצם

1.2 שאלה

הסבירו את פעולתו של רמזור רגיל המפקח על תנועה בהצטלבות שני רחובות. התייחסו אל "כמות התנועה בכביש" כאל תהליך מבוקר שבו הרמזור הוא הבקר. מהו אות המבוא ומהו אות המוצא של מערכת זו? תארו את המערכת ואת האותות השונים בעזרת תרשים מלבנים.

כאמור, מערכות מושפעות בדרך כלל מכמה אותות, ולעתים לחלק מהאותות הללו יש "השפעה שלילית" על המטרה שהמערכת נועדה להשיג. אותות אלו, שבדרך כלל אין לנו שליטה עליהם, נקראים גם **אותות הפרעה** למערכת. איכות המערכת נקבעת, בין היתר, על-פי מידת ההשפעה של ההפרעה על מטרת המערכת.

1.4 דוגמה

א. אם נסתכל על מכונית נוסעת כעל "מערכת", אז העומס על מנוע המכונית גדול יותר כאשר המכונית נוסעת בעלייה. שיפוע המדרון משפיע על מהירות הנסיעה. השיפוע הוא אפוא **הפרעה** הגורמת לשינויים באות המוצא (המהירות) של המערכת.

ב. רשת החשמל הארצית אמורה לספק לצרכנים מתח מחזורי בתנופה קבועה. כאשר יש עלייה בצריכת החשמל, כגון בשעות הערב, נוצר עומס רב על הגנרטורים בתחנת הכוח, וכן גדל מפל המתח על הקווים, ומתח החשמל עלול לרדת (למשל: במקום 220V, עלול המתח בקו בשעת העומס לרדת ל-210V). זוהי דוגמה נוספת להשפעת הפרעה הגורמת לשינויים באות המבוקר.

ג. על-פי רוב, השינוי בתנאי הסביבה משפיע על **תכונות המערכת** עצמה, השפעה המתבטאת גם היא בהפרעה למשתנה המבוקר. בנסיעה במכונית ביום שרב עלול מנוע המכונית להתחמם, ואז עוצמת המנוע קטנה ומהירות הנסיעה יורדת.

ד. עלייה בטמפרטורת הסביבה של רשם-קול, גורמת לירידה בטיב הביצועים של הרכיבים האלקטרוניים שלו, ומתקבל צליל באיכות נמוכה.

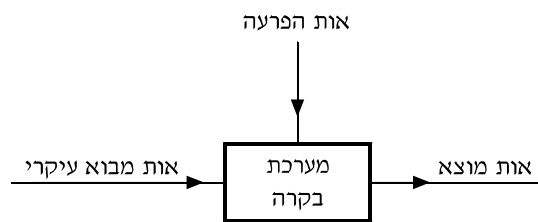
ה. לפעמים מתקיימות בו-בזמן הפרעות מסוגים שונים, וקשה להבחין ביניהן. למשל: בנסיעה במכונית בעלייה, המהירות עלולה לרדת הן בגלל השינוי בזווית המדרון (השפעה ישירה), והן בגלל התחממות המנוע והירידה בעוצמתו (השפעה עקיפה).

שאלה 1.3

- א. הביאו עוד דוגמה או שתיים להפרעות אפשריות באיכות הצליל המופק ברשם-קול.
 ב. ציינו הפרעות אפשריות לאות המבוקר במערכת מכונת התפירה המתוארת בדוגמה 1.1.

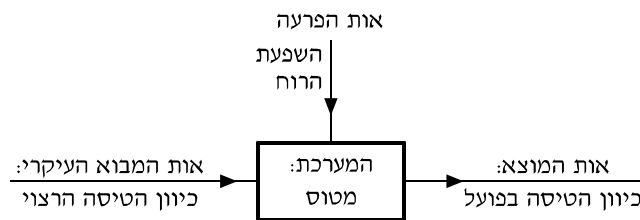
ההפרעות שהוזכרו בדוגמאות לעיל נפוצות למדי במכשירים לשימוש ביתי. בתחנת שידור או באולפן הקלטה חשוב הרבה יותר להשתמש במכשירים המפיקים צליל בעל איכות גבוהה מאוד בכל תנאי העבודה, כך שהסטיות הן מזעריות ובלתי מורגשות. בהמשך נכיר כמה מן האפשרויות למניעת (או להקטנת) הפרעות לאות המבוקר במערכת בקרה.

בתרשים מלבנים של מערכת נהוג לתאר את ההפרעה כאות מבוא משני המופיע כחץ ניצב לחץ המבוא העיקרי. ראו איור 1.14.



איור 1.14 הפרעה לאות המבוקר

למשל, בתרשים המלבנים שבאיור 1.15, חץ ההפרעה מתאר את השפעת הרוח על כיוון הטיסה של מטוס.



איור 1.15 הפרעה לכיוון טיסה של מטוס

תפקידו של טייס במטוס בעל מערכת היגוי ידנית הוא לתקן במשך כל הטיסה את הסטיות בכיוון המטוס הנגרמות עקב השפעת הרוח. במטוסים מודרניים מבקרת מערכת אוטומטית הן את גובה הטיסה והן את מהירותה.

שאלה 1.4

הביאו דוגמאות אחדות משלכם למערכת בקרה שיש בה הפרעות לאות המבוקר. תארו את מערכת הבקרה ואת ההפרעה באמצעות תרשים מלבנים. ציינו את הגודל הפיסיקלי המבוקר ואת השפעות ההפרעה עליו.

עד כה ראינו, כי הערך של האות המבוקר (אות המוצא אוהאות המצוי) עלול לסטות מהערך הרצוי (אות המבוא) בגלל ליקויים במערכת או בגלל השפעות חיצוניות. כאשר יש הפרש בין האות המצוי לאות הרצוי של מערכת בקרה, המערכת משיגה את מטרתה באופן חלקי בלבד. בדרך כלל אנו שואפים לבנות מערכת שאין בה סטיות גדולות מהערך הרצוי, או שהמערכת מתקנת כל סטייה עם הופעתה. אך האם תמיד אפשר לעשות זאת? בהמשך נרחיב את הדיון בכך.

שאלה 1.5

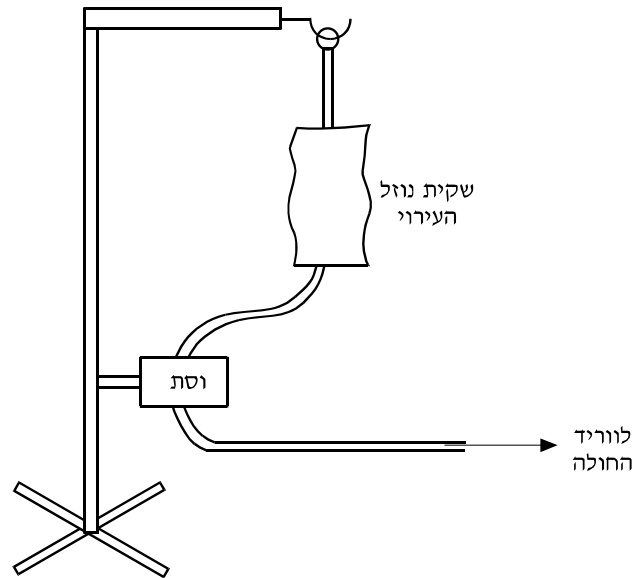
במפעל כימי יש חדר מסוים שבו עלול להיפלט גז רעיל. בחדר מותקנים חיישנים הרגישים לגז זה. כאשר ריכוז הגז באוויר עולה על 1%, מופעל באופן אוטומטי מנוע המוציא את הגז ומזרים לחדר אוויר נקי.

א. מהו האות המבוקר על-ידי המערכת ומהי ההפרעה לאות המבוקר?

ב. מהם אות המבוא ואות המוצא של מערכת זו?

שאלה 1.6

בעת מתן עירו (אינפוזיה), יש מקרים שבהם חיוני לדייק בקצב הזרמת נוזל העירו לוויד של החולה. לשם כך משתמשים בבתי חולים במערכת המתוארת באיור 1.16.



איור 1.16 מתקן עירוני

ציינו מהו האות המבוקר, מהו אות המבוא, מהו אות המוצא, ומהן ההפרעות האפשריות למערכת זו.

1.3 בקרה בחוג פתוח ובקרה בחוג סגור

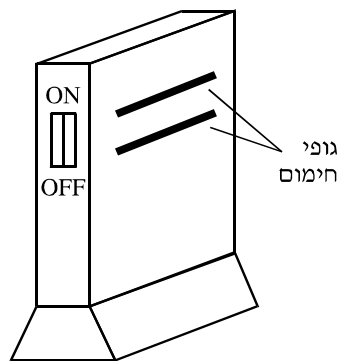
נתבונן במערכת בקרה שבה קיימת סטייה של אות המוצא מהערך הרצוי בשל הפרעות חיצוניות ובשל ליקויים במבנה המערכת. אחת הבעיות המרכזיות במערכת בקרה מסוג זה היא: כיצד אפשר למנוע (או להקטין) את הסטייה של אות המוצא העיקרי במערכת מהערך הרצוי של האות? הדרך הפשוטה ביותר לצמצום הסטייה היא מדידה מתמדת של אות המוצא, השוואתו לאות הרצוי, ותיקון מיידי של הסטייה על סמך השוואה זו. זוהי שיטת הבקרה עם **משוב**, הידועה גם בשם **בקרה בחוג סגור**.

באופן כללי, במערכות בקרה עם משוב מתבצעות שלוש פעולות יסודיות:

1. **מדידה** של הגודל המבוקר.
2. **השוואה** בין הגודל המבוקר הנמדד לערך הרצוי של הגודל, וחישוב השגיאה (הסטייה).
3. **תיקון** של פעולת הבקרה על-פי השגיאה, במטרה לבטלה או לכל הפחות לצמצמה.

מערכת שאין בה תיקון עצמי של סטיות בגודל המבוקר, נקראת מערכת בקרה **בחוג פתוח**. תנור החימום המתואר באיור 1.17 ("תנור מקרן") שאין בו התקן המווסת את פעולת גופי החימום על-פי ערכה של טמפרטורת הסביבה, הוא דוגמה למערכת בקרה בחוג פתוח. טמפרטורת האוויר שליד התנור היא אות המוצא מהמערכת, והוא נקבע על-ידי הספק גופי החימום של התנור ותנאי הסביבה, אולם אינו נמדד ואינו מושווה לערך רצוי כלשהו. לפיכך, בתנאים מסוימים הטמפרטורה עלולה להיות נמוכה מדי (סטייה כלפי מטה) ובתנאים אחרים – גבוהה מדי (סטייה כלפי מעלה).

המשותף לכל מערכות הבקרה בחוג פתוח הוא המבנה העקרוני של תרשים המלבנים המתאר אותן: בכולן כיוון "זרימת המידע" בתרשים הוא מ"רכיב המבוא" הקולט את אות המבוא, ל"רכיב המוצא" היוצר את אות המוצא. דוגמה לתרשים כזה הוא התרשים של מערכת מכונת התפירה שבאיור 1.7.

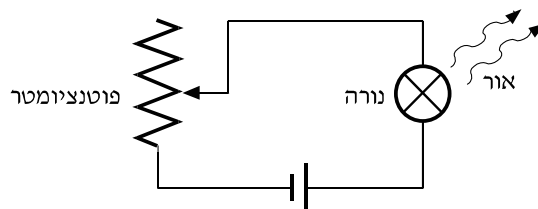


איור 1.17 תנור חימום

שאלה 1.7

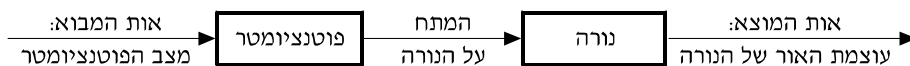
סרטטו את תרשים המלבנים של תנור המקרן, וסמנו את האותות במערכת זו. התייחסו למפסק החשמלי בתנור כאל הרכיב המבקר במערכת, אל גופי החימום כאל רכיב ההפעלה, ואל סביבת התנור כהתקן המבוקר. התייחסו לזרימה של אוויר קר בסביבת התנור (למשל, משב רוח פתאומי) כאל הפרעה לפעולת המערכת. מהו "אות ההפרעה" בשאלה זו?

גם המערכת המתוארת באיור 1.18 היא "מערכת בקרה בחוג פתוח". כאן עוצמת האור של הנורה היא אות המוצא, ומצב הפוטנציומטר (מקום ההדק הנע) הוא אות המבוא למערכת. הנורה היא אפוא הרכיב המבוקר, והפוטנציומטר הוא הרכיב המבקר. זוהי מערכת בקרה בחוג פתוח*, משום שלא מתבצעת השוואה של עוצמת האור במוצא ל"עוצמת האור הרצויה".



איור 1.18 מערכת בקרת תאורה

בתרשים המלבנים של המערכת (איור 1.19), כיוון "זרימת המידע" הוא מהפוטנציומטר אל הנורה (כלומר, מרכיב המבוא אל רכיב המוצא) ואין "זרימת מידע" בכיוון ההפוך.

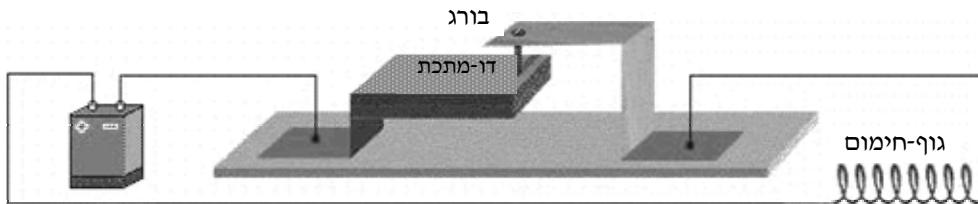


איור 1.19 תרשים מלבנים של המערכת שבאיור 1.18

בניגוד למערכת בחוג פתוח, מערכת בחוג סגור כוללת בנוסף למדידה של האות המבוקר גם השוואה לאות הרצוי, ויצירת אות ההפרש בין האות המצוי לאות הרצוי. המדידה נעשית בדרך כלל באמצעות חיישן, או באמצעות רכיב אחר המושפע מעוצמת הגודל המבוקר.

* בספר זה נניח כי כל מערכת, שבה ניתן לנוסת את אות המוצא, היא מערכת בקרה. עם זאת, יש המניחים כי רק מערכות, שבהן נעשית מדידה של אות המוצא, הן מערכות בקרה. על-פי גישה זו, המערכת – המתוארת באיור 1.18 – אינה מערכת בקרה.

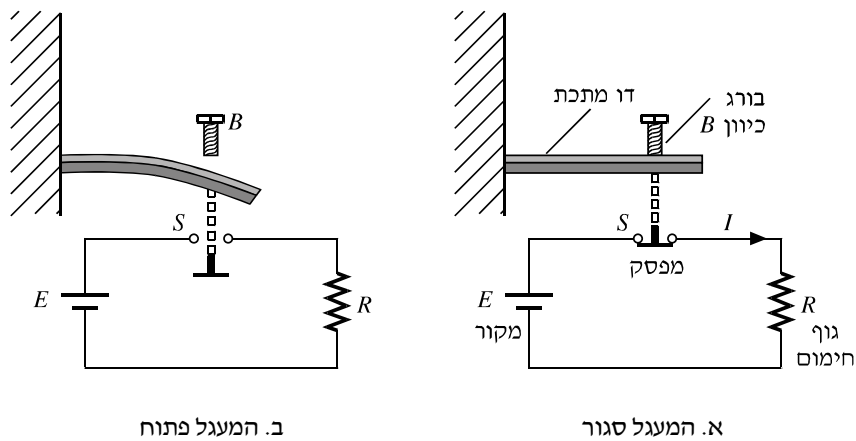
מערכת הפועלת בחוג סגור מתוארת באיור 1.20. במערכת זו, התקן דו-מתכת משמש חיישן טמפרטורה. רכיב זה בנוי משתי לוחיות צמודות זו לזו, שכל אחת מהן עשויה מתכת אחרת. באיור 1.21 מתואר מעגל חשמלי שבו התקן דו-מתכת משמש כתרמוסטט.



איור 1.20 התקן דו-מתכת המשמש תרמוסטט

בהתקן דו-מתכת משתמשים בשתי מתכות שיש להן מקדם שונה של התפשטות אורכית בחום. כאשר הטמפרטורה נמוכה, המפסק S במעגל החשמלי סגור, כלומר, מגעיו מחוברים (כמתואר באיור 1.21א), ואז זורם זרם חשמלי I דרך גוף החימום R , והוא מפיק אנרגיה של חום.

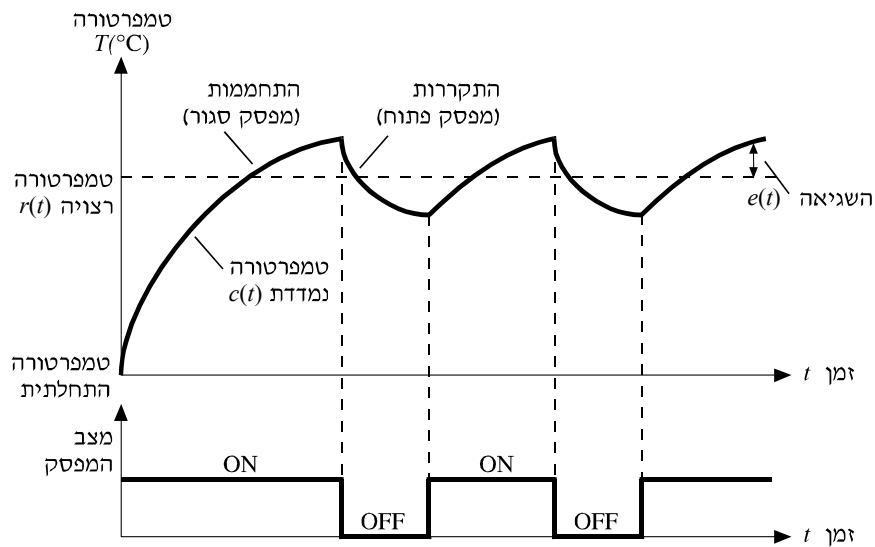
כאשר הטמפרטורה עולה, שתי לוחיות הדו-מתכת בתרמוסטט מתפשטות במידה שונה, וכתוצאה מכך צמד הלוחיות מתעקם וגורם לפתיחת המפסק, כמתואר באיור 1.21ב.



איור 1.21 מעגל חשמלי ובו התקן דו-מתכת המשמש תרמוסטט

פתיחת המפסק S גורמת לנתק במעגל החשמלי, והחימום נפסק. כאשר הטמפרטורה יורדת, חוזרות לוחיות הדו-מתכת שבתרמוסטט למצבן הקודם, המפסק S נסגר, והחימום החשמלי מופעל שוב. בעזרת בורג הכיוון (B) ניתן לקבוע את הטמפרטורה הרצויה: ככל שהכיפוף ההתחלתי של לוחות הדו-מתכת גדול יותר, תידרש עלייה קטנה יותר בטמפרטורה עד לפתיחת המפסק. במערכת זו קובעים אפוא באופן מכני את הטמפרטורה הרצויה ("האות הרצוי").

מגעי המפסק נפתחים ונסגרים חליפין על-פי קצב העלייה והירידה של הטמפרטורה בסביבה.



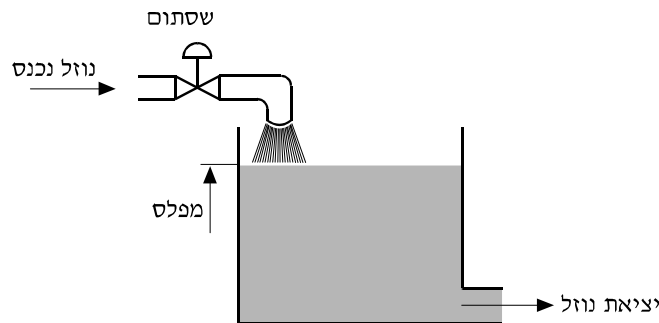
איור 1.22 תנודות מחזוריות של הטמפרטורה במערכת התרמוסטט

כתוצאה מכך, האות המבוקר (הטמפרטורה בסביבה) אינו מתייצב באופן קבוע על הערך הרצוי, אלא נע סביבו במחזוריות, כמתואר באיור 1.22. בהמשך נראה כי תנודות מחזוריות כאלו בפעולת המערכת אופייניות למערכות בקרה שבהן לאות ההפעלה (איור 1.4) יש שני מצבים אפשריים בלבד. כפי שראינו גם במערכת התרמוסטט לעיל קיימים שני מצבים: מצב שבו קיים חימום, ומצב שבו אין זרם חשמלי במעגל ואין חימום.

ההפרש בין הערך הרצוי של הטמפרטורה לבין הערך הנמדד הוא **אות השגיאה**. מאיור 1.22 אנו למדים כי השגיאה יכולה להיות חיובית או שלילית, בהתאם לגודלם היחסי של האותות:

$$(1-1) \quad e(t) = r(t) - c(t)$$

במשוואה (1-1), $r(t)$ הוא ערך הטמפרטורה הרצויה (האות הרצוי), $c(t)$ הוא הערך המדוד (האות המצוי), ו- $e(t)$ הוא אות השגיאה. שימו לב כי כל שלושת האותות במשוואה זו נמדדים באותן יחידות פיסיקליות (למשל, מעלות צלסיוס).



איור 1.23 בקרת ספיקה באמצעות שסתום

שאלה 1.8

באיור 1.23 מתואר מתקן למילוי מכל בנוזל. ספיקת הנוזל למכל (כמות הנוזל הנכנסת למכל ביחידת זמן) מבוקרת על-ידי מצב השסתום (שסתום פתוח לגמרי = ספיקה גבוהה, שסתום סגור = אין ספיקה, וכו').

א. האם המערכת פועלת בחוג פתוח או בחוג סגור? נמקו.

ב. התייחסו אל מפלס הנוזל (גובה הנוזל במכל) כאל אות המוצא מהמערכת (הגודל המבוקר), אל ספיקת הנוזל למכל כאל אות המבוא, ואל קצב יציאת המים מהמכל כאל הפרעה לפעולת המערכת. סרטטו תרשים מלבנים של המערכת וציינו בו את תפקיד השסתום והמכל. ציינו בתרשים את כל האותות שבמערכת.

שאלה 1.9

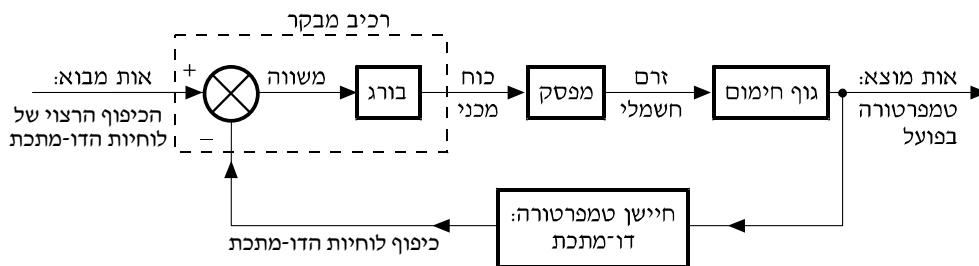
בתאורת רחוב אוטומטית, פנסי התאורה מופעלים כאשר יורדת החשכה וכבים עם זריחת השמש.

- א. פרטו מהן שלוש פעולות היסוד של בקרה בחוג סגור הקיימות במערכת זו. ציינו מהו הגודל המבוקר, מהו אות המבוא, מהו האות המצוי ומהו אות השגיאה.
- ב. פרטו את הרכיבים העיקריים במערכת ואת תפקידו של כל אחד מהם.

שאלה 1.10

הטמפרטורה של מוגהץ אדים חשמלי מבוקרת באמצעות תרמוסטט המחובר או מנתק את גופי החימום במגהץ מן המעגל החשמלי. מנו כמה גורמים שיכולים להשפיע על קצב הפתיחה והסגירה של המפסק. מתי הקצב יגבר, ומתי יקטן?

באיור 1.24 מופיע תרשים המלבנים של מערכת התרמוסטט שבאיור 1.20, במערכת זו המפסק הוא רכיב ההפעלה והבורג הוא הרכיב המבקר. התרשים כולל גם את חיישן הדו-מתכת של המערכת.

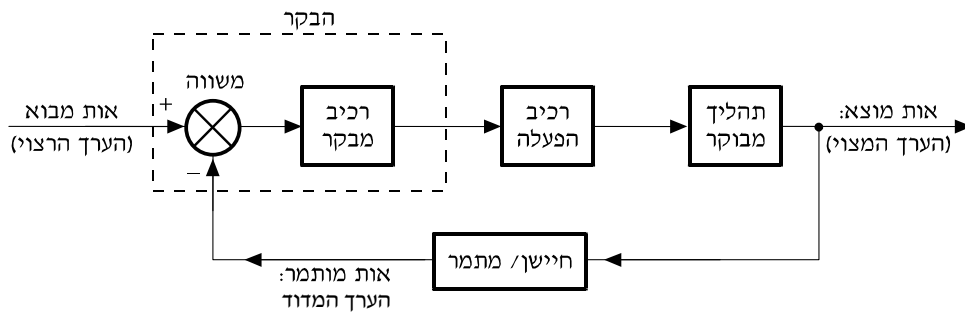


איור 1.24 תרשים מלבנים של מערכת התרמוסטט

שימו לב כי במערכת זו צמד הלוחיות של הדו-מתכת ממלאות תפקיד כפול: הן משמשות כחיישן טמפרטורה וגם כמשווה, שיחד עם הבורג, גורם לשינוי במצב המפסק.

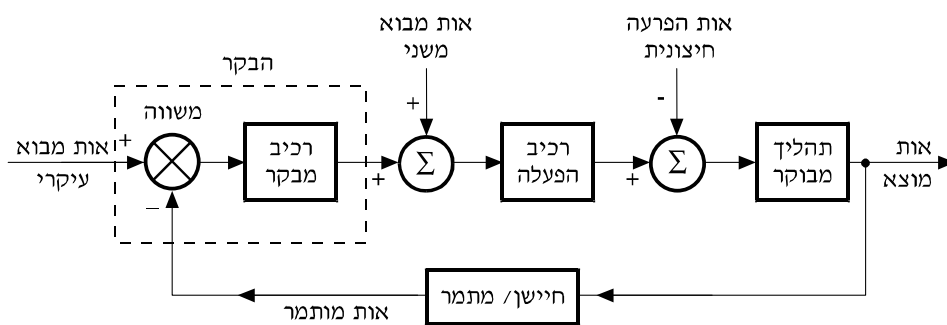
תרשים המלבנים שבאיור 1.24 הוא דוגמה לתרשים המלבנים הכללי המתאר מערכת בקרה עם **משו**ב (איור 1.25). הרכיב **המשווה** במערכת כזאת הוא בדרך כלל חלק מה**בקר** של המערכת,

ובו מתבצעת ההשוואה בין האות הרצוי והאות המצוי. האות המצוי מותמר על-ידי חיישן, או על-ידי מתמר, לגודל פיסיקלי הזהה בממדיו לאות הרצוי (למשל, מתח חשמלי).



איור 1.25 תרשים מלבנים של מערכת בקרה כללית עם משו

במערכת המתוארת באיור 1.25 יש אות מבוא יחיד (הערך הרצוי). כבר ראינו כי ישנן גם מערכות שיש להן כמה אותות מבוא. את אותות המבוא הנוספים מציינים בתרשים באמצעות חצים המכוונים לרכיב או לנקודה במערכת שבהם הם פועלים. לדוגמה, באיור 1.26, אות המבוא המשני מיתוסף לאות המתקבל מהרכיב המבוקר ומועבר לרכיב ההפעלה. גם את אותות ההפרעה החיצוניים נוהגים לסכם עם האותות במערכת בהתאם לסוג ההפרעה ומיקומה (איור 1.26).



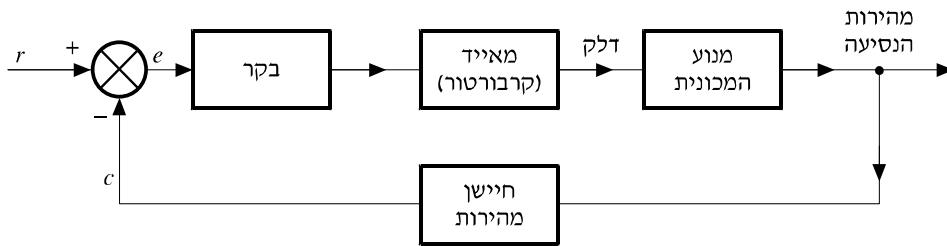
איור 1.26 תרשים מלבנים של מערכת בקרה עם משו

שאלה 1.11

בצומת כבישים מותקן רמזור שיש בו חלוקת זמנים קבועה לכל אחד מכיווני התנועה. בשעות העומס נוצרים לפעמים פקקי תנועה בצומת, ואז מופסקת פעולת הרמזורים ושומר מכוון את התנועה באופן ידני. האם מערכת בקרת התנועה כולל השומר (במקום רמזורים) היא מערכת בקרה בחוג פתוח או בחוג סגור? הסבירו. מהו היתרון של השומר בבקרת התנועה בהשוואה לרמזור?

***שאלה 1.12**

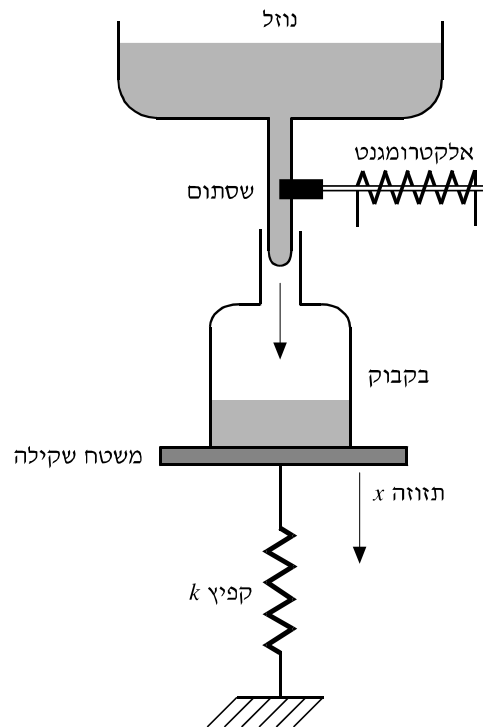
יש מכוניות שבהן מותקנת מערכת המבקרת את מהירות הנסיעה באופן אוטומטי. בנסיעה ממושכת הנהג אינו צריך ללחוץ כל העת על דוושת התאוצה, אלא מערכת הבקרה שומרת על מהירות נסיעה קבועה. תרשים המלבנים של מערכת הבקרה נתון באיור 1.27. פרטו את פעולת המשוב במערכת זו, והסבירו מהם כל האותות במערכת.



איור 1.27 תרשים מלבנים של מערכת המבקרת את מהירות נסיעה

***שאלה 1.13**

באיור 1.28 מתוארת מערכת למילוי נוזל בבקבוקים. זרימת הנוזל נשלטת על-ידי שסתום המופעל באמצעות אלקטרומגנט. הבקבוק הריק מונח על משטח שקילה המחובר לקפיץ. כאשר הבקבוק מתמלא, המשטח יורד למטה מרחק x , הנמצא ביחס ישר למשקל הנוזל בבקבוק.
 א. מהו האות המבוקר במערכת?
 ב. הוסיפו למערכת את הרכיבים והחיבורים החשמליים הדרושים כדי שהמערכת תפעל בחוג סגור.
 ג. סרטטו תרשים מלבנים המתאר את המערכת הפועלת בחוג סגור.

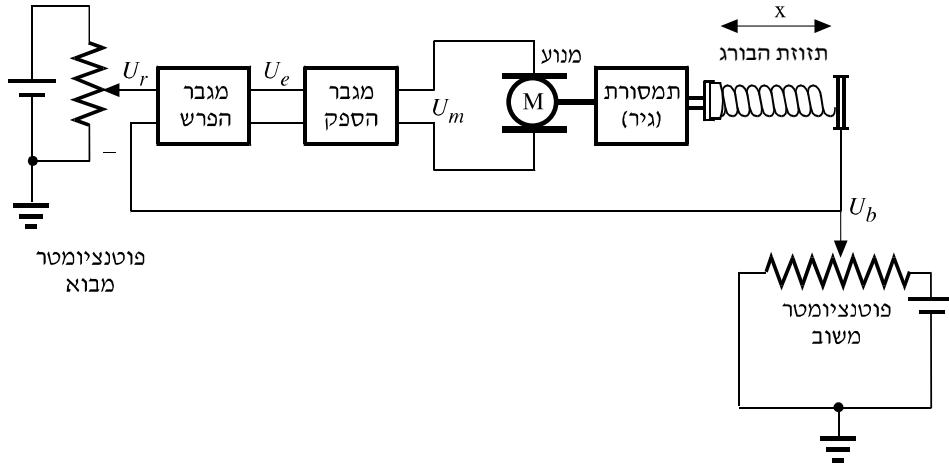


איור 1.28 מערכת למילוי בקבוקים

מערכת התרמוסטט (איור 1.20) היא דוגמה למערכת בקרה בחוג סגור שלאות המוצא שלה יש שני מצבים בלבד: טמפרטורה גבוהה מהערך הרצוי, וטמפרטורה נמוכה מהערך הרצוי. מערכת כזאת נקראת מערכת **בקרה דו-מצבית**. לעומת זאת, ישנן מערכות רבות שבהן מעוניינים לבקר את אות המוצא באופן **רציף**, כלומר, לקבוע את פעולת המערכת בכל רגע ורגע על-פי השגיאה באותו רגע. מערכות שבהן ערך השגיאה משתנה באופן רציף נקראות מערכות **בקרה רציפה**.

דוגמה 1.5

באיור 1.29 מופיע תרשים של מערכת לבקרת תזוזה באמצעות מנוע **זרם ישר**. זוהי המערכת המבקרת באופן רציף את תזוזת הבורג, שהוא אות המוצא מהמערכת.



איור 1.29 מערכת בקרת תזוזה

נסביר את עקרון הפעולה של המערכת:

תפקיד המערכת להניע את הבורג למרחק x . מרחק התזוזה הרצוי נמצא ביחס ישר למתח המבוא U_r , הנקבע על-ידי המשתמש באמצעות פוטנציומטר המבוא.

תזוזת הבורג בפועל נמדדת באמצעות פוטנציומטר המשוב, המספק מתח U_b , שערכו נמצא ביחס ישר להעתק x הנמדד.

תפקיד המגבר-הפרש הוא ליצור את אות השגיאה U_e :

$$U_e = U_r - U_b$$

המתחים U_r, U_b, U_e הם אותות חשמליים בעלי עוצמה נמוכה, היוצרים זרמים חלשים של מילי-אמפרים אחדים שאינם יכולים להפעיל את המנוע. לכן המתח U_e מוזן אל מגבר הספק, אשר במוצאו מתקבלים זרם ומתח U_m בעלי עוצמה גבוהה יותר שיכולים להפעיל את המנוע.

המתח U_m ("אות ההפעלה") גורם להפעלת המנוע כך שהבורג ינוע בכיוון ובמהירות הדרושים, כמוסבר להלן:

– כאשר ההעתק הנמדד x קטן מן הרצוי, כלומר, $U_b < U_r$, מתקבלת שגיאה "חיובית" $U_e > 0V$. בהתאם לכך מפיק המגבר מתח $U_m > 0V$, והמנוע מסתובב במגמה שמאריכה את הבורג (הגדלת x).

– כאשר ההעתק הנמדד x גדול מן הרצוי, כלומר, $U_b > U_r$, מתקבלת שגיאה "שלילית" $U_e < 0V$. במצב זה מפיק המגבר מתח U_m בעל קוטביות שלילית, $U_m < 0V$, והמנוע מסתובב במגמה שמקצרת את הבורג (הקטנת x).

– כאשר המערכת המכנית נמצאת בדיוק בנקודת העצירה הדרושה (המצב הרצוי), כלומר, $U_r = U_b$, ערך השגיאה הוא אפס, $U_e = 0V$. במצב זה המתח המוזן למנוע הוא $U_m = 0V$ והוא אינו פועל, ולכן הציר אינו מסתובב.

שימו לב כי עוצמת אות ההפעלה במערכת בקרה רציפה (גודל המתח U_m המוזן מהמגבר למנוע) תלוי בשגיאה U_e : ככל שהבורג נמצא בנקודה רחוקה יותר מהנקודה הרצויה, מוזן למנוע מתח U_m גדול יותר, ומהירותו גדולה יותר. ככל שהמערכת מתקרבת לנקודת העצירה הרצויה, מתח השגיאה U_e קטן, המתח U_m המוזן למנוע קטן אף הוא, והמנוע מאט את מהירותו באופן הדרגתי, עד לעצירה. כך מתקבלת הבקרה הרציפה של המערכת.

על-פי הנוסחה המתארת את הקשר בין המתחים, $U_e = U_r - U_b$, אפשר לראות כי ככל שמתח המשוב U_b גדול מאפס, כך מתח השגיאה U_e קטן; ולהפך, כאשר מתח המשוב U_b שואף לאפס, מתח השגיאה U_e גדל. משוב מסוג זה נקרא **משוב שלילי**. תיתכן גם מערכת שבה המתח U_e הוא הסכום של מתח המבוא U_r ומתח המשוב U_b :

$$U_e = U_r + U_b$$

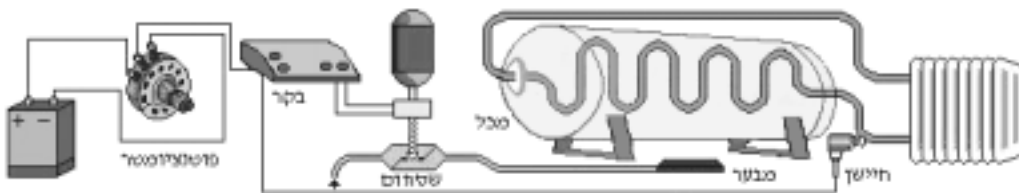
משוב כזה הוא **משוב חיובי**. במערכת בקרה רציפה הפועלת במשוב חיובי, המשוב אינו גורם להקטנת השגיאה באות המוצא, אלא דווקא להגדלתה. נתבונן שוב באיור 1.29 ונניח כי את הדקי פוטנציומטר המשוב חיברו במהופך, כך שהמתח U_b קטן כאשר ההעתק x של הבורג גדל. במצב זה, ככל שהבורג מתקרב למקום הרצוי, המתח U_b הולך וקטן, ובה בשעה השגיאה U_e הולכת וגדלה. לכן המנוע מגביר את מהירותו במקום להאט אותה בקרבת הנקודה הרצויה. משום כך הבורג לא ייעצר בנקודה הרצויה, אלא יעבור אותה. המתח המוזן למנוע יגדל, ומהירותו תגבר עוד. הבורג ייעצר רק כאשר יגיע לקצה גבול התנועה וייתקל במעצור.

בדוגמה לעיל המשוב החיובי נוצר עקב היפוך חיבורי רכיב המשוב. יש לשים לב כי במגבר ההפרש לא חל שינוי, כלומר, מתח השגיאה U_e מחושב כהפרש בין מתח המבוא U_r לבין מתח המשוב U_b : $U_e = U_r - U_b$. ואולם מתח המשוב U_b משתנה במגמה הפוכה מהדרוש: כאשר U_e גדל, הבורג נע בכיוון $+x$, U_b קטן (במקום לגדול), המתח U_e גדל עוד, וחוזר חלילה.

דוגמה זו ממחישה שמשלב חיובי מתקיים גם כאשר אות המתח U_e מתקבל לכאורה כהפרש בין U_r ל- U_b , בגלל היפוך בפעולת אחד הרכיבים האחרים במערכת. לכן כדי לבדוק אם המערכת פועלת במשוב שלילי או חיובי, יש לנתח את פעולת חוג הבקרה כולו.

1.6 דוגמה

באיור 1.30 מתוארת מערכת לחימום מים במכל באמצעות מבער של דלק נוזלי. במערכת נעשית בקרה רציפה של טמפרטורת המים ביציאה מהמכל (הטמפרטורה היא האות המבוקר במערכת).



איור 1.30 בקרת טמפרטורה של מים במכל על-ידי ויסות זרימת הדלק למבער

ספיקת המים החמים Q ביציאה מהמכל עשויה להשתנות בכל רגע, בהתאם לשימוש הצרכנים במים. למערכת הבקרה אין שליטה על צריכת המים המתבטאת בספיקה: Q , והשינויים בספיקה משפיעים על טמפרטורת המים. לכן שינויי הספיקה הם הפרעה למשתנה המבוקר.

תפקיד המערכת הוא לשמור על טמפרטורה קבועה של המים במכל, ולאפשר אספקה סדירה של מים חמים לצרכנים, על אף ההפרעות.

כיצד פועל המשוב במערכת זו? למשל, כאשר ספיקת המים Q גדלה, הטמפרטורה T של המים במכל מתחילה לרדת בגלל כניסת מים קרים. כדי לשמור על הטמפרטורה יש להגביר את עוצמת החימום.

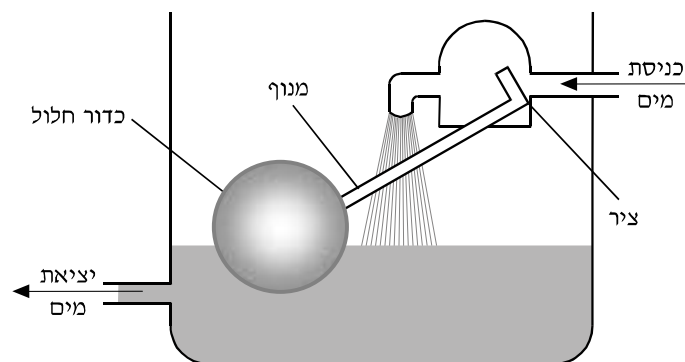
מתח המשוב שיוצר החיישן נמצא ביחס ישר לטמפרטורה, ויורד גם הוא כאשר הטמפרטורה יורדת, ולכן אות השגיאה (ההפרש בין הטמפרטורה הרצויה לטמפרטורה המדודה) גדל. כתוצאה מכך, הבקר, המשמש הן כמשווה והן כמגבר, מגדיל את המתח המסופק לשסתום, וזרימת הדלק למבער מתחזקת. כאשר כמות גדולה יותר של דלק מגיעה למבער, עוצמת החימום גדלה, וטמפרטורת המים מתחילה לעלות.

שאלה 1.14

התבוננו במערכת בקרת התזוזה (איור 1.29). במקום מגבר ההספק רוצים להשתמש במתג בורר המאפשר לספק למנוע מתח U_m בשלושה ערכים (למשל: $50V, 0V, -50V$). הסבירו מדוע בשיטה זו אי אפשר לשלוט במידה מספקת על מרחק התזוזה x .

שאלה 1.15

באיור 1.31 מתואר מתקן שטיפה של האסלה (ניאגרה), המהווה מערכת בקרה בחוג סגור. הסבירו את עקרון הפעולה של המערכת. ציינו מהו הרכיב המשווה, הרכיב המבקר, רכיב ההפעלה וההתקן המבוקר במערכת זו. ציינו גם מהו האות המבוקר (אות המוצא), האות הרצוי (או אות הייחוס), ואות השגיאה. מהו הרכיב היוצר את המשוב במערכת זו?



איור 1.31 מבנה של מתקן שטיפה ("ניאגרה")

שאלה 1.16

הסבירו מדוע מתקן שטיפת האסלה (איור 1.31) פועל כמערכת בקרה **רציפה** עם משוב. כיצד היה המתקן פועל אילו נבנה כמערכת בקרה דו-מצבית?

1.4 סיכום

במערכת בקרה הפועלת בחוג סגור קיימים חוגים משני סוגים – בהתאם לכיוון התקדמות האותות.

החוג הראשי, הנקרא גם חוג קדומני (feed forward path), הוא המסלול שבו מוזן אות המבוא של הגודל המבוקר (האות הרצוי). כיוון זרימת האותות בחוג זה הוא ממבוא המערכת אל מוצאה, שם מתקבל הערך המצוי של הגודל המבוקר.

בחוג הקדומני נכללים הרכיבים הבאים: המשווה, הבקר, רכיב ההפעלה, והרכיב המבוקר (או התהליך המבוקר).

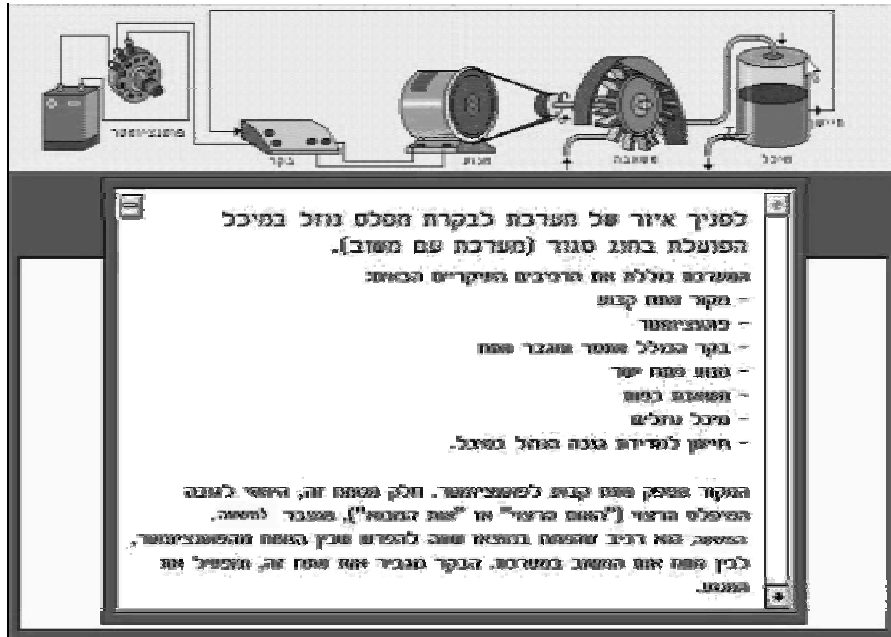
האותות העוברים בחלק זה של המערכת הם **אותות קדומניים** (forward signals). האותות הם לפי הסדר: אות הייחוס (או האות הרצוי), אות השגיאה, אות ההפעלה והאות המבוקר (או האות המצוי, ו/או אות המוצא).

החוג האחר הוא **חוג המשוב** (feedback path) ובו האותות מתקדמים בכיוון הפוך לכיוון ההתקדמות בחוג הראשי, כלומר, מהמוצא, דרך רכיב המדידה או רכיב ההתמרה, אל מבוא המערכת. בדרך כלל רכיב המדידה מבצע גם התמרה של האות המדוד לאות פיסיקלי (האות המותמר) שממדיו זהים לאות המבוא.

האותות השייכים לחלק המשוב נקראים באופן כולל אותות משוב (feedback signals), והם כוללים את האות המצוי והאות המותמר.

* פעילות מחשב מס' 1

1. הפעילו את היישום "מערכות בקרה". בחרו במערכת "בקרת מפלס נוזל". שימו לב לתמונה המתקבלת על המסך. קראו את ההוראות המופיעות במסכי הפתיחה של היישום (איור 1.32).

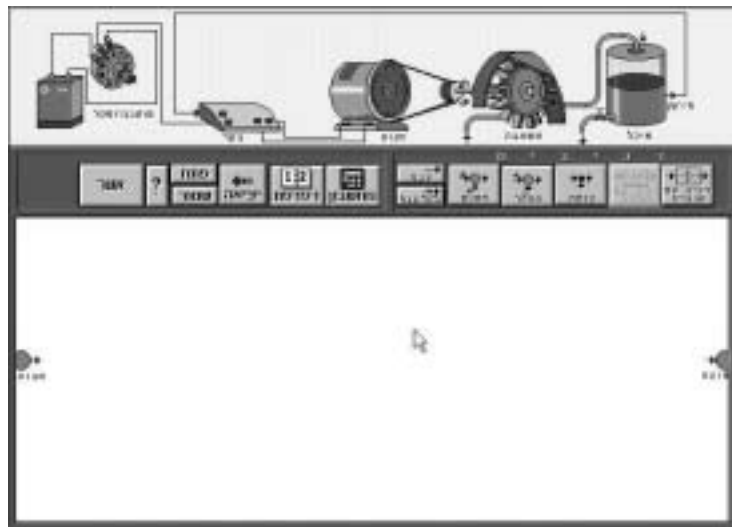


איור 1.32 המסך של מערכת בקרת המפלס בלומדה "מערכות בקרה"

2. מערכת זו כוללת, בנוסף למקור המתח הקבוע, שישה רכיבים:
- פוטנציומטר מבוא המכויל ביחידות של מטרים (האות הרצוי) ומפיק במוצא מתח ישר.
 - בקר הכולל משוואה ומגבר מתח. אות המוצא הוא מתח ישר מוגבר.
 - מנוע זרם ישר (DC) שאות המוצא שלו הוא מהירות הסיבוב.
 - משאבת כפות (העומס) שתפקידה לשאוב מים ולהזרימם למכל וכך לשמור על מפלס קבוע בו. אות המוצא של רכיב זה הוא הספיקה (מספר המטרים המעוקבים ליחידת זמן).
 - מכל נוזלים שמים נכנסים אליו מלמעלה ומים יוצאים ממנו מלמטה. אות המוצא של רכיב המכל הוא גובה מפלס המים בו.
 - חיפון מפלס המתרגם את גובה הנוזל למתח. עוצמת המתח נמצאת ביחס ישר למפלס.

המערכת פועלת בחוג סגור. המתח המתקבל מחיישן המפלס מושווה למתח המתקבל מפוטנציומטר המבוא, והבקר מפיק אות שגיאה הנמצא ביחס ישר להפרש שבין מתחים אלו. הסבירו (איכותית) כיצד משתנה השגיאה שיוצר הבקר כאשר גובה המפלס יורד אל מתחת לגובה הרצוי, או כאשר הוא עולה מעל לערך הרצוי.

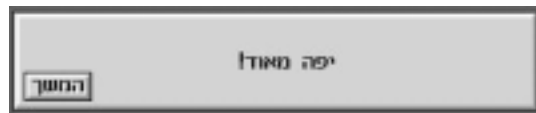
3. בנו על מסך העבודה של המחשב את תרשימי המלבנים של המערכת. השתמשו בסמלונים המופיעים על סרגל הסמלונים שמתחת לאיור המערכת (איור 1.33).



איור 1.33 המסך "שולחן עבודה" בלומדה מערכת בקרה

שימו לב כי מלבני הרכיבים – פוטנציומטר, מנוע, משאבה וחיישן – מיוצגים על-ידי הסמלון "סדר 0". מלבן המכל מיוצג על-ידי סמלון "סדר 1". מלבן הבקר מיוצג על-ידי הסמלון "בקר". כמו כן עליכם להשתמש בסמלון "מחסר" ובסמלון "צומת". את הרכיבים מחברים על-ידי הפעלת הסמלון "ענף". (משמעות המושגים "סדר 0", "סדר 1", וכו' תוסבר בהמשך.)

4. לאחר סיום הבנייה, נסו לאשר את נכונותה על-ידי לחיצה על הסמלון "אישור". אם בניתם נכון את התרשים, תתקבל ההודעה המופיעה באיור 1.34. אם הבנייה אינה נכונה, תתקבל הודעה שגיאה ולצדה רמז על דרך אפשרית לתיקון. אל תתייאשו! עבדו בשיטת "ניסוי וטעייה" עד לקבלת התרשים הנכון.



איור 1.34 משוב מהלומדה

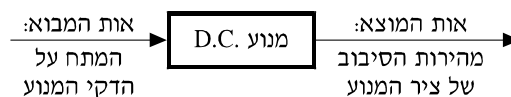
5. אם הצלחתם לסיים את הבנייה, שמרו את התרשים באמצעות לחיצה על הסמלון "שמור".

פרק 2

מערכות בקרה במצב מתמיד

2.1 מושג התמסורת במערכות בקרה

בפרק הקודם למדנו כי מערכת בקרה ניתן לתאר על-ידי תרשים מלבנים שבו כל מלבן מייצג רכיב (או כמה רכיבים) במערכת. אות המבוא למלבן הוא האות המפעיל את הרכיב, או הגורם לו לשנות את מצבו, ואות המוצא מהמלבן מסמן את השינוי במצב הרכיב. למשל, במערכת בקרת המהירות של מנוע זרם ישר (איור 2.1), אות המבוא למנוע הוא המתח על הדקי המנוע (בוולטים) שערכו קובע את מהירות הסיבוב של ציר המנוע. כדי **לכמת** את תגובת המנוע (כלומר, לתאר אותה בצורה כמותית), נוח להגדיר גודל יחיד שמבטא את כל תכונות הרכיב. קל להגדיר גודל כזה כאשר אותות המבוא והמוצא הם קבועים בזמן, כלומר, המתח על הדקי המנוע קבוע בזמן. מצב זה מוגדר כ**מצב המתמיד** של המנוע, ובו ציר המנוע מסתובב במהירות סיבוב קבועה בזמן.



איור 2.1 תרשים מלבנים עקרוני של מנוע

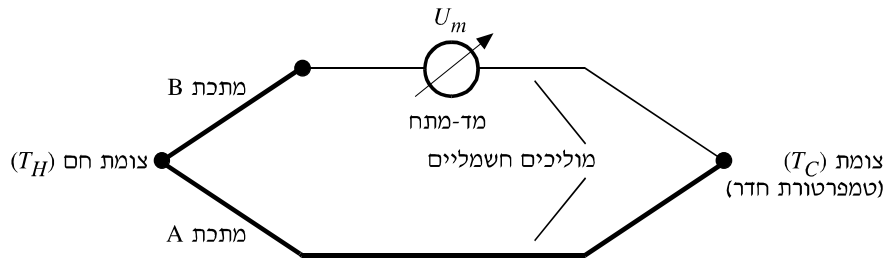
במצב זה **התמסורת הסטטית** של המנוע מוגדרת כיחס שבין אות המוצא מהמנוע לבין אות המבוא למנוע. כלומר, אם המתח הוא אות המבוא, הרי **שהתמסורת הסטטית** של המנוע שווה ליחס שבין מהירותו הסיבובית של המנוע לבין המתח המסופק למנוע (איור 2.1). במצב המתמיד יחס זה אינו תלוי בגודלו של אות המבוא וערכו נקבע אך ורק על-ידי התכונות של המערכת.

נהוג לסמן את התמסורת הסטטית באות G , והיחידות שלה הן המנה של יחידות אות המוצא ויחידות אות המבוא. לדוגמה, אם n היא מהירות הסיבוב של המנוע (בסיבובים לשנייה), ו- U_m הוא המתח הישר המסופק למנוע (בוולטים), אזי התמסורת של המנוע היא:

$$G = \frac{n}{U_m}$$

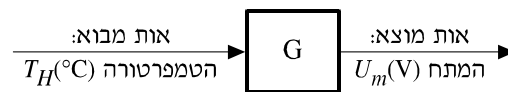
ויחידותיה הן סיבובים/שנייה/וולט.

פונקציית התמסורת של רכיב במערכת היא היחס בין השינוי של אות המוצא ממצב מתמיד אחד למצב מתמיד חדש, לבין השינוי באות המבוא שגרם לשינוי באות המוצא. נתבונן למשל בצמד החומני (thermocouple) המתואר באיור 2.2. (על חיישן זה נרחיב בהמשך בסעיף 4.1.3).



איור 2.2 צמד חומני

נתייחס לצמד החומני כאל רכיב, שאות המבוא אליו הוא הטמפרטורה T_H (במעלות צלסיוס)* של הצומת החם, ואות המוצא הוא המתח U_m הנמדד במד-המתח (איור 2.3).



איור 2.3 תרשים מלבנים עקרוני של צמד חומני

* מעלת צלסיוס (או צלזיוס) היא אחת מיחידות המידה של **טמפרטורה**. ערכה של יחידת מידה זו נקבע על-ידי מדידת הטמפרטורה של מים מזוקקים בלחץ סטנדרטי (אטמוספירה אחת). קובעים את הטמפרטורה של המים בנקודת הקיפאון כ- 0°C , ואת הטמפרטורה של המים בנקודת הרתיחה כ- 100°C . מעלה אחת צלסיוס היא, אם-כן, מאית של תחום טמפרטורות זה.

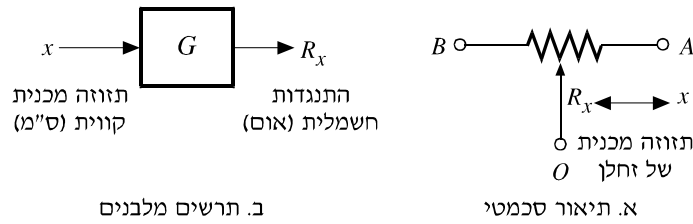
נניח שבמצב ההתחלתי טמפרטורת הצומת החם קבועה וערכה T_{H_1} , והמתח המתקבל הוא U_{m_1} . אם ברגע מסוים נגדיל באופן פתאומי את טמפרטורת הצומת החם ל- T_{H_2} , המתח יגדל בהדרגה ויתייצב לאחר זמן מסוים על ערך חדש - U_{m_2} . במקרה זה פונקציית התמסורת של הצמד מוגדרת על-ידי היחס:

$$G = \frac{\Delta U_m}{\Delta T_H} = \frac{(U_{m_2} - U_{m_1})}{(T_{H_2} - T_{H_1})} \quad \left[\frac{\text{וולט}}{\text{°C}} \right]$$

ויחידותיה הן

בהמשך נתאר את פונקציות התמסורת של כמה רכיבים שימושיים במערכות בקרה.

2.1.1 נגד משתנה



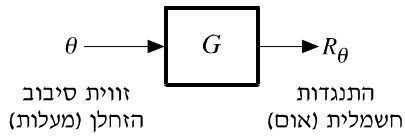
איור 2.4 נגד משתנה קווי

באיור 2.4 מתואר נגד משתנה קווי. ההתנגדות האומית R_x בין ההדקים O ו- A תלויה במצב הפיסי של הזחלן, כלומר, במרחק x של הזחלן מההדק A . פונקציית התמסורת של הנגד המשתנה היא (איור 2.4א):

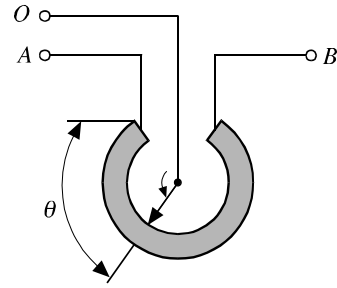
$$G = \frac{R_x}{x} \left[\frac{\Omega}{\text{cm}} \right]$$

היות שההתנגדות R_x נמדדת ביחידות אום (Ω), היחידות הפיסיקליות של G הן $[\Omega/\text{cm}]$. בנגד משתנה מסוג פוטנציומטר סיבובי (איור 2.5א), ההתנגדות R_θ בין ההדקים OA תלויה במצב הזוויתי של הזחלן, כלומר, בזווית הסיבוב θ שלו ביחס לקצה. זווית זו נמדדת במעלות או ברדיאנים. פונקציית התמסורת של הפוטנציומטר היא (איור 2.5ב):

$$G = \frac{R_\theta}{\theta} \left[\frac{\Omega}{\text{מעלות}} \right]$$



ב. תרשים מלבניים

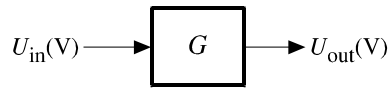


א. תיאור חשמלי

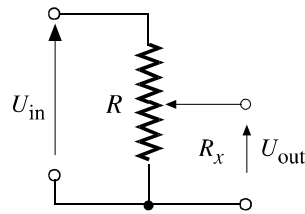
איור 2.5 נגד משתנה סיבובי

נתבונן במעגל החשמלי שבאיור 2.6, שבו הנגד המשתנה משמש רכיב לחלוקת מתח. במקרה זה, פונקציית התמסורת היא היחס בין מתח המוצא U_{out} על R_x לבין המתח הכולל U_{in} שעל הנגד R (איור 2.6).

$$G = \frac{R_x}{R} = \frac{U_{out} \left[\frac{\text{Volt}}{\text{Volt}} \right]}{U_{in}}$$



ב. תרשים מלבניים



א. תיאור חשמלי

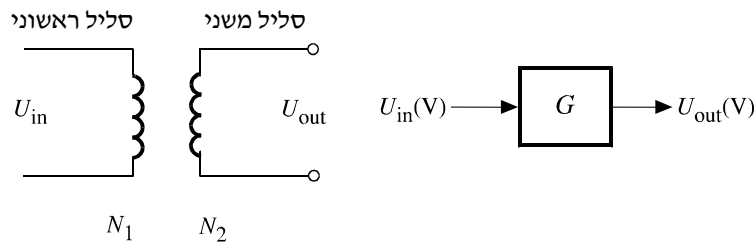
איור 2.6 מעגל מחלק מתח

2.1.2 שנאי

תפקידו של השנאי הוא לשנות את ערכו של המתח או הזרם החשמלי. קיימים שנאים המגדילים את המתח ושנאים המקטינים את המתח. אות המוצא של השנאי הוא מתח המוצא U_{out} , ואות המבוא הוא מתח המבוא U_{in} (איור 2.7).

פונקציית התמסורת של שנאי מבטאת למעשה את **יחס ההשנאה** שהוא מספר חסר ממדים. בשנאי מעלה מתח פונקציית התמסורת מקיימת $G > 1$. בשנאי מוריד מתח, $G < 1$.

$$G = \frac{N_2}{N_1} = \frac{U_{out} \left[\frac{\text{Volt}}{\text{Volt}} \right]}{U_{in}}$$



ב. תרשים חשמלי של שנאי;
 N_1 מספר הליפופים בסליל הראשוני
 N_2 מספר הליפופים בסליל המשני

א. תרשים מלבנים של שנאי מתח

איור 2.7 שנאי מתח

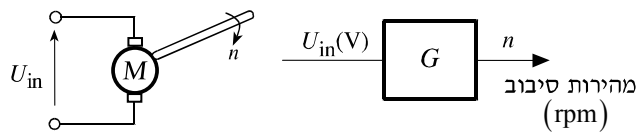
2.1.3 מנוע חשמלי

למדנו כי מנועים חשמליים ממירים אנרגיה חשמלית לאנרגיה מכנית סיבובית. קיים מגוון גדול של מנועים וניתן לסווגם בצורות שונות, שאחת מהן היא, על פי סוג מתח ההזנה: מנועי זרם ישר, או מנועי זרם חילופין חד או תלת מופעיים. סיווגים אחרים הם לפי הספק העבודה: מנועים בעלי הספקים קטנים או גדולים; או לפי מהירות הסיבוב: מנועים בעלי מהירות סיבוב גבוהה או נמוכה ועוד.

כמי שעוסקים במערכות בקרה, מעניינת אותנו פונקציית התמסורת העקרונית של מנועים. נגדיר את אות המוצא מהמנוע כמהירות הסיבוב n של ציר המנוע (כמו באיור 2.1). המהירות n נמדדת בסיבובים לדקה (סל"ד – rpm). נגדיר את אות המבוא כמתח המבוא U_{in} למנוע. המתח U_{in} נמדד בוולטים (איור 2.8).

פונקציית התמסורת של המנוע תהיה אפוא :

$$G = \frac{n}{U_{in}} \left[\frac{\text{rpm}}{\text{V}} \right]$$



א. תרשים מלבנים של מנוע חשמלי ב. תרשים חשמלי של מנוע

איור 2.8 מנוע חשמלי

2.1.4 מגבר מתח ומגבר הספק אלקטרוניים

פונקציית התמסורת של מגבר מתח אלקטרוני הפועל בתחום הליניארי, היא מספר חסר ממדים המתאר את היחס בין המתח המוגבר (אות המוצא) לבין מתח המבוא (אות המבוא) :

$$G = \frac{U_{out}}{U_{in}} \left[\frac{\text{Volt}}{\text{Volt}} \right]$$

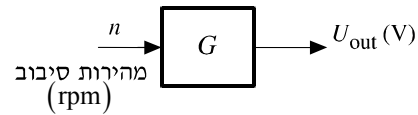
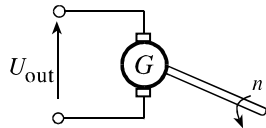
בצורה דומה, פונקציית התמסורת של מגבר הספק מתארת את היחס בין ההספק של אות המוצא להספק של אות המבוא $G = \frac{P_{out}}{P_{in}}$. גם זהו מספר חסר ממדים.

2.1.5 מחולל מתח חשמלי (GENERATOR)

מחולל מתח ממיר אנרגיה מכנית סיבובית לאנרגיה חשמלית. מנקודת המבט של תורת הבקרה, המחולל הוא התקן שאות המבוא אליו היא מהירות סיבוב מכני, ואות המוצא הוא

מתח חשמלי. לפיכך, המחולל הוא שימושי מאוד כמד-מהירות סיבובית (טכומטר), במיוחד כאשר המתח המתקבל יחסי למהירות הסיבוב. פונקציית התמסורת של המחולל מוגדרת אפוא כיחס בין מתח המוצא המיוצר על-ידי המחולל (U_{out}), לבין מהירות הסיבוב של ציר המחולל הדרושה ליצירת המתח (איור 2.9).

$$G = \frac{U_{out}}{n} \left[\frac{\text{Volt}}{\text{rpm}} \right]$$



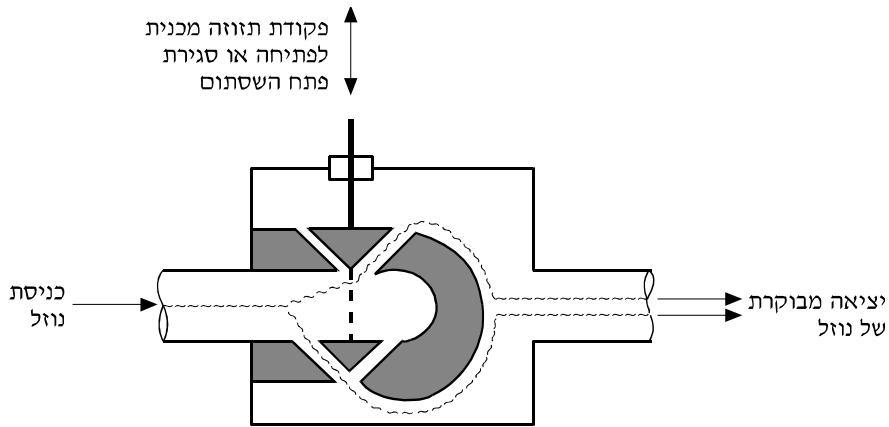
א. תרשים מלבנים של מחולל מתח חשמלי ב. תרשים חשמלי של מחולל מתח חשמלי

איור 2.9 מחולל מתח

הערה חשובה: יש לשים לב שלמרות השוני בין רכיבים, כגון שנאי ומגבר, היחידות של פונקציית התמסורת זהות. ואמנם הביטויים הנ"ל מציינים בצורה פשטנית ביותר את יחידות אותות המוצא והמבוא והיחס ביניהם, ולכן כל הרכיבים הנ"ל מיוצגים על-ידי מלבן זהה.

2.1.6 שסתום בקרה

שסתום בקרה הוא רכיב שימושי במערכות בקרת זרימה של נוזל, גז או קיטור. תפקידו של השסתום הוא לווסת את כמויות הנוזל או הגז הזורמים דרכו, כלומר, הוא משמש מעין ברז הנפתח או נסגר בהתאם לפקודת הבקרה שהוא מקבל (איור 2.10).



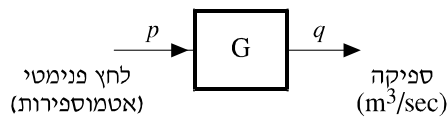
איור 2.10 מבנה עקרוני של שסתום בקרה

אות המבוא לשסתום יכול להיות אות חשמלי, או אות הידראולי או אות פניאומטי, בהתאם לסוג המערכת ולמטרותיה. אות המוצא מהשסתום הוא בדרך כלל הספיקה הנפחית דרך השסתום, או זווית פתיחה או סגירה של חלק מכני, הספיקה נמדדת ביחידות נפח ליחידת זמן (למשל $\frac{\text{מטר}^3}{\text{שנייה}}$) והזווית במעלות או ברדיאנים, הכל לפי סוג השסתום.

נתבונן במערכת לבקרת מפלס של נוזל (איור 1.23). תפקידו של השסתום במערכת זו הוא לווסת את כמות הנוזל הזורמת למכל. פונקציית התמסורת של השסתום היא היחס בין הספיקה דרך השסתום $\left(\frac{\text{מטר}^3}{\text{שנייה}}\right)$ לבין הלחץ הפנימטי הפועל על השסתום כשהוא מבוטא באטמוספרות. הלחץ הפנימטי הוא אות המבוא לרכיב השסתום.*

נסמן את הלחץ הפנימטי באות p , ואת הספיקה באות q . פונקציית התמסורת (איור 2.11) תהיה:

$$G = \frac{q}{p} \left[\frac{\text{m}^3/\text{sec}}{\text{atm}} \right]$$

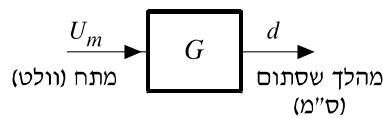


איור 2.11 תרשים מלבנים של שסתום בקרה פנימטי

* 1 אטמוספירה $\approx 100,000$ פסקל

לעומת זאת, במערכת לבקרת הטמפרטורה של מים במכל (איור 1.30), תפקיד שסתום הדלק הוא לווסת את זרימת הדלק למבער. אות המבוא לשסתום האלקטרומגנטי הוא המתח U_m , בעוד שאות המוצא הוא מהלך השסתום (בס"מ), או הספיקה דרך השסתום (ב- $\frac{\text{מטר}^3}{\text{שנייה}}$). פונקציית התמסורת שלו היא לכן (איור 2.12):

$$G = \frac{d}{U_m} \left[\frac{\text{cm}}{\text{V}} \right]$$



איור 2.12 תרשים מלבנים של שסתום בקרה חשמלי

שאלה 2.1

א. שינוי של 20 V במתח המסופק למנוע זרם ישר, גורם לשינוי של 150 סל"ד במהירות הסיבוב של המנוע.

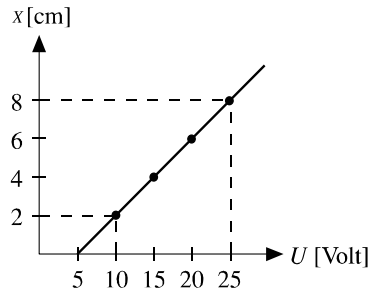
חשבו את פונקציית התמסורת של המנוע, כלומר, את היחס בין מהירות הסיבוב (n) של המנוע, למתח (U) המוזן לו.

ב. הטמפרטורה ($^{\circ}\text{C}$) בתנור חימום נמצאת ביחס ישר להספק החום (הנמדד ב-kcal/sec או בוואט). חשבו את פונקציית התמסורת, אם שינוי של 10 kcal/sec בהספק החום גורם לשינוי של 20°C בטמפרטורה.

הערה: הקלוריה היא יחידת המידה של כמות החום. מגדירים את הקלוריה ככמות החום שיש להוסיף לגרם של מים על מנת להעלות את הטמפרטורה שלהם מ- 15°C ל- 16°C . kcal היא כמות חום השווה לאלף קלוריות. ידוע כי כמות אנרגיה של 4.184 ג'אול היא שוות ערך (אקוויולנטית) לקלוריה אחת של חום.

ג. באיור 2.13 נתונה התגובה של מערכת, הממירה תנועה סיבובית לתנועה קווית באמצעות מנוע זרם ישר ותמסורת (בורג ואום). ידוע שבתחום המתחים המופיע בגרף, ההעתק הקווי (x) של הבורג (אות המוצא) תלוי לינארית במתח המסופק למנוע (U , אות המבוא).

חשבו את פונקציית התמסורת של המערכת. מה הן יחידותיה?



איור 2.13 אופיין של מנוע לבקרת תנועה קווית

2.2 פונקציית התמסורת השקולה של מערכות במצב מתמיד

בפרק 1 למדנו כי מערכות בקרה מורכבות מכמה רכיבים בסיסיים: המשווה, הבקר, יחידת ההפעלה, המערכת או התהליך המבוקרים, המדיד (או החיישן). כאשר המערכת פועלת במצב מתמיד, פונקציית התמסורת של כל אחד מהרכיבים האלה היא קבועה, ושווה ליחס בין אות המוצא המתקבל מהרכיב, לאות המבוא שלו. כאשר נתונים שני רכיבים המחוברים בטור, כגון בקר ויחידת הפעלה, ניתן לחשב את פונקציית התמסורת השקולה שלהם על פי פונקציות התמסורת של כל אחד מהרכיבים בנפרד. נסמן ב- r_1 את אות המבוא לרכיב הראשון, וב- r_2 את אות המבוא לרכיב השני, שהוא גם אות המוצא מהרכיב הראשון (איור 2.14). נסמן ב- c_2 את אות המוצא מהרכיב השני. תהיה G_1 התמסורת של רכיב I, ו- G_2 התמסורת של רכיב II. התמסורת השקולה של שני הרכיבים מוגדרת על-ידי:

$$G = \frac{c_2}{r_1}$$

$$c_2 = r_1 G$$

כלומר:

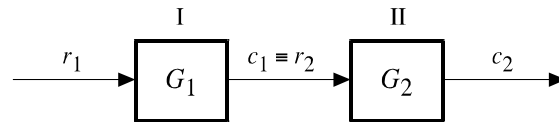
מאידך:

$$c_2 = r_2 G_2 = c_1 G_2 = r_1 G_1 G_2$$

ולכן:

$$G = G_1 G_2$$

כלומר, פונקציית התמסורת השקולה שווה למכפלת התמסורות של שני הרכיבים.



איור 2.14 חיבור בטור של שני רכיבים

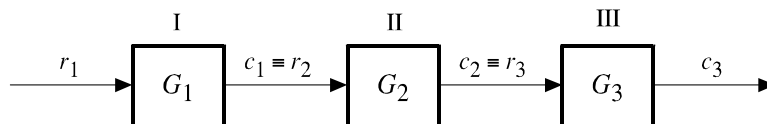
נשאר לך, כתרגיל, להראות כי אם יותר משני רכיבים מחוברים בטור, אזי התמסורת השקולה שלהם שווה למכפלת התמסורות של כל אחד מהרכיבים. למשל, התמסורת השקולה של המערכת המתוארת באיור 2.15 היא המכפלה:

$$G = \frac{c_3}{r_1} = G_1 \cdot G_2 \cdot G_3$$

ובאופן כללי, כאשר N רכיבים מחוברים בטור, מתקיים

$$(2-1) \quad G = \prod_{K=1}^{K=N} G_K = G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 \cdot \dots \cdot G_N$$

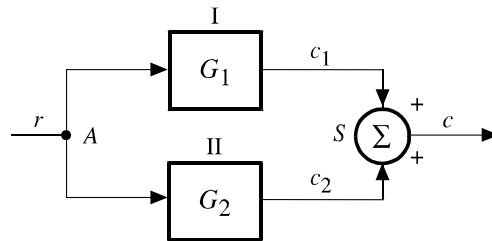
כאשר הסימן Π מציין מכפלה, והתמסורת של הרכיב ה- k היא G_k .



איור 2.15 שלושה רכיבים של מערכת המחוברים בטור

מסקנה: מלבן יחיד בתרשים מלבנים של מערכת יכול לייצג כמה רכיבים המחוברים בטור, ופונקציית התמסורת השקולה של מלבן זה היא מכפלת פונקציות התמסורת של הרכיבים.

התמסורת השקולה של שני רכיבים המחוברים ביניהם במקביל תלויה בכיוון זרימת האותות ברכיבים, או ליתר דיוק, בכיוון זרימת המידע ביניהם (איור 2.16).



איור 2.16 חיבור של שני רכיבים במקביל

בחיבור במקביל שבו המידע בשני הענפים זורם באותו כיוון (איור 2.16), אות המבוא לשני הרכיבים המחוברים ביניהם שווה. בנקודת הצומת A , האות r עובר לשני חוגים קדומניים כאשר בשני החוגים אותות זהים בעוצמתם. במסכם S לעומת זאת, מסתכמים שני האותות חזרה לאות משותף c . מהגדרת התמסורת של כל רכיב נובע כי:

$$c_1 = G_1 r$$

$$c_2 = G_2 r$$

אם נחבר את שתי המשוואות, נקבל:

$$c = c_1 + c_2 = (G_1 + G_2) r$$

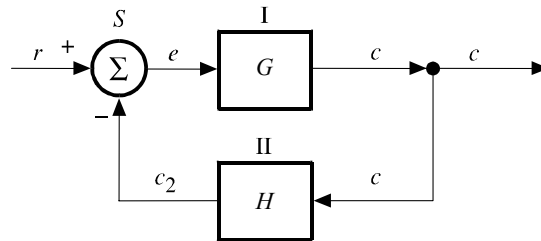
כלומר, התמסורת השקולה G_{eq} של שני רכיבים בחיבור מקבילי, שבו כיוון זרימת המידע בשני החוגים שווה ("קדימה" או "אחורה"), היא סכום התמסורות של שני הרכיבים:

$$G_{eq} = \frac{c}{r} = G_1 + G_2$$

ובאופן כללי, כאשר N רכיבים מחוברים במקביל וכיוון זרימת המידע בהם זהה, מתקיים:

$$(2-2) \quad G_{eq} = \sum_{K=1}^{K=N} G_K = G_1 + G_2 + G_3 + \dots + G_N$$

כאשר הסימן \sum מציין את פעולת החיבור (או הסיכום).



איור 2.17 חיבור מקבילי של שני רכיבים במערכת של חוג עם משוב

כאשר מחברים שני רכיבים כך שהמידע דרכם זורם במגמה הפוכה (כמתואר באיור 2.17), מקבלים למעשה חיבור משוב (או חיבור בחוג סגור): אות המוצא מהרכיב השני הוא חלק מאות המבוא לרכיב הראשון. אות המבוא הכולל לרכיב הראשון הוא סכום אלגברי של האותות המתקבלים מן המסכם S . בחיבור משוב שלילי, אות המוצא מהמסכם S הוא ההפרש $e = r - c_2$ (איור 2.17), ובחיבור משוב חיובי, אות המוצא מהמסכם S הוא הסכום $e = r + c_2$. על פי הגדרת התמסורת נקבל (שימו לב כי תמסורת המשוב מסומנת ב- H):

$$c = Ge$$

$$c_2 = Hc$$

נציב את הערך של e במשוואה הראשונה מבין שתי משוואות אלו, ונחלץ מתוכן את c_2 . מקבלים:

$$c = G(r - c_2) = G(r - Hc)$$

ולכן לאחר סידור האברים וחילוץ הגורם c מקבלים

$$c = \frac{G}{1 + G \cdot H} \cdot r$$

כלומר, פונקציית התמסורת השקולה G_{eq} בחיבור של שני רכיבים בחוג סגור עם משוב שלילי, היא:

$$(2-3) \quad G_{eq} = \frac{c}{r} = \frac{G}{1 + G \cdot H}$$

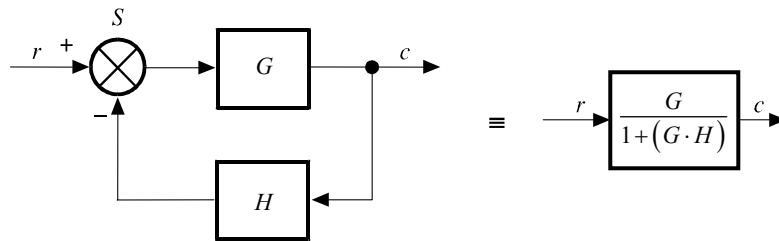
ובצורה דומה נקבל, כי כאשר חיבור שני הרכיבים הוא עם משוב חיובי, פונקציית התמסורת השקולה היא:

$$(2-4) \quad G_{eq} = \frac{G}{1 - G \cdot H}$$

2.2 שאלה

הוכיחו את משוואה (2-4).

מסקנה: את תרשים המלבנים שבאיור 2.17 ניתן להחליף בתרשים מלבנים הכולל מלבן אחד בלבד, שהתמסורת שלו נתונה על-ידי משוואה (2-3) (ראו איור 2.18).

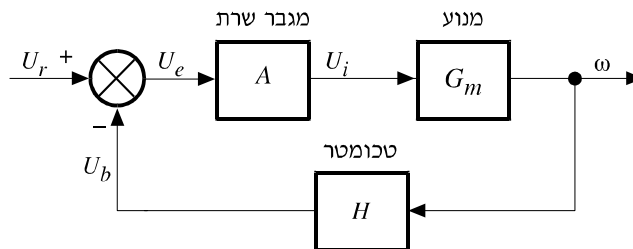


איור 2.18 חיבור שני רכיבים בחוג סגור: G – תמסורת החוג הקדומי, H – תמסורת חוג המשוב.

שימו לב שהמסכם במקרה זה סומן כ**משווה**, היות וההשוואה נעשית על-ידי סיכום אלגברי של שני אותות.

2.1 דוגמה

מערכת בקרת מהירות של מנוע זרם ישר כוללת לפחות שלושה רכיבים: בקר הכולל משווה ומגבר שרת, מנוע זרמי וטכומטר הממשש למדידת מהירות המנוע.



איור 2.19 בקרה בחוג סגור של מהירות סיבוב של מנוע

לטכומטר יש ציר, המחובר באופן מכני לציר המנוע שאת מהירות סיבובו רוצים למדוד. בהדקי המוצא החשמליים של הטכומטר מתקבל מתח שעוצמתו נמצאת ביחס ישר למהירות הסיבוב של הציר.

פעולת הטכומטר הפוכה לזו של המנוע, הממיר אנרגיה חשמלית לאנרגיה מכנית (על המבנה של מערכת זו ואופן פעולתה נדון ביתר פירוט בפרק 4).

את מהירות הסיבוב של הציר נהוג למדוד בסיבובים לדקה (rpm) או בסיבובים לשנייה (rps). היות וסיבוב מלא (360°) הוא שווה ערך ל- 2π רדיאנים ($1 \text{ radian} \cong 57^\circ$) הרי שמהירות סיבוב ניתן למדוד גם ביחידות של רדיאנים לשנייה, כלומר קיים הקשר הבא בין יחידות אלו:

$$[\text{rad/s}] = 2\pi \cdot [\text{rpm}]/60$$

באיור 2.19 מופיע תרשים מלבנים של המערכת. התמסורת H של הטכומטר מבטאת את היחס בין מתח המוצא לבין מהירות הציר.

נתון כי תמסורת הטכומטר היא $H = 0.003 \frac{\text{V}}{\text{rad/s}}$. תמסורת המנוע היא $G_m = 5 \frac{\text{rad/s}}{\text{V}}$ וההגבר של מגבר השרת הוא $A = 100$ (מהן היחידות של A ?).

נניח כי מהירות הסיבוב הדרושה היא $\omega = 1000 \text{ rad/s}$. מהו אות המבוא U_r הנחוץ להשגת מהירות זו?

פתרון

נחשב את U_r בשתי דרכים:

א. על-ידי פתרון הבעיה בשלבים: מציאת U_i , מציאת U_e ומציאת U_b .

תמסורת המנוע היא:

$$G_m = \frac{\omega \text{ rad/s}}{U_1 \text{ V}}$$

$$U_i = \frac{\omega}{G_m} = \frac{1000}{5} = 200 \text{ V} \quad \text{ומכאן נקבל את } U_i :$$

U_i הוא המתח שצריך להתקבל במוצא המגבר. לפי נתוני המערכת, הגבר המתח הוא $A = 100$. לכן כדי לקבל מתח של 200 V במוצא המגבר, צריך לספק מתח של $U_e = 2 \text{ V}$ במבוא המגבר.

התמסורת של הטכומטר היא:

$$H = 0.003 \frac{\text{V}}{\text{rad/s}}$$

ולפיכך מתח המשוב U_b עבור $\omega = 1000 \text{ rad/s}$, הוא:

$$U_b = \omega \cdot H = 1000 \cdot 0.003 = 3 \text{ V}$$

מתח השגיאה U_e הוא ההפרש בין מתח המבוא U_r למתח המשוב U_b :

$$U_e = U_r - U_b$$

כזכור, ברצוננו לחשב את המתח U_r שיש לספק במבוא. מאחר שכבר ידועים לנו U_e ו- U_b , נוכל לחשב את U_r :

$$U_r = U_e + U_b = 2 + 3 = 5 \text{ V}$$

אם כן, כדי שמהירות הסיבוב ω של ציר המנוע תהיה 1000 רדיאנים בשנייה, דרוש אות מבוא U_r שערכו 5 וולט.

ב. שימוש במשוואת המשוב (2-3). ממשוואה (2-3) נובע:

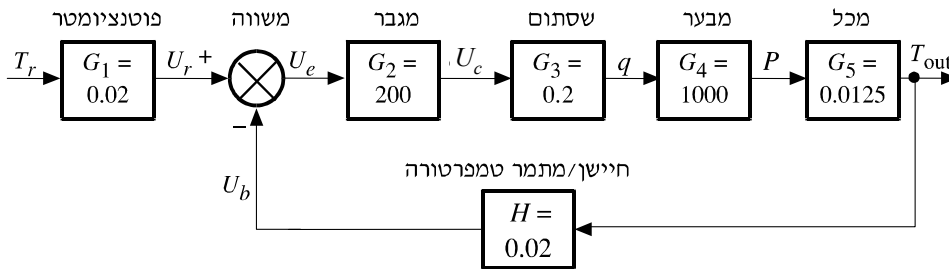
$$G = \frac{\omega}{U_r} = \frac{AG_m}{1 + AG_m H} = \frac{100 \cdot 5}{1 + 100 \cdot 5 \cdot 0.003} = 200 \frac{\text{rad/s}}{\text{V}}$$

ועבור $\omega = 1000 \text{ [rad/s]}$, נקבל:

$$U_r = \frac{\omega}{G} = \frac{1000}{200} = 5 \text{ V}$$

2.2 דוגמה

נתבונן שוב במערכת בקרת טמפרטורת המים במכל המתוארת בפרק 1 (דוגמה 1.6). תרשים המלבנים של המערכת נתון באיור 2.20.



איור 2.20 תרשים מלבנים של מערכת לחימום מים

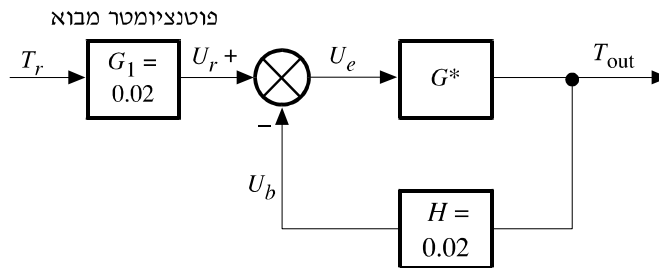
בכל מלבן בתרשים רשום ערך התמסורת של הרכיב. למשל; התמסורת G_5 של המכל היא $G_5 = 0.0125^\circ\text{C}/\text{W}$. נניח כי הספק החימום הוא $P = 5000 \text{ W}$. אזי הטמפרטורה במצב המתמיד תהיה:

$$T_{\text{out}} = P \cdot G_5 = 5000 \cdot 0.0125 = 62.5^\circ\text{C}$$

כיוון שנתונה התמסורת של כל רכיב, נוכל לחשב את התמסורת הכללית של המערכת במצב המתמיד. לשם כך נחשב תחילה את התמסורת השקולה G^* של המגבר, השסתום, המבער והמכל המחוברים בטור. ממשוואה (2-1) נובע כי:

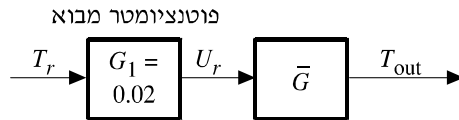
$$G^* = G_2 G_3 G_4 G_5$$

את התרשים שבאיור 2.20 נוכל אפוא להחליף בתרשים השקול הבא (איור 2.21):



איור 2.21 פישוט של תרשים המלבנים שבאיור 2.20

כאן המלבן G^* מייצג את התמסורת השקולה של ארבעת הרכיבים בחוג הקדומני. את התרשים שבאיור 2.21 נוכל להחליף בתרשים פשוט עוד יותר (איור 2.22), אם נשתמש במשוואה (2-3) (משוואת המשוב):



איור 2.22 פשוט נוסף של תרשים המלבנים שבאיור 2.21

בתרשים זה, \bar{G} היא התמסורת השקולה של המלבנים G^* ו- H , כלומר:

$$\bar{G} = \frac{G^*}{1 + G^* H}$$

התמסורת השקולה G של המערכת כולה היא אפוא המכפלה $G_1 \cdot \bar{G}$. נציב את הביטויים שקיבלנו עבור התמסורות השקולות \bar{G} ו- G^* , ונקבל:

$$G = \frac{T_{out}}{T_r} = G_1 \bar{G} = G_1 \frac{G^*}{1 + G^* H} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4 G_5}{1 + G_2 G_3 G_4 G_5 H}$$

את הערך המספרי של פונקציית התמסורת G של המערכת נקבל לאחר הצבת הערכים המספריים של תמסורות הרכיבים השונים:

$$G = \frac{0.02 \cdot 200 \cdot 0.2 \cdot 1000 \cdot 0.0125}{1 + 200 \cdot 0.2 \cdot 1000 \cdot 0.0125 \cdot 0.02} = \frac{10}{11} = 0.91 \frac{^{\circ}\text{C}}{^{\circ}\text{C}}$$

שימו לב כי יחידות התמסורת הכללית הן $\frac{^{\circ}\text{C}}{^{\circ}\text{C}}$. זהו היחס בין יחידות אות המוצא (מעלות צלסיוס) ליחידות אות המבוא (או האות הרצוי) לפוטנציומטר המבוא שגם הן מעלות צלסיוס. לכן במקרה זה התמסורת הכללית של מערכת המשוב היא גודל חסר ממדים.

אם ידועה התמסורת הכללית G , ניתן לחשב את אות המוצא T_{out} של המערכת לכל אות מבוא נתון T_r . אם נניח כי אות המבוא הוא $T_r = 50^\circ\text{C}$, אזי על פי הגדרת התמסורת של המערכת נקבל:

$$T_{out} = G \cdot T_r = 0.91 \cdot 50 \approx 45.5^\circ\text{C}$$

כלומר, טמפרטורת המים במכל נמוכה ב- 4.5°C מהאות הרצוי.

שאלה 2.3

רשמו את יחידות פונקציית התמסורת של כל אחד מהרכיבים שבאיור 2.20. מהן היחידות של פונקציית התמסורת השקולה G^* בדוגמה 2.2?

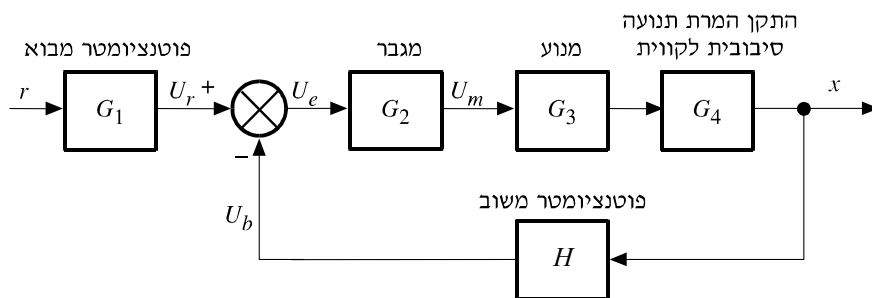
שאלה 2.4

מהי תמסורת הפוטנציומטר G_1 בדוגמה 2.2 שעבורה התמסורת הכללית של המערכת היא $G = 1$? חשבו את הספק החימום P ואת קצב זרימת הדלק q במצב זה.

מהדוגמה האחרונה אנו למדים כי במערכת זו קיים הפרש קבוע בין הערך המצוי לערך הרצוי (זכרו כי המערכת פועלת במצב מתמיד), שגודלו נקבע על-ידי התמסורת הכללית של המערכת בכלל, ועל-ידי הגבר הבקר בפרט. על כך עוד נרחיב בהמשך.

דוגמה 2.3

נחזור ונתבונן במערכת לבקרת תזוזה באמצעות מנוע DC (איור 1.29). תרשים המלבנים של המערכת, לרבות האותות במערכת, מופיע באיור 2.23.



איור 2.23 תרשים מלבנים של מערכת בקרת תזוזה (בקרת 'מצב')

באיור מסומנים האותות העוברים בין המלבנים וכן התמסורת של כל מלבן. בעזרת משוואות (2-1) ו-(2-3) נקבל כי פונקציית התמסורת של המערכת (היחס $\frac{x}{r}$), נתונה על-ידי:

$$G = \frac{x}{r} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1 + G_2 G_3 G_4 H}$$

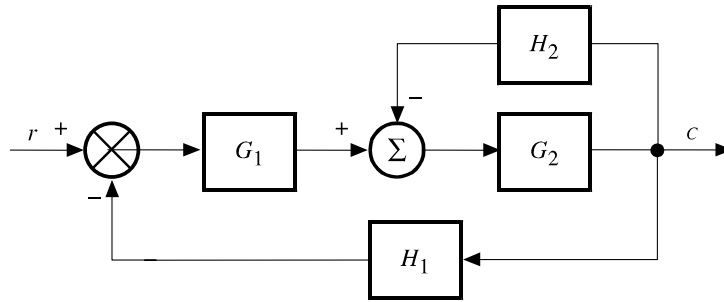
ומכאן ששינוי Δr באות המבוא מהערך r_1 לערך חדש r_2 , $\Delta r = r_2 - r_1$, גורם לשינוי Δx באות המוצא, הנתון על-ידי:

$$\Delta x = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1 + G_2 G_3 G_4 H} \cdot \Delta r$$

שאלה 2.5

הוכיחו את השוויון האחרון.

שאלה 2.6



איור 2.24 איור לשאלה 2.6

- א. חשבו את יחס התמסורת $\frac{c}{r}$ של המערכת המתוארת באיור 2.24.
- ב. מהו אות המוצא c המתקבל כאשר אות המבוא הוא $r = 10$, אם ערכי התמסורות של הרכיבים הם: $G_1 = 0.01$, $G_2 = 10$, $H_1 = 0.1$ ו- $H_2 = 1$?

2.3* כללים לחישוב פונקציית התמסורת השקולה של מערכות (אלגברת מלבנים)

תרשימי מלבנים של מערכות בקרה מורכבות יכולים להיות מסובכים למדי ולכלול מספר רב של מלבנים וחוגים המחברים ביניהם בחיבור טורי, בחיבור מקבילי, או בחיבור מעורב.

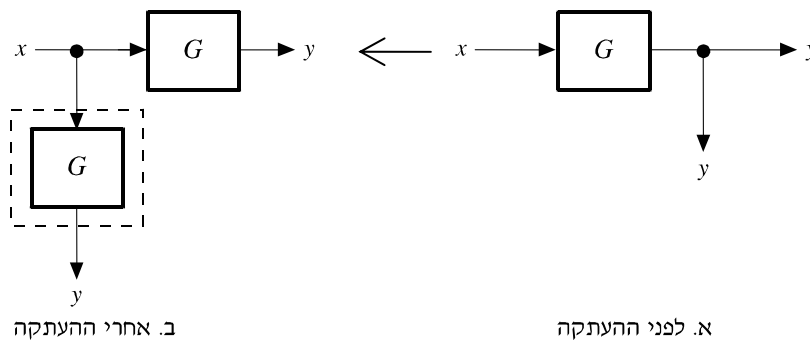
במקרים אלו, חישוב פונקציית התמסורת השקולה של המערכת נעשה על-ידי פישוט הדרגתי של התרשים. כפי שראינו לעיל, הפישוט יכול להיעשות על-ידי מציאת המלבן השקול של מלבנים המחברים בטור, מציאת המלבן השקול של מלבנים המחברים במקביל, או חישוב המלבן שהוא שווה הערך של חוג עם משוב.

במקרים אחרים, כללי פישוט אלה אינם מספיקים, ויש צורך בכללים נוספים. על כך נדון בסעיף זה.

2.3.1 העתקת נקודת צומת

א. מנקודה שאחרי מלבן לנקודה הנמצאת לפניו.

התבוננו באיור 2.25.



איור 2.25 העתקת צומת

באיור 2.25 הצומת נמצא אחרי המלבן G , ולכן האותות היוצאים ממנו שווים לאות המוצא מהמלבן:

$$y = Gx$$

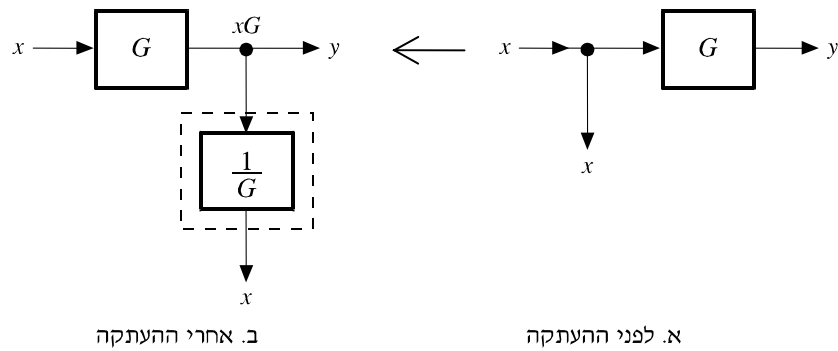
כאשר מעתיקים את הצומת לנקודה הנמצאת לפני המלבן יש צורך להבטיח שלא יהיה שינוי באותות המוצא מהרכיב. לשם כך יש להוסיף מלבן G בענף מקביל לענף המקורי.

לשתי התצורות יש אותה פונקציית תמסורת שקולה, ולכן הן זהות וניתן להחליפן זו בזו.

ב. מנקודה שלפני מלבן לנקודה הנמצאת אחרי

התבוננו באיור 2.26.

שיקולים דומים לאלו שהנחו אותנו במקרה הקודם, תקפים גם במקרה זה. ואולם, שלא כמו במקרה הקודם שבו יש לרכיב שני אותות מוצא זהים (y), במקרה זה לרכיב את מוצא (y), וכן את מוצא נוסף לפני המלבן הזהה לאות המבוא (x).



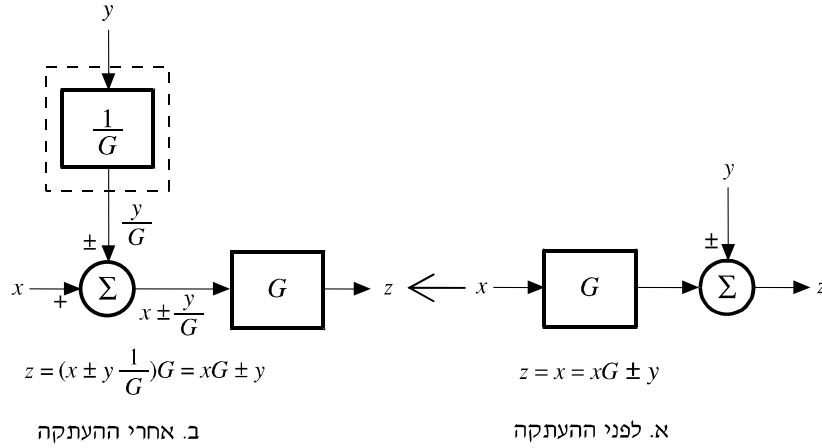
איור 2.26 העתקת צומת

כאן פעולת ההעתקה מצריכה הוספת מלבן נוסף בעל תמסורת $\frac{1}{G}$ כדי לקבל מערכת שקולה בעלת פונקציית תמסורת זהה.

2.3.2 העתקת מסכם

א. מנקודה שאחרי מלבן לנקודה הנמצאת לפניו

התבוננו באיור 2.27.

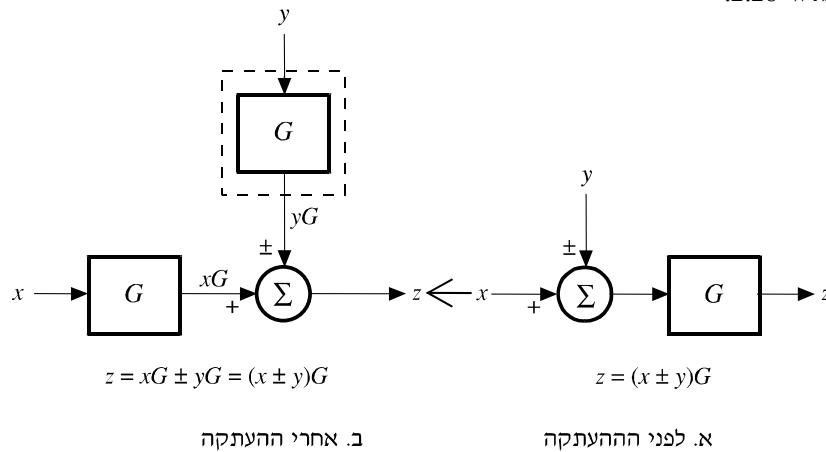


איור 2.27 העתקת מסכם

מהאיורים אנו למדים שגם כאן יש להוסיף מלבן בעל תמסורת $\frac{1}{G}$ לאות המבוא y כדי לקבל אות מוצא z זהה במערכת השקולה.

ב. מנקודה שלפני מלבן לנקודה הנמצאת אחריו

התבוננו באיור 2.28.



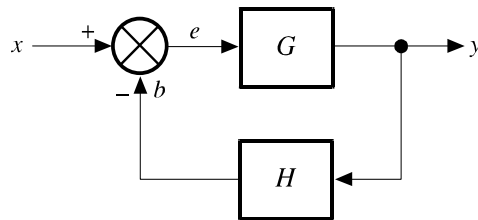
איור 2.28 העתקת מסכם

גם במקרה זה יש להוסיף מלבן למערכת כדי לקבל אות מוצא זהה בשני המקרים.

2.3.3 הפיכת חוג סגור עם משוב H ($H \neq 1$) לחוג סגור עם משוב יחידה

התבוננו באיורים 2.29 א ו-2.29 ב.

ברצוננו לבטא את פונקציית התמסורת G' (של המערכת שבאיור 2.29 ב) באמצעות פונקציית התמסורת G ו- H , כך שפונקציית התמסורת השקולה של המערכת שבאיור 2.29 א תהיה זהה לפונקציית התמסורת השקולה של המערכת שבאיור 2.29 ב.



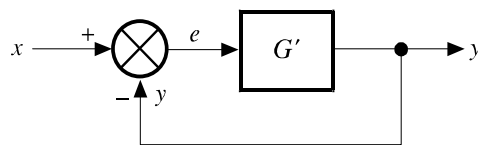
איור 2.29 א מערכת עם משוב

במערכת שבאיור 2.29 א מתקיים:

$$\frac{y}{x} = \frac{G}{1 + GH}$$

במערכת שבאיור 2.29 ב מתקיים:

$$\frac{y}{x} = \frac{G'}{1 + G'}$$



איור 2.29 ב המערכת השקולה

כאמור, דרוש שפונקציית התמסורת של שתי המערכות יהיו זהות, כלומר, יתקיים:

$$\frac{G}{1 + GH} = \frac{G'}{1 + G'}$$

לאחר סידור המשוואה נקבל:

$$G(1 + G') = G'(1 + GH)$$

או:

$$G = G' + G'GH - G'G = G'[1 + G(H - 1)]$$

ולכן:

$$G' = \frac{G}{1 + G(H - 1)}$$

וזהו הקשר המבוקש.

מסקנות:

שימוש שיטתי בכללי הפישוט של אלגברת המלבנים, הופך את מציאת פונקציית התמסורת השקולה של מערכת בקרה לתהליך פשוט יחסית גם אם המערכת מורכבת ומסובכת.

כאשר משתמשים באלגברת המלבנים, רצוי לבצע את הפעולות השונות בסדר מסוים, כדי שפתרון הבעיה ייעשה בצורה הגיונית ואלגנטית.

● לפני שמתחילים לבצע פעולה אלגברית, יש להתבונן בתרשימים המלבנים ולבדוק אם בצורת הצגתו אין "מוקשים", כגון חיבורים מסובכים בין מלבנים, אשר למעשה ניתן לחברם בצורה פשוטה יותר.

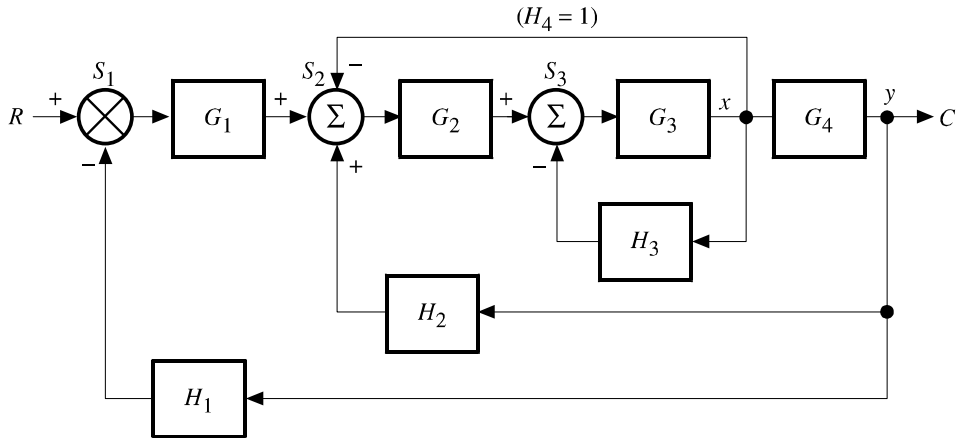
אחר כך יש לפשט את תרשימים המלבנים על-ידי:

- מציאת המלבן השקול של מלבנים המחוברים בטור.
- מציאת המלבן השקול של מלבנים המחוברים במקביל.
- מציאת המלבן השקול של חוגי בקרה פנימיים (תת-מערכות).
- לבסוף, לאחר כל הצמצומים האפשריים, מבצעים את הפעולות האלגבריות על המלבנים הנותרים, ומוצאים את פונקציית התמסורת השקולה של המערכת.

מן הראוי לציין כי סדר הפעולות לעיל אינו מחייב; ואולם אלה הם קווי הנחיה המקלים את פישוט המערכת.

2.4 דוגמה

חשבו את פונקציית התמסורת השקולה $\frac{C}{R}$, של המערכת הנתונה באיור 2.30.



איור 2.30 איור לדוגמה 2.4

פתרון

מערכת זו כוללת ארבעה חוגי משותב (או ארבעה חוגים סגורים). נמיר כל חוג סגור למלבן יחיד על-ידי שימוש במשוואה (2-3). בדרך כלל מתחילים בחוג הפנימי ביותר ומתקדמים כלפי חוץ.

א. נחליף את החוג הסגור הכולל את המלבנים G_3 ו- H_3 במלבן יחיד שהתמסורת שלו היא:

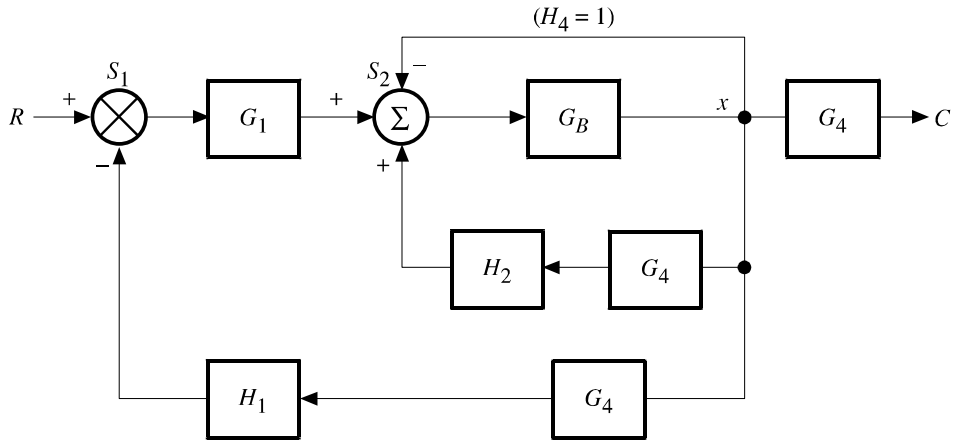
$$G_A = \frac{G_3}{1 + G_3 H_3}$$

ב. נחליף את המלבנים G_4 ו- G_2 המחברים בטור במלבן יחיד שהתמסורת שלו היא:

$$G_B = G_A G_2 = \frac{G_2 G_3}{1 + G_3 H_3}$$

ג. נעתיק את הצומת y לנקודה x שלפני המלבן G_4 (איור 2.30). כתוצאה מהעתק זו תוכפלנה תמסורת המשותב H_1 ו- H_2 בתמסורת G_4 .

בשלב זה נקבל את תרשים המלבנים המופיע באיור 2.31.



איור 2.31 פישוט של תרשים המלבנים שבאיור 2.30

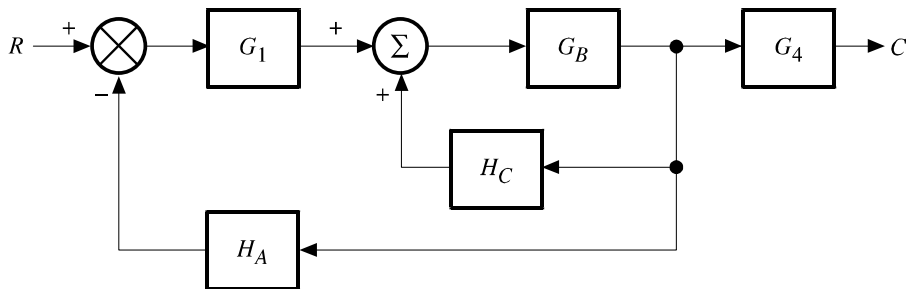
ד. נחשב את פונקציית התמסורת של המלבנים G_4 ו- H_2 המחוברים בטור: $H_B = H_2 G_4$

ה. נחשב את פונקציית התמסורת של המלבנים G_4 ו- H_1 המחוברים בטור: $H_A = H_1 G_4$

ו. נבצע סיכום של שני מסלולי המשוב H_B ו- H_4 למשוב יחיד H_C :

$$H_C = H_B - H_4 = H_2 G_4 - 1$$

בשלב זה תרשים המלבנים ייראה כך (איור 2.32):



איור 2.32 פישוט של תרשים המלבנים שבאיור 2.31

ז. נחשב את פונקציית התמסורת של החוג הסגור הכולל את המלבנים G_B ו- H_C :

$$G_x = \frac{G_B}{1 - G_B H_C}$$

ח. נחשב את פונקציית התמסורת של המלבנים G_x ו- G_1 המחוברים בטור: $G_y = G_1 G_x$.

ט. נחשב את פונקציית התמסורת של החוג הסגור הכולל את המלבנים G_y ו- H_A :

$$G_z = \frac{G_y}{1 + G_y H_A}$$

י. עתה נקבל את פונקציית התמסורת הכללית $\frac{C}{R}$ של המערכת על-ידי חישוב התמסורת של המלבנים G_z ו- G_4 המחוברים בטור:

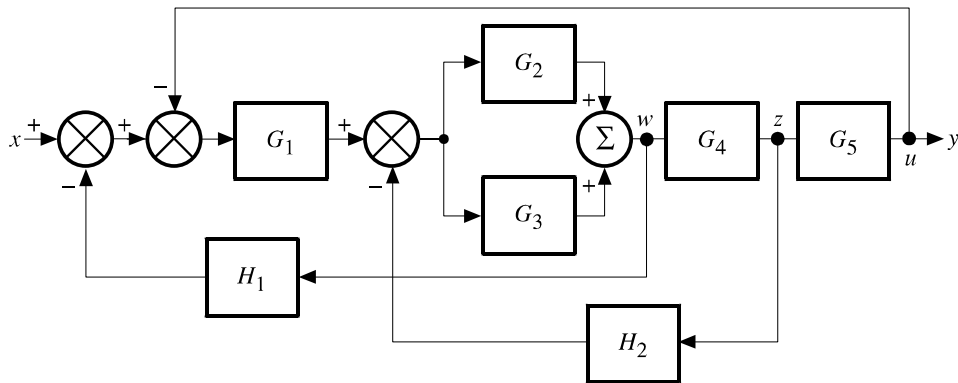
$$\frac{C}{R} = G_z G_4 = \frac{G_y G_4}{1 + G_y H_A} = \frac{G_1 G_x G_4}{1 + G_1 G_x H_A}$$

לאחר הצבה וסידור איברים, נקבל:

$$\frac{C}{R} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1 + G_3 H_3 - G_2 G_3 G_4 H_2 - G_2 G_3 + G_1 G_2 G_3 G_4 H_1}$$

2.5 דוגמה

חשבו את פונקציית התמסורת השקולה $\frac{y}{x}$ של המערכת שבאיור 2.33.



איור 2.33 איור לדוגמה 2.5

פתרון

במערכת זו ישנם שלושה חוגי משוב וכן שני מלבנים המחוברים במקביל שהאותות עוברים בהם בכיוון קדומני. כאן נעביר תחילה כמה צמתים כדי לקבל שלושה חוגי משוב המוכלים זה בזה. שלבי החישוב הם:

67 מערכות בקרה במצב מתמיד

א. נחשב את פונקציית התמסורת של המלבנים G_2 ו- G_3 המחוברים במקביל.

$$G_A = G_2 + G_3$$

ב. נעביר את הצומת z לנקודה u שמימין למלבן G_5 . כתוצאה מכך, התמסורת של המלבן H_2 היא עתה:

$$H_A = \frac{H_2}{G_5}$$

ג. נעתיק את הצומת w לנקודה u שמימין למלבנים G_4 ו- G_5 . התמסורת של המלבן H_1 היא עתה:

$$H_B = \frac{H_1}{G_4 G_5}$$

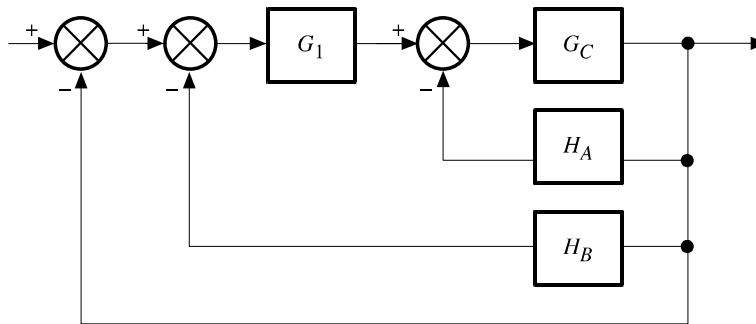
ד. נחשב את פונקציית התמסורת של המלבנים G_4 ו- G_5 המחוברים בטור:

$$G_B = G_4 G_5$$

ה. נחשב את פונקציית התמסורת של המלבנים G_A ו- G_B המחוברים בטור:

$$G_C = G_A G_B$$

בשלב זה נקבל את תרשימים המלבנים המופיע באיור 2.34:



איור 2.34 פישוט של תרשימים המלבנים שבאיור 2.33

א. נחשב את פונקציית התמסורת של החוג הסגור הכולל את המלבנים G_C ו- H_A :

$$G_D = \frac{G_C}{1 + G_C H_A}$$

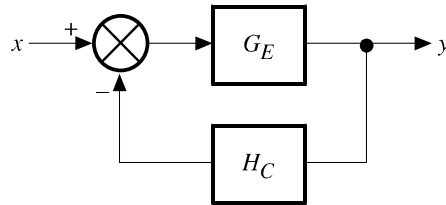
ב. נחשב את פונקציית התמסורת של המלבנים G_D ו- G_1 המחוברים בטור:

$$G_E = G_D G_1$$

ח. נחשב את פונקציית התמסורת השקולה של משוב היחידה והמשוב H_B :

$$H_C = H_B + 1$$

בשלב זה מקבלים את התרשים המלבנים באיור 2.35.



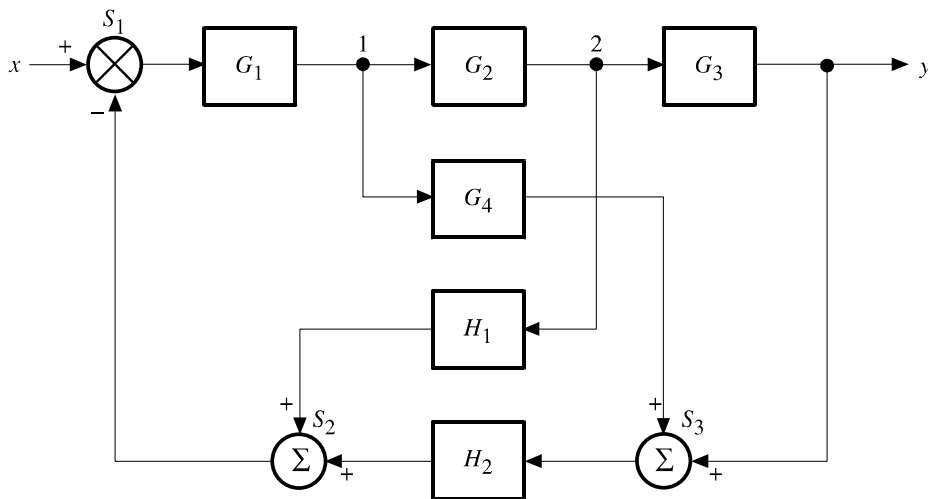
איור 2.35 פישוט של תרשים המלבנים שבאיור 2.34

ט. התמסורת השקולה $\frac{y}{x}$ של המערכת כולה היא אפוא:

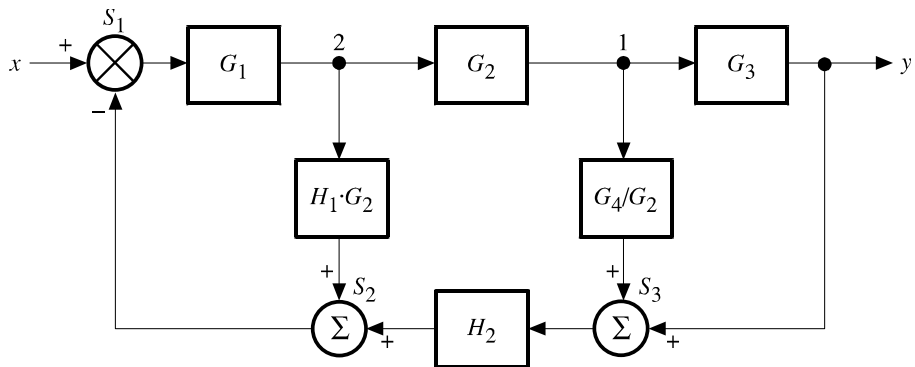
$$\frac{y}{x} = \frac{G_E}{1 + G_E H_C} = \frac{G_1(G_2 + G_3)G_4G_5}{1 + (G_2 + G_3) \cdot G_4H_2 + G_1(G_2 + G_3)H_1 + G_1(G_2 + G_3)G_4G_5}$$

2.6 דוגמה

נתונה המערכת שבאיור 2.36. הוכיחו כי מערכת זו שקולה למערכת שבאיור 2.37, וחשבו את פונקציית התמסורת של המערכת.



איור 2.36 איור לדוגמה 2.6



איור 2.37 מערכת שקולה למערכת שבאיור 2.36

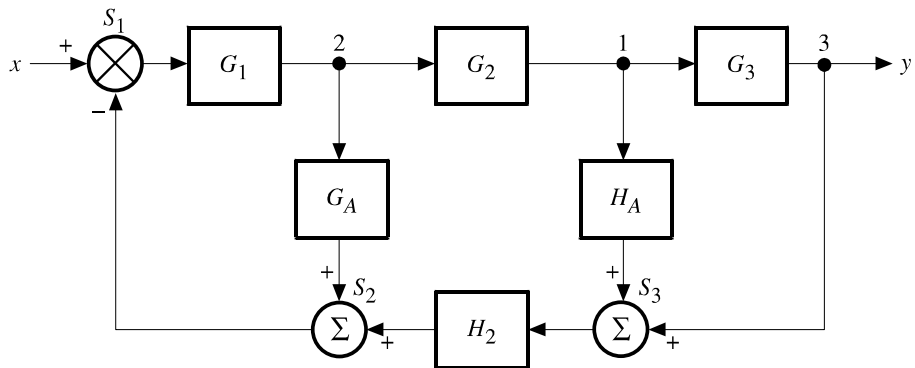
פתרון

המערכת שבאיור 2.36 שקולה למערכת שבאיור 2.37 אם לשתייהן יש אותה פונקציית תמסורת. תחילה נראה כי בעזרת שתי העתקות של צמתים ניתן לקבל מן המערכת שבאיור 2.36, את המערכת שבאיור 2.37.

א. העתקת צומת 2 לפני צומת 1 משמאל למלבן G_2 . תמסורת המלבן H_1 היא עתה $G_A = G_2 H_1$.

ב. העתקת צומת 1 אחרי המלבן G_2 . התמסורת של המלבן G_4 היא עתה $H_A = \frac{G_4}{G_2}$.

בשלב זה מתקבלת המערכת שבאיור 2.38.



איור 2.38 פישוט של תרשימים המלבנים שבאיור 2.37

תרשימים המלבנים שקיבלנו לזה לזה הנתון באיור 2.37, אם $H_A = \frac{G_4}{G_2}$ ו- $G_A = G_2 H_1$.

נחשב כעת את פונקציית התמסורת השקולה של המערכת שבאיור 2.38.

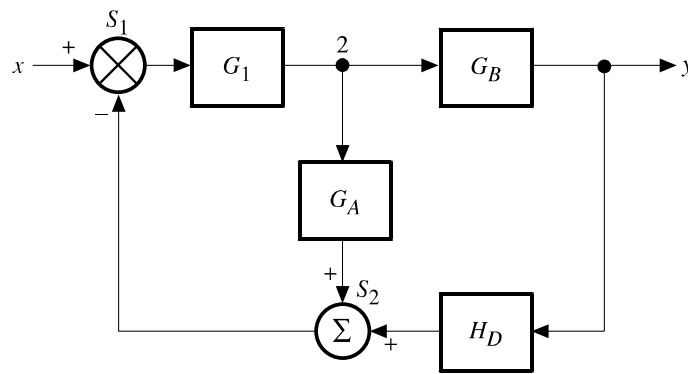
ג. העתקת צומת 1 לנקודה 3 מימין למלבן G_3 . תמסורת המלבן H_A היא עתה $H_B = \frac{H_A}{G_3}$.

ד. פונקציית התמסורת של המשוב H_B ומשוב יחידה המחוברים במקביל: $H_C = H_B + 1$.

ה. פונקציית התמסורת של המלבנים G_2 ו- G_3 המחוברים בטור: $G_B = G_2 \cdot G_3$.

ו. פונקציית התמסורת של מלבן המשוב H_C בטור ומלבן המשוב H_2 המחוברים בטור: $H_D = H_C H_2$.

המערכת השקולה המתקבלת בשלב זה מופיעה באיור 2.39.



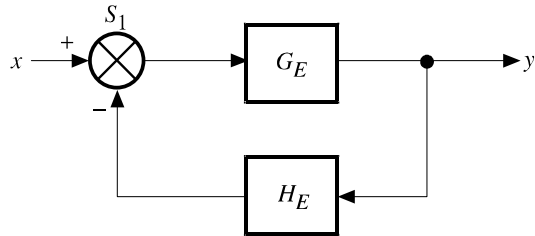
איור 2.39 פישוט של תרשים המלבנים שבאיור 2.38

ז. העתקת צומת 2 לנקודה מימין למלבן G_B . תמסורת המלבן G_A היא עתה $G_C = \frac{G_A}{G_B}$.

ח. פונקציית התמסורת של המלבנים G_C ו- H_D המחוברים במקביל: $H_E = H_D + G_C$.

ט. פונקציית התמסורת של המלבנים G_1 ו- G_B המחוברים בטור: $H_E = H_D + G_C$.

בשלב זה מתקבלת המערכת שבאיור 2.40.

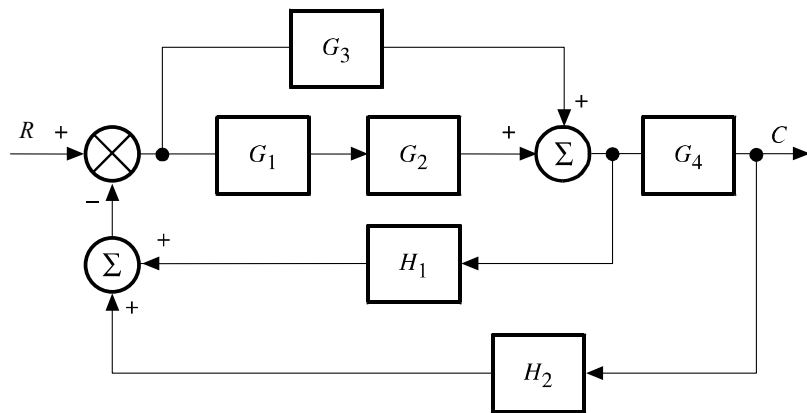


איור 2.40 פישוט של תרשים המלבנים שבאיור 2.39

פונקציית התמסורת השקולה של המערכת היא אפוא:

$$\frac{y}{x} = \frac{G_E}{1 + G_E H_E} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_1 G_4 H_2 + G_1 G_2 G_3 H_2 + G_1 G_2 H_1}$$

שאלה 2.7*



איור 2.41 איור לשאלה 2.7

א. חשבו את יחס התמסורת $\frac{C}{R}$ במערכת המתוארת באיור 2.41.

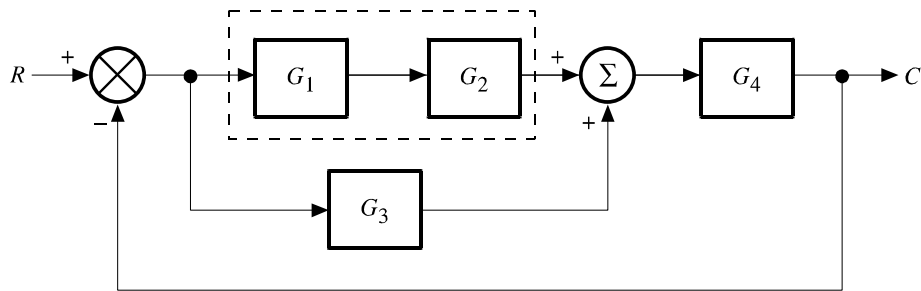
ב. מהו אות המבואר R הגורם לאות מוצא $C = 1$, אם ערכי התמסורות של הרכיבים הם:

$G_1 = 0.1, G_2 = 10, G_3 = 10, H_1 = 0.1, H_2 = 0.1, H_4 = 100$?

ג. מה יהיה אות המוצא C אם ינותק הענף המכיל את הרכיב שתמסורתו G_3 (כלומר, יתקיים $G_3 = 0$)?

***שאלה 2.8**

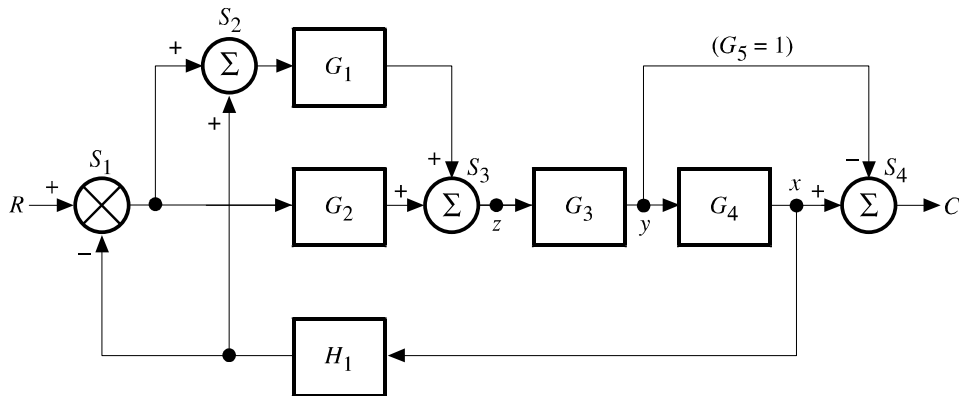
חשבו את אות המוצא C במערכת הבקרה המתוארת באיור 2.42.



איור 2.42 איור לשאלה 2.8

***שאלה 2.9**

א. חשבו את פונקציית התמסורת $\frac{C}{R}$ של המערכת הנתונה באיור 2.43.



איור 2.43 איור לשאלה 2.9

ב. חשבו את עוצמת האותות בנקודות X, Y, Z ו- Z עבור אות מבוא נתון R .

2.4* פונקציית התמסורת של מערכת בקרה מרובת מבואות

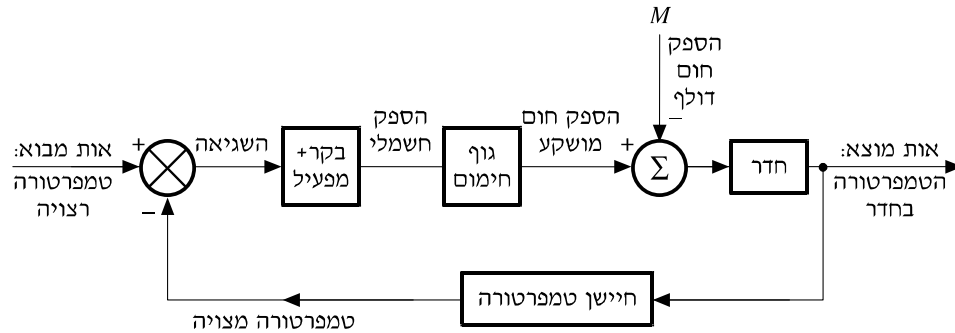
למושג "פונקציית התמסורת של מערכת בקרה" יש מובן פשוט יחסית כאשר למערכת הבקרה יש אות מבוא יחיד ואות מוצא יחיד. עם זאת, למדנו כי אות המוצא במערכות עלול להיות מושפע גם מאותות מבוא משניים, ובמיוחד מהפרעות. במערכות כאלו יש להגדיר את המושג "תמסורת שקולה" בצורה שונה מזו שתיארנו בסעיפים הקודמים. אם נחזור לדוגמה 2.1, הרי במערכת זו אין כל הפרעה לפעולת המנוע: אנו מניחים כי המנוע אינו "עמוס" (כלומר, אינו מסובב רכיב נוסף), והשפעת הטכומטר על ביצועיו היא זניחה. במקרה זה, פונקציית התמסורת של המערכת היא גודל קבוע הנקבע על-ידי התמסורות של המגבר, המנוע, והטכומטר. ואולם במציאות מנועים אינם פועלים סתם כך, אלא צריכים לסובב עומס כלשהו, כגון גלגל, רצועה, מוט סיבוב, וכו'. על העומס ניתן להסתכל כעל הפרעה לפעולת המנוע, העלולה לגרום לשינוי אות המוצא גם כאשר אות המבוא אינו משתנה. מכאן שתרשים המלבנים (איור 2.19) שבעזרתו חישבנו את פונקציית התמסורת השקולה של המערכת אינו מייצג את המערכת עם ההפרעה, ולא ניתן לחשב בעזרתו במדויק את אות המוצא של המערכת. כיצד אפוא מחשבים את אות המוצא במערכת שבה קיימת הפרעה לפעולת המערכת? ננסה לענות על שאלה זו בעזרת מערכת בקרת הטמפרטורה באמצעות התרמוסטט (איור 1.20).

נניח שתפקיד גוף החימום שאותו מפעיל התרמוסטט הוא לשמור על טמפרטורה קבועה בתוך חדר. ברור כי אם החדר סגור היטב, הרי במצב המתמיד גוף החימום מספק כמות חום (קטנה יחסית) השווה בכל רגע ורגע לכמות החום המסולקת מהחדר. נזכיר כי גם בחדר סגור היטב חום עלול "לדלוף", למשל כתוצאה מהולכת חום דרך הקירות – אם מחוץ לחדר שוררת טמפרטורה הנמוכה מטמפרטורת החדר. אולם מה קורה כאשר פותחים חלון בחדר הסגור? אם הטמפרטורה מחוץ לחדר נמוכה יותר, סביר להניח שעם פתיחת החלון, התרמוסטט יגיב על-ידי כך שיפעיל את גוף החימום לזמן ארוך יותר (וכך תסופק כמות גדולה יותר של חום מאשר לפני פתיחת החלון). למעשה, לאחר פרק זמן מסוים (המכונה זמן המעבר, ועוד נרחיב עליו בהמשך), המערכת מגיעה למצב מתמיד חדש, שבו טמפרטורת החדר קרובה לטמפרטורת החדר לפני פתיחת החלון. הפעולה "פתיחת חלון" גורמת אפוא להפרעה בפעולת המערכת, שאותה ניתן לתאר באמצעות אות מבוא נוסף, כפי שלמדנו בפרק הקודם (ראו איור 1.14).

אות מבוא זה, הנוסף לאותות האחרים במערכת, הוא בעל יחידות פיסיקליות משלו. למשל, במערכת בקרת הטמפרטורה בחדר, החום המסולק מהחדר (כתוצאה מפתיחת החלון) הוא הפרעה שיחידותיה הן הספק חום

קלוריה
שנייה

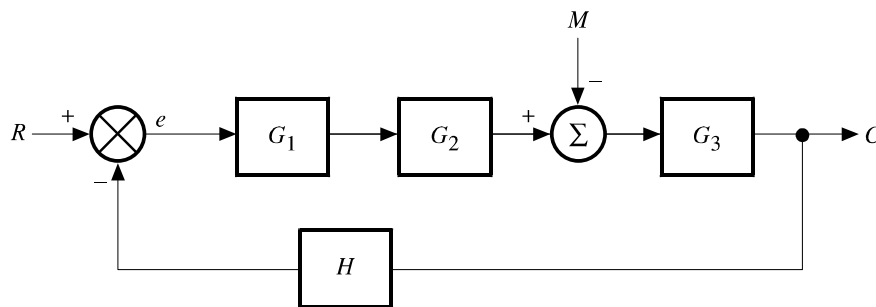
באיור 2.44 נתון תרשים מלבנים של המערכת עם האותות העוברים במערכת. שימו לב שהמלבן הראשון בחוג הקדומני מייצג את הבקר (התרמוסטט) וגם את הרכיב המפעיל את גוף החימום. כמו כן הוספנו מלבן שלישי המייצג את ה"חדר". אות המוצא של המערכת הוא הטמפרטורה בחדר.



איור 2.44 מערכת בקרת טמפרטורה עם הפרעה

אות הפרעה M נוסף לאות המתקבל מגוף החימום. התוספת מופיעה עם סימן שלילי, שכן החום המסולק מהחדר כתוצאה מההפרעה, מפחית למעשה את החום הנוצר על-ידי גוף החימום. כדי לחשב את טמפרטורת החדר במצב המתמיד החדש, עלינו לדעת את התמסורת של כל רכיבי המערכת. נסמן אפוא את תמסורת הבקר+המפעיל ב- G_1 , את תמסורת גוף החימום ב- G_2 , ואת תמסורת החדר ב- G_3 (מהן היחידות של G_3 ?). את תמסורת חיישן הטמפרטורה נסמן ב- H (איור 2.45). בדומה לדרך שבה הישבנו את האות במערכת עם משוב ללא הפרעה (משוואה (2-3)) נוכל לרשום:

$$e = R - CH$$



איור 2.45 התמסורות במערכת בקרת טמפרטורה עם הפרעה

לפיכך, עוצמת האות המתקבל מהבקר + המפעיל (המלבן G_1) היא:

$$G_1 e = G_1 (R - CH)$$

75 מערכות בקרה במצב מתמיד

נכפול אות זה בתמסורת גוף החימום (G_2), ונקבל את עוצמת אות הספק החום שמפיק גוף החימום:

$$G_1 G_2 e = G_1 G_2 (R - CH)$$

אות הספק חום זה מיתוסף (בסימן שלילי) לאות ההפרעה M . לכן הספק החום נטו הנמסר לחדר הוא:

$$G_1 G_2 (R - CH) - M$$

אות המוצא מהמערכת שווה לאות המבוא לחדר כפול תמסורת החדר (G_3), כלומר:

$$C = G_3 [G_1 G_2 (R - CH) - M]$$

ולאחר חילוץ הנעלם C נקבל:

$$(2-5) \quad C = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_1 G_2 G_3 H} \cdot R + \frac{G_3}{1 + G_1 G_2 G_3 H} (-M)$$

שימו לב למבנה משוואה (2-5): באגף ימין שלה מופיע סכום של שני איברים. האיבר הראשון מתאר את תרומת אות המבוא R לאות המוצא. למעשה, כאשר לא קיימת הפרעה (כלומר, $M=0$), אזי משוואה (2-5) זהה למשוואה של מערכת עם משוב שיש לה אות מבוא יחיד (משוואה (2-3)). האיבר השני באגף ימין מתאר את תרומת ההפרעה (כאן ההפרעה היא שלילית).

ממשוואה (2-5) נובע כי אות המוצא C של המערכת המתוארת באיור (2.45) הוא הרכבה (סופרפוזיציה) של שני אותות מבוא שונים בעלי תמסורות שונות: האות הרצוי R , ואות ההפרעה M . הדבר נכון בכל מערכת שקיימים בה כמה אותות מבוא: אות המוצא במערכת רבת מבואות הוא סכום המכפלות של אותות המבוא השונים בתמסורת של כל אחד מהם. את השיטה הכללית שבה מחשבים את התמסורת המתאימה לכל אחד מאותות המבוא, ואת אות המוצא, נראה על-ידי הדוגמה של מערכת בקרת הטמפרטורה (איור 2.45).

א. מקצרים את כל אותות המבוא המשניים. למשל, במערכת בקרת הטמפרטורה מציבים $M=0$. נסמן את פונקציית התמסורת השקולה של המערכת במצב זה על-ידי $G_{(M=0)}$. פונקציה זו מתוארת על-ידי האיבר הראשון באגף ימין של משוואה (2-5).

$$G_{(M=0)} = \frac{G}{1 + GH}$$

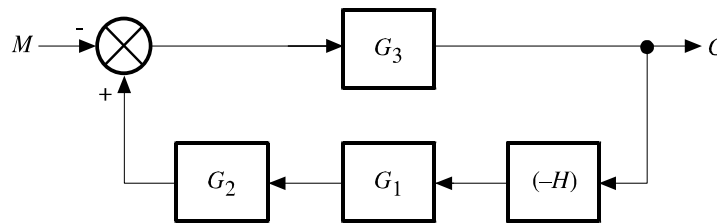
כאשר $G = G_1 G_2 G_3$.

אות המוצא C_1 המתקבל במצב זה הוא:

$$C_1 = G_{(M=0)} \cdot R = \frac{G}{1+GH} \cdot R$$

ב. מקצרים את אות המבוא הרצוי על-ידי ההצבה $R = 0$. מתקבלת המערכת המתוארת באיור 2.46. נסמן את פונקציית התמסורת השקולה של המערכת במצב זה על-ידי $G_{(R=0)}$. ממשוואה (2-3) נובע כי (שימו לב לסימן של המלבן H):

$$G_{(R=0)} = \frac{G_3}{1+GH}$$



איור 2.46 המערכת מאיור 2.45 לאחר שמקצרים את אות המבוא הרצוי

ולכן אות המוצא C_2 כתוצאה מההפרעה M (במקרה זה הפרעה שלילית) הוא:

$$C_2 = G_{(R=0)}(-M) = \frac{G_3}{1+GH}(-M)$$

אות המוצא C מהמערכת הוא הסכום של שני האותות שקיבלנו בשלבים (א) ו-(ב), כלומר, משוואה (2-5):

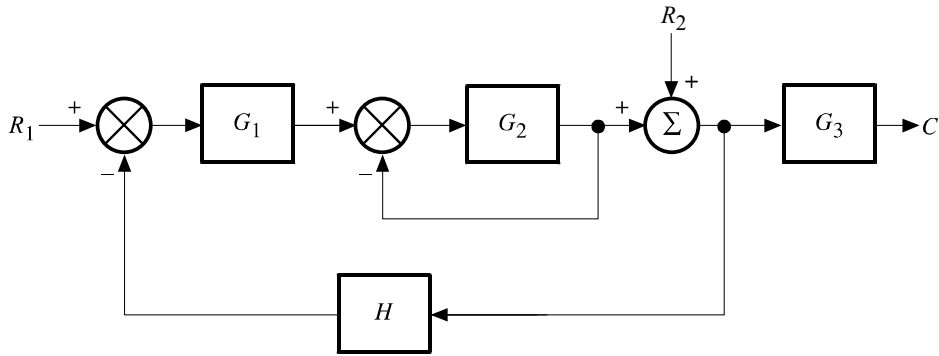
$$C = C_1 + C_2 = \frac{G}{1+GH} \cdot R + \frac{G_3}{1+GH}(-M)$$

את האלגוריתם הזה אפשר להכליל למקרה שבו מספר המבואות, N , גדול משניים. במקרה זה יופיעו N אברים במשוואה המתארת את אות המוצא, בהתאם לתמסורות "ההלקיות" המתאימות לכל אחד מאותות המבוא.

יתירה מזו, מהאמור לעיל נוכל להסיק שלמושג "פונקציית התמסורת השקולה של מערכת" אין כל משמעות כאשר המערכת היא בעלת כמה מבואות. לחישוב אות המוצא של מערכת בעלת מספר מבואות ומוצא יחיד משתמשים בפונקציות התמסורת **ההלקיות**, המתאימות לכל אחד מאותות המבוא.

2.7 דוגמה

2.47. חשבו את אות המוצא C של המערכת הנתונה באיור 2.47.



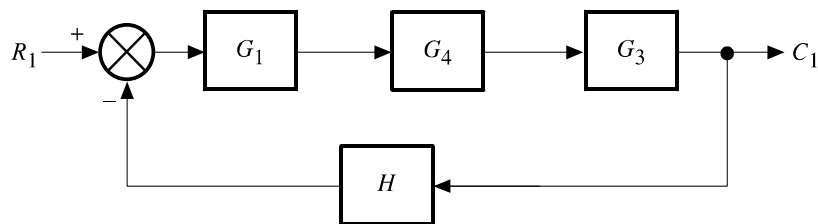
איור 2.47 איור לדוגמה 2.7

פתרון

את הפתרון נמצא לפי עיקרון הסופרפוזיציה:

- פונקציית התמסורת של החוג הסגור הכולל את המלבן G_2 ומשוב היחידה:

$$G_4 = \frac{G_2}{1 + G_2}$$



איור 2.48 המערכת מאיור 2.47 כאשר הפרעה היא $R_2 = 0$

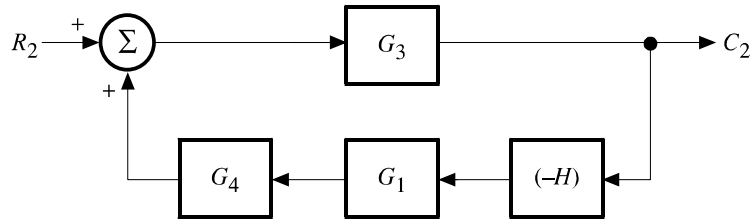
- ננתק את R_2 , ונחשב את פונקציית התמסורת כאשר $R_2 = 0$ (איור 2.48):

$$\left(\frac{C_1}{R_1} \right)_{R_2=0} = \frac{G_1 G_4 G_3}{1 + G_1 G_4 G_3 H} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_2 + G_1 G_2 G_3 H}$$

- ננתק את R_1 , ונחשב את פונקציית התמסורת כאשר $R_1 = 0$ (איור 2.49):

$$\left(\frac{C_2}{R_2}\right)_{R_1=0} = \frac{G_3}{1 + HG_1G_4G_3} = \frac{G_3(1 + G_2)}{1 + G_2 + HG_1G_2G_3}$$

(שימו לב לסימן של H .)



איור 2.49 המערכת מאיור 2.47 כאשר אות המבוא הוא $R_1 = 0$

- נחבר את שתי המשוואות לעיל ונקבל:

$$C = C_1 + C_2 = \left(\frac{C_1}{R_1}\right)_{R_2=0} R_1 + \left(\frac{C_2}{R_2}\right)_{R_1=0} \cdot R_2$$

$$C = \frac{G_1G_2G_3}{1 + G_2 + G_1G_2G_3H} R_1 + \frac{G_3 + G_2G_3}{1 + G_2 + G_1G_2G_3H} R_2$$

שאלה 2.10

הסבירו מדוע בתיאור המערכת כאשר אות המבוא הרצוי הוא $R = 0$, $R = 0$, מניחים כי המשוב הוא שלילי ($-H$) (ראה איור 2.49).

שאלה 2.11

במערכת לבקרת טמפרטורת המים במכל (איור 1.30) ניתן להסתכל על השינויים בספיקת המים לצרכנים, Q , כעל הפרעה לפעולת המערכת. למשל, גידול בספיקת המים מן המכל שקול להקטנת הספק החום הנמסר למכל. כיצד ישתנה תרשים המלבנים של המערכת (איור 2.20) אם נוסיף לה הפרעה Q שהתמסורת שלה היא K_e ויחידותיה הן:

$$[K_e] = \left[\frac{\text{הספק}}{\text{ספיקה}} \right] = \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^3/\text{s}} \right]$$

היכן ממוקם המסכם הנוסף במערכת? חזרו וחשבו את טמפרטורת המים במכל (T_{out} בדוגמה 2.2) אם נתון כי הספיקה היא $Q = 1 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$, התמסורת שלה היא $K_e = 500 \frac{\text{W}}{\text{m}^3/\text{s}}$ וערכי התמסורת האחרות ואות המבוא הם כמו בדוגמה 2.2.

2.5 שגיאת המצב המתמיד במערכות בקרה עם משוב

באחד הסעיפים הקודמים ניתחנו את הפעולה של מערכת חימום הכוללת תרמוסטט (איור 1.20). ראינו כי כאשר המערכת פועלת בחוג סגור (מערכת עם משוב), אות המוצא (הטמפרטורה הרצויה) מתנדד סביב הערך הרצוי (איור 1.22), ונוצרת שגיאה שגודלה (במערכת התרמוסטט) אינו קבוע אלא משתנה באופן מחזורי בזמן. גודל השגיאה, דהיינו, הסטייה של האות המצוי מן האות הרצוי תלוי בתכונות המערכת בכלל, ובתכונות בקר המערכת בפרט.

אחת המטרות החשובות של המשוב במערכת בקרה היא להקטין את הסטייה של האות המצוי (אות המוצא) מהאות הרצוי. לפיכך אנו מצפים שאם חל שינוי פתאומי באות המבוא, הרי לאחר פרק זמן מסוים אות המוצא יחזור לערכו הקבוע, השווה לאות הרצוי. במיוחד אמור היה הדבר להיות נכון במערכת הבקרה ה"אידיאלית" המתוארת באיור 1.25. כאן אנו מצפים כי במצב המתמיד, השגיאה, שהיא ההפרש בין אות המבוא הרצוי לבין אות המוצא המותמר (ראה איור 1.25) תהיה אפס.

בהמשך נראה כי ישנם סוגים מסוימים של אותות ומערכות, שבהם נשארת שגיאה מסוימת (e) במצב המתמיד, כלומר, הגודל המבוקר אינו מתייצב בדיוק על הערך הרצוי. עם זאת, קיימים גם אותות ומערכות שבהם אין שגיאה במצב המתמיד, כלומר, אכן מתקבל $e = 0$.

כדי להדגים זאת ננתח את פעולתה של המערכת לבקרת מהירות הסיבוב של מנוע ז"י (איור 2.19). כאשר משנים את האות הרצוי באופן פתאומי.

את מהירות הסיבוב של המנוע, ω , ניתן לחשב בעזרת נוסחת החוג הסגור (2-3). במצב המתמיד, אות רצוי U_r גורם למהירות ω , הנתונה על-ידי:

$$\omega = \frac{AG_m}{1 + AG_m H} U_r$$

השגיאה מוגדרת כהפרש בין האות הרצוי לאות המצוי הנמדד (הנתון באותן יחידות כמו האות הרצוי).

באיור 2.19, מתח השגיאה U_e במצב המתמיד הוא ההפרש $U_e = U_r - U_b$. אם נבטא את המתח U_b באמצעות אות המוצא ω , נקבל:

$$U_b = H\omega = \frac{AHG_m}{1 + AG_mH} U_r$$

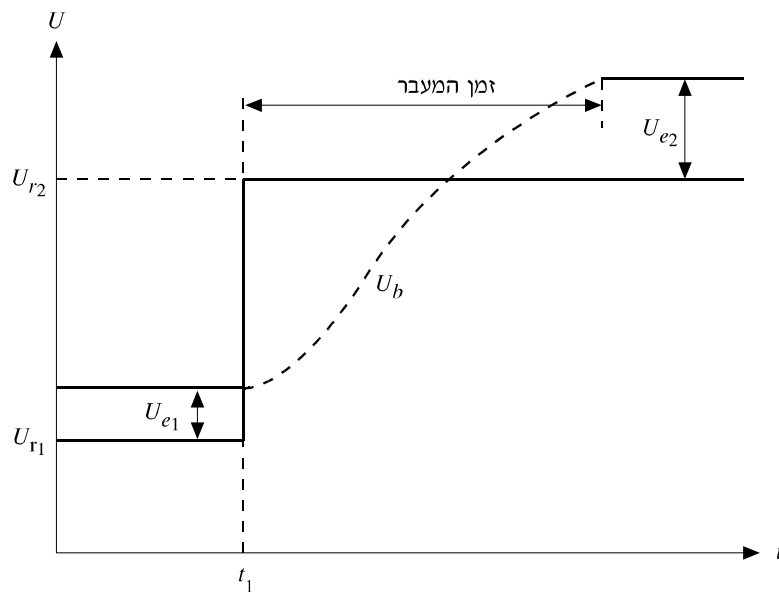
נציב את הביטוי הזה במשוואה של U_e , ונקבל:

$$U_e = U_r - \frac{AHG_m}{1 + AG_mH} U_r = \frac{U_r}{1 + AHG_m}$$

מהמשוואה האחרונה נובע כי כאשר מגדילים באופן פתאומי את המתח U_r , והמערכת עוברת מהמצב המתמיד התחלתי U_{r1} , למצב מתמיד חדש U_{r2} , מתח השגיאה U_e עוקב אחר השינוי במתח המבוא וגדל אף הוא מהערך U_{e1} לערך U_{e2} . הגרף באיור 2.50 מתאר את השינוי.

$$U_{e1} = \frac{U_{r1}}{1 + AHG_m}$$

$$U_{e2} = \frac{U_{r2}}{1 + AHG_m}$$



איור 2.50 השינוי בשגיאה של המערכת בזמן המעבר כתוצאה משינוי פתאומי באות הרצוי

באיור 2.50 מתואר אות המתח U_b (הנמצא ביחס ישר לאות המוצא ω) במצב המתמיד ההתחלתי ובמצב המתמיד החדש, וכן האות הרצוי U_r . שימו לב כי בזמן המעבר, האות U_b מתואר על-ידי קו מקווקו, היות שבפרק זמן זה גודלו אינו מחושב במדויק. לעומת זאת, U_r משתנה באופן פתאומי מהערך ההתחלתי U_{r_1} לערך הסופי U_{r_2} בזמן t_1 . במקרה זה רואים כי $U_{e_2} > U_{e_1}$, היות שהמתח הרצוי החדש U_{r_2} גדול מהמתח הרצוי ההתחלתי U_{r_1} .

*שאלה 2.12

בדוגמה 2.2 הראינו כי עבור התמסורות הנתונות (איור 2.20), השגיאה היחסית של אות המוצא במצב המתמיד היא $\frac{4.5}{50} = 0.09$.

האם ניתן להקטין את השגיאה לערך קטן מ-1% על-ידי שינוי בתמסורת הבקר? על-ידי שינוי בתמסורת פוטנציומטר המבוא?

חשבו את התמסורות המתאימות אם תמסורות כל יתר הרכיבים אינן משתנות.

מערכת בקרת המהירות היא דוגמה למערכות שבהן השגיאה במצב המתמיד אינה נובעת מתקלה אלא מעצם מבנה המערכת ועקרון פעולתה: במקרה זה, כדי לקיים אספקה מתמדת של אנרגיה חשמלית למנוע, חייב להישאר מתח שגיאה מסוים U_e במבוא למגבר, (מהי מהירות המנוע אם המתח $U_e = 0$?)

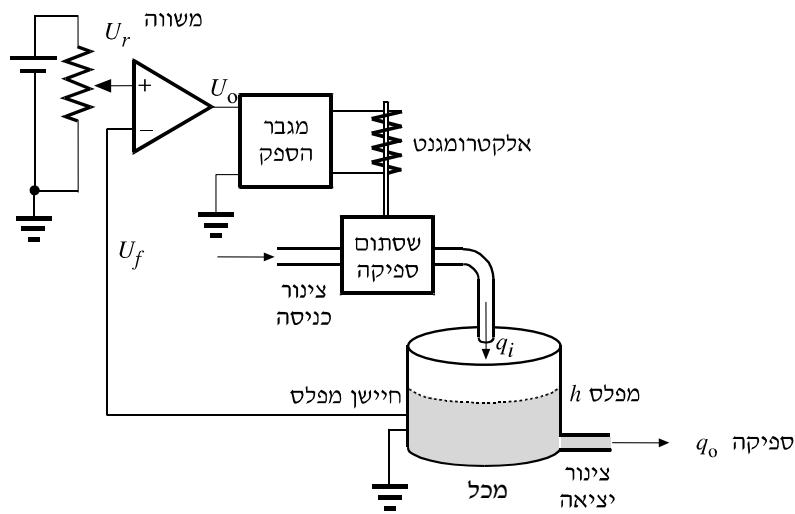
התמונה שונה במערכת בקרת תזוזה (דוגמה 2.3). במערכת זו, שינוי פתאומי במתח הרצוי U_r (איור 2.23), גורם להזזת הבורג עד למרחק מסוים x . לאחר העצירה ציר המנוע אינו מסתובב, כלומר השגיאה U_e היא אפס. מערכת זו היא אפוא דוגמה למערכת שבה **השגיאה במצב מתמיד היא אפס**. כללית, מערכות בקרה עם משוב ניתן לאפיין על פי השגיאה שהן יוצרות במצב המתמיד: שגיאה שערכה אפס, שגיאה קבועה בזמן, או שגיאה משתנה בזמן.

2.8 דוגמה

באיור 2.51 מתוארת מערכת לבקרת מפלס נוזל במכל. חיישן המפלס במערכת זו ממיר את גובה הנוזל במכל למתח U_f היחסי למפלס.

המגבר משווה מתח זה למתח U_r , שהוא יחסי למפלס הרצוי, ויוצר במוצאו את מתח U_0 , השווה להפרש: $U_0 = U_r - U_f$.

הזרם המתקבל ממגבר הספק מפעיל ממסר שמשנה את מצב הפתיחה של שסתום הספיקה בצינור הכניסה למכל. תפקיד השסתום הוא להגדיל, או להקטין, את ספיקת הנוזל q_i בצינור הכניסה למכל באמצעות שינוי מצב הפקק (המגופה) בשסתום. כאשר המערכת פועלת במצב קבוע ויציב, הספיקה למכל q_i שווה לספיקה היוצאת מהברז התחתית במכל q_0 , וגובה הנוזל נשאר קבוע. במצב זה הפקק בשסתום הוא במצב "חצוי" פתוח, כלומר נדרש זרם בממסר על מנת לשמור על הספק קבוע. מכאן נוכל להסיק כי גם במערכת זו כמו במערכת לבקרת מהירות מנוע השגיאה במצב מתמיד אינה מתאפסת, וקיים הפרש קבוע בין המתח U_f למתח U_r .

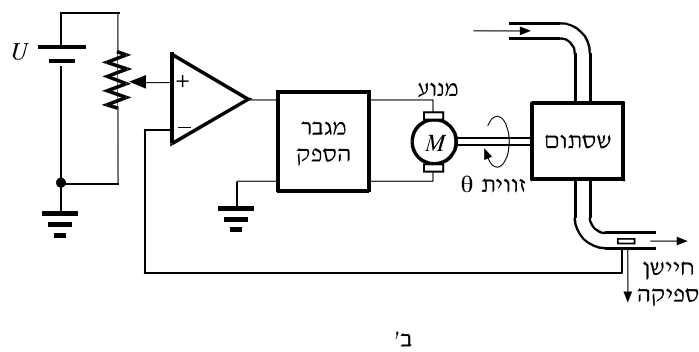
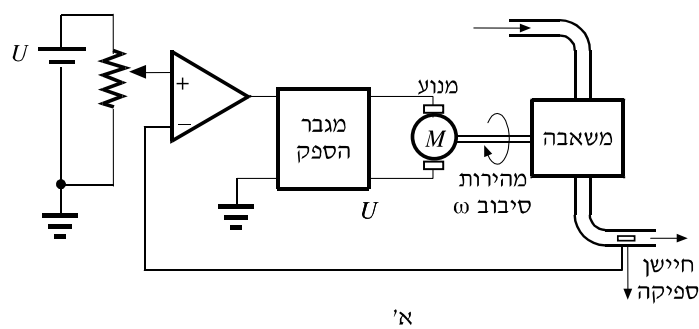


איור 2.51 איור לדוגמה 2.8

שאלה 2.13

באיור 2.52 נתונות שתי מערכות לבקרת ספיקת נוזל הפועלות בבקרה רציפה עם משוב. נתחו את פעולתה של כל מערכת כאשר אות המבוא קבוע, וקבעו אם במצב המתמיד השגיאה היא אפס, או שחייבת להישאר שגיאה מסוימת.

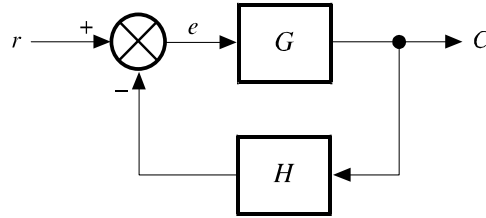
הנחיה: בדקו אם גם במצב המתמיד צריך להמשיך ולספק מתח למנוע במערכת.



איור 2.52 מערכות בקרה שונות עם משוב

לסיכום: במערכת בקרה עם משוב שלילי (איור 2.53), ההפרש בין האות הרצוי r , לבין אות המוצא המתמיר (אות המשוב), מקיים את משוואת השגיאה:

$$(2-6) \quad e = \frac{r}{1 + GH}$$



איור 2.53 השגיאה e במערכת עם משוב

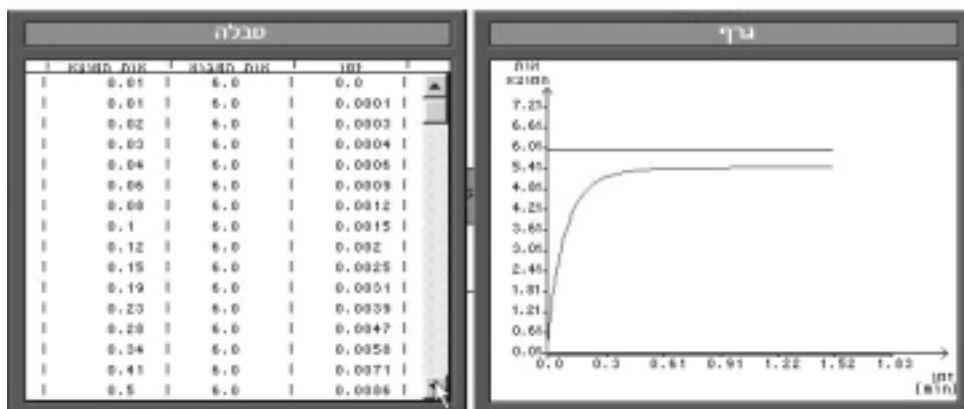
אם G ו- H קבועים בזמן, אזי במצב שבו r קבוע, השגיאה e גם היא קבועה בזמן. במצב המתמיד השגיאה מתייצבת על ערך קבוע (שווה או שונה מאפס) התלוי בתכונות המערכת.

2.6 סיכום

- במערכת בקרה עם משוב, אות המוצא מהמערכת (האות המצוי) מושווה לאות המבוא למערכת (האות הרצוי). ההפרש בין האות המצוי לאות הרצוי הוא אות השגיאה.
- רכיב במערכת בקרה אפשר לאפיין באמצעות פונקציית התמסורת שלו (ובקיצור – התמסורת):
 - א. התמסורת של רכיב במצב מתמיד מוגדרת כיחס שבין אות המוצא מהרכיב לבין אות המבוא לרכיב.
 - ב. יחידות התמסורת הן היחס בין יחידות אות המוצא לבין יחידות אות המבוא.
- מערכת בקרה מאופיינת באמצעות פונקציית התמסורת השקולה של המערכת:
 - א. פונקציית התמסורת השקולה של מערכת במצב מתמיד מוגדרת כיחס שבין אות המוצא מהמערכת לבין אות המבוא למערכת.
 - ב. את פונקציית התמסורת השקולה של מערכת מחשבים לפי ערכי התמסורות של רכיבי המערכת. החישוב נעשה על סמך כללי האלגברה של תרשימי מלבנים.
 - ג. את אות המוצא של מערכת רבת מבואות ומוצא יחיד מחשבים לפי עיקרון הסופרפוזיציה.

* פעילות מחשב מס' 2

1. הפעילו את היישום "מערכות בקרה". בחרו במערכת "בקרת מפלס". השתמשו בסמלון "פתח" כדי לטעון ולהציג את תרשים המלבנים ששמרתם בסיום פעילות המחשב מס' 1.
2. קבעו את **יחידות** פונקציית התמסורת של כל רכיב. קבעו את ערך התמסורות ("ההגברים") באופן שרירותי, בתחום המותר על פי הוראות היישום. בחרו בבקרה יחסית (על משמעותו של מושג זה נעמוד בהמשך), וקבעו את הגבר הבקר בתחום המותר. קבעו את "קבוע הזמן" של המכל ל-1 דקה (גם על משמעות מושג זה נעמוד בהמשך). קבעו את "תנאי ההתחלה" של המכל ל-0 מטר.
3. בחרו את "אות המדרגה" כאות המבוא, וקבעו את יחידות. קבעו את עוצמת אות המבוא באופן שרירותי בתחום המותר על פי הוראות היישום.
4. לאחר סיום קביעת ההגברים והיחידות של כל המלבנים (לרבות אות המבוא), סמלון ההפעלה (הסמלון 0/1) הופך לפעיל (צבעו אפור). במצב זה המערכת יכולה לחשב את התגובה לאות מבוא נתון.
5. חשבו באמצעות היישום את תגובת המערכת במצב המתמיד (כלומר, את אות המוצא במצב המתמיד) לאות המבוא שבחרתם. מהי התמסורת הכללית של המערכת? מהי השגיאה היחסית במצב זה?
הערה: היישום מציג את תגובת המערכת בשני אופנים: כגרף של אות המוצא בתלות בזמן (בדקות), וכטבלה בת שלוש עמודות הכוללות את הזמן (בדקות), אות המבוא (במטרים) ואות המוצא (במטרים). (ראו איור 2.54) בחרו את אות המוצא במצב המתמיד כערך האחרון בטבלה.



איור 2.54 תוצאת חישוב ההדמיה בלומדה "מערכות בקרה"

6. "שחקן" עם הנתונים המוזנים ללומדה, וענו על השאלות הבאות:

א. כיצד משתנה שגיאת המערכת כאשר מגדילים (או מקטינים) בהדרגה את הגבר הבקר? (השתמשו באות המבוא שקבעתם לעיל).

ב. נתונות התמסורות (הגברים) של הרכיבים הבאים:

$$G_1 = 1 = \text{תמסורת הפוטנציומטר}$$

$$G_3 = 10 = \text{תמסורת המנוע}$$

$$G_4 = 0.1 = \text{תמסורת המשאבה}$$

$$G_5 = 1 = \text{תמסורת המכל}$$

$$G_6 = 1 = \text{תמסורת החיישן}$$

מהו ההגבר היחסי של הבקר המבטיח שהשגיאה במצב המתמיד תהיה קטנה מ-10%, מ-1%, מ-0.1%?

ג. כתוצאה מתקלה בענף המשוב, הגבר החיישן קטן ל- $G_6 = 0.1$. בהנחה שהגברי המנוע, המשאבה והמכל אינם משתנים, וכי הגבר הבקר הוא $G_2 = 100$, מהי תמסורת הפוטנציומטר המבטיחה ששגיאת המערכת במצב המתמיד החדש תהיה קטנה מ-0.1%? האם במצב זה תמסורת פוטנציומטר המבוא והחיישן שוות?

7. שמרו את המערכת שבניתם בסעיף ב' לעיל עבור $G_2 = 100$ ועבור היחידות וההגברים האחרים שקבעתם.

פרק 3

מדידות והתמרות של גדלים פיסיקליים במערכות בקרה

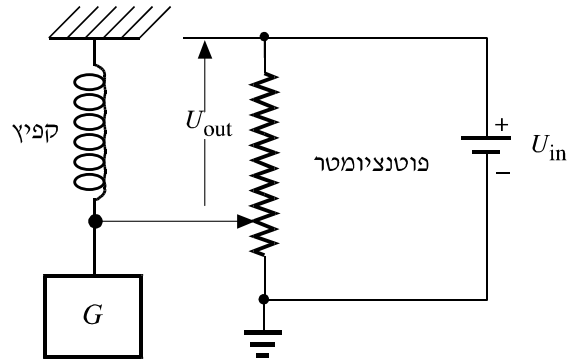
3.1 מבוא

מדידת המשתנה המבוקר במערכות בקרה נעשית על-ידי חיישנים (Sensors) למיניהם. בחיישן מנצלים תכונה פיסיקלית של החומר שממנו הוא עשוי, כדי להמיר את הגודל הפיסיקלי הנמדד לגודל פיסיקלי אחר.

להלן שתי דוגמאות של חיישנים פשוטים:

- א. מד חום ביתי מתמיר את טמפרטורת הגוף להתפשטות הקווית של הכספית בתוך צינורית דקה (קפילרית). ההתמרה מבוססת על תופעה מוכרת – שיעור ההתפשטות בחום של חומרים רבים נמצא ביחס ישר לשינוי הטמפרטורה שלהם.
- ב. בשקילה על-ידי דינמומטר קפיץ "מתורגם" משקל הפריט הנשקל, לתזוזה קווית של מחוג המחובר לקפיץ. כאן מתבססת ההתמרה על מידת ההתארכות (או ההתכווצות) של הקפיץ. שינוי האורך של הקפיץ נמצא ביחס ישר לגודל הכוח הפועל עליו.

בשני המקרים הללו, אפשר לקרוא את ערכי המשתנה הנמדד בעזרת כיול מתאים. אולם מדידת הגודל הפיסיקלי באמצעות שני חיישנים אלה אינה מתאימה למערכת בקרה. במערכת בקרה אנו זקוקים בדרך כלל לאות חשמלי מהחיישן, הנמצא ביחס ישר לערך הגודל הפיסיקלי הנמדד. במקרה של שקילה אפשר למשל לבנות את המערכת הבאה:

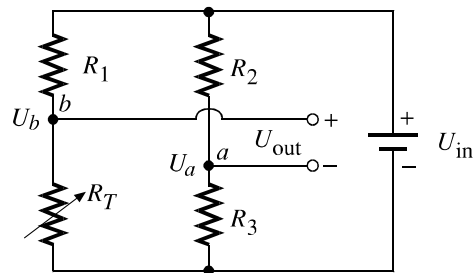


איור 3.1 מערכת להתמרת כוח (משקל) למתח חשמלי

במקרה של חימום ניתן לנצל, למשל, את תלות ההתנגדות החשמלית R של מוליך בטמפרטורה: $R = f(T)$. כפי שנראה, קל להמיר את שינוי ההתנגדות לשינוי זרם או מתח. ממדידת המתח ומדיעת הקשר $f(T)$ בין הטמפרטורה להתנגדות, אפשר לחשב את הטמפרטורה של המוליך.

נדגים עיקרון זה באמצעות מעגל חשמלי הידוע בשם "גשר ויטסטון".

גשר ויטסטון מורכב מארבעה נגדים שהתנגדותם ידועה במדויק, ובהם נגד R_T שהתנגדותו משתנה עם שינוי הטמפרטורה של הנגד (איור 3.2).



איור 3.2 גשר ויטסטון

נתייחס למתח U_{in} כאל אות המבוא או "מתח העירור" של המערכת. נתייחס למתח U_{ab} בין הנקודות a ו- b כאל אות המוצא U_{out} של המערכת. את המתח U_{out} ניתן לחשב בעזרת כלל מחלק המתח:

$$(3-1) \quad U_{out} = U_b - U_a = U_{in} \left(\frac{R_T}{R_1 + R_T} - \frac{R_3}{R_2 + R_3} \right)$$

ביטוי זה נכון בהנחה שההתנגדות בין נקודות a ו- b היא אינסופית (במקרים מעשיים, האות U_{out} מוזן למגבר מתח שהתנגדות המבוא שלו גבוהה מאוד אף כי לא אינסופית). התלות של R_T בטמפרטורה ידועה. למשל, כאשר התלות היא ליניארית, מתקיים:

$$(3-2) \quad R_T = R_0 (1 + \alpha T)$$

T נמדד במעלות צלסיוס. R_0 היא ההתנגדות (באום) באפס מעלות צלסיוס, ו- α הוא מקדם טמפרטורה נתון. אם ערכי הנגדים R_1, R_2, R_3 ידועים, ומוודים את U_{out} , הרי ממשוואה (3-1) ניתן לחלץ את ההתנגדות R_T , ולכן גם את הטמפרטורה T (משוואה (3-2)). המתח U_{out} הוא אפוא אות הטמפרטורה הנמדד לאחר **התמרה** לאות חשמלי. אות כזה ניתן לשלב בקלות יחסית במערכת הבקרה. במיוחד ניתן להשתמש באות זה כאות **המשוב** במערכת בקרה בחוג סגור.

נזכור כי במערכת בקרה בחוג סגור, על חוג המשוב לבצע כמה פעולות:

1. **חישה** של המשתנה הפיסיקלי (אות המוצא) על-ידי חיישן מתאים;
2. **תרגום (התמרה)** של הגודל הפיסיקלי לאות חשמלי (זרם, מתח או תדירות);
3. **שידור** האות החשמלי לבקר המערכת באמצעות מעגל תקשורת מתאים.

לפני שניגש לתיאור מפורט יותר של פעולות אלו, נתייחס למערכת היחידות של הגדלים הפיסיקליים הנמדדים.

3.2 יחידות מידה של גדלים פיסיקליים

ליחידות המידה שבהן מבטאים גודל פיסיקלי יש חשיבות רבה. לערך המספרי של הגודל הפיסיקלי יש משמעות אך ורק אם יחידות המידה שלו מוכרות, מוסכמות ומקובלות. במשך השנים נוצרו במדינות שונות יחידות מידה שונות. מערכת היחידות המקובלת והשימושית ביותר היא: SI – International System Of Units.

מערכת היחידות SI מתבססת על שיטת MKS (meter, kilogram, second), שבה:
 האורך נמדד במטרים (m);
 המסה נמדדת בקילוגרמים (kg);
 הזמן נמדד בשניות (s או sec).

יחידות MKS משמשות בתחום המכניקה, וכדי לנצל אותן לתחומים נוספים, הרחיבו את המערכת הבסיסית והוסיפו לה שלוש יחידות:

אמפר – יחידת הזרם החשמלי שסימונה A;
 מעלת קלווין – יחידת הטמפרטורה שסימונה K;
 קנדלה – יחידת עוצמת ההארה שסימונה cd.

בעזרת מערכת יחידות זאת אפשר להגדיר את יחידות המידה של כל גודל פיסיקלי אחר על-ידי גזירתן מההגדרה הבסיסית של הגודל הפיסיקלי. הנה כמה דוגמאות מתחומי המכניקה והחשמל. בכל אחד מהמקרים רשמנו את יחידות המידה של הגדלים הפיסיקליים בין סוגריים מרובעים.

3.2.1 יישום שיטת MKS בתחום המכניקה

א. יחידות המהירות (V) והתאוצה (a):
 המהירות מוגדרת כיחס בין שינוי דרך l לבין פרק זמן t שבו חל השינוי:

$$V = \frac{l}{t}$$

ולכן יחידותיה הן :

$$[V] = \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

התאוצה מוגדרת כיחס בין שינוי המהירות V לבין פרק הזמן t שבו חל השינוי :

$$a = \frac{V}{t} = \frac{l}{t^2}$$

ולכן יחידותיה הן :

$$[a] = \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

ב. יחידות הכוח (F)

לפי חוק ניוטון, הכוח מוגדר כמכפלת המסה M בתאוצה a :

$$F = M \cdot a$$

יחידת הכוח נקראת ניוטון. סימונה N והיא מוגדרת על-ידי :

$$[F] = [N] = [\text{kg}] \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] = \left[\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

ג. יחידות העבודה וההספק :

העבודה W מוגדרת בתור כוח הפועל לאורך דרך. יחידת העבודה נקראת "ג'ול" (Joule)

וסימונה J.

$$W = F \cdot l$$

$$[J] = [N][\text{m}]$$

ולכן :

$$[J] = \left[\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \right] [\text{m}] = \left[\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2} \right]$$

ההספק P מוגדר כיחס בין העבודה לבין פרק הזמן שבו התבצעה. יחידת ההספק נקראת

ואט (Watt), וסימונה הוא W (אין לבלבל בין יחידת ההספק לבין סימון הגודל "עבודה").

$$P = \frac{W}{t}$$

ולכן:

$$[\text{Watt}] = \left[\frac{\text{kg} \times \text{m}^2}{\text{s}^2} \right] = \left[\frac{\text{kg} \times \text{m}^2}{\text{s}^3} \right]$$

3.2.2 יישום שיטת MKS בתחום החשמל

במעבר מתחום המכניקה לתחום החשמל אנו מתבססים על הקשרים שבין עבודה, הספק ואנרגיה. כזכור אנרגיה איננה הולכת לאיבוד אלא צורת אנרגיה אחת הופכת לצורת אנרגיה אחרת. לדוגמה, תנור חשמלי ממיר אנרגיה חשמלית לאנרגיית חום, גנרטור חשמלי ממיר אנרגיה מכנית לאנרגיה חשמלית, וכו'. נשתמש אפוא בקשרים שבין עבודה, הספק ואנרגיה מכנית על מנת להחיל את מערכת היחידות מתחום המכניקה לתחום החשמל.

א. יחידות המטען החשמלי (q)

את הזרם החשמלי I (יחידה בסיסית A) ניתן לתאר ככמות המטען החשמלי העוברת ביחידת זמן במוליך:

$$I = \frac{q}{t}; \quad q = I \cdot t$$

היחידה של המטען נקראת "קולון" (c).
מהנוסחה לעיל נובע כי

$$[c] = [A][s] = [A \cdot s]$$

ב. יחידות המתח החשמלי (U)

המתח החשמלי U מוגדר כעבודה W הנדרשת להעברת יחידת מטען חשמלי מנקודה אחת לנקודה אחרת (שבה המתח הוא אפס).

$$U = \frac{W}{q}$$

יחידת המתח היא "וולט" (V).

לכן:

$$[V] = \frac{[W]}{[c]} = \frac{\left[\frac{\text{kg} \times \text{m}^2}{\text{s}^2} \right]}{[A \times s]} = \left[\frac{\text{kg} \times \text{m}^2}{\text{A} \times \text{s}^3} \right]$$

ג. יחידות התנגדות חשמלית (R)

היחידה נקראת "אום" (Ω) מחושבת לפי חוק אום: $R = \frac{V}{I}$

$$[\Omega] = \left[\frac{\text{kg} \times \text{m}^2}{\text{A}^2 \times \text{s}^3} \right]$$

ד. יחידות הקיבול החשמלי (C)

הקיבול מוגדר כיחס שבין המטען החשמלי על לוחות קבל לבין הפרש הפוטנציאלים שהוא יוצר בין הלוחות:

$$C = \frac{q}{U}$$

יחידת הקיבול נקראת "פֶּרַד" (F).

לכן:

$$[F] = \frac{[A \times s]}{\left[\frac{\text{kg} \times \text{m}^2}{\text{A} \times \text{s}^3} \right]} = \left[\frac{\text{A}^2 \times \text{s}^4}{\text{m}^2 \times \text{kg}} \right]$$

ה. יחידות ההספק החשמלי (P)

ההספק החשמלי מוגדר כעבודה W הנעשית ליחידת זמן. יחידת ההספק החשמלי היא "וואט".

$$P = \frac{W}{t}$$

לכן:

$$P = \frac{W}{t} = [\text{Watt}] = [\text{V}][\text{A}] = \left[\frac{\text{kg} \times \text{m}^2}{\text{s}^3} \right]$$

שאלה 3.1

ההספק החשמלי של מנועים חשמליים נקוב לעיתים ביחידות של כוח-סוס. כמה וואט יש בכוח-סוס אחד?

3.3 חישה ומדידה של גדלים פיסיקליים

בחיי היום-יום אנו משתמשים בחושים הטבעיים שלנו כאמצעי חישה. החלטות כגון מה לאכול, מה ללבוש ואפילו במה מותר או אסור לנגוע, מתקבלות על סמך הנתונים המתקבלים מאיברי החושים שלנו. את היכולות הטבעיות שלנו ניתן להרחיב על-ידי שימוש במכשירי חישה ומדידה, המאפשרים לנו למדוד באופן כמותי גדלים פיסיקליים שונים; כגון: מתח וזרם חשמליים, טמפרטורה, לחץ, מהירות, ועוד. כל אחד מגדלים אלו ניתן למדוד באמצעות מכשיר מדידה מתאים.

בהמשך נעסוק במאפיינים של המכשירים הללו, אך תחילה נתייחס למאפיינים הכלליים של **תהליך** המדידה. נניח, לדוגמה, כי ברצוננו לשקול פריט מסוים. ניתן לעשות זאת על-ידי מכשירי מדידה שונים שפעולתם מבוססת על עקרונות פיסיקליים שונים. ואולם, האם המכשיר שאנו משתמשים בו, מודד את הגודל הנמדד בצורה **מדויקת** ואמינה?

כדי לענות על שאלה זו, נגדיר תחילה את המושג "**דיוק**". **הדיוק** (*accuracy*) הוא מידת הסטיה של הערך הנמדד מן הערך ה"אמיתי". ככל שהסטייה קטנה יותר, הדיוק גדול יותר. הערך האמיתי יכול להתקבל במדידה השוואתית באמצעות מכשיר שמוגדר כמכשיר "תקני" (סטנדרטי).

3.1 דוגמה

נניח שעומדים לרשותנו שלושה מכשירים, A, B ו-C, למדידת המשקל. ידוע שהמשקל האמיתי של הפריט הוא – 10 kg. במדידות מתקבלות התוצאות הבאות:

במכשיר A – 10.00 kg

במכשיר B – 11.50 kg

במכשיר C – 10.03 kg

מתברר כי במדידה זו המכשיר A הוא המדויק ביותר. אך האם בחירתו של מכשיר זה למדידת המשקל לאורך זמן היא המוצלחת ביותר?

פתרון

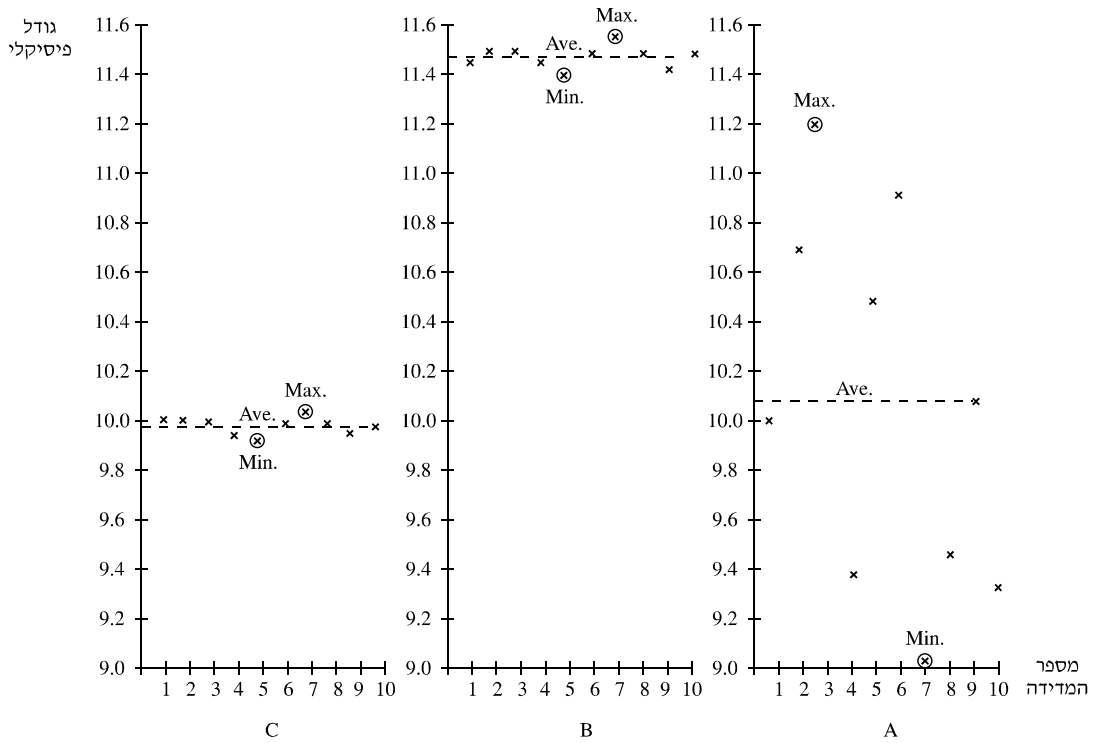
כדי לענות על שאלה זו, יש לערוך כמה מדידות רצופות של אותו גודל נמדד באמצעות שלושת המכשירים. המדידות צריכות להתבצע באותם זמנים ובאותם תנאי סביבה. בטבלה 3.1 מוצגות עשר מדידות רצופות של המשקל באמצעות שלושת המכשירים. בטבלה רשומים עבור כל מכשיר גם הערכים הבאים: הערך הנמדד הגבוה ביותר (Maximum), הערך הנמדד הנמוך ביותר (Minimum), והערך הממוצע של עשר המדידות (Average).

No.	A	B	C
1	10.00	11.50	10.03
2	10.96	11.53	10.03
3	11.20	11.52	10.02
4	9.39	11.47	9.93
5	10.50	11.42	9.92
6	10.94	11.51	10.01
7	9.02	11.58	11.08
8	9.47	11.50	10.00
9	10.08	11.43	9.97
10	9.32	11.48	9.98
Maximum	11.20	11.58	10.08
Average	10.09	11.49	9.99
Minimum	9.02	11.42	9.92

טבלה 3.1

הערך הממוצע מתקבל על-ידי סיכום של עשרת ערכי המשקל בכל טור, וחלוקתו ב-10.

באיור 3.3 מוצגים הערכים המדודים בצורה גרפית.



איור 3.3 הצגה גרפית של תוצאות המדידות של גודל פיסיקלי

אם נגדיר את שגיאת המדידה (measuring error) כהפרש בין הערך המדוד לערך האמיתי, נבחין שקיימות סטיות של הערך הנמדד מהערך האמיתי (שגיאות). הסיבה לשגיאות אלו יכולה להשתנות ממכשיר למכשיר. במכשיר הראשון, A, ההפרש בין הערך המקסימלי לבין הערך המינימלי הוא הגדול ביותר. לפיכך אנו טוענים כי מכשיר A סובל מאמינות מדידה גרועה לאורך זמן. מידת האמינות של מכשיר לאורך זמן נקראת "חזרתיות" (Repeatability). החזרתיות של מכשיר A היא גרועה, ואילו החזרתיות של המכשיר B היא טובה, אך הדיוק שלו גרוע, שכן במכשיר B הסטייה של הערך הממוצע מהערך המדויק היא הגדולה ביותר. שגיאות גדולות נובעות בדרך כלל מתקלה כלשהי במכשיר המדידה: רכיב שיצא מכלל שימוש במעגל אלקטרוני, חלק מכני שנפגם וכו'. שגיאה מעין זו ניתן לתקן על-ידי החלפת החלק הפגום או על-ידי כיוון מתאים של מכשיר המדידה. מתברר שמכשיר C הוא האמין ביותר: גם הדיוק וגם החזרתיות שלו הם טובים יחסית.

את ההפרש בין הערך האמיתי (r) לבין הערך הנמדד (c) ניתן לבטא בכמה דרכים :
 א. כשגיאה המוחלטת הנמדדת בערכים של הגודל הנמדד

$$e = r - c$$

ב. כשגיאה יחסית הנמדדת באחוזים ביחס לערך האמיתי

$$e(\%) = \frac{r - c}{r} \cdot 100\%$$

ג. כשגיאה יחסית הנמדדת ביחס לערך האמיתי בתחום של סקלה מלאה

$$FSE(\%) = \frac{r - c}{FS} \cdot 100\%$$

כאשר FS הוא תחום המדידה המלא (FS – Full Scale).

3.2 דוגמה

חיישן נפוץ ביותר למדידת טמפרטורה הוא צמד חומני (Thermocouple) שעל מבנהו ועקרון פעולתו עוד נרחיב בהמשך. בעיקרון, חיישן זה יוצר מתח הנמצא ביחס ישר להפרש הטמפרטורות הקיים בין שני קצות מוליכים (ראו איור 2.2).

בניסוי לבדיקת החיישן, בתחום הטמפרטורות שבין 0°C לבין 200°C, התקבלו התוצאות הבאות:

200	180	160	140	120	100	80	60	40	20	0	הטמפי הנמדדת (°C)
8.137	7.338	6.539	5.733	4.919	4.095	3.266	2.436	1.411	0.798	0	מתח המוצא של החיישן (mV)

3.2 טבלה

את החיישן משלבים בחוג המשוב של מערכת בקרה כך שעבור טמפרטורה של 200°C מתקבל מתח של 20 mV ("סקלה מלאה"). מוסיפים לצמד החומני מגבר מתח שהגברו 2.458 ("מתמר"). לפיכך, מתח המוצא של המתמר שווה למכפלת ההגבר במתח המוצא של החיישן.

נניח כי המתמר מתנהג כמתמר ליניארי, כלומר, ערכי מתח המוצא של המתמר נמצאים ביחס ישר לטמפרטורה. הטבלה הבאה מסכמת את תוצאות המדידות:

200	180	160	140	120	100	80	60	40	20	0	הטמפי הנמדד ת (°C)
8.137	7.338	6.539	5.733	4.919	4.095	3.266	2.436	1.411	0.798	0	מתח החיישן (mV)
20	18.036	16.073	14.092	12.092	10.065	8.028	5.988	3.468	1.961	0	מתח המתמר (mV)
20	18	16	14	12	10	8	6	4	2	0	מתח מתמר אידיאלי (mV)

3.3 טבלה

השורה הרביעית בטבלה 3.3 מראה את המתח המתקבל ממתמר "אידיאלי", שקריאתו מייצגת את הטמפרטורה האמיתית.

נחשב את השגיאות עבור שתי טמפרטורות שונות:

$$T = 40^\circ\text{C}$$

השגיאה המוחלטת במדידה היא:

$$e = 4 - 3.468 = 0.532 \text{ mV}$$

השגיאה (באחוזים) ביחס לערך האמיתי היא:

$$e(\%) = \frac{(4 - 3.468)}{4} \cdot 100\% = 13.3\%$$

והשגיאה ביחס לסקלה המלאה:

$$\text{FSE}(\%) = \frac{(4 - 3.468)}{20} \cdot 100\% = 2.66\%$$

$$T = 160^\circ\text{C}$$

השגיאה המוחלטת במדידה היא:

$$e = 16 - 16.073 = -0.073 \text{ mV}$$

השגיאה באחוזים :

$$e(\%) = \frac{-0.073}{16} \cdot 100\% = -0.46\%$$

והשגיאה (באחוזים) ביחס לסקלה המלאה (FS = 20 mV) היא :

$$FSE(\%) = \frac{-0.073}{20} \cdot 100\% = -0.365\%$$

על השאלה, מה היא הדרך הטובה ביותר להצגת השגיאה אין תשובה חד משמעית. אופי הפעולה ומטרות מערכת הבקרה קובעים את דרך הצגת השגיאה.

שאלה 3.2

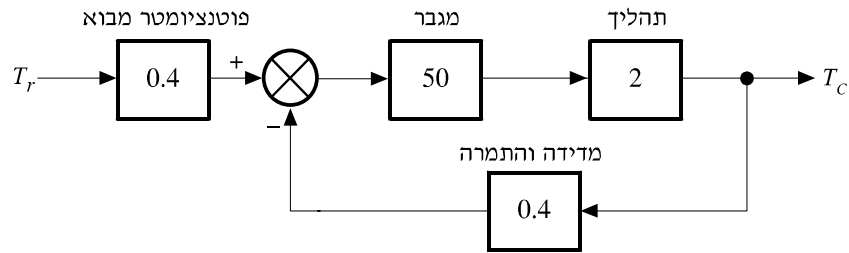
1. חשבו את שלוש השגיאות עבור טמפרטורה של 80°C.
2. במערכת בקרת חום יש לשמור על טמפרטורה קבועה של 800°C בתנור לאורך זמן. מהי הדרך הטובה ביותר להצגת השגיאה במקרה זה?
3. רובוט צריך לשים פריט מסוים על פס ייצור שאורכו 10 מטר. בכל פעם, על-פי פקודה, שמים את הפריט במקום אחר על הפס. מהי הדרך הטובה ביותר להצגת השגיאה במקרה זה?
נמקו את התשובה.

המשוב השלילי של מערכת בקרה מטרתו להשוות את אות המבוא ("האות הרצוי") של המערכת עם האות המתקבל ממתמר המדידה ("האות המצוי"). כאשר קובעים את הערך הרצוי של טמפרטורת תנור, למשל, מצפים שהטמפרטורה בתנור תשווה לטמפרטורה הרצויה, או תהיה קרובה אליה ככל האפשר.

כיצד נדע מהי טמפרטורת התנור? נמדוד אותה, כמובן. את הטמפרטורה ניתן למדוד באמצעות מכשירי מדידה שונים. האם המכשיר שנבחר בו ייתן מדידה אמינה דיה? האם נוכל להתייחס למדידה כמדידת "אמת"? אמינות המדידה היא אפוא צד אחד של חשיבותו הרבה של חוג המדידה. מאידך, הדרישה לאמינות גבוהה של חוג המדידה, גורמת לכך שרגישות מערכת הבקרה לשינויים בחוג המשוב גבוהה בהרבה מרגישותה לשינויים בתהליך המבוקר. נדגים זאת בחישוב הבא.

3.3 דוגמה

נתון תרשים מלבנים של מערכת בקרת טמפרטורה. בכל מלבן רשום ערך ההגבר שלו.



איור 3.4 תרשים מלבנים לדוגמה 3.3

נניח כי הערך הרצוי של הטמפרטורה הוא $T_r = 80^\circ\text{C}$.

א. הערך המצוי של טמפרטורת המערכת מחושב בעזרת משוואת המשוב (2-3):

$$T_c = \frac{50 \cdot 2}{1 + 50 \cdot 2 \cdot 0.4} \cdot 80 \cdot 0.4 = 78.049^\circ\text{C}$$

ב. עקב סיבות טכניות, הגבר המגבר קטן ב-10%, וערכו החדש הוא $45 - 50 \cdot 0.1 = 45$. מה תהיה טמפרטורת המוצא במצב זה?

במקרה זה, נקבל על פי משוואת המשוב:

$$T_c = \frac{45 \cdot 2}{1 + 45 \cdot 2 \cdot 0.4} \cdot 80 \cdot 0.4 = 77.84^\circ\text{C}$$

כלומר, כמעט שאין שינוי בטמפרטורה המצויה של המערכת (השינוי הוא של $\frac{0.2}{78} \cdot 100\% \approx 0.26\%$).

ג. נניח כי המגבר תקין, אך חל שינוי בתמסורת של חוג המדידה, וערך הגבר המתמר ירד ב-10%. ערכו החדש הוא אפוא $0.4 - 0.4 \cdot 0.1 = 0.36$. מהי טמפרטורת המוצא במצב זה? במקרה זה מקבלים:

$$T_c = \frac{50 \cdot 2}{1 + 50 \cdot 2 \cdot 0.36} \cdot 80 \cdot 0.4 = 86.486^\circ\text{C}$$

כלומר, הטמפרטורה עלתה בכ- 8.5° או ב- $10.9\% = \frac{8.5}{78} \cdot 100\%$ לעומת המצב התקין.

אם נגדיר את **הרגישות של המערכת** כיחס בין שינוי אות המוצא (באחוזים) לבין הסיבה לשינוי (באחוזים), הרי ברור שרגישות המערכת לשינוי בתמסורת המשוב גדולה בהרבה מרגישותה לשינויים בהגבר הרכיבים שבחוג הקדומני. ואמנם קיבלנו בסעיף ג' שגיאה שהיא פי $\frac{10.9}{0.26} \approx 42$ גדולה מהשגיאה בסעיף ב'. מכאן נובעת אפוא הדרישה לאמינות הגבוהה של המתמר בחוג המשוב.

3.4 מאפיינים כלליים של מכשירי מדידה והתמרה

איכות המדידה נקבעת במידה מכרעת על-ידי כושר המדידה של מכשיר המדידה, שהוא תוצאה של כל המאפיינים של המכשיר. בהמשך נתייחס לחייון ולמתמר כאל מכשירי מדידה, ונדון במאפיינים החשובים של מכשירים כאלה ובתופעות המשפיעות עליהם.

א. דיוק

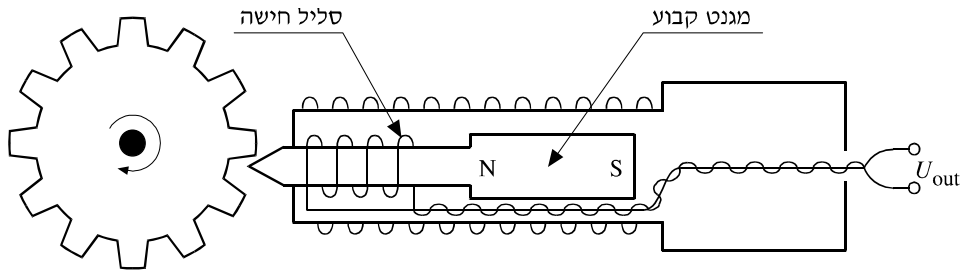
הדיוק (accuracy) של מכשיר מדידה מוגדר כסטייה המרבית (לפי הערכת היצרן) של קריאת המכשיר מהערך האמיתי של הגודל הנמדד. הדיוק מוגדר עבור תנאי פעולה מסוימים של המכשיר, המפורטים על-ידי היצרן. בדרך כלל, למכשיר מדידה יש כמה תחומי מדידה, שכל אחד מהם מתאים למדידת תחום ערכים מסוים של הגודל הנמדד. דיוק המכשיר עשוי להשתנות מתחום לתחום. הדיוק המרבי מושג בתחום הנמוך ביותר.

ב. כושר הבחנה

כושר ההבחנה (resolution) של מכשיר מדידה הוא ההפרש בין שני הערכים הסמוכים ביותר של הגודל הנמדד, שהמכשיר מסוגל להבחין ביניהם (כלומר, שעבורם הוא יציג קריאות שונות). כשלמכשיר יש כמה תחומי מדידה, כושר ההבחנה שונה בכל תחום. כושר ההבחנה הוא מרבי בתחום המדידה הנמוך ביותר.

דוגמה 3.4

באיור 3.5 מתואר מתמר למדידת תנועה זוויתית הקרוי טכומטר מגנטי ספרתי.



איור 3.5 תיאור סכמטי של טכומטר מגנטי

המתמר הוא גלגל שיניים העשוי מחומר מגנטי ומורכב על הציר של הגוף שאת תנועתו רוצים למדוד. בכל פעם ששן נמצאת מול הקוטב הבלוט של מגנט קבוע (Permanent Magnet) מתקבל דופק במוצא הסליל (המתח U_{out}).

מהו כושר ההבחנה (במעלות) של הטכומטר?

פתרון

בגלגל המשוּנן ישנן 12 שיניים. סיבוב שלם של הגלגל הוא סיבוב של 360 מעלות. לכן כושר ההבחנה של הטכומטר הוא:

$$\frac{360}{12} = 30^\circ$$

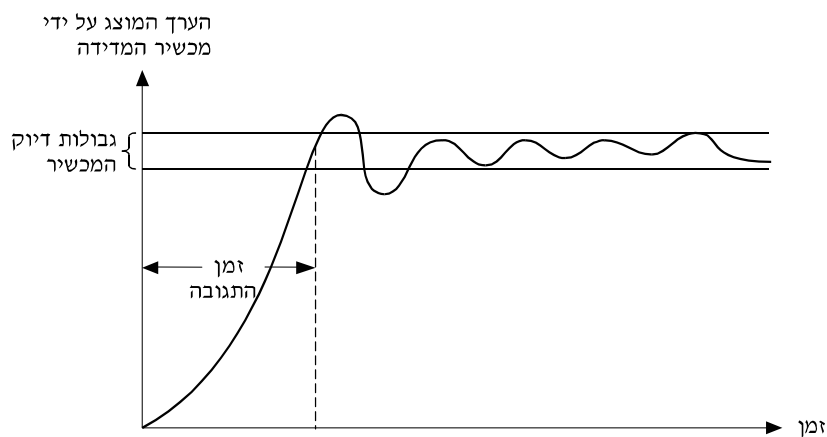
ג. רגישות

הרגישות של מכשיר מדידה היא האות הקטן ביותר הגורם לשינוי בתצוגת המכשיר. הרגישות של מכשיר מושפעת במידה רבה מהרעש הפנימי הנוצר בתוך המכשיר.

ד. זמן תגובה

זמן התגובה (response time) הוא פרק הזמן החולף מרגע הופעת האות הנמדד במבוא המכשיר, ועד להצגה (או העברה/שידור) של הערך הנמדד בגבולות הדיוק של המכשיר. עבור מכשיר מדידה שיש לו תגובה מתנדנדת (אוסצילטורית) ניתן להגדיר את זמן התגובה כ"פרק הזמן מרגע קבלת האות במבוא המכשיר, ועד להצגת הערך הנמדד לראשונה" (ראו איור 3.6). במערכות בקרה עם משוב, לזמן התגובה של מכשיר המדידה יש חשיבות מיוחדת, היות שהוא משפיע על התנהגות האות המבוקר במערכת (ראו בהמשך, סעיף 3.6).

במכשירי מדידה אנלוגיים שמציגים את התוצאה באמצעות מחוג הנע על-פני לוח שנתות, זמן התגובה נקבע בעיקר על-ידי קבועי הזמן המכניים של מנגנון המחוג (חיכוך ומומנט התמדה). לעומת זאת, במכשירי מדידה ספרתיים המציגים את התוצאה בצורת מספר עשרוני, זמן התגובה נקבע בעיקר על-ידי קבועי הזמן החשמליים של מעגלי המכשיר (הנקבעים בעיקר על-ידי הקיבולים הפנימיים של המכשיר).



איור 3.6 זמן התגובה של מכשיר מדידה

מאחר שזמן התגובה גדול מאפס, קריאת המכשיר מפגרת אחר ערכו הרגעי של הגודל הנמדד. יתר על-כן, כאשר הגודל הנמדד משתנה מהר מדי, המכשיר מציג קריאה לא נכונה. כדי להמחיש זאת, נניח לשם פשטות שהגודל הנמדד משתנה באופן מחזורי בתדר מסוים. כאשר זמן המחזור של השינוי הוא מסדר הגודל של זמן התגובה של המכשיר או קטן יותר, המכשיר "מחמיץ" את השינויים המהירים, ומודד מעין ממוצע של הגודל הנמדד, ולא את הערך הרגעי המבוקש. בדרך כלל אנו מעוניינים בזמן תגובה קטן ככל האפשר, כדי להגדיל את אמינות המדידה.

ה. חזרתיות (Repeatability)

החזרתיות (או היציבות) של מכשיר מדידה היא כושרו להציג קריאות זהות בעת מדידה חוזרת של גודל שאינו משתנה בפרק זמן נתון. למשל, אם מודדים מספר פעמים, זרם האמור להיות קבוע, ומתקבלות מספר מדידות שאינן זהות, יתכן שקיימת שגיאה באחת (או יותר) מהמדידות, כתוצאה מאי-חזרתיות של מכשיר המדידה.

היציבות של כל מכשיר מדידה היא מוגבלת, והדבר מחייב כיוול תקופתי. ככל שהדיוק הנדרש ממכשיר המדידה גבוה יותר, כך יש צורך בכיולים תכופים יותר. יצרן המכשיר עֵרָב לדיוק המכשיר בתנאי שמכילים את המכשיר במועדים הקבועים (למשל, כל חצי שנה).

ו. תחומי תדרים

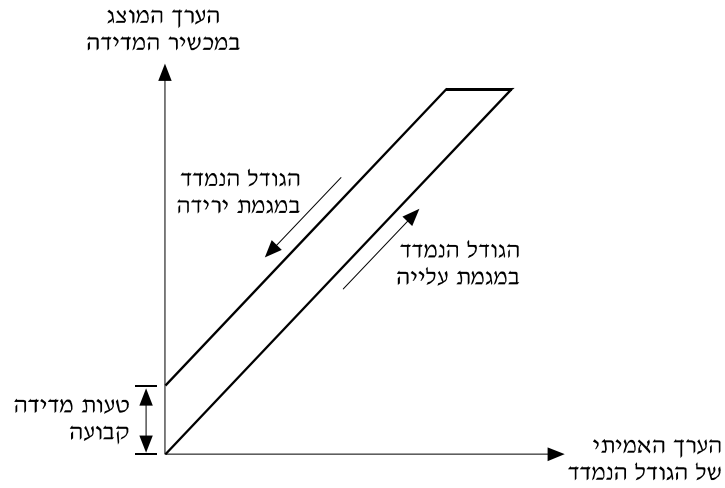
אחת המגבלות של מכשירי מדידה היא תחום התדרים שבו הם פועלים. מגבלה זו נובעת מזמן התגובה של רכיבי המעגל וממנגנון המדידה. לדוגמה, במכשיר אנלוגי עם מחוג לא ניתן למדוד מתחים וזרמים בתדר גבוה, מאחר שהמנגנון האלקטרו-מכני של המכשיר אינו מגיב אם השינויים באות הנמדד הם מהירים. תחום התדרים מגדיר את התדר המינימלי והתדר המקסימלי שבו נשמרות תכונות מכשיר המדידה – בהתאם לדף המפרט שמספק היצרן. מחוץ לתחום התדרים תיתכן שגיאת מדידה גבוהה.

ז. טווח המדידה

טווח המדידה הוא ההפרש שבין הערך הגבוה ביותר שיכול מכשיר המדידה למדוד, לבין הערך הנמוך ביותר שניתן למדוד באמצעות המכשיר.

3.5 תופעות המשפיעות על הביצועים של מכשירי מדידה**3.5.1 חשל**

אחת התופעות הפוגעות בדיוקו של מכשיר מדידה היא תופעת **החשל** (hysteresis). תופעה זו מתבטאת בכך, שתוצאות המדידות המתבצעות כשערכו של הגודל הנמדד הוא במגמת עלייה, שונות בשיעור קבוע (בערך) ובמגמה קבועה מתוצאות המדידות של אותו גודל כשערכו במגמת ירידה. התופעה מוצגת באיור 3.7, ושמה שָאֵוֵל מתופעה דומה המתרחשת כאשר ממגנטים חומרים מסוימים (חומרים פְּרוֹמוֹגְנֵטִים).

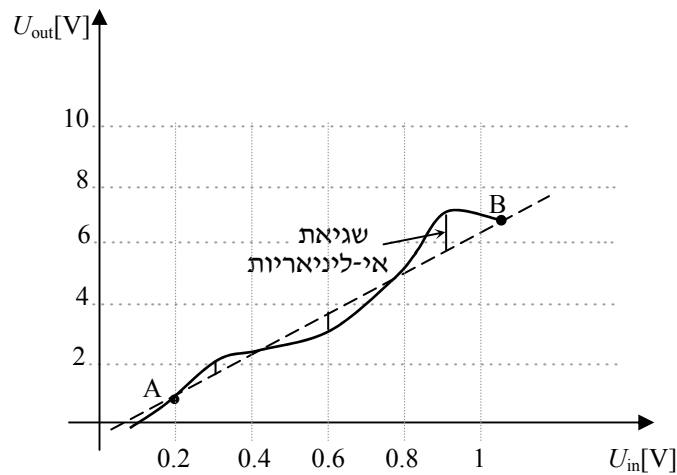


איור 3.7 עקום חשל אופייני של מכשיר מדידה

3.5.2 ליניאריות

שגיאת אי-ליניאריות

נתון מכשיר מדידה – מגבר, למשל. באיור 3.8 נתון הקשר בין מתח המוצא (U_{out}) ממגבר אידיאלי מתאים, לבין מתח המבוא (U_{in}) למגבר כזה. קשר כזה מתואר על-ידי הקו הישר המרוסק שבאיור 3.8. הנקודות A ו-B הן, למשל, קצות תחום המדידה של המגבר.



איור 3.8 מתח המוצא בתלות במתח המבוא של מגבר אידיאלי ומגבר מעשי מתאים, ושגיאת אי-ליניאריות

נניח שמוודדים את מתח המוצא בתלות במתח המבוא של המגבר המעשי, ומקבלים קו עקום (איור 3.8). לכל ערך של מתח מבוא, יש לנו אפוא שני ערכים של מתח מוצא: אידיאלי ומדוד.

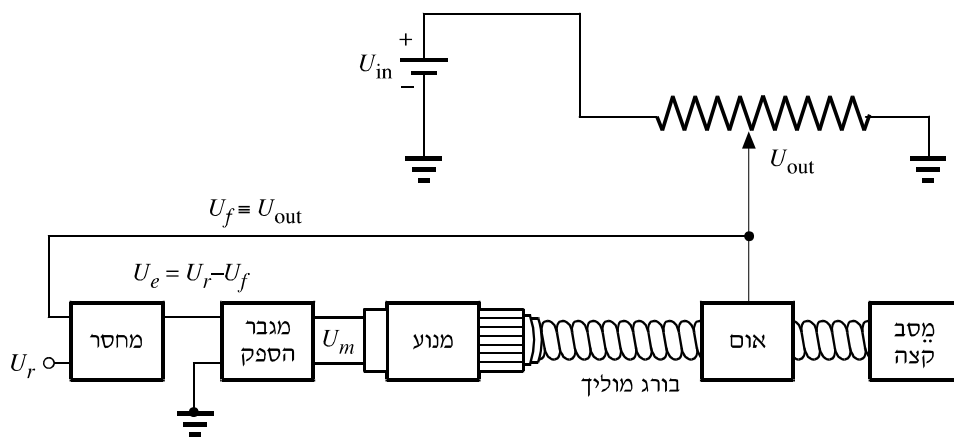
מחשבים – בתחום הנתון – את הפרש מתחי המוצא, לכל ערך של מתח מבוא מתאים. הערכים נתונים בטבלה שלהלן. כל הערכים כאן הם ביחידות V. הנה כמה מההפרשים בין שני ערכים אלה:

מתח מבוא	מתח מוצא אידיאלי (קו ישר מרוסק)	מתח מוצא מדוד (קו עקום)	ההפרש בין מתח המוצא האידיאלי לבין מתח המוצא המדוד
0.3	1.8	2	0.2
0.6	3.8	3.3	-0.5
0.9	5.8	7	1.2

ההפרש הגדול ביותר – בערך המוחלט – בין שני מתחים אלה, הוא 1.2 V. הפרש זה נקרא **שגיאת אי-הליניאריות** (non-linearity error) של מכשיר המדידה. זוהי השגיאה הגדולה ביותר (בערך המוחלט) – בתחום נתון – בין הערכים האידיאליים של מכשיר המדידה, לבין הערכים הנמדדים על-ידי מכשיר זה.

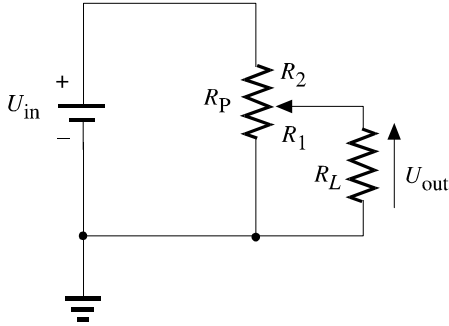
3.5 דוגמה

במערכת לבקרת תזוזה של התקן מכני (איור 3.9) משתמשים בפוטנציומטר להתמרת תנועה קווית (או זוויתית) למתח חשמלי.



איור 3.9 מבנה המערכת בדוגמה 3.5

מתח הזחלן U_{out} , הנקבע על-ידי מקומו של אום הבורג, נמסר למחסר, ולכן המחסר מהווה עומס על הפוטנציומטר. את חוג המשוב ניתן לתאר באמצעות מעגל חשמלי שקול (איור 3.10):



איור 3.10 פוטנציומטר המשמש כמחלק מתח

כאשר R_L – התנגדות העומס, שהיא גם התנגדות המבוא של המחסר U_{out} – מתח המשוב $R_p = R_1 + R_2$ – ההתנגדות הכוללת של הפוטנציומטר. היחס בין ההתנגדויות R_1 ו- R_2 של זרועות הפוטנציומטר נקבע על-ידי מיקום האום: $R_1 = 0$ כאשר האום נוגע במסב הקצה, ו- $R_1 = R_p$, כאשר האום נמצא בקצה השמאלי של הבורג (איור 3.9).

ללא העמסה ($R_L = \infty$), המתח U_{out}^* נמצא ביחס ישר למיקום הזחלן (כלומר, לגודל ההתנגדות R_1), וערכו נתון על-ידי נוסחת מחלק המתח:

$$(3-2) \quad U_{out}^* = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U_{in}$$

אם המתמר מועמס, מתקבל חיבור מקבילי בין R_1 ל- R_L , והמתח U_{out} קטן (כלומר, סוטה מערכו התיאורטי), כפי שאפשר לראות מן הנוסחה הבאה:

$$(3-3) \quad U_{out} = \frac{\frac{R_1 R_L}{(R_1 + R_L)} U_{in}}{\frac{R_1 R_L}{(R_1 + R_L)} + R_2} = \frac{R_1 R_L}{R_1 R_L + R_1 R_2 + R_2 R_L} U_{in}$$

שאלה 3.3

הוכיחו את נוסחה (3-3).

דוגמה 3.6

במעגל שבאיור 3.10 נתונים הערכים הבאים:

$$R_p \equiv R_1 + R_2 = 1 \text{ k}\Omega = 1000 \Omega, \quad R_L = 5 \text{ k}\Omega, \quad U_{in} = 10 \text{ V}$$

בטבלה 3.4 נתונים ערכי מתח המוצא התיאורטי (ללא עומס, משוואה (3-2)) ומתח המוצא עם עומס (משוואה (3-3)) בתלות בערך ההתנגדות R_1 . הטור האחרון מראה את הסטייה המרבית של המתח המצוי U_{actual} (עם עומס) מן המתח הרצוי U^* (ללא עומס) לכל ערך של התנגדות (באחוזים מסקלה מלאה).

R_1 (Ω)	R_2 (Ω)	U^* (V)	U_{actual} (V)	הסטייה המרבית ב-% מסקלה מלאה
0	0	0.0	0	0
50	950	0.5	0.4953	0.05
100	900	1.0	0.9823	0.18
150	850	1.5	1.4627	0.37
200	800	2.0	1.9380	0.62
250	750	2.5	2.4096	0.90
300	700	3.0	2.8791	1.21
350	650	3.5	3.3477	1.51
400	600	4.0	3.8168	1.83
450	550	4.5	4.2878	2.12
500	500	5.0	4.7619	2.38
550	450	5.5	5.2406	2.59
600	400	6.0	5.7252	2.75
650	350	6.5	6.2171	2.83
700	300	7.0	6.7179	2.82
750	250	7.5	7.2289	2.71
800	200	8.0	7.7519	2.48
850	150	8.5	8.2886	2.11
900	100	9.0	8.8409	1.59
950	50	9.5	9.4106	0.89
1000	0	10.0	10.0000	0

טבלה 3.4

שימו לב שהשגיאה היא מרבית כאשר ערכי ההתנגדויות R_1 ו- R_2 קרובים זה לזה, כלומר, כאשר האום נמצא בערך באמצע הבורג.

3.7 דוגמה

במדידת מתח על נגד התקבלה התוצאה $2.36 \text{ V} \pm 0.01 \text{ V}$. מהו תחום השגיאה?

פתרון

ערכו של המתח על הנגד נמצא בתחום שבין 2.35 V לבין 2.37 V .
תחום השגיאה הוא אפוא 0.02 V .

3.4 שאלה

א. בדוגמה 3.6 התנגדות העומס גדולה פי 5 מהתנגדות הפוטנציומטר, $\frac{R_L}{R_p} = 5$, ושגיאת הליניאריות המרבית היא 2.83% .
כדי לקבל אי-ליניאריות קטנה יותר, האם היחס $\frac{R_L}{R_p}$ צריך להיות גדול מ-5 או קטן מ-5?
נמקו.

ב. בדוגמה 3.6, כאשר הזחלן נמצא באמצע הפוטנציומטר ($R_1 = R_2 = 500 \Omega$) שגיאת הליניאריות היא 2.38% (השגיאה המתקבלת במצב זה נקראת "שגיאת האמצע").
מה צריכה להיות התנגדות הפוטנציומטר כדי לקבל שגיאת אמצע של 1% עבור אותו עומס ($R_L = 5 \text{ k}\Omega$)?

3.5.3 רעש

רעש הוא תופעה לא רצויה המשפיעה על הגודל הנמדד במכשיר מדידה. אפשר לבטא את הרעש ביחידות המידה של אות המוצא או של אות המבוא למכשיר. המושג רעש מתייחס לתופעות סביבתיות שאינן ניתנות לחיזוי. הפרעות אלקטרומגנטיות עקב מיתוג עומסים חשמליים גדולים או השראות של כבלי החשמל, העוברים בסמוך לקווי הבקרה, גורמים לרעשים בצידוד הבקרה האלקטרוני. רעידות מבנה הן דוגמה של רעש מכני. כדי למנוע השפעת הרעשים נהוג לשזר את חוטי הבקרה היוצאים מהמתמרים, וגם להשתמש בכבלים מסוככים.

3.5.4 תחום טמפרטורת העבודה

בדף המפרט של המכשיר חייב היצרן לציין את תחום הטמפרטורות שבו פועל המכשיר ללא תקלות. אם המכשיר נמצא בטמפרטורה גבוהה מהטמפרטורה המקסימלית שציין היצרן, פעולת המכשיר עלולה להשתבש, מאחר שנקודות העבודה של רכיבים בתוך המכשיר משתנות.

3.5.5 עמידות בשינויי טמפרטורה

רכיבים אלקטרוניים סבילים ופעילים משנים את תכונותיהם החשמליות בשל שינויים בטמפרטורת הסביבה. לדוגמה, כאשר הטמפרטורה עולה, משתנה זרם הקולט I_C של טרנזיסטור ומשתנה התנגדותם של נגדים. פרמטר העמידות בשינויי טמפרטורה מגדיר כיצד משנה המכשיר את תכונותיו כתוצאה משינוי בטמפרטורת הסביבה. לדוגמה, במד-מתח, פרמטר זה מבוטא על-ידי השינוי בקריאת המכשיר כתוצאה משינוי טמפרטורת הסביבה במעלת צלסיוס אחת, והוא נתון ביחידות של $V/^\circ C$. ישנם מכשירים שמותקנים בהם מנגנונים שתפקידם לפצות על שינויים בתכונות המערכת כתוצאה משינויי טמפרטורה, ולכן הם בעלי פרמטר עמידות גבוה.

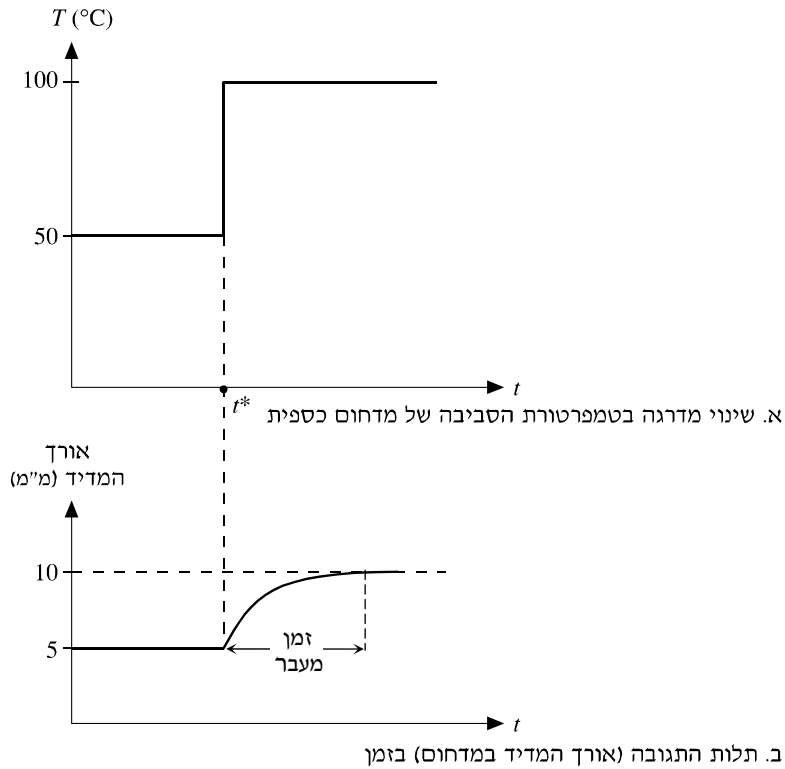
3.5.6 צריכת הספק

אחד הפרמטרים בדף המפרט של כל מכשיר מדידה הוא צריכת ההספק של המכשיר. פרמטר זה חשוב במיוחד אם המכשיר מופעל על-ידי סוללות. צריכת הספק גבוהה עלולה לגרום לחימום המכשיר, ואז צריך לקרר את סביבת המכשיר כדי לשמור על טמפרטורת פעולה נמוכה לפי דרישת היצרן.

3.6 תגובת המתמר בזמן המעבר

כאמור, זמן התגובה הוא מאפיין חשוב של מכשירי מדידה בכלל, ומתמרים במערכות בקרה בפרט. כולנו יודעים שמד חום כספית יש להחזיק בפה כמה עשרות שניות עד שקריאתו מתייצבת על הערך הסופי. הדבר נובע מכך שלכספית, כמו לכל גוף בטבע, יש **קיבול חום**

מסוים, ולכן דרוש זמן מסוים עד שהיא מגיעה למצב היציב החדש. במשך פרק זמן זה, המכונה **זמן המעבר** (או זמן ההתייצבות), אות המוצא של המתמר משתנה מהערך הקבוע הקודם לערך הקבוע החדש.

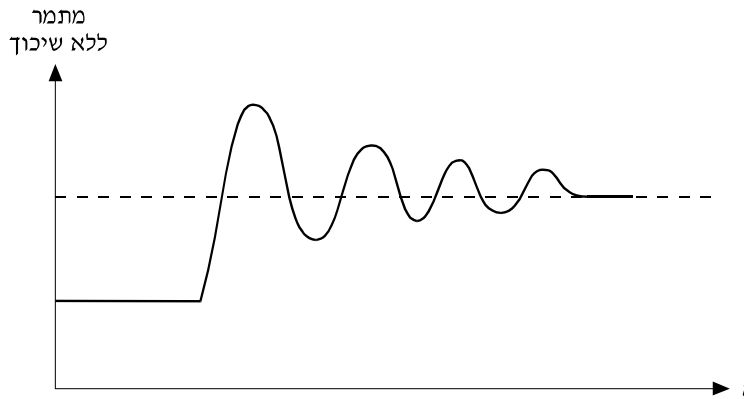


איור 3.11 תגובת מעבר

נניח כי ברגע מסוים $t = t^*$ מחממים את קצה המדחום באופן פתאומי (קפיצת מדרגה בטמפרטורה, כמתואר באיור 3.11 א). כתוצאה מכך הכספית במדחום מתפשטת, בתחילה במהירות, ואחר כך לאט יותר (איור 3.11 ב). אנו אומרים כי **התגובה "מפגרת"** אחר **האילוץ** (במקרה זה החימום הפתאומי של קצה המדחום), או כי קיימת **השהיה** בתגובת המתמר. בהמשך נראה כי ההשהיה בתגובת המתמר גורמת להשהיה בתגובת מערכת הפועלת בחוג סגור.

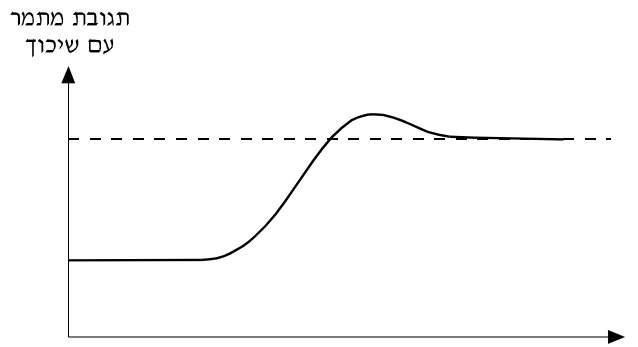
לפעמים ההשהיה בתגובת המתמר היא מתוכננת. נתבונן לדוגמה, במכשיר מדידה שמכיל רכיבים נעים (כגון מחוג המותקן על מסגרת מסתובבת). אם במתמר כזה לא קיים שיכוך של

הרכיבים הנעים, אילוץ פתאומי (כגון תאוצה סיבובית פתאומית של המסגרת) עלול לגרום לתנודות חזקות בתגובת המתמר, כמתואר באיור 3.12.



איור 3.12 תנודות בתגובת המתמר לשינוי מדרגה באות המבוא

הוספת רכיבי שיכוך למכשיר המדידה, גורמת לריסון התגובה ולהתייצבות הקריאה לאחר מספר קטן יחסית של תנודות חלשות (איור 3.13).



איור 3.13 תגובה של מתמר עם שיכוך לשינוי מדרגה באות המבוא

שאלה 3.5

מהו כושר ההבחנה של מד-זרם ספרתי בתחום מדידה מסוים, אם בתחום מדידה זה הוא מורה את התוצאה 1.208 mA ?

שאלה 3.6

השגיאה של מד-מתח אנלוגי היא 3% מהסקלה המלאה. מהי שגיאת המכשיר כשהוא פועל בתחום $3 \text{ V} - 0 \text{ V}$?

שאלה 3.7

א. מד-מתח ספרתי מורה 18.56 mA . מהו כושר ההבחנה של המכשיר בתחום המדידה שבו הוא נמצא?
ב. חשבו את שגיאת המכשיר ΔI , בהנחה שהדיוק שלו זהה לכושר ההבחנה שלו.

*שאלה 3.8

נניח שבמדידת התנגדות של נגד התקבלו התוצאות הבאות:

147.2Ω , 147.4Ω , 147.9Ω , 148.1Ω , 147.1Ω , 147.5Ω , 184.3Ω ,
 147.6Ω , 147.4Ω , 147.7Ω .

הניחו שמד-ההתנגדות כויל לפני המדידה.

- א. חשבו את שגיאת המדידה ΔR . האם נכון, לדעתכם, לכלול בחישוב את התוצאה 184.3Ω ?
ב. חשבו את סטיית התקן של המדידות, בהנחה ששגיאת מכשיר המדידה היא 0.1Ω .
ג. מהי שגיאת המדידה היחסית באחוזים?

3.7 סיכום

מתמרים נועדו להפוך גודל פיסיקלי אחד לגודל פיסיקלי אחר. **חיישנים ומכשירי מדידה** הם מתמרים שגם מודדים באופן כמותי את ערכו של הגודל הפיסיקלי המותמר. כל מדידה של גודל פיסיקלי מלווה **בשגיאה**. השגיאה יכולה לנבוע מסיבות שונות: תכונות מכשיר המדידה, מגבלות המערכת המעבדת (או קוראת) את הערך המדוד, תנאי סביבה וכו'.

ככל שמכשיר המדידה **מדויק יותר**, כך השגיאה של הגודל הנמדד על-ידי המכשיר קטנה יותר. תכונות נוספות של חיישנים ומכשירי מדידה הן רגישות המכשיר, כושר ההבחנה שלו, החזרתיות של המדידות, זמן התגובה של המכשיר, טווח המדידה, ותחום התדרים שלהם רגיש המכשיר. ביצועי מתמרים מאופיינים גם על-ידי מידת הליניאריות של תגובתם, הרעש הנוצר בזמן פעולתם, תחום הטמפרטורה של פעולתם, ומידת החשל (hysteresis) של תגובתם. מתמר אידיאלי הוא ליניארי, חסר רעש, הפועל בתחום טמפרטורה רחב ועם חשל אפסי.

פרק 4

חיישנים ומתמרים במערכות בקרה

בפרק הקודם עסקנו במאפיינים כלליים של מכשירי מדידה המשמשים כחיישנים ומתמרים במערכות בקרה. בפרק זה נתאר בפירוט כמה מכשירים כאלה, ונסביר את עקרון פעולתם ואת צורת שילובם במערכות הבקרה. חילקנו את ההתקנים לארבע קבוצות, על-פי הגדלים הפיסיקליים שהם מתמרים:

1. מתמרים של טמפרטורה במתח.
2. מתמרים של עוצמת אור במתח (חיישנים אופטו-אלקטרוניים).
3. מתמרים של תנועה (מהירות, זווית, העתק) במתח.
4. מתמרים של כוחות ותאוצות במתח.

בכל קבוצה נתאר התקנים אחדים שפעולתם מבוססת על תהליכים פיסיקליים שונים.

4.1 חיישנים ומתמרים למדידת טמפרטורה

4.1.1 הצורך במדידת טמפרטורה

מדידת טמפרטורה דרושה במתקנים ביתיים ותעשייתיים רבים. לדוגמה, בכל מקרה מותקן מתמר טמפרטורה שתפקידו להפסיק את פעולת מערכת הקירור ברגע שהטמפרטורה בתוך המקרה נמוכה דיה. בתנורים רבים מצוי מתמר טמפרטורה שתפקידו להפסיק את פעולת מערכת החימום ברגע שהחום בתנור גבוה דיו. בשתי המערכות האלה מתמר הטמפרטורה הוא חלק ממערכת המאפשרת להשיג את הטמפרטורה הרצויה ולשמור על יציבותה. בשתי המערכות מתבצעת מדידה של הטמפרטורה, אם כי לא בהכרח היא מופיעה על גבי תצוגה כלשהי.

אך מדידת הטמפרטורה חשובה לא רק במערכות חימום או קירור. הטמפרטורה משפיעה על תהליכים פיסיקליים רבים, ולכן היא משפיעה במידה זו או אחרת על פעולתה של כל מערכת. במקרים שבהם ההשפעה היא משמעותית, חשוב למדוד את הטמפרטורה כדי שאפשר יהיה לבקרה ולצמצם את השינויים בה.

לדוגמה, עקמומיות העדשות במערכות אופטיות תלויה בטמפרטורה; המיקוד של מערכת העדשות משתנה עם שינויי הטמפרטורה. כדי ששינויים אלה לא יפגעו באיכות התמונה, מתקינים ליד העדשות, במערכות אופטיות מסוימות, מתמר טמפרטורה שתפקידו להמיר את טמפרטורת העדשות למתח חשמלי. המוצא של מתמר זה מחובר למערכת אלקטרונית השולטת על מנוע חשמלי קטן. המנוע מזיז את העדשות כדי להחזיר על כנו את מיקוד התמונה.

לעתים קרובות צריך להציג את ערך הטמפרטורה הנמדדת. דוגמה מוכרת היא מדחום רפואי המשמש למדידת הטמפרטורה של גוף האדם. במדחום כספית הקריאה מתבצעת בעזרת לוח שנתות מתאים. במדחום ספרתי מוצגת הטמפרטורה בתצוגה ספרתית. מדחומים אחרים מציגים את הטמפרטורה על-ידי מחוג הנע על סקלה שמסומנות עליה שנתות.

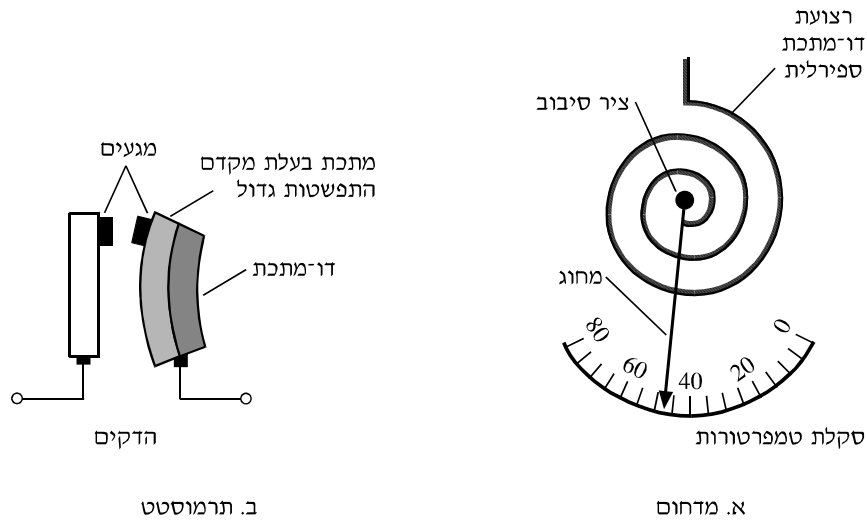
היחידות שבהן נמדדת הטמפרטורה בארץ וברוב ארצות העולם הן:

- א. מעלות צלזיוס ($^{\circ}\text{C}$) – לשימושים ביתיים ותעשייתיים.
- ב. מעלות קלווין (K) – לשימושים מדעיים.

נקודת האפס בסקלה של מעלות צלזיוס היא הטמפרטורה שבה קופאים המים. נקודת האפס בסקלה של מעלות קלווין היא האפס המוחלט (טמפרטורה שאין נמוכה ממנה). טמפרטורה זו שווה ל- 273°C בערך. גודלה של מעלת צלזיוס שווה לגודלה של מעלת קלווין.

4.1.2 מדידת טמפרטורה באמצעות התקן דו-מתכת

מתמר הטמפרטורה הפשוט ביותר הוא התקן **דו-מתכת** (bi-metal). מתמר זה בנוי מזוג מתכות צמודות זו לזו, בצורת לוחית או בצורת ספירלה, כמתואר באיור 4.1.



איור 4.1 שימושים בדו-מתכת

כל חומר מתפשט בחום ומתכווץ בקור, ולכל חומר יש מקדם התפשטות אופייני. שתי המתכות המרכיבות את הדו-מתכת הן בעלות מקדמי התפשטות שונים. לכן עם עליית הטמפרטורה שתיהן מתארכות במידה שונה, ומשום כך התקן הדו-מתכת מתכווץ. שיעור ההתכווצות תלוי בטמפרטורה.

אפשר להשתמש בהתקן דו-מתכת כדי למדוד ולהציג את הטמפרטורה. לשם כך מחברים מחוג לקצה ההתקן. המחוג נע על לוח שנתות ומורה את הטמפרטורה על גבי סקלה מתאימה. מד טמפרטורה כזה מתואר באיור 4.1א.

לעתים מותקן התקן דו-מתכת כמפסק שמצבו תלוי בטמפרטורה. התקן כזה מתואר באיור 4.1ב. במפסק זה, כקצה הלוחית של הדו-מתכת משמש מגע חשמלי. כאשר הלוחית מתכווצת ומתיישרת המגע מתחבר ומתנתק חליפות. ניתן לכוון את המפסק באופן מכני כדי לקבוע את טמפרטורת-הסף שבה יעבור המפסק ממצב אחד לאחר. למעשה זהו **תרמוסטט**, התקן שכבר עסקנו בו בפרק הראשון של ספר זה.

כדי לחשב את שיעור ההתפשטות של כל אחת מהמתכות בתרמוסטט, נזכור כי שיעור ההתפשטות של מתכת נמצא ביחס ישר לשינוי הטמפרטורה שלה:

$$(4-1) \quad \Delta l = k \cdot \Delta T$$

כאשר:

k – מקדם ההתפשטות הקווית;

ΔT – שינוי הטמפרטורה;

Δl – שינוי האורך.

לדוגמה, נתבונן בתרמוסטט העשוי אלומיניום ופלדה. מקדם ההתפשטות של האלומיניום הוא $k_{Al} = 25 \cdot 10^{-6} \frac{m}{^{\circ}C}$, ושל הפלדה – $k_{St} = 6.7 \cdot 10^{-6} \frac{m}{^{\circ}C}$. כאשר שינוי הטמפרטורה הוא $100^{\circ}C$, שינויי האורך של המתכות יהיו:

$$\Delta l_{Al} = 100 \cdot 25 \cdot 10^{-6} m = 2.5 mm$$

$$\Delta l_{St} = 100 \cdot 6.7 \cdot 10^{-6} m = 0.67 mm$$

הכיפוף נגרם בשל הפרש ההתארכויות של המתכות ששיעורו:

$$\Delta l = \Delta l_{Al} - \Delta l_{St} = 2.5 - 0.67 = 1.83 mm$$

4.1.3 צמד חומני (Thermocouple)

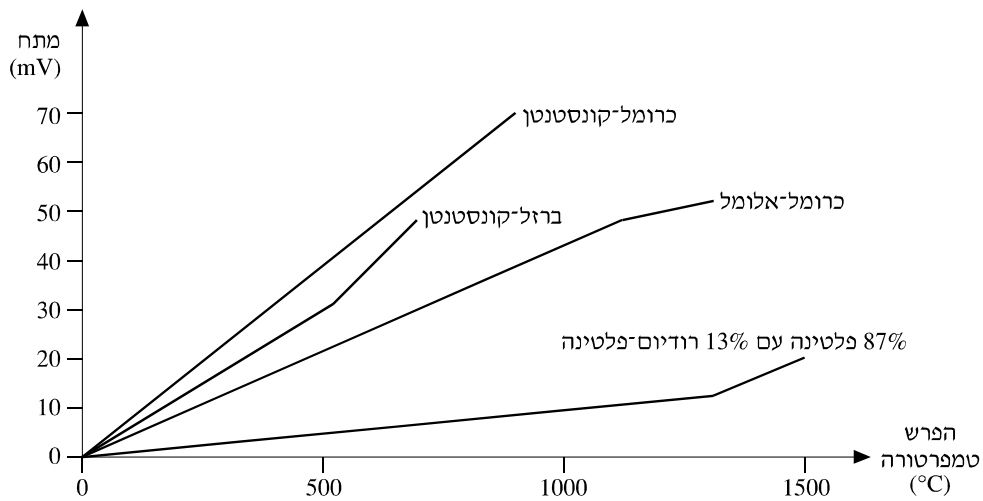
התקן מקובל למדידת טמפרטורה, במיוחד בתהליכים תעשייתיים, הוא הצמד החומני. התקן זה מורכב משני תילים של שתי מתכות שונות, המחוברים ביניהם בשתי נקודות או צמתים. חיבור שני תילי המתכת בצמתים נעשה באמצעות שזירה וריתוך בקצותיהם (איור 4.2).

פעולת הצמד החומני מבוססת על תופעה פיסיקלית הקרויה תופעת סיבק (Seebeck) – על שם המדען שגילה אותה. כאשר מחממים את צומת A ומקררים את צומת B בצמד, נוצר זרם חשמלי בתילים.



איור 4.2 מבנה עקרוני של צמד חומני

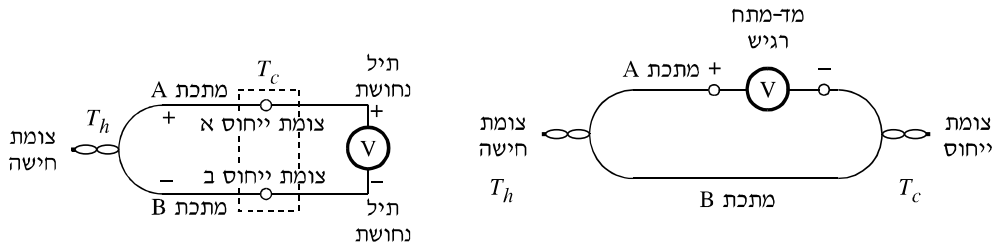
הזרם החשמלי נוצר כתוצאה מהפרש פוטנציאלים (מתח) בין נקודה A לבין נקודה B. מתח זה הוא בשיעור של מספר מיקרוולטים למעלת צלזיוס. היחס בין המתח שנוצר לבין הפרש הטמפרטורות הוא ליניארי בקירוב. תופעה זו מאפשרת לבצע מדידה פשוטה ומדויקת של הטמפרטורה על-ידי מדידת המתח בין המתכות. באיור 4.3 מופיעים גרפים המתארים את תלות המתח המתקבל בהפרש שבין טמפרטורת הצומת לבין טמפרטורת ייחוס נתונה עבור כמה צמדי מתכות מקובלים.



איור 4.3 תלות המתח בטמפרטורה עבור כמה סוגים של צמדים חומניים

החומרים כרומל, קונסטנטן ואלומל הם סגסוגות של מתכות שונות. שמות אלה ניתנו לתערובות על-ידי היצרנים.

בצמד חומני אפשר להשתמש בכמה דרכים, או תצורות, ששתיים מהן מתוארת באיור 4.4.



ב. תצורה עם מד-מתח אך ללא צומת קר

א. תצורה בסיסית עם מד-מתח

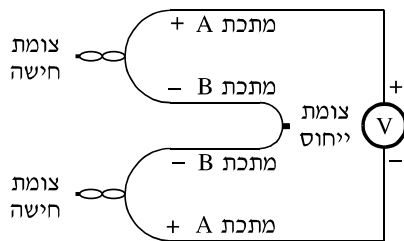
איור 4.4 תצורות של צמד חומני

בתצורה הבסיסית (איור 4.4א), שני צמתים של הצמד החומני נמצאים בטמפרטורות שונות. צומת אחד, שהוא **צומת הייחוס** או הצומת הקר, נמצא בטמפרטורה נמוכה יחסית. את הצומת השני, **צומת החישה** או הצומת החם, מציבים בנקודה שאת הטמפרטורה שלה רוצים למדוד. כדי למדוד את המתח שנוצר בין הצמתים, מחברים מד-מתח רגיש בנקודה "קריירה" כלשהי במעגל (כלומר, סמוך לצומת הייחוס), כמתואר באיור 4.4א.

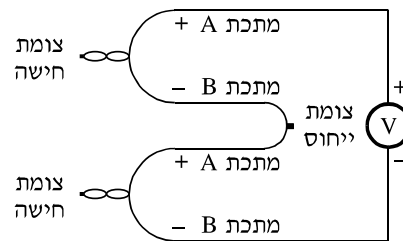
במקרים רבים נוח יותר לחבר את מד-המתח באמצעות מוליכים רגילים מנחושת, במקום לחברו פיסית לתילי הצמד החומני עצמו, כמתואר באיור 4.4ב. הסיבה לכך היא שלפעמים רוצים למקם את מד-המתח במרחק גדול יחסית (עשרות מטרים) מצומת החישה. במקרה כזה מעדיפים שימוש בתילי נחושת רגילים על שימוש בצמד חומני עם תילים ארוכים, מפני שתילים אלה יקרים יותר והתנגדותם עלולה להיות גבוהה מדי (ולכן הם עשויים לגרום למפל מתח משמעותי). בתצורה זו ישנם שני צומתי ייחוס במקום אחד: צומת אחד בין תיל הנחושת לבין התיל A, וצומת שני בין תיל הנחושת לבין התיל B. המתח הכולל שמודד המכשיר תלוי אז בשלוש טמפרטורות: הטמפרטורה של שני צומתי הייחוס, א ו-ב, והטמפרטורה של צומת החישה. אם שני צומתי הייחוס נשמרים באותה טמפרטורה T_c , אזי המתח המתקבל כאשר מודדים טמפרטורה מסוימת (בצומת החישה) T_h , יהיה שווה למתח שיתקבל באותו הפרש טמפרטורות $T_h - T_c$ במעגל שבאיור 4.4א.

ברוב המקרים המעשיים, צומת הייחוס נמצא בטמפרטורת הסביבה. כשאין מדובר במעבדה אלא בסביבה תעשייתית למשל, טמפרטורת הייחוס אינה מבוקרת ולכן אינה קבועה, אלא תלויה בתנאי מזג האוויר ובתהליכים (למשל תהליכי ייצור) המתרחשים סמוך לצומת זה. כתוצאה מכך נגרמת שגיאה במדידת הטמפרטורה של צומת החישה. כדי לבטל שגיאה זו, יש לקזז את שינויי טמפרטורת הסביבה מתוצאת המדידה. קיזוז כזה נהוג לבצע באמצעות מעגל מדידה מיוחד עם קיזוז.

אם מחברים כמה צמידים חומניים בטור, בקוטביות זהה, מקבלים את סכום המתחים התרמואלקטריים, וכך גדלה תגובתיות ההתקן ורגישותו. התקן כזה מתואר באיור 4.5. צומתי החישה השונים של ההתקן קרובים זה לזה ומודדים את אותה טמפרטורה בקירוב. גם הדיוק של התקן כזה טוב יותר, כי הטמפרטורה נמדדת בו-בזמן בכמה נקודות בדיקה. חיבור שני צמידים חומניים בטור בקוטביות הפוכה, מאפשר למדוד את הפרש הטמפרטורות בין שתי נקודות. חיבור כזה מתואר באיור 4.5ב.



ב. מדידת הפרש טמפרטורות



א. סיכום מתחים תרמואלקטריים

איור 4.5 תצורות מדידה עם זוג צמידים חומניים

לצמד החומני כמה יתרונות חשובים:

- א. תפוקתו החשמלית היא אות מתח הנמצא ביחס ישר לטמפרטורה, לכן אין צורך בהתמרה נוספת של אות המוצא למתח חשמלי.
- ב. אפשרות למדוד באמצעותו טווח גדול של טמפרטורות (עד 2000°C לערך).
- ג. גודלו הפיסי קטן.

ד. עלותו נמוכה.

ה. זמן תגובה מהיר יחסית.

החסרונות העיקריים הם :

א. הצורך בצומת ייחוס שהטמפרטורה שלו מיוצבת ומדויקת.

ב. המתחים שמפיק צמד חומני הם קטנים מאוד, לכן יש לשלב במעגל המדידה מגבר מתח ישר. תכונות חשובות של מגבר כזה הן רעש נמוך מאוד וסחיפה נמוכה. קיימים מגברי שרת המתאימים למטרה זו.

ג. במשך הזמן משתנה הרכב החומרים בצמתים (מסיבות אלקטרוכימיות), ושינוי זה גורם לשגיאות בתוצאות המדידות.

שאלה 4.1

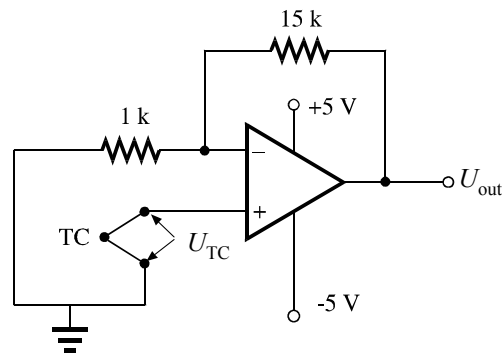
א. איזה מתח מתקבל בצמד חומני מסוג כרומל-אלומל, כאשר צומת אחד נמצא בטמפרטורת

החדר, 23°C , והצומת השני נמצא ב- 700°C ?

ב. חזרו על סעיף א עבור צמד חומני מסוג ברזל-קונסטנטן.

שאלה 4.2

נתון המעגל הבא :



איור לשאלה 4.2

בטמפרטורה מסוימת, הצמד החומני (TC) יוצר מתח $U_{TC} = 60 \text{ mV}$. מצאו את המתח U_{out} .

4.1.4 חיישני חום התנגדותיים

בחיישנים אלה מנצלים את העובדה שההתנגדות החשמלית של חומרים משתנה בהשפעת הטמפרטורה.

החיישנים מתחלקים לשתי קבוצות עיקריות לפי סוג החומר שממנו הם עשויים:

א. נגדים מתכתיים העשויים פלטינה, ניקל או נחושת;

ב. תרמיסטורים העשויים מחומר מוליך למחצה.

4.1.4.1 חיישן טמפרטורה התנגדותי – RTD

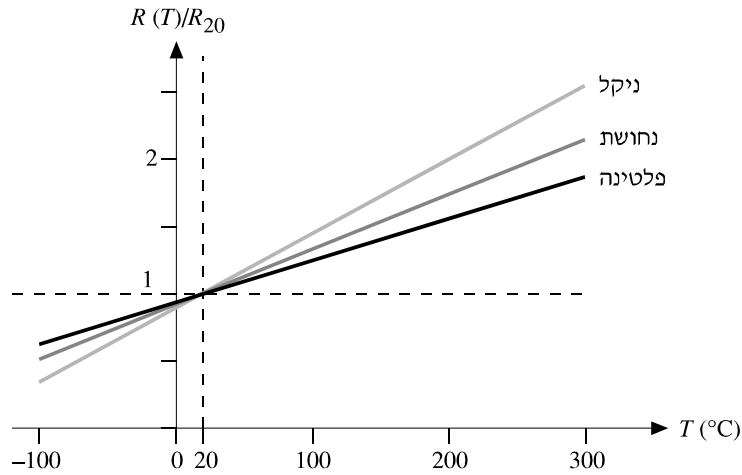
חיישן טמפרטורה התנגדותי (Resistive Temperature Detector או בקיצור RTD) הוא תיל מתכת ארוך, בדרך-כלל מלופף. תלות ההתנגדות שלו בטמפרטורה נתונה על-ידי:

$$(4-2) \quad R(T) = R_{20}[1 + \alpha(T - 20)]$$

R_{20} היא ההתנגדות ב- 20°C , ו- $R(T)$ היא ההתנגדות בטמפרטורה T (במעלות צלזיוס).

הרגישות של RTD תלויה במקדם הטמפרטורה שלו, α . מקדם הטמפרטורה של RTD הוא תמיד חיובי, כלומר, התנגדותם של כל החיישנים מסוג זה גדלה עם הטמפרטורה (PTC – Positive Temperature Coefficient). המתכות המשמשות בדרך כלל בחיישנים אלה הן נחושת, ניקל ופלטינה. מתכות אלה הן בעלות יחס גבוה בין שינוי ההתנגדות לבין שינוי הטמפרטורה, תגובה ליניארית בתחום טמפרטורות רחב, ועמידות כימית ומכנית. משום כך הן מתאימות לשמש חיישני טמפרטורה.

בגרפים שבאיור 4.6 מתואר שינוי ההתנגדות היחסי $R(T)/R_{20}$ בתלות בטמפרטורה, עבור שלוש מתכות אלה.



איור 4.6 שינוי ההתנגדות היחסי בתלות בטמפרטורה, עבור חיישני טמפרטורה התנגדתיים העשויים נחושת, פלטינה וניקל

טווח הטמפרטורות שאפשר למדוד בגלאי נחושת הוא כ- 150°C , בניקל – כ- 350°C , ובפלטינה – כ- 600°C .

היתרונות העיקריים של חיישני RTD הם :

א. ליניאריות טובה מאוד (כפי שאפשר לראות באיור 4.6). הליניאריות הטובה מאפשרת ייצור מתמרי טמפרטורה מדויקים.

ב. אין צורך בטמפרטורת ייחוס למדידת הטמפרטורה, כי ההתנגדות נמצאת ביחס ישר לטמפרטורה המוחלטת ולא להפרש הטמפרטורות. זאת לעומת רכיבים אחרים, כגון צמדים חומניים, שבהם דרושה טמפרטורת ייחוס.

ג. דיוק טוב יותר מצמד חומני.

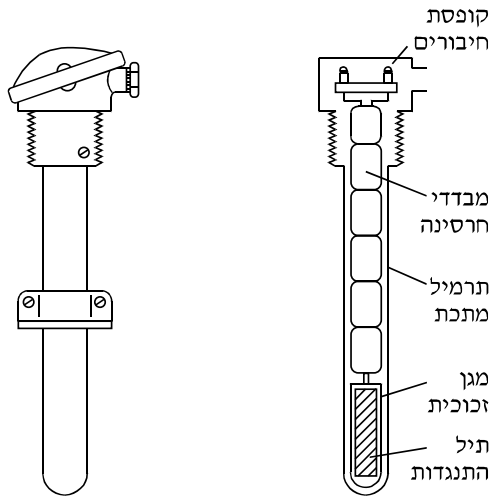
החסרונות העיקריים של חיישני RTD הם :

א. התנגדות נמוכה – בסדר גודל של עשרות או מאות אומים. לכן צריך למדוד את ההתנגדות בדיוק גבוה מאוד, עד מאיות אומים.

ב. ממדים פיסיים גדולים יחסית.

ג. זמן תגובה איטי יחסית.

חיישן RTD המיועד למדידות בתעשייה בנוי בדרך כלל בצורת גליל חרסינה שבחריציו מלוּפף התיל משמש כנגד המדידה. קצות הנגד מחוברים לתילים עבים יותר המגיעים לקופסת החיבורים. נגד המדידה ואביזריו ארוזים בתוך תרמיל מתכת, כמתואר באיור 4.7.



ב. המארז החיצוני

א. המבנה הפנימי

איור 4.7 מבנה סכימטי של חיישן RTD

דוגמה 4.1

מקדם הטמפרטורה של הפלטינה (Pt) הוא $\alpha = 0.00385 \frac{\Omega}{^{\circ}\text{C}}$

מה תהיה ההתנגדות R_{Pt} של החיישן Pt-100 (שהתנגדותו בטמפרטורה 20°C $R_{20} = 100 \Omega$) בטמפרטורה של 400°C ?

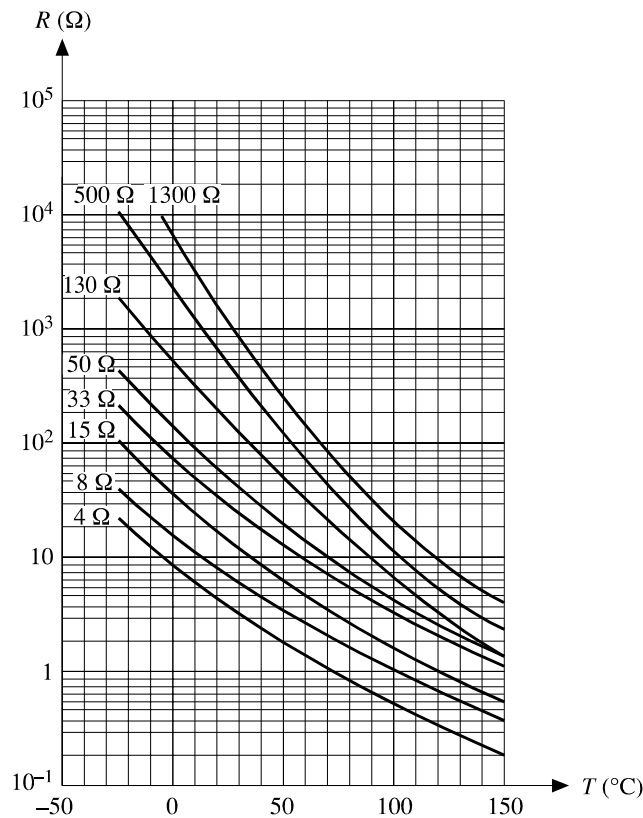
פתרון

$$R_{Pt} = 100(1 + 0.00385 \cdot 380) = 254 \Omega$$

4.1.4.2 תרמיסטור

התרמיסטור הוא נגד רגיש לטמפרטורה, ושמו הוא קיצור של Thermal Sensitive Resistor. התרמיסטור עשוי מחומר מוליך למחצה המאולח בתחמוצת מתכתית. החיישן מתאפיין בתלות לא-ליניארית חזקה בין הטמפרטורה להתנגדות. קיימים שני סוגי תרמיסטורים: א. תרמיסטורי NTC (Negative Temperature Coefficient) בעלי מקדם טמפרטורה שלילי, כלומר, התנגדותם **יורדת** עם עליית הטמפרטורה. ב. תרמיסטורי PTC (Positive Temperature Coefficient) בעלי מקדם טמפרטורה חיובי, כלומר, התנגדותם **עולה** עם עליית הטמפרטורה.

באיור 4.8 מתוארת התלות בטמפרטורה של ההתנגדות של כמה תרמיסטורי NTC. ליד כל עקומה רשומה ההתנגדות של התרמיסטור בטמפרטורה של 20°C (טמפרטורת הייחוס).



איור 4.8 התלות בטמפרטורה של ההתנגדות של כמה תרמיסטורי NTC

ההתנגדות של תרמיסטור גבוהה מזו של גלאי טמפרטורה התנגדותי. בגרפים שבאיור 4.8 אפשר לראות בבירור שהתנגדותם של התרמיסטורים אינה משתנה באופן ליניארי. למעשה, התלות של התנגדותם בטמפרטורה היא מעריכית, והיא נתונה (בתרמיסטור NTC) על-ידי:

$$(4-3) \quad R(T) = R_0 \cdot e^{\beta \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right)}$$

T_0 היא טמפרטורת הייחוס (הנתונה במעלות קלווין), R_0 היא התנגדות התרמיסטור בטמפרטורה זו, ו- β הוא קבוע התלוי בתכונות התרמיסטור.

היתרונות העיקריים של תרמיסטורים הם:

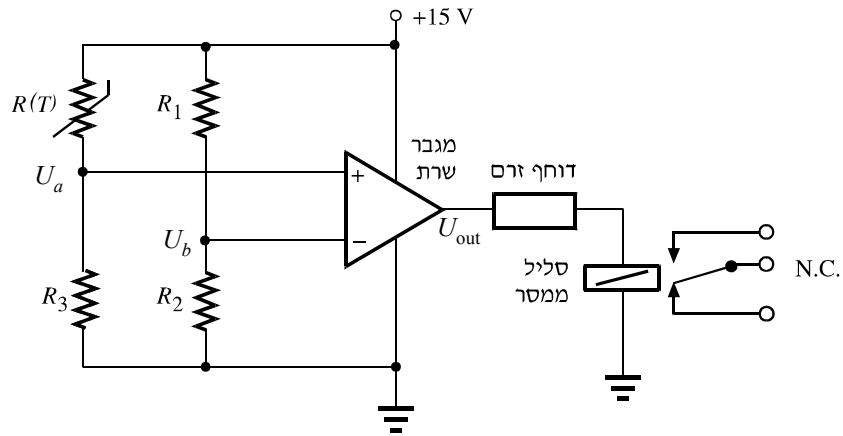
- א. בדומה ל-RTD, אין צורך בצומת ייחוס שהטמפרטורה שלו ידועה.
- ב. רגישותם גבוהה פי 10 בערך מזו של RTD. בשל כך גם מעגלי העזר הדרושים למדידה פשוטים יותר.
- ג. התנגדותם גבוהה, ולכן אפשר למדוד טמפרטורה ממרחק גדול יחסית (עשרות מטרים) בלי שהתנגדות התילים המחברים לתרמיסטור תשפיע באופן משמעותי על דיוק המדידה.
- ד. אפשר ליצור כמעט בכל צורה וגודל. דבר זה מקל את שילובם במערכות שונות, ומסייע לשיפור תכונותיהם (למשל, קיצור זמן התגובה שלהם).
- ה. זמן תגובה מהיר מאוד.
- ו. ממדים קטנים יחסית.

החסרונות העיקריים של תרמיסטורים הם:

- א. אי ליניאריות חזקה, כפי שאפשר לראות באיור 4.8 ובמשוואה (4-3). אפשר לתקן את האי-ליניאריות באמצעות מעגל אלקטרוני מתאים.
- ב. תחום המדידה מוגבל לכמה מאות מעלות צלסיוס, בתחום מ- 50°C עד 300°C בערך.
- ג. הדיוק בייצור תרמיסטורים אינו טוב דיו. כאשר צריך להחליף תרמיסטור שהתקלקל, קשה למצוא לו תחליף.

דוגמה 4.2

נתון מעגל להגנת מנוע מהתחממות יתר (איור 4.9):



איור 4.9 איור לדוגמה 4.2

$R(T)$ – תרמיסטור שנתוניו מופיעים באיור 4.8 (הגרף המסומן על-ידי 500Ω). במעגל משתמשים בממסר חשמלי לניתוק מעגל הזנת המנוע בעזרת מגע "רגיל סגור" (N.C). רוצים לנתק את המנוע בטמפרטורת סליל של 75°C . מהי ההתנגדות של הנגד R_3 הדרושה לשם כך? ידוע כי $R_1 = R_2 = 1 \text{ k}\Omega$.

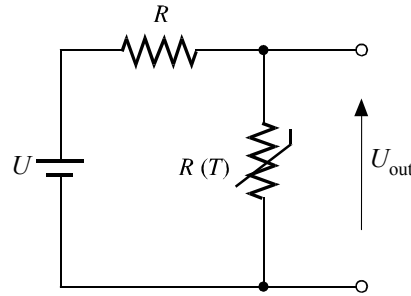
פתרון

לפנינו מעגל השוואת מתחים. כאשר $U_b > U_a$, מתקבל במוצא מתח של $U_{\text{out}} = 0 \text{ V}$ והממסר אינו מופעל (המנוע פועל). כאשר המתח U_a גדול מהמתח U_b , מתקבל במוצא מתח של $U_{\text{out}} = 15 \text{ V}$, והממסר ינתק את המנוע.

לפי אופיין התרמיסטור, התנגדותו ב- 75°C היא $R(T) = 45 \Omega$. היות ש- $R_1 = R_2$, נבחר נגד R_3 שהתנגדותו שווה ל- $R(T)$. לפיכך $R_3 = 45 \Omega$.

4.1.4.3 מעגלים להתמרת התנגדות במתח

כדי להתמיר התנגדות חשמלית במתח, מחברים נגד רגיש לטמפרטורה במעגל חשמלי; במוצא המעגל מתקבל מתח הנמצא ביחס ישר לטמפרטורה. המעגל הפשוט ביותר מתואר באיור 4.10:



איור 4.10 חיבור רכיב בעל התנגדות רגישה לטמפרטורה במעגל טורי

הנגד הרגיש לטמפרטורה שהתנגדותו $R(T)$ הוא חלק ממחלק מתח המכיל גם את הנגד R . מתח המוצא U_{out} תלוי בהתנגדות $R(T)$ התלויה בטמפרטורה:

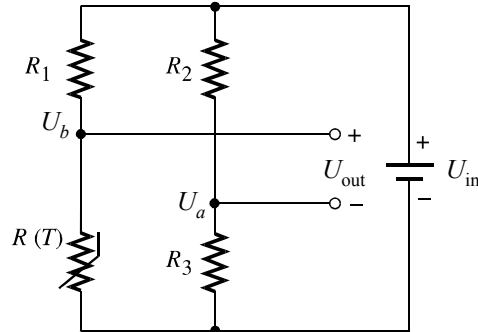
$$(4-4) \quad U_{out} = \frac{U \cdot R(T)}{R + R(T)}$$

לכן התלות של מתח המוצא ב- $R(T)$ אינה ליניארית.

אם $R \gg R(T)$, מתח המוצא הוא בקירוב $U_{out} \approx UR(T)/R$, כלומר, תלות מתח המוצא ב- $R(T)$ היא ליניארית בקירוב, אולם מתח המוצא קטן מאוד. במקרה כזה, שבו מתח המוצא נמוך, יש לרעשים אלקטרוניים השפעה רבה יותר, וקשה יותר להבחין בשינויי מתח קטנים במוצא, כלומר, הרגישות נפגעת.

כדי לשפר את רגישות המערכת לשינוי ההתנגדות של $R(T)$, נהוג להשתמש בגשר ויטסטון (Wheatstone).

באיור 4.11 מתואר גשר ויטסטון שמורכב בו נגד רגיש לטמפרטורה $R(T)$.



איור 4.11 גשר ויטסטון ובו נגד רגיש לטמפרטורה $R(T)$

המתח U_{in} הוא מתח קבוע ונקרא מתח העירור. מתח המוצא U_{out} נתון על-ידי:

$$(4-5) \quad U_{out} = U_b - U_a = U_{in} \left(\frac{R(T)}{R_1 + R(T)} - \frac{R_3}{R_2 + R_3} \right)$$

ביטוי זה נכון כאשר מוצאי הגשר (U_{out}) מחוברים למכשיר בעל התנגדות אין-סופית. ברוב המקרים מחברים את המוצאים למגבר מתח בעל התנגדות מבוא גבוהה ביותר.

אם בוחרים את הנגדים כך: $R_1 = R_2 = R_3 = R(T = 20^\circ\text{C})$, מקבלים $U_{out} = 0 \text{ V}$ בטמפרטורה של 20°C (טמפרטורת הייחוס). כלומר, הגשר נמצא במצב מאוזן ב- 20°C .

כאשר טמפרטורת הסביבה שונה מטמפרטורת הייחוס, הגשר אינו מאוזן, כלומר, מתח המוצא שונה מ-0. כדי לאזן אותו בחזרה, יש לשנות את ערכו של אחד הנגדים. לאחר האיפוס מודדים את הטמפרטורה, והמתח המתקבל במוצא הגשר נמצא ביחס ישר לטמפרטורה. שיטת מדידה זו מכונה שיטת האיפוס. שיטת מדידה אחרת נקראת שיטת הסטייה. מודדים את מתח המוצא של הגשר פעמיים: פעם כאשר כל הנגדים בטמפרטורת הסביבה, ופעם שנייה כאשר הנגד הרגיש בטמפרטורה T . הסטייה במתח נמצאת ביחס ישר לטמפרטורה.

אם נשווה את גשר ויטסטון למחלק מתח פשוט (איור 4.10), נראה כי גשר ויטסטון מאפשר לקבל רגישות טובה יותר. הסיבה לכך היא שבמחלק המתח, רובו של מתח המוצא הוא מתח קבוע שאינו תלוי בטמפרטורה. שינוי קטן בטמפרטורה משנה רק במעט את מתח המוצא וקשה

להבחין בשינוי כזה. לעומת זאת, בגשר ויטסטון, מתח המוצא הוא 0 כל עוד נמצאים בטמפרטורת הייחוס. מתח המוצא המתקבל עם שינוי הטמפרטורה נוצר כולו על-ידי שינוי הטמפרטורה. ואם המתח קטן, אפשר להשתמש בתחום מדידה רגיש יותר של מד המתח המחובר למוצא הגשר.

השימוש בגשר ויטסטון אינו מוגבל רק למתמרי טמפרטורה. המעגל שימושי בכל מקרה שיש למדוד שינויי התנגדות קטנים.

דוגמה 4.3

חשבו את מתח המוצא U_{out} בגשר ויטסטון שבו $R_1 = R_2 = R_3 = 100 \Omega$ (בטמפרטורה של 20°C), במצב שבו טמפרטורת החיישן היא 220°C , ומתח העירור הוא $U_{in} = 5 \text{ V}$. הניחו מקדם טמפרטורה $\alpha = 0.00385$.

פתרון

את ההתנגדות של החיישן בטמפרטורה הנתונה נחשב באמצעות משוואה (4-2). מקבלים:

$$R(T) = R_0(1 + \alpha \Delta T) = 100(1 + 0.00385 \cdot 200) = 177 \Omega$$

ממשוואת הגשר (4-5) נקבל את מתח המוצא:

$$U_{out} = 5 \left(\frac{177}{177 + 100} - \frac{100}{100 + 100} \right) = 5 \cdot 0.139 = 0.695 \text{ V}$$

דוגמה 4.4

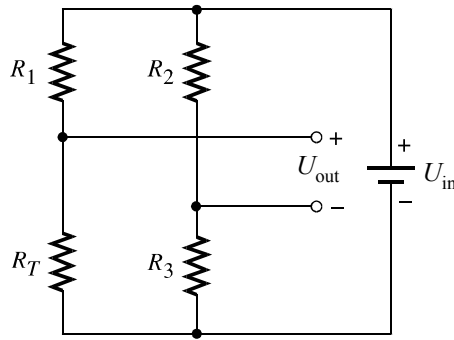
נדגים תכנון מעגל להמרת טמפרטורה למתח על בסיס גשר ויטסטון, שמותקן בו חיישן מדידה מסוג תרמיסטור, שנתוניו מופיעים באיור 4.8.

הדרישות ממעגל המדידה הן: בטמפרטורה של 20°C , מתח המוצא של הגשר הוא $U_{out} = 0 \text{ V}$, וב- 90°C מתח המוצא הוא $U_{out} = 1 \text{ V}$.

יש לחשב את ההתנגדויות בזרועות הגשר (הניחו כי $R_1 = R_2 = R_3$), ואת מתח המקור U_{in} .

פתרון

נתבונן במעגל המדידה הבא :



איור 4.12 איור לדוגמה 4.4

R_T – התנגדות התרמיסטור. נשתמש בתרמיסטור שהתנגדותו 1300Ω בטמפרטורת ייחוס $T = 20^\circ\text{C}$.

$$T = 20^\circ\text{C} \rightarrow R_T = 1300 \Omega$$

$$T = 90^\circ\text{C} \rightarrow R_T = 45 \Omega$$

אנו רואים כי התנגדות תרמיסטור זה – קטנה יותר בטמפרטורה גבוהה יותר. אם בוחרים $R_1 = R_2 = R_3 = R_T(20^\circ\text{C}) = 1300 \Omega$, הגשר מאוזן ב- 20°C .

בטמפרטורה של 90°C מתח המוצא צריך להיות 1 V , ולכן :

$$U_{\text{out}} = U_{\text{in}} \left(\frac{1}{2} - \frac{45}{45 + 1300} \right) = 1 \text{ V}$$

מפתרון משוואה זו מקבלים :

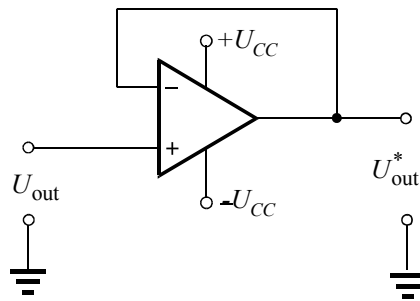
$$U_{\text{in}} = 2.143 \text{ V}$$

שאלה 4.3

האם במעגל שבדוגמה 4.4 מתקבל יחס ליניארי בין המתח U_{out} לבין הטמפרטורה בתחום המדידה הנתון ($20^{\circ}\text{C} - 90^{\circ}\text{C}$)? נמקו את התשובה.

שאלה 4.4

נהוג לחבר את מתח המוצא של הגשר (U_{out}) למעגל האלקטרוני הבא:

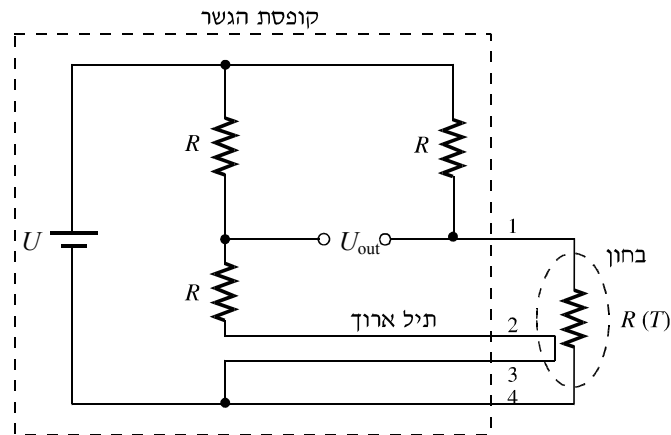


איור 4.13 איור לשאלה 4.4

מה תפקידו של המעגל? מהו U_{out}^* ?

כאשר הנגד הרגיש לטמפרטורה נמצא במרחק גדול מהגשר, נוצר מפל מתח ניכר על התילים המתברים את הנגד לגשר; כתוצאה מכך נוצרת שגיאה במדידה. כדי לקזז את השפעתו של מתח זה משתמשים במעגל המתואר באיור 4.14.

הזרוע השמאלית של הגשר (מוליכים 2 ו-3) מקוזזת את מפל המתח הנוצר על התיל המוליך (הארוד) לבחון (מוליכים 1 ו-4).



איור 4.14 שילוב של בחון רגיש לטמפרטורה הנמצא במרחק גדול מגשר ויטסטון.

שאלה 4.5

חשבו את התנגדות החיישן Pt-100 בטמפרטורה של 60°C , אם ידוע שב- 100°C התנגדותו היא $138\ \Omega$ (הניחו שלא ידוע מקדם הטמפרטורה של החומר, אך ידוע שקיימת תלות ליניארית בין ההתנגדות לטמפרטורה בתחום המדידה הנתון).

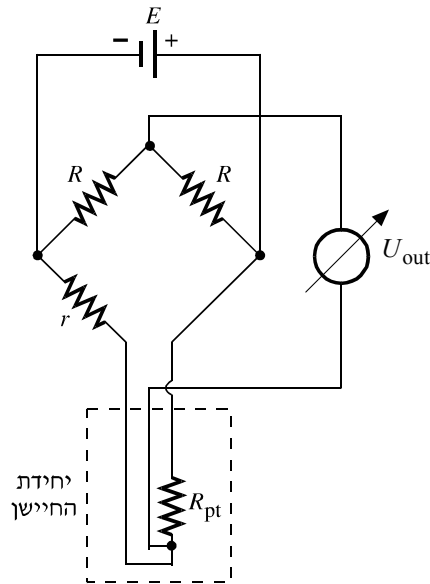
שאלה 4.6

באיור 4.15 מתואר מעגל מדידה ובו חיישן מסוג Pt-100.

את התנגדות החיישן ניתן לחשב לפי הנוסחה $R_{20} = R_0(1 + \alpha\Delta T)$, כאשר $R_{20} = 100\ \Omega$ בטמפרטורה של 20°C ו- $\alpha = 0.00385\ \frac{1}{^{\circ}\text{C}}$. יתר נתוני המעגל הם:

$$E = 5\ \text{V}, \quad R = 500\ \Omega, \quad r = 12\ \Omega$$

הניחו שהתנגדות מד-המתח היא אין-סופית.



איור 4.15 איור לשאלה 4.6

- א. מהי הטמפרטורה הנמדדת שעבורה הגשר מאוזן ($U_{out} = 0 \text{ V}$)?
- ב. איזה מתח יראה מד-המתח, כאשר הטמפרטורה תהיה 220°C ?
- ג. מהו הזרם שיזרום בחיישן בטמפרטורה של 220°C ?

4.2 חיישנים ומתמרים אלקטרו-אופטיים

ברכיבים אלקטרו-אופטיים קיים קשר בין קרינת האור הנבלעת או נפלטת מהרכיב, לבין התכונות החשמליות של החומר שממנו עשוי הרכיב. השימוש בהתקנים אלו נפוץ מאוד במערכות בקרה. למשל, לגילוי אור ולמדידת עוצמת האור והתמרתו לאות חשמלי, למדידת תזוזות ומהירויות של גופים נעים באמצעות שילוב של מקורות אור וגלאי אור, לבידוד מעגלים חשמליים הפועלים במתחים שונים, לתקשורת אופטית, ועוד.

לצורך ענייננו כאן נגדיר אור כקרינה אלקטרומגנטית בתחום אורכי הגל λ הנראים לעין האדם (שהוא התחום שבין $\lambda = 0.38$ מיקרומטר לבין $\lambda = 0.78$ מיקרומטר לערך*). כמו כן, נתייחס לקרינה בתחום האולטרא-סגול ($0.2 < \lambda < 0.35$ מיקרומטר), ולקרינה בתחום האינפרא-אדום ($1 < \lambda < 15$ מיקרומטר). יחידת עוצמת האור היא הקנדלה (Cd), אך בדרך כלל נאפיין את העוצמה על-ידי ההספק החשמלי (בוואט) הנמדד בגלאי האור, או ההספק החשמלי הנצרך על-ידי מקור האור.

את הרכיבים האלקטרו-אופטיים ניתן לחלק לשתי קבוצות עיקריות:

א. התקנים (העשויים בדרך כלל מחומרים מוליכים למחצה) שכתוצאה מהארתם משתנה התנגדותם החשמלית או שנוצר בהם הפרש מתחים היוצר זרם חשמלי. התקנים כאלה נקראים **התקנים חשמלוריים**.

ב. התקנים הפולטים אור או משנים את עוצמתו כאשר עובר דרכם זרם חשמלי ("מקורות אור").

על-פי אופן שילובם במערכות שונות ניתן לחלק את הרכיבים השייכים לקבוצה הראשונה לרכיבים **יוצרי זרם חשמלי** (מקורות זרם), כדוגמת **התא הפוטוולטאי** (תא שמש), ולרכיבים **צורכי זרם חשמלי** כדוגמת **הפוטו-דיודה**, **הפוטו-טרנזיסטור** והנגד הרגיש לאור. רכיבים מסוימים, כדוגמת הפוטו-טרנזיסטור, יכולים לפעול גם כמקורות זרם וגם כצרכני זרם בהתאם לאופן שילובם במעגלים החשמליים.

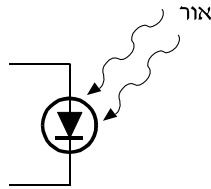
מבין הרכיבים השייכים לקבוצה השנייה נזכיר את דיודת הלייזר ואת הדיודה פולטת האור (דפ"א). דיודת הלייזר היא היום רכיב שימושי ביותר במערכות ביתיות ותעשייתיות רבות, כגון מדפסת לייזר, קומפקט דיסק, מערכות לחיתוך ועיבוד חומרים, מערכות תקשורת באמצעות סיבים אופטיים, ועוד ועוד. גם את הדפ"א (LED) נוכל למצוא במערכות ומכשירים רבים: בהתקני תצוגה למיניהם, כמקורות אור נקודתיים, ועוד.

בהמשך נתאר שלושה רכיבים צורכי זרם מהקבוצה הראשונה (הפוטו-דיודה, הפוטו-טרנזיסטור והנגד הרגיש לאור) ורכיב אחד (הדפ"א) מהקבוצה השנייה.

* המיקרומטר (או מיקרון) היא יחידת אורך השווה ל- 10^{-6} מטר, כלומר במטר אחד יש 10^6 מיקרון.

4.2.1 פוטו-דיודה (Photodiode)

הפוטו-דיודה היא הרכיב הפשוט והנפוץ ביותר לגילוי קרינת אור. הסימון המקובל לפוטו-דיודה דומה לסימון הדיודה, אולם בתוספת של חיצים המסמלים את קרני האור (איור 4.16). גם במבנהו דומה הרכיב לדיודה המצויה, כלומר צומת PN העשוי משני חומרים מוליכים למחצה. המיוחד לפוטו-דיודה הוא בעטיפה פלסטית שקופה סביב הצומת. העטיפה פועלת כעדשה המרכזת את הקרינה אל הצומת.

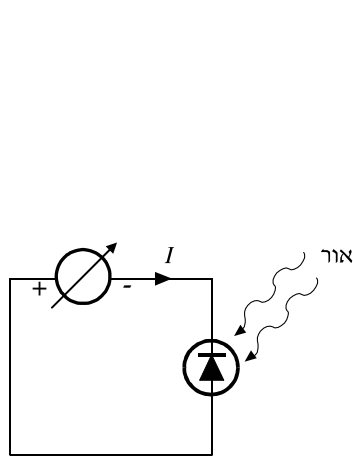


איור 4.16 סימן חשמלי של פוטו-דיודה

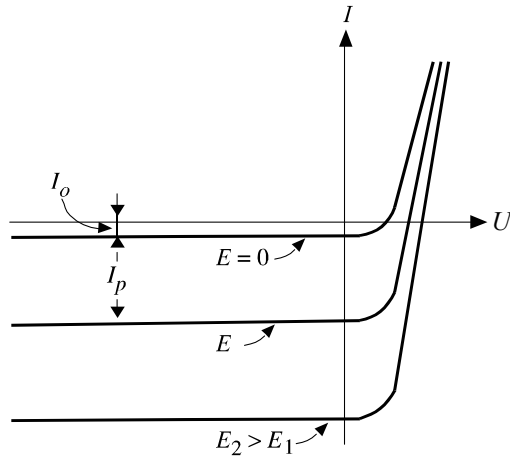
לפוטו-דיודה תלות זרם במתח ("אופייין הדיודה") הדומה לאופייין דiodת סיליקון רגילה, אולם אופייין זה תלוי גם בעוצמת האור הפוגעת בצומת. ככל שעוצמת האור הפוגעת בצומת גדולה יותר, כך האופייין ינוע יותר כלפי מטה במישור הזרם-מתח (איור 4.17א). באיור זה עוצמת

$$\text{האור מסומנת באות } E, \text{ ויחידותיה הן } \frac{\text{Cd}}{\text{m}^2}.$$

באיור 4.17ב מופיע המעגל הבסיסי של הפוטו-דיודה. שימו לב שאת הפוטו-דיודה מחברים למעגל בממתח אחורי, כלומר, ההדק החיובי של הדיודה מחובר להדק השלילי של מקור המתח. הזרם (הכמעט קבוע) בממתח האחורי נקרא זרם הזליגה, וזרם זה גדל ככל שעוצמת האור גדלה.



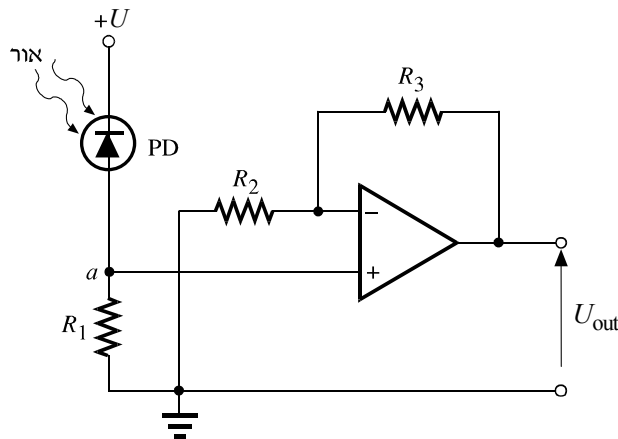
ב. פוטודיודה במעגל חשמלי



א. אופייני פוטודיודה ברמות תאורה (E) שונות

איור 4.17 פוטו-דיודה במעגל חשמלי

בעוצמות אור קטנות יחסית, זרמי הזליגה הם קטנים, מסדר גודל של כמה מיקרו-אמפר. כדי להתמיר את זרם הזליגה הקטן לאות מתח בסדר גודל של וולטים אחדים, מגבירים את האות באמצעות מגבר שרת, כמתואר באיור 4.18. במעגל זה, מגבר השרת פועל בתצורה לא מהפכת, כלומר, האות החלש מוזן לקוטב החיובי של המגבר. המתח המתקבל במוצא המעגל (U_{out}), נמצא ביחס ישר בקירוב לעוצמת האור E הפוגעת בדיודה.



איור 4.18 מתמר אור למתח באמצעות פוטו-דיודה ומגבר

4.7 שאלה

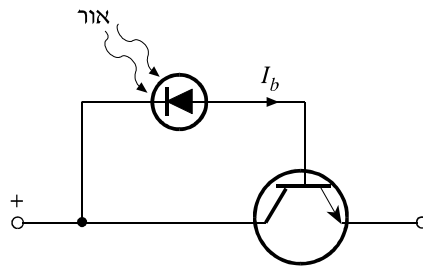
בהנחה שמגבר השרת אידיאלי, הוכיחו כי מתח המוצא, U_{out} , נתון על-ידי:

$$U_{out} = I \cdot R_1 \cdot \left(1 + \frac{R_3}{R_2} \right)$$

כאשר הנגדים R_1, R_2, R_3 מתוארים באיור 4.18, ו- I הוא זרם הזליגה בפוטו-דיודה.

4.2.2 פוטו-טרנזיסטור (Phototransistor)

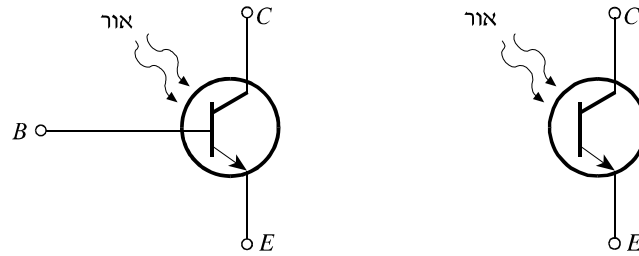
כמו הפוטו-דיודה, גם הפוטו-טרנזיסטור דומה במבנהו לטרנזיסטור רגיל, אולם הוא בעל מעטפת פלסטיק שקופה, הפועלת כעדשה המרכזת את הקרינה אל הצומת קולט-בסיס. ניתן לתאר פוטו-טרנזיסטור כטרנזיסטור רגיל, שבו מחוברת פוטו-דיודה בין הקולט לבסיס (איור 4.19).



איור 4.19 תיאור של פוטו-טרנזיסטור כטרנזיסטור המחובר לדיודה

זרם הבסיס במעגל זה, I_b , נמצא ביחס ישר לעוצמת האור הפוגעת בדיודה, ולכן הפוטו-טרנזיסטור, בדומה לפוטו-דיודה, משמש כמתמר של עוצמת האור לאות חשמלי. את הפוטו-טרנזיסטור ניתן לחבר במעגל כרכיב בעל שני הדקים (קולט ופולט) או כרכיב בעל שלושה הדקים (קולט, בסיס ופולט), כמואר באיור 4.20.

בתצורה של שלושה הדקים (איור 4.20ב), הדק הבסיס מאפשר לפוטו-טרנזיסטור לפעול גם כטרנזיסטור רגיל, כלומר, כרכיב שיכול להגביר זרם. בתצורה של שני הדקים (איור 4.20א), הפוטו-טרנזיסטור מחובר בדרך כלל לטרנזיסטור רגיל המגביר את האות החשמלי.

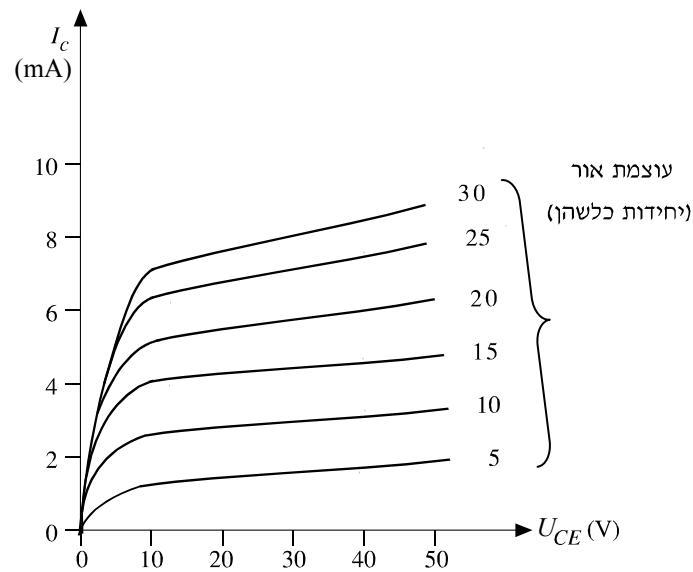


ב. שלושה הדקים

א. שני הדקים

איור 4.20 סימון חשמלי של פוטו-טרנזיסטור

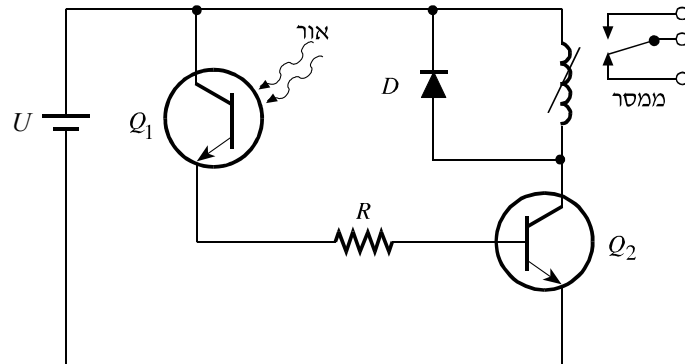
אופייני הפוטו-טרנזיסטור מתאר את תלות זרם הקולט במתח שבין הקולט לפולט. שלא כמו בטרנזיסטור הרגיל (וכמו בפוטו-דיודה) אופייני זה תלוי גם בעוצמת האור (E). באיור 4.21 מתוארת משפחת אופיינים. כל אופייני תלוי בעוצמת האור הפוגעת בפוטו-טרנזיסטור.



איור 4.21 אופיינים של פוטו-טרנזיסטור לרמות תאורה שונות

דוגמה למעגל חשמלי, המשלב פוטו-טרנזיסטור וטרנזיסטור, מופיעה באיור 4.22.

הפוטו-טרנזיסטור Q_1 (בתצורת שני הדקים) מספק את זרם הבסיס לטרנזיסטור Q_2 כדי להעבירו למצב רוויה. הטרנזיסטור Q_2 משמש כממתג: במצב רוויה זורם זרם בקולט שלו, והממסר מופעל. על-פי אופיין הפוטו-טרנזיסטור ניתן לדעת את עוצמת האור המינימלית (ולכן גם את זרם הבסיס ל- Q_2) הדרושה להפעלת הממסר.



איור 4.22 מעגל מיתוג הכולל פוטו-טרנזיסטור וטרנזיסטור

שאלה 4.8

מהו זרם הבסיס הדרוש למיתוג הטרנזיסטור Q_2 , אם ידוע כי הממסר מופעל כאשר זרם הקולט הוא (לפחות) 5 mA? הגבר הזרם של הטרנזיסטור הוא $\beta_{Q_2} = 55$.

4.2.3* נגד רגיש לאור (LDR – Light Dependent Resistor)

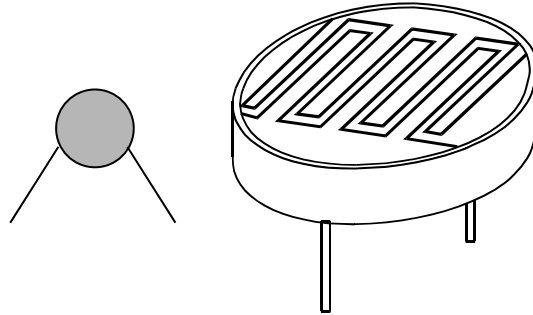
נגד רגיש לאור (LDR) שייך לקבוצת ההתקנים שהתנגדותם החשמלית תלויה בעוצמת האור הפוגע בהם. למעשה, ההתנגדות תלויה בשני גורמים שונים:

1. עוצמת ההארה;
2. צבע האור (תדר הגל האלקטרומגנטי).

בהמשך נתייחס רק לתלות ההתנגדות בעוצמת האור.

אחד החומרים הרגישים לאור הוא CdS (קדמיום סולפיד Cadmium Sulfid). כדי ליצור LDR מחומר זה, מורחים את החומר בשכבה דקה על משטח קרמי מבודד, ו"אופים" את המשטח בטמפרטורה גבוהה מאוד.

מתקבל נגד בעל שטח פנים גדול יחסית (איור 4.23). בונים זאת כך כדי לשנות את התנגדות ההתקן יש להאיר שטח גדול של החומר.



ב. המארז החיצוני

א. המבנה הפנימי

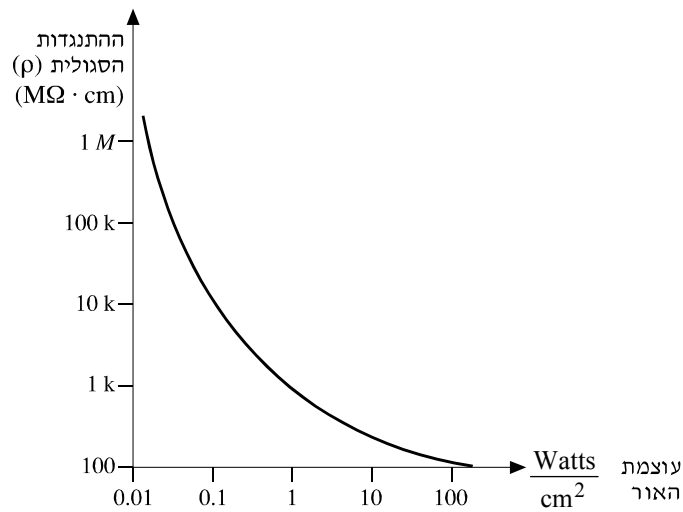
איור 4.23 תיאור עקרוני של נגד רגיש לאור

כזכור, ההתנגדות R של נגד נתונה על-ידי:

$$(4-6) \quad R = \rho \frac{L}{S}$$

כאן L הוא המרחק בין ההדקים, ו- S הוא שטח הפנים המואר של הנגד.

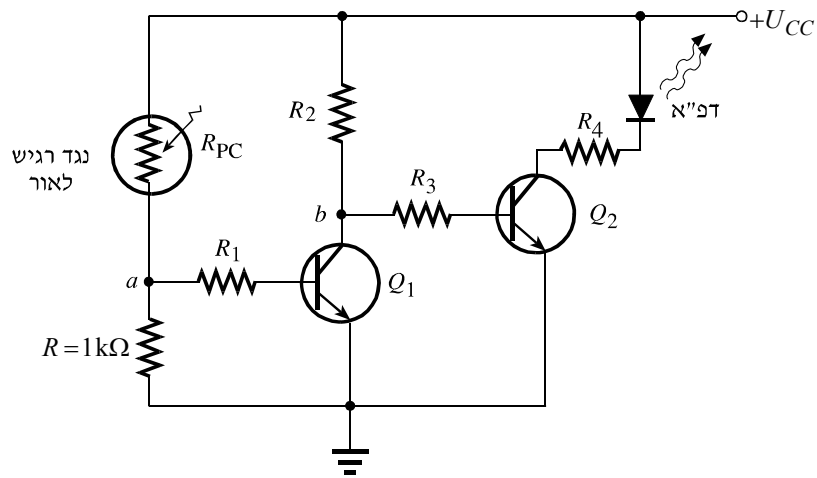
התלות של ההתנגדות הסגולית ρ של החומר שממנו עשוי הנגד בעוצמת האור היא לא-ליניארית חזקה, כמתואר באיור 4.24.



איור 4.24 אופיין של נגד רגיש לאור

בחושך, ההתנגדות הסגולית עשויה להגיע לערכים של כמה מגאום · ס"מ ($M\Omega \cdot cm$) ואילו באור חזק יורדת ההתנגדות הסגולית לכמה עשרות אום · ס"מ בלבד.

בנגד רגיש לאור משתמשים במערכות לבקרת תאורה. דוגמה למערכת כזאת הכוללת גם מגבר טרנזיסטור דו-דרגתי, נתונה באיור 4.25 (על הדפ"א ראו בהמשך).

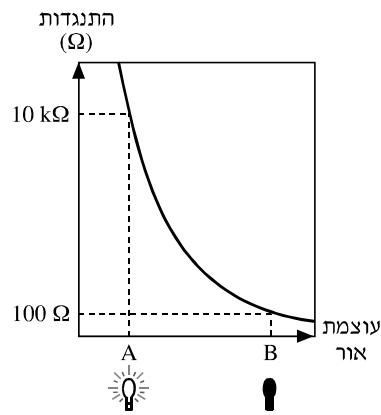
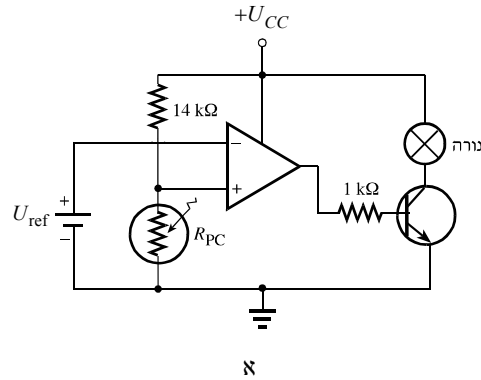


איור 4.25 מערכת לבקרת תאורה באמצעות נגד רגיש לאור

במעגל זה, דיודה פולטת אור (דפ"א) מאירה כאשר שורר חושך, ואינה מאירה כאשר הנגד הרגיש לאור מואר. בחושך ההתנגדות של ה-LDR (R_{PC}) גבוהה מאוד, ולכן $R_{PC} \gg R$. כתוצאה מכך, הפוטנציאל בנקודה a קרוב לאפס, והטרנזיסטור Q_1 נמצא במצב קיטעון. לפיכך לא זורם זרם דרך הקולט של Q_1 , והפוטנציאל בנקודה b גבוה. הטרנזיסטור Q_2 נמצא ברוויה, זרם זורם דרך הדפ"א, והיא מאירה. לעומת זאת, באור היום $R_{PC} \ll R$, ומצבי הטרנזיסטורים מתהפכים. במצב זה הדפ"א אינה מאירה.

***שאלה 4.9**

באיור 4.26 נתון מעגל להפעלת נורה בלילה. התנגדות הנגד (R_{PC}) תלויה בעוצמת ההארה (ראו את האופיין באיור 4.26.ב).



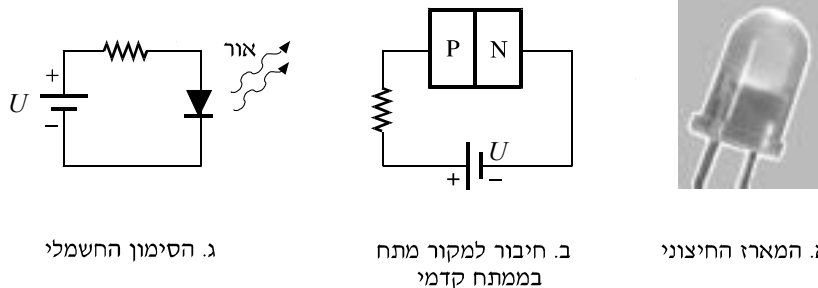
ב

איור 4.26 איור לשאלה 4.9

- א. מה תפקידו של מגבר השרת במעגל? הסבירו את פעולת המעגל.
- ב. רוצים שהנורה תאיר בלילה. מה צריך להיות המתח U_{ref} ? איזה מתח יהיה אז על הנורה?
- ג. הסבירו מדוע הנורה אינה פועלת באור יום.

4.2.4 דיודה פולטת אור – דפ"א (LED – Light Emitting Diode)

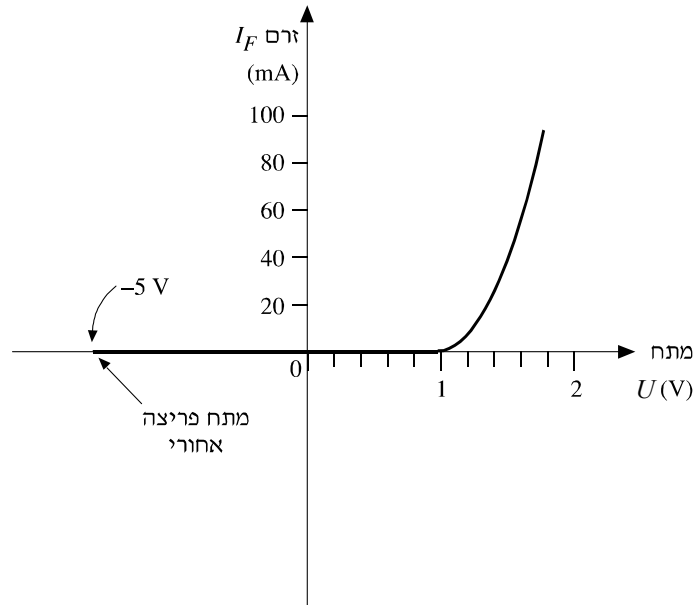
הדפ"א (איור 4.27א) היא התקן השייך למשפחת ההתקנים הפולטים אור כאשר עובר דרכם זרם חשמלי. כמו דיודה רגילה, גם דפ"א בנויה מחומר מוליך למחצה המאולח באטומים זרים במטרה ליצור צומת בין שני אזורים: אזור בעל קוטביות חיובית ואזור בעל קוטביות שלילית (איור 4.27ב). כאשר מחברים את שני האזורים באמצעות מוליך חיצוני למקור מתח בממתח קדמי (איור 4.27ג), המטענים השליליים מגיבים עם המטענים החיוביים באזור הצומת ויוצרים קרינת אור.



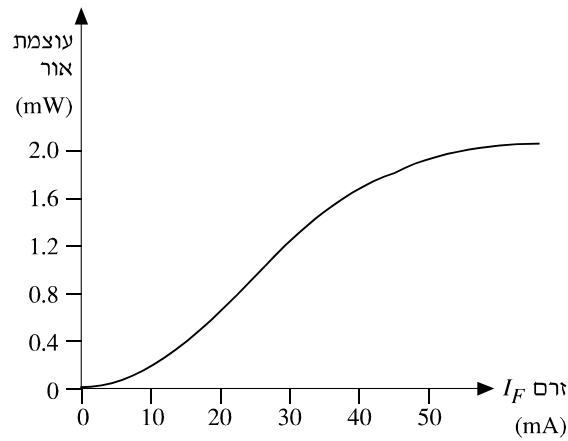
איור 4.27 דיודה פולטת אור

את הדפ"א יוצרים מחומרים מבוססי גליום (או גליום ארסניד GaAs) שגם להם יש תכונות של חומרים מוליכים למחצה. על-ידי שליטה קפדנית על ההרכב הכימי של החומרים בדפ"א, ניתן ליצור התקנים הפולטים אור בכל תחומי הספקטרום הנראה (אדום, ירוק, צהוב) וגם בתחום האינפרא-אדום.

לדפ"א, כמו לדיודה רגילה, אופיין מתח-זרם, שבו הזרם הקדמי גדל באופן אקספוננציאלי בתלות בממתח הקדמי (איור 4.28). עם זאת, קיים הבדל חשוב בין האופיינים בתחום הממתח האחורי. במיוחד, מתח הפריצה בממתח שלילי בדפ"א נע בין 5 V לבין 25 V, ולא עשרות או מאות וולטים כמו בדיודות יישור. מאפיין ייחודי נוסף של הדפ"א הוא התלות של עוצמת האור הנפלט בזרם העובר דרך הדיודה (איור 4.29).



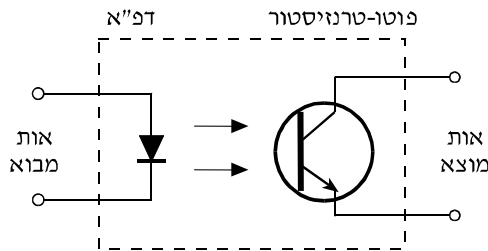
איור 4.28 אופיין של דפ"א



איור 4.29 תלות עוצמת האור שפולטת דפ"א בזרם החשמלי העובר בה

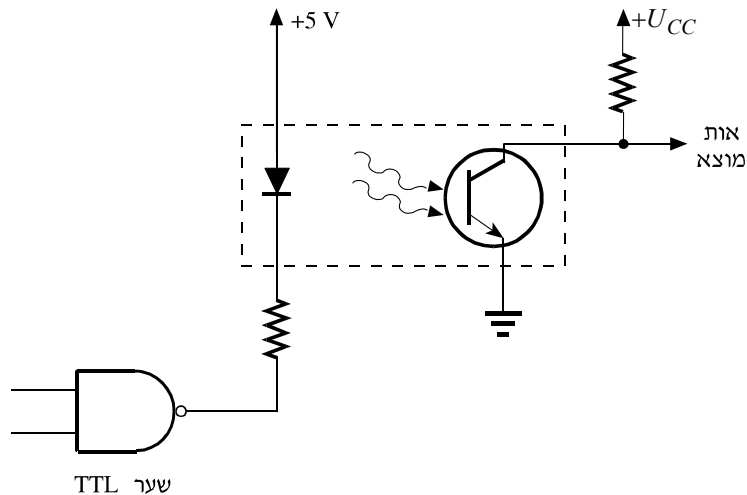
לדפ"א שימושים רבים ומגוונים במספר רב מאוד של התקנים ומערכות. כאן נזכיר שימוש אחד חשוב במערכות מדידה ובקרה: השימוש **במצמד אופטי** (Optocoupler). מצמד אופטי הוא

התקן הכולל את הדפ"א כמקור אור, ופוטו-דיודה (או פוטו-טרנזיסטור) כגלאי אור (איור 4.30).



איור 4.30 סימון חשמלי של מצמד אופטי

האות החשמלי במבוא המצמד גורם לזרם בדפ"א. כתוצאה מכך, הדיודה פולטת אור, המתגלה על-ידי הפוטו-טרנזיסטור. שינוי המתח בין הדקי הפוטו-טרנזיסטור גורם להפעלת התקן במוצא המצמד. בדרך זו, המצמד האופטי יוצר בידוד חשמלי מוחלט בין מעגל המבוא ומעגל המוצא (לכן, התקן זה נקרא גם מבודד אופטי). במקרים רבים המצמדים האופטיים מופעלים על-ידי שערים לוגיים. שער לוגי TTL מסוגל להפעיל ישירות את הדפ"א במצמד האופטי, כמתואר באיור 4.31.



איור 4.31 מצמד אופטי המופעל על-ידי שער TTL

שאלה 4.10

מהם היתרונות של השימוש במבודד אופטי בין מעגל לוגי הפועל בזרם נמוך, לבין מעגל הספק הפועל בזרם גבוה?

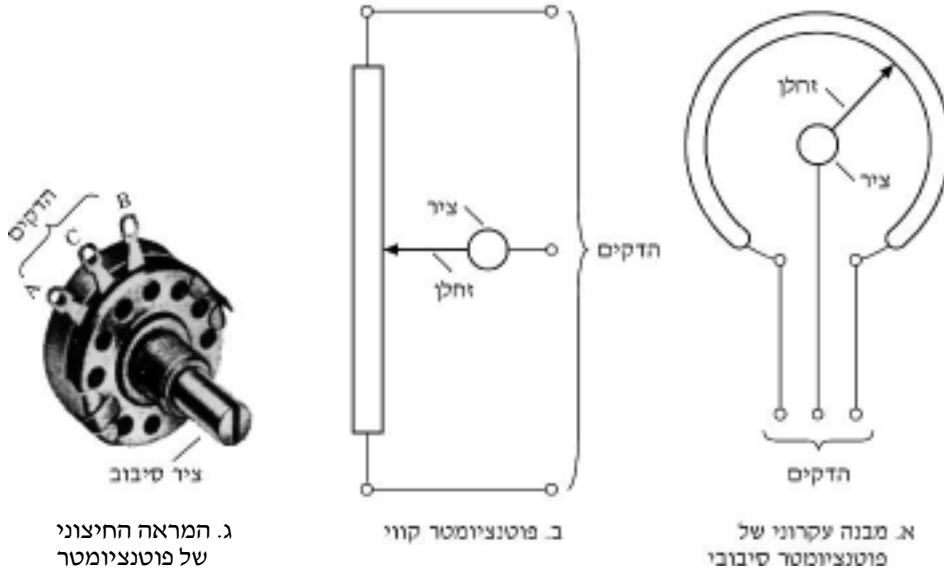
4.3 מתמרי תנועה

במערכות רבות חשוב למדוד את מצבו של גוף או את מקומו. לדוגמה, כאשר מודדים את גובהו של נוזל במכל בעזרת מצוף, מודדים למעשה את מקומו או גובהו של המצוף. דוגמה מורכבת יותר היא רובוט העובד בקו ייצור (למשל, במפעל מכוניות) ותפקידו להרכיב חלקים שונים במכונית; פעולתו מורכבת מתנועות שצריכות להתבצע בדיוק רב, ולכן צריכות גם להימדד בדיוק רב. עקרונית, קיימים שני סוגים של תנועה מכנית שאותה מעוניינים למדוד: תנועה קווית ותנועה סיבובית. בסעיף זה נכיר כמה שיטות למדידה ולהתמרה של תנועות מכניות.

4.3.1 מתמרים פוטנציומטריים

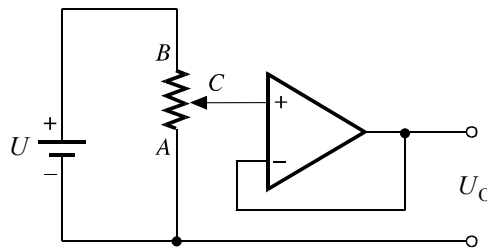
הפוטנציומטר (potentiometer) הוא רכיב שההתנגדות בין שניים מהדקיו תלויה במיקומו של חלק נע המצוי בו. הפוטנציומטר הוא המתמר הנפוץ ביותר להמרת תנועה מכנית לאות חשמלי. תיאור של פוטנציומטר מובא באיור 4.32.

באיור 4.32 אפשר לראות כי הפוטנציומטר הוא רכיב פשוט למדי, בעל שלושה הדקים. שניים מהם קבועים וההתנגדות ביניהם קבועה. ההדק השלישי מחובר למגע נייד. מגע זה נע על פני ההתנגדות הקבועה, ומכונה **זחלן**. ההתנגדות בין הדק הזחלן לכל אחד משני ההדקים האחרים תלויה במיקום הזחלן. על-פי התנגדויות אלה אפשר למדוד את מצב (מיקום) הזחלן. מודדים את התנועה הזוויתית (איור 4.32א) או הקווית (איור 4.32ב) של הזחלן. הפוטנציומטרים הסיבוביים פועלים לרוב בתחום זוויות מוגבל (כ-300 מעלות), אולם יש גם פוטנציומטרים רב-סיבוביים שאפשר לסובב את צירם כמה סיבובים.



איור 4.32 פוטנציומטרים

אפשר להמיר את שינויי ההתנגדות לאות חשמלי באמצעות מעגל חשמלי כדוגמת המעגל המתואר באיור 4.33.



איור 4.33 התמרה של התנגדות פוטנציומטר לאות חשמלי

ההתנגדות R_{AC} נמצאת ביחס ישר למיקום הזחלן. המתח במבוא הלא-מהפך של מגבר השרת נמצא ביחס ישר להתנגדות R_{AC} , לכן הוא מייצג את מיקום הזחלן. מגבר השרת משמש כחוצץ שאינו מעמיס את הפוטנציומטר ובמוצאו מתקבל מתח המוצא U_O .

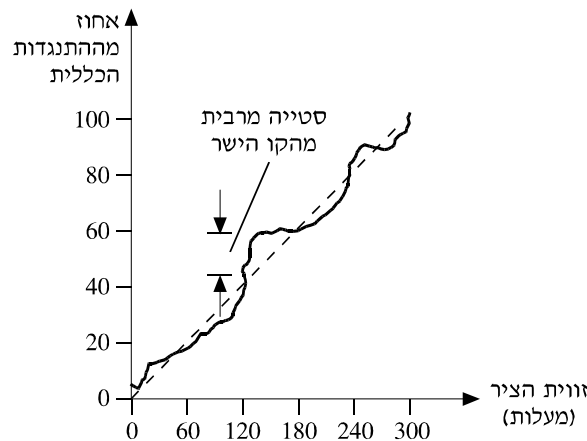
מבחינת המבנה קיימים שני סוגים עיקריים של פוטנציומטרים:

א. פוטנציומטר מלופף – הנגד בפוטנציומטר כזה הוא תיל מתכתי דק, המצופה בחומר מבודד ומלופף על גרעין העשוי אף הוא חומר מבודד (למשל גליל פלסטיק). הזחלן נע על-פני

הליפופים; לאורך מסלול תנועת הזחלן מסירים את בידוד התילים, והזחלן נוגע בכל פעם בליפוף אחר. פוטנציומטרים אלה הם בעלי התנגדויות נמוכות יחסית (עד כמה קילואומים). נפחם הוא לפחות כמה סמ"ק.

ב. פוטנציומטרים לא מלופפים – הנגד בפוטנציומטר כזה עשוי מרצועה של חומר בעל התנגדות סגולית גבוהה (לרוב פחם או חומר פלסטי מוליך) שעל פניה נע הזחלן. נפחם של פוטנציומטרים אלה הוא כמה מילימטרים מעוקבים. התנגדותם עשויה להגיע לכמה מגה אום.

רוב הפוטנציומטרים אמורים להיות ליניאריים, כלומר, התנגדותם אמורה להשתנות ביחס ישר למיקום (או לזווית) הזחלן. עם זאת, הליניאריות של פוטנציומטרים מעשיים אינה מלאה וקיימות סטיות ממנה, כמתואר באיור 4.34.



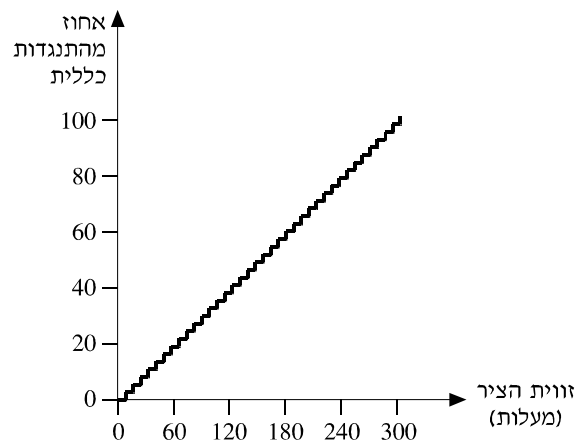
איור 4.34 הסטייה מן הליניאריות בפוטנציומטר מעשי

הסטייה מן הקשר הליניארי, באחוזים, שרשומה במפרט הרכיב, מתייחסת לנקודה הרחוקה ביותר מן הקו הישר האידיאלי, כמתואר באיור 4.34. זוהי אפוא הסטייה המרבית מן הקו הישר. הסטייה מהקו הישר היא אחד המאפיינים החשובים של הפוטנציומטר כמתמר, שכן אם אין מקוזים אותה היא מהווה שגיאת מדידה לכל דבר. עקרונית, כדי לדעת את הסטייה מהקו הישר, יש לבצע כיוול לכל פוטנציומטר בכל המצבים שלו. על-פי עקום הכיוול של הפוטנציומטר (כדוגמת העקום שבאיור 4.34) אפשר לדעת את הקשר האמיתי בין מיקום הזחלן לבין

ההתנגדות, אך ההזדקקות לעקום כיוול אינה נוחה ומסרבלת את השימוש בפוטנציומטר כמותר במערכת. לכן מעדיפים להימנע מכך, ולהשתמש בפוטנציומטר בעל רמת ליניאריות גבוהה. בפוטנציומטרים המשמשים כמתמרים, הסטייה מליניאריות היא בשיעור של 1% – 0.1% ובפוטנציומטרים מעולים מגיעה הסטייה ל-0.01%.

הליניאריות של פוטנציומטר המותקן במערכת אלקטרונית עלולה להיפגע עקב העומס המחובר להדק הזחלן שלו. כדי שהפגיעה בליניאריות תהיה מינימלית, התנגדות העומס הזה צריכה להיות גדולה מאוד בהשוואה להתנגדות הפוטנציומטר (כמו התנגדות המבוא של מגבר השרת שבאיור 4.33).

מאפיין חשוב נוסף של פוטנציומטר, הוא כושר ההבחנה שלו. בפוטנציומטרים מלופפים, הזחלן מדלג מליפוף אחד למשנהו, והקשר בין ההתנגדות למיקום מתואר באיור 4.35.



איור 4.35 תלות ההתנגדות של פוטנציומטר מלופף במיקום הזחלן

כפי שאפשר לראות, ההתנגדות "קופצת" בכל פעם שהזחלן עובר מליפוף אחד למשנהו. כושר ההבחנה הוא אפוא ערך ההתנגדות של ליפוף יחיד. ככל שהפוטנציומטר מורכב מליפופים רבים יותר, כושר ההבחנה שלו טוב יותר. ככל שהתיל המלופף דק יותר, כך אפשר להגדיל את מספר הליפופים ולשפר את כושר ההבחנה. הבעיה היא שאי אפשר לייצר תילים שקוטרם קטן מכמה עשרות מיקרונים, ולכן מספר הליפופים מוגבל לכמה אלפים.

בפוטנציומטרים לא מלופפים, תנועת הזחלן על רצועת ההתנגדות היא רציפה, ולכן כושר ההבחנה טוב מאשר בפוטנציומטרים מלופפים. כושר ההבחנה תלוי באיכות הזחלן, באיכות המגע בינו לבין רצועת ההתנגדות, ובאחידות של רצועת ההתנגדות.

למתמרים פוטנציומטרים, במיוחד כאלה שאינם מלופפים, יש אורך חיים מוגבל. הסיבה לכך היא החיכוך בין הזחלן לבין רצועת ההתנגדות. החיכוך גורם לשחיקת הרצועה, וזו גורמת לירידה בביצועי הפוטנציומטר עם הזמן.

פוטנציומטרים המשמשים כמתמרי תנועה במערכות בקרה מכונים **פוטנציומטרי סרוו**. הביצועים שלהם טובים יותר מאשר אלה של פוטנציומטרים רגילים, בעיקר מבחינת דיוק ההתנגדות, קלות התנועה (חיכוך מינימלי) ובלאי נמוך.

נסכם את תכונות פוטנציומטרי הסרוו:

יתרונות:

- רגישות, דיוק וכושר הבחנה טובים בהשוואה למתמרי תנועה אחרים.
- להפעלתם לא דרושים מתחים חיצוניים מיוחדים.
- קיימים פוטנציומטרים בעלי תחום התנגדויות רחב (אומים אחדים עד מגה אומים).
- תחום תנועה רחב: קיימים פוטנציומטרים שאפשר לסובב את הזחלן שלהם סביב ציר הסיבוב פעמים רבות (פוטנציומטרים רב-סיבוביים); קיימים פוטנציומטרים קוויים באורכים שבין מילימטרים אחדים לכמה עשרות סנטימטרים.
- מחירים זול.

חסרונות:

- בלאי גבוה בהשוואה למתמרי תנועה אחרים, ואורך חיים מוגבל.
- חיכוך סטטי הגורם לכך שכוח חלש הפועל על זחלן הפוטנציומטר אינו מזיז אותו.
- לאחר שימוש ממושך מתרחשת שחיקה מקומית מוגברת בקטעים מסוימים של רצועת ההתנגדות, וזו גורמת לאי-ליניאריות ולרעשים באות החשמלי בעת תנועת הזחלן.
- נגד העומס המחובר לפוטנציומטר מקטין את הרגישות ופוגע בליניאריות.
- דיוק נמוך יחסית.

4.11 שאלה

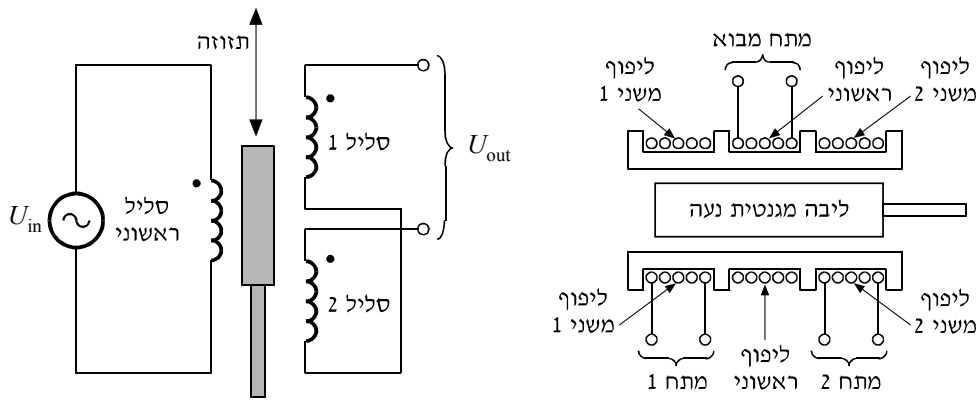
מהו כושר ההבחנה של פוטנציומטר של $1\text{ k}\Omega$ המורכב מאלף ליפופים? בטאו את כושר ההבחנה באחוזים מההתנגדות המלאה.

4.12 שאלה

זחלן הפוטנציומטר הסיבובי באיור 4.32 מסתובב בתחום של 270° . ההתנגדות בין שני ההדקים היא $2.7\text{ k}\Omega$. בטאו את הקשר $R(\alpha)$ בין ההתנגדות המשתנה לזווית α .

4.3.2* שנאי הפרשי משתנה קווי

דרך מקובלת אחרת למדידת תנועה קווית היא על-ידי שימוש בהשראות ההדדית בין סלילים של שנאי. ליתר דיוק, מנצלים את התלות של ההשראות ההדדית במיקום הליבה המשותפת של הסלילים. השנאי המשמש לכך מתואר באיור 4.36.



ב. תיאור חשמלי של השנאי

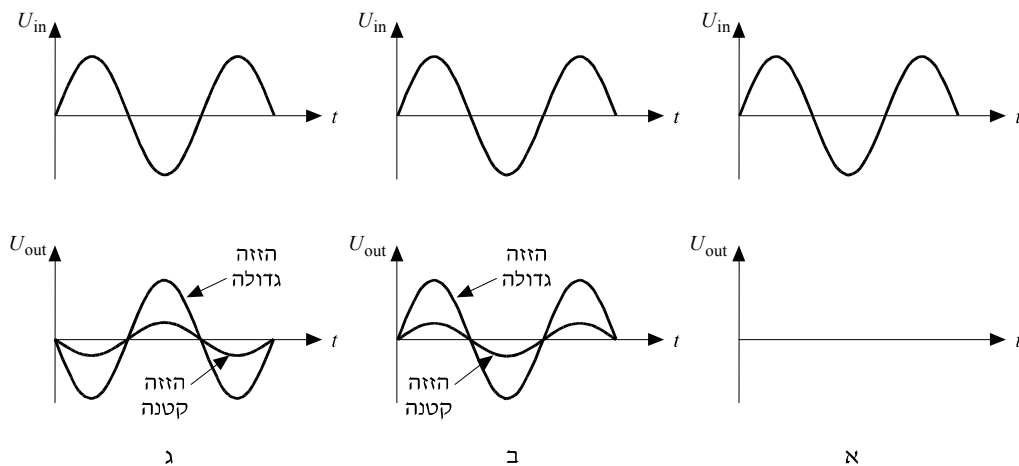
א. חתך לאורך השנאי

איור 4.36 שנאי הפרשי משתנה קווי (LVDT)

כפי שאפשר לראות באיור 4.36, לשנאי זה יש סליל ראשוני אחד ושני סלילים משניים זהים, המלופפים משני צדי הסליל הראשוני. מקום הנקודות ליד סמלי הסלילים המשניים באיור 4.36, מציינ כי כיוון הליפוף של שני הסלילים המשניים זהה. אל הסליל הראשוני מחברים מתח חילופין. הסלילים המשניים מחוברים בטור, ולכן מתח המוצא הוא הפרש בין מתחי הסלילים המשניים. שלושת הסלילים מלופפים על גליל חלול עשוי חומר

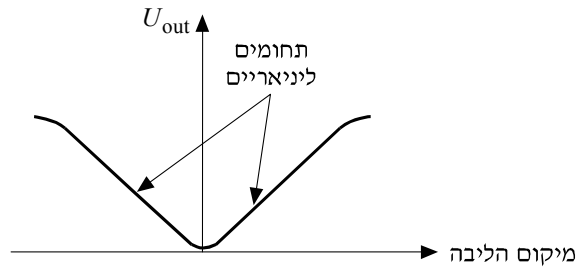
מבודד, שבתוכו נעה הליבה העשויה מחומר פרומגנטי (למשל ברזל). ליבה זו מחוברת באופן מכני לגוף שאת תנועתו מודדים. תנועת הליבה גורמת לשינוי מקדם הצימוד של השנאי, משום שהיא משנה את ההשראות ההדדית בין הסליל הראשוני לבין הסלילים המשניים. מכיוון ששני הסלילים המשניים מחוברים באופן המתואר באיור 4.36, מתח המוצא שנמדד בין הדקיהם הוא ההפרש בין מתחי החילופין המושרים בהם. מכאן שמו של רכיב זה – **שנאי הפרש משתנה קווי** (Linear Variable Differential Transformer, ובקיצור LVDT).

כאשר הליבה הנעה נמצאת בדיוק במרכז השנאי, המתחים המושרים בשני הסלילים המשניים שווים, כלומר, אות המוצא הוא אפס. כאשר הליבה נעה לאחד משני הכיוונים, גודלו של אות המוצא, כלומר, הערך המוחלט של הפרש המתחים, נמצא ביחס ישר לגודל התזוזה, ומופע אות המוצא – ביחס לאות המבוא – תלוי בכיוון התזוזה. אם הליבה נעה כלפי מעלה, כלומר, נכנסת עמוק יותר לתוך סליל 1 (ראו איור 4.36), המתח המושרה בסליל זה גדול מהמתח המושרה בסליל השני, ומופע אות המוצא זהה לזה של אות המבוא. כאשר הליבה נעה כלפי מטה, אות המוצא הפוך במופעו לאות המבוא. גרפים של אות המוצא בשלושת המצבים מופיעים באיור 4.37.



איור 4.37 אות המוצא של ה-LVDT כאשר:
 א. הליבה במרכז השנאי;
 ב. הליבה נעה כלפי מעלה;
 ג. הליבה נעה כלפי מטה.

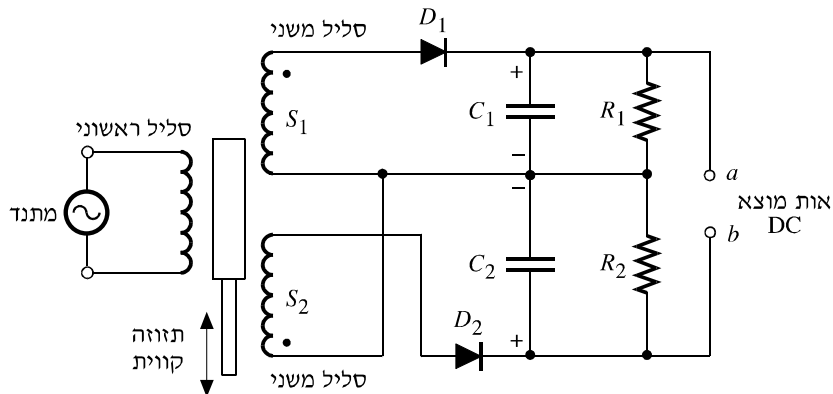
גודלו של מתח המוצא של ה-LVDT תלוי במיקום הליבה באופן המתואר באיור 4.38.



איור 4.38 מתח המוצא של ה-LVDT בתלות במיקום הליבה

אפשר לראות כי לגרף יש תחומים ליניאריים גדולים. כאשר הליבה נמצאת בדיוק במרכז, מתח המוצא אינו אפס, והגרף אינו ליניארי. הסיבה לכך היא הקושי לייצר LVDT בעל זוג סלילים משניים זהים, שיוצרים מתחים בעלי מופעים הפוכים בדיוק.

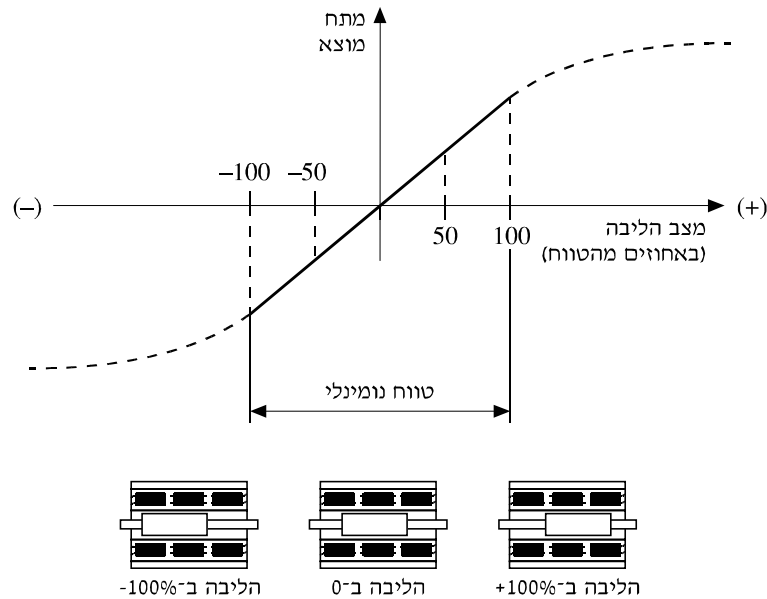
כאשר דרוש שאות המוצא של שנאי ההפרש יהיה אות מתח ישר, יש להוסיף למעגל גלאי (Demodulator), כמתואר באיור 4.39:



איור 4.39 שנאי LVDT במעגל התמרה למתח ישר

המעגל פועל כך: המתנד יוצר מתח חילופין בסליל הראשוני של המעגל. תנועת הליבה יוצרת מתח חילופין מושרה בסלילים המשניים כמתואר באיור 4.37. הדיודות מסננות את החלקים השליליים של אותות המתח בסלילים המשניים. הקבל C_1 נטען עד לשיא של חלקו החיובי של אות המתח בסליל S_1 , והקבל C_2 נטען עד לשיא של אות המתח בסליל S_2 . הנגדים R_1 ו- R_2 הם בעלי התנגדות גבוהה מאוד, ומיועדים לאפשר את פריקת הקבלים.

כאשר $U_{C_2} < U_{C_1}$ מתקבל במוצא מתח ישר, כאשר הפוטנציאל בנקודה a חיובי ביחס לפוטנציאל בנקודה b . במצב ההפוך ($U_{C_2} > U_{C_1}$) מתקבלת קוטביות הפוכה. לכן במוצא המתמר מתקבל מתח ישר בעל קוטביות התלויה במיקום הליבה, כמתואר באיור 4.40.



איור 4.40 תלות מתח המוצא של מתמר LVDT במצב הליבה במעגל שבאיור 4.39

תחום המדידה האופייני של ה-LVDT (כלומר, התחום שבו מותר לליבה לנוע והתגובה היא ליניארית) הוא סנטימטרים אחדים. המתח המסופק לסליל הראשוני הוא וולטים אחדים ותדירותו היא בין 50 Hz לבין 20 kHz בערך.

נעמוד על כמה מהשיקולים לבחירת התדר.

בתדרים נמוכים מדי קיימים החסרונות הבאים:

- השראות הסלילים קטנה והעכבה שלהם קטנה גם היא. כתוצאה מכך מתבזבז הספק רב על הסלילים והם מתחממים.
- רגישות ה-LVDT קטנה.
- כוחות מגנטיים חזקים פועלים על הליבה. הדבר גורם להפרעות מכניות במערכת שבה מותקן ה-LVDT.

בתדרים גבוהים מדי גדלים זרמי המערבולת המושרים בחלקים המוליכים של המתמר וגורמים לתחממות; כמו-כן גדלה השפעתם של קיבולים טפיליים המצויים במתמר. התדר המקובל ב-LVDT הוא כמה קילוהרץ.

יתרונותיו הבולטים של ה-LVDT הם:

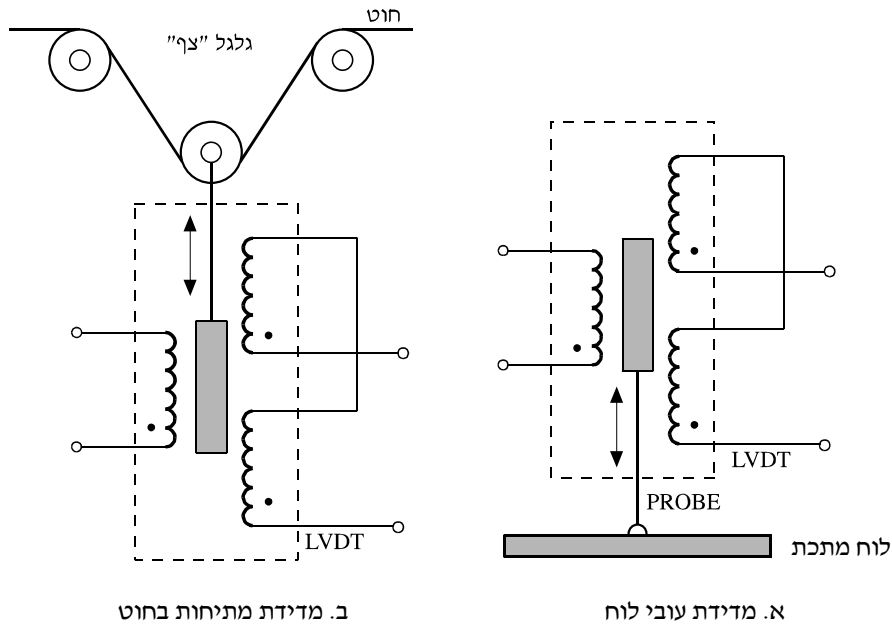
- א. בלאי קטן ביותר ואורך חיים גדול.
- ב. אין חיכוך סטטי.
- ג. פעולה רציפה וליניארית.
- ד. רגישות גבוהה.
- ה. מחזיר סביר.

חסרונותיו הבולטים:

- א. תחום התנועה מוגבל לכמה סנטימטרים.
- ב. יש לחבר מקור מתח חילופין מיוחד, לרוב בתדר של כמה קילוהרץ, ויש צורך בממיר מ-AC ל-DC כדי שאפשר יהיה לחברו במערכות הבקרה המקובלות.

לסיכום, נציין כי ה-LVDT משמש לא רק למדידת תנועה קווית כשלעצמה, אלא גם למדידת ערכים פיסיקליים של גדלים הנגזרים ממדידת תנועה קווית.

באור 4.41 מתוארים שימושים בשנאי הפרש למדידת עובי של לוח מתכת למדידת כוח המתיחות (Tension) בחוטים במערכת גלגילות.

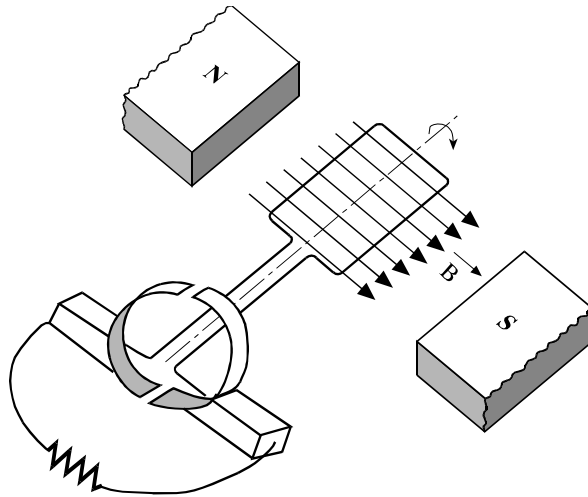


איור 4.41 שימושים אופייניים של LVDT

4.3.3 טכומטר חשמלי (טכוגנרטור)

הטכומטר הוא התקן המשמש למדידת מהירות הסיבוב של גופים. טכוגנרטור הוא טכומטר שמתח המוצא שלו נמצא ביחס ישר למהירות הסיבוב של הציר שלו. את ציר הטכוגנרטור מחברים אל ציר הגוף שאת מהירותו הסיבובית רוצים למדוד (לכן טכומטר זה נקרא "טכומטר מגע"). בעיקרון, הטכוגנרטור פועל כמו כל מחולל זרם היוצר כא"מ מושרה באמצעות שינוי השטף המגנטי העובר דרך מוליך.

באיור 4.42 מתואר מחולל חשמלי פשוט הבנוי מכריכה אחת הסובבת בשדה מגנטי קבוע.



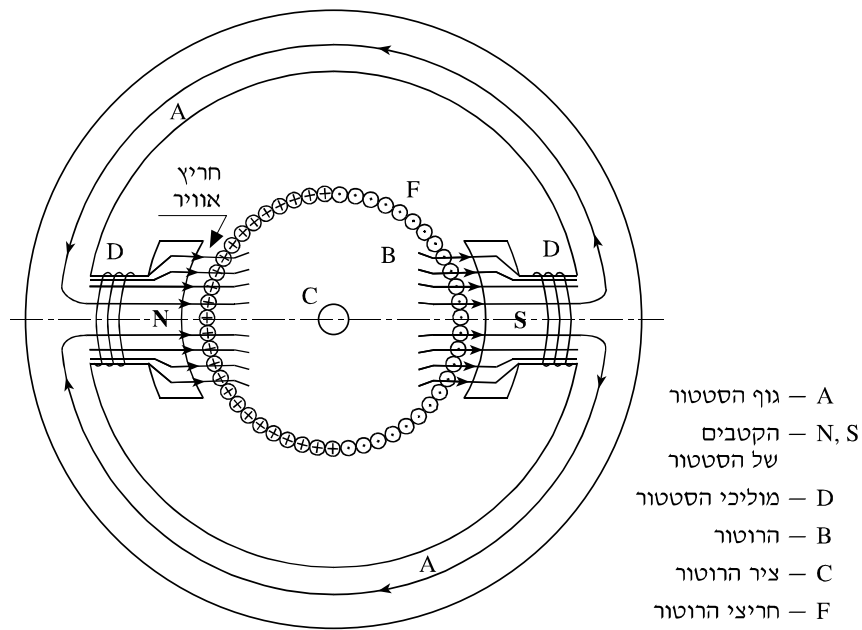
איור 4.42 מחולל חשמלי פשוט

הכא"מ במחולל כזה נוצר כתוצאה מכך שהשטף המגנטי העובר דרך הכריכה משתנה בזמן סיבובה. את כריכת המחולל מסובבים באמצעות כוח חיצוני, הגורם לכריכה להסתובב במהירות קבועה. הכריכה מחוברת למעגל חשמלי חיצוני, וכך אפשר למדוד את הכא"מ שנוצר בין קצותיה.

פעולת המחולל הפוכה לפעולת המנוע החשמלי. במנוע משתמשים בכא"מ ובזרם שהכא"מ יוצר בכריכה הנמצאת בשדה מגנטי, כדי לגרום לסיבוב של כריכה; ואילו במחולל מסובבים כריכה

בשדה מגנטי כדי ליצור כא"מ (את המבנה ועקרון הפעולה של מנוע חשמלי נתאר בפירוט בפרק 5).

טכוגנרטור מעשי מורכב מסליל עם כריכות רבות שמסתובב בשדה מגנטי. השדה נוצר על-ידי מגנט קבוע או על-ידי אלקטרומגנט (הסטטור). הסליל מלופף בצורה מיוחדת על גבי חומר פרומגנטי העשוי בצורת גליל עם חריצים. הסליל המסתובב נקרא רוטור (איור 4.43).

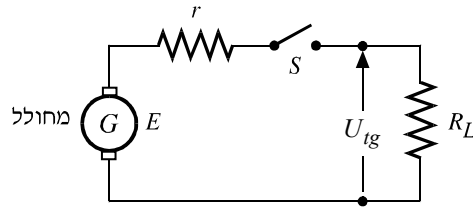


איור 4.43 חתך רוחב במחולל מעשי

מתורת החשמל ידוע כי הכא"מ E של מחולל הפועל בריקם נמצא ביחס ישר למהירות הסיבוב ω של כריכות הסליל:

$$(4-7) \quad E = K_{tg} \cdot \omega$$

K_{tg} הוא מקדם שערכו משתנה ממחולל למחולל. מכאן שהמחולל פועל כמד מהירות סיבובית. כדי להבטיח תלות ליניארית של E ב- ω , דרוש שהמעגל המחובר למחולל יהיה בעל התנגדות גבוהה מאוד. את המחולל והמעגל החיצוני המחובר אליו ניתן לתאר באמצעות מעגל שקול כדוגמת המעגל שבאיור 4.44.



איור 4.44 מעגל חשמלי המתאר מחולל וצרכן

R_L היא ההתנגדות של המעגל המחובר למוצא המחולל, ו- r היא ההתנגדות הפנימית של המחולל. בריקס (כאשר המפסק פתוח) המחולל יוצר מתח E הנמצא ביחס ישר למהירות הסיבוב ω . כאשר המפסק סגור, המתח U_{ig} שווה למכפלת הזרם במעגל החיצוני, i_L , בהתנגדותו של מעגל זה:

$$i_L = \frac{E}{R_L + r}$$

$$U_{ig} = i_L \cdot R_L = E \frac{R_L}{R_L + r}$$

כלומר, $U_{ig} < E$ כאשר זורם זרם במעגל החיצוני.

דוגמה 4.5

טכונגרטור מפיק מתחים בתחום 0 V עד 12 V כאשר הוא פועל בריקס בתחום המהירויות 0-1500 rpm. נתוני המעגל (איור 4.44) הם: $r = 50 \Omega$, $R_L = 2000 \Omega$.

א. איזה מתח מפיק הטכונגרטור הפועל בריקס, במהירות של 1000 rpm?

ב. איזה מתח מפיק הטכונגרטור במהירות של 1000 rpm כאשר הוא מועמס?

ג. התייחס לדיוק המתמר המועמס על-ידי חישוב של שלושה סוגי שגיאת המדידה. (מוחלט, יחסית לערך האמיתי, ויחסית לסקלה מלאה).

פתרון

א. נחשב את הגבר הטכונגרטור K_{ig} :

$$K_{ig} = \frac{12 - 0}{1500 - 0} = 0.008 \frac{\text{V}}{\text{rpm}}$$

במהירות של 1000 rpm ללא עומס, נקבל את המתח E :

$$E = K_{ig} \cdot 1000 = 0.008 \cdot 1000 = 8 \text{ V}$$

ב. המתח שמפיק הטכוגנרטור במהירות של 1000 rpm כאשר הוא מועמס :

$$U_{tg} = E \cdot \frac{R_L}{r + R_L} = 8 \cdot \frac{2000}{2000 + 50} = 7.8 \text{ V}$$

ג. 1. שגיאת המדידה המוחלטת ביחס לערך הנמדד :

$$e = 8 - 7.8 = 0.2 \text{ V}$$

2. שגיאת המדידה באחוזים ביחס לערך האמיתי :

$$e(\%) = \frac{8 - 7.8}{8} \cdot 100 = 2.5\%$$

3. שגיאת המדידה באחוזים ביחס לסקלה המלאה :

$$e(\%) = \frac{8 - 7.8}{12} \cdot 100 = 1.67\%$$

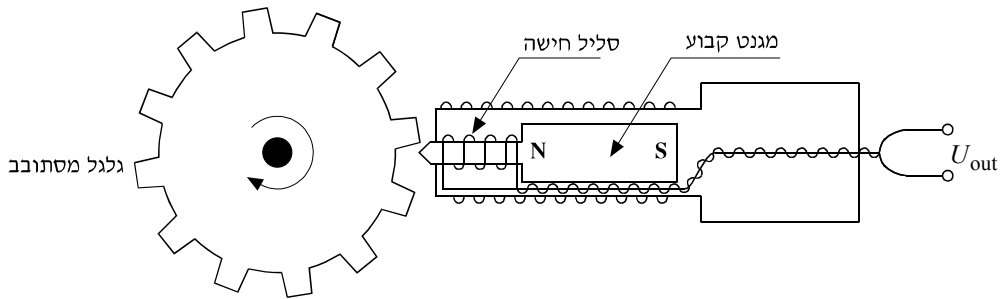
שאלה 4.13

התייחסו לטכוגנרטור המתואר בדוגמה 4.5.

1. הטכוגנרטור מועמס ב-2000 Ω ומפיק מתח של 5.6 V. מהי מהירות הסיבוב?
2. במהירות של 1200 rpm מפיק הטכוגנרטור מתח של 9.2 V. מהי התנגדות המעגל המחובר אליו?
3. מהי שגיאת המדידה (באחוזים) ביחס לערך האמיתי בחישוב שבסעיף (2) לעיל?

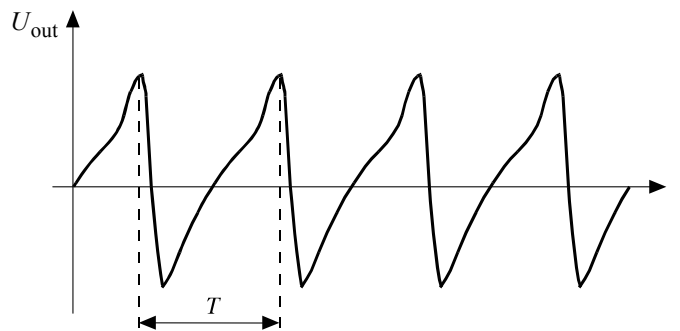
*4.3.4 טכומטר מגנטי ספרתי (Magnetic Pickup)

מד-מהירות זה שייך לקבוצת המתמרים שבהם אין מגע פיסי בין ההתקן לבין הגוף שאת מהירותו הסיבובית ההתקן מודד (ולכן הוא נקרא גם "טכומטר ללא מגע"). עקרון הפעולה של טכומטר מגנטי ספרתי דומה לעקרון הפעולה של מתמר LVDT: מדידת השינויים בשדה מגנטי כאשר חומר פרומגנטי נע דרכו. ההתקן בנוי ממגנט קבוע ועליו מלופף סליל שקצותיו מחוברים למעגל הגברה (איור 4.45). על ציר הגוף שאת מהירותו הסיבובית מודדים, מרכיבים גלגל העשוי חומר פרומגנטי שבהיקפו חרוטות מספר "שיניים". מצביים את המגנט עם הסליל מול הגלגל המסתובב (איור 4.45).



איור 4.45 תיאור כללי של טכומטר מגנטי ספרתי

כאשר הגלגל מסתובב, משתנה עוצמת השדה המגנטי בסביבת המגנט: העוצמה גדולה כאשר שן מתקרבת למגנט, וקטנה כאשר השן מתרחקת ממנו. כתוצאה מהשינוי בשדה המגנטי נוצר בין קצות הסליל מתח חילופין המשתנה באופן מחזורי בזמן (איור 4.46).



איור 4.46 אות מתח אופייני שמתקבל מטכומטר מגנטי המשמש למדידת מהירות סיבובית

T הוא זמן המחזור של מתח החילופין (זמן של דופק יחיד) המתאר את הזמן שבו שן אחת בגלגל התקרבה והתרחקה מהמגנט. על-פי מספר השיניים בגלגל ומספר הדפקים בדקה, ניתן לחשב את מהירות הסיבוב של הגלגל.

שאלה 4.14

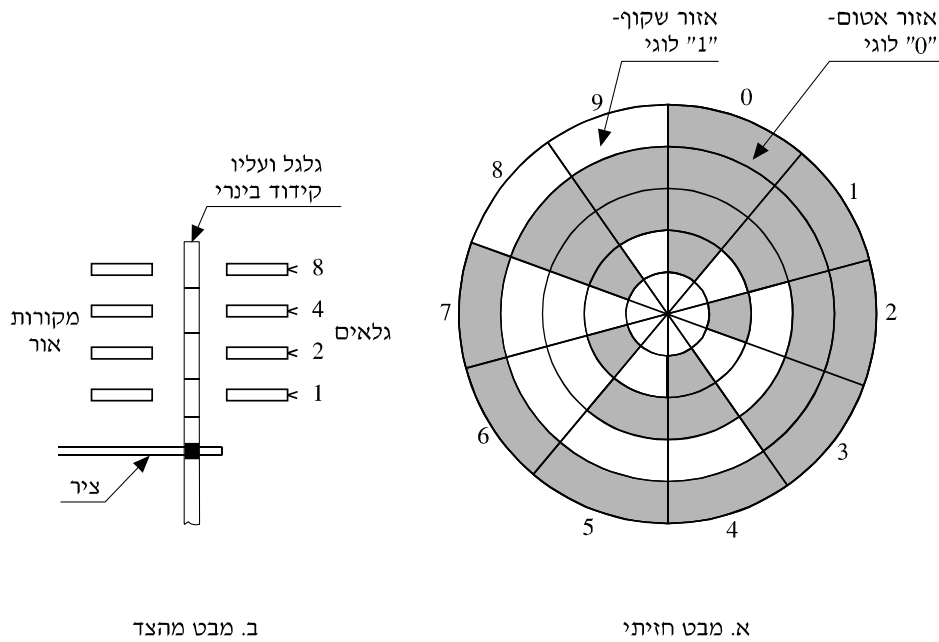
המרחק במעלות בין שן לשן בגלגל המשונן הוא 11.25° .

1. כמה שיניים יש בגלגל?
2. כמה דופקי מתח יתקבלו במוצא הטכומטר בזמן סיבוב מלא אחד?
3. נמדדו עשרה דפקים בפרק זמן של 50 ms . מהי מהירות הסיבוב (בסיבובים לדקה)?

4.3.5 מקודדים אופטיים (Optical Encoders)

מקודדים אופטיים משמשים למדידת המיקום הזוויתי או מהירות הסיבוב של גופים. המדידה מתבצעת על-ידי ספירת הדפקים החשמליים הנוצרים על-ידי גלאי אור. לכן, התקנים אלה מתאימים במיוחד לשילוב במערכות בקרה ממוחשבות שבהן מעוניינים להתמיר את הגודל הפיסיקלי הנמדד לאות חשמלי ספרתי.

באיור 4.47 מתואר מקודד אופטי בעל מוצא של ארבע סיביות.



איור 4.47 מקודד אופטי של ארבע סיביות בעל עשר גזרות

מקודד אופטי מורכב משני חלקים עיקריים:

א. שורת מקורות אור ומולם גלאים. מקורות האור הם לרוב מסוג דפ"א. הגלאים מבוססים על פוטו-דיודות או פוטו-טרנזיסטורים, היוצרים זרם שתלוי בעוצמת האור שאליו הם נחשפים.

ב. גלגל הסתרה החוצץ בין מקורות האור לגלאים. הגלגל מחובר במרכזו לציר הגוף שאת מצבו או את מהירות הסיבוב שלו רוצים למדוד.

גלגל ההסתרה (איור 4.47א) מחולק לגזרות, ובכל גזרה "רשום" בעזרת חריצים מספר בינרי. המספרים הבינריים המופיעים על הגזרות הם עוקבים; הסתרה של האור מייצגת רמה של '0' לוגי, והעברה של האור מייצגת רמה של '1' לוגי. כאשר הגלגל מסתובב, רק הגלאים הנמצאים מול חריצים נחשפים לאור. כל גזרה גורמת אפוא לחשיפה שונה של הגלאים. מאחר שכל גזרה בגלגל מתאימה למספר בינרי מסוים בעל ארבע סיביות, הגלאים המוארים מייצגים את זווית הגלגל ברגע החשיפה.

כאשר מהירות הסיבוב של הגלגל גבוהה, כל גלאי הנמצא מול חריץ נחשף לאור לפרק זמן קצר. הגלאי חייב להגיב בזמן קצר זה, שאם לא כן, המידע במוצא הגלאי לא יהיה נכון. אופן התכנון של המקודד האופטי קובע מהי מהירות הציר המרבית שבה אפשר עדיין להמיר מידע. ככל שמספר הגזרות עולה, כך ניתן להגדיל את מספר החריצים בגזרה. עם זאת, יש לזכור כי ככל שגדל מספר החריצים בגזרה כך הם קטנים יותר, וחריץ קטן גורם לגלאי להיחשף לאור לזמן קצר יותר.

דוגמה 4.6

מהמקודד האופטי 4 סיביות המתואר באיור 4.47 ניתן לקבל 10 מספרים בינריים שונים שכל אחד מהם בן 4 סיביות. רשמו את המספרים הללו בסדר עולה.

פתרון

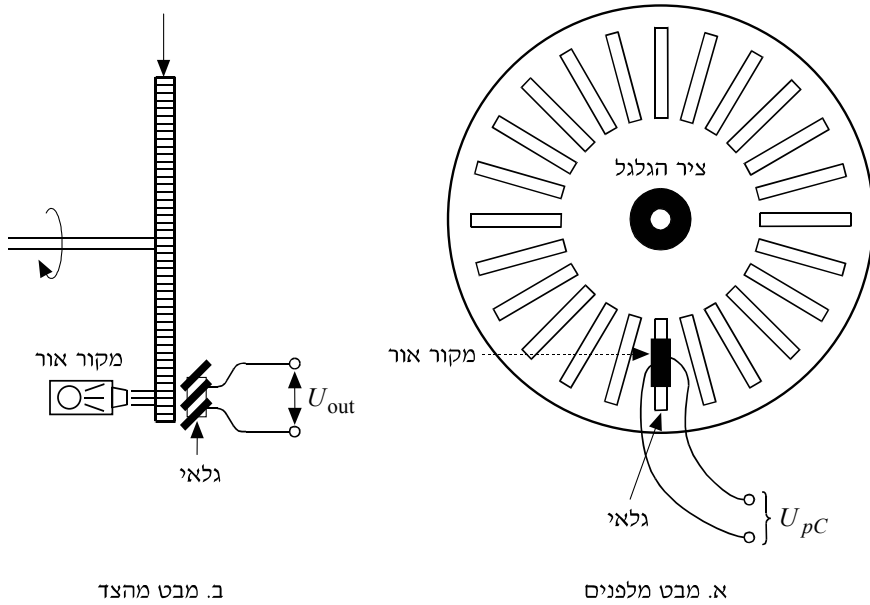
אזור אטום מייצג את הסיבית 0, וחריץ מייצג את הסיבית 1. לכן הגזרה "0" מייצגת את המספר 0000, הגזרה "1" את המספר 0001, וכו'. עשרת המספרים הם אפוא 1001, 1010, 1011, 0100, 0101, 0010, 0011, 0001, 0000.

דוגמה 4.7

מקודד אופטי של שתי סיביות בנוי מגלגל ובו 36 גזרות זהות שבכל אחת מהן יש חריץ יחיד (איור 4.48).

א. מהו כושר ההבחנה (Resolution) במעלות של המקודד? מרגע תחילת הסיבוב ועד סיומו נספרו 24 דפקים. מהו מצבו הזוויתי של הגוף המסתובב בתום הסיבוב?

ב. מדדו 10 דפקים בפרק זמן של 25 ms. מהי מהירות הסיבוב ביחידות של "סיבובים לדקה" (rpm)?



איור 4.48 מקודד אופטי של שתי סיביות

פתרון

א. מקודד אופטי בעל חריץ אחד בכל גזרה (2 סיביות) יוצר, באמצעות גלאי יחיד, דפקים של מתח (on-off) בתדר הנקבע על-ידי מספר הגזרות ומהירות הסיבוב של הגלגל.

סיבוב מלא של 360° גורם לקבלת 36 דפקים, ולכן דופק אחד נגרם על-ידי סיבוב של:

$$R = \frac{360^\circ}{36} = 10^\circ$$

כושר ההבחנה של טכומטר זה הוא אפוא 10° .

בתום הסיבוב הזוויתי שבו נספרו 24 דפקים, הגלגל הסתובב בזווית α שערכה:

$$\alpha = 24 \cdot \frac{360^\circ}{36} = 240^\circ$$

ב. בדקה אחת יש 60 אלף מילישניות (60,000 ms). לכן מספר הדפקים במשך דקה אחת הוא :

$$n = 60,000 \cdot \frac{10}{25} = 24,000$$

סיבוב אחד גורם לקבלת 36 דפקים, ולכן המהירות הסיבובית n היא :

$$n = \frac{24,000}{36} = 667 \text{ rpm}$$

מהדוגמה האחרונה אנו למדים כי מהירות הסיבוב של מקודד שתי סיביות (בסיבובים לדקה) נתונה על-ידי :

$$(4-8) \quad n = \frac{f}{N}$$

כאשר f הוא תדר הדפקים הנמדד בדפקים לדקה, ו- N הוא מספר הגזרות בגלגל ההסתרה.

4.8 דוגמה

במקודד האופטי שבאיור 4.47, רוחב החריצים הוא 0.25 mm. החריצים נמצאים במרחקים של 2 mm עד 4 mm מציר הסיבוב.

חשבו את תדר הסיבוב המרבי של הגלגל שבו עדיין אפשר לבצע התמרה, אם זמן התגובה של הגלאים הוא $1 \mu\text{s}$.

פתרון

המהירות הקווית עולה ככל שמתרחקים מציר הסיבוב. הקשר בין המהירות הקווית של נקודה הנמצאת במרחק r מהציר, לבין התדר הזוויתי שלה ω (ביחידות של רדיאנים/שנייה) נתון על-ידי $v = \omega \cdot r$. עבור החריצים שמרחקם r מהציר הוא הגדול ביותר, מהירות הסיבוב תלויה בתדר הסיבוב f , ונתונה על-ידי :

$$v = \omega \cdot r = 2\pi f \cdot r = 2\pi f \cdot 0.004 = 0.025 f$$

מהירות הסיבוב המרבית המותרת נתונה בקירוב על-ידי רוחבו של חריץ מחולק בזמן התגובה של גלאי:

$$v = \frac{0.25 \text{ mm}}{1 \mu\text{s}} = 250 \text{ m/s}$$

התדר המרבי הוא אפוא:

$$f = \frac{v}{0.025} = 10 \text{ kHz}$$

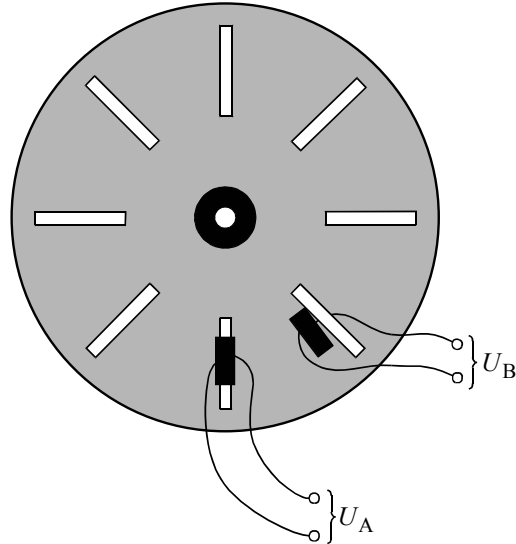
תדר סיבוב זה גבוה מתדר הסיבוב המרבי של מכלולים מכניים תעשייתיים, ולכן המקודד האופטי שבדוגמה זו מתאים למדידת כל מהירות סיבוב מעשית.

למקודד האופטי יש שני יתרונות חשובים:

א. יציבות גבוהה – מאחר שהקריאה ספרתית, היא אינה תלויה למעשה בעוצמת מקורות האור או ברגישות הגלאים. כמו-כן, תכונות הגלגל המקודד אינן משתנות עם הזמן. גורמים אלה מקטינים מאוד את רגישות המקודד לסחיפות ורעשים, והתוצאה היא יציבות גבוהה.

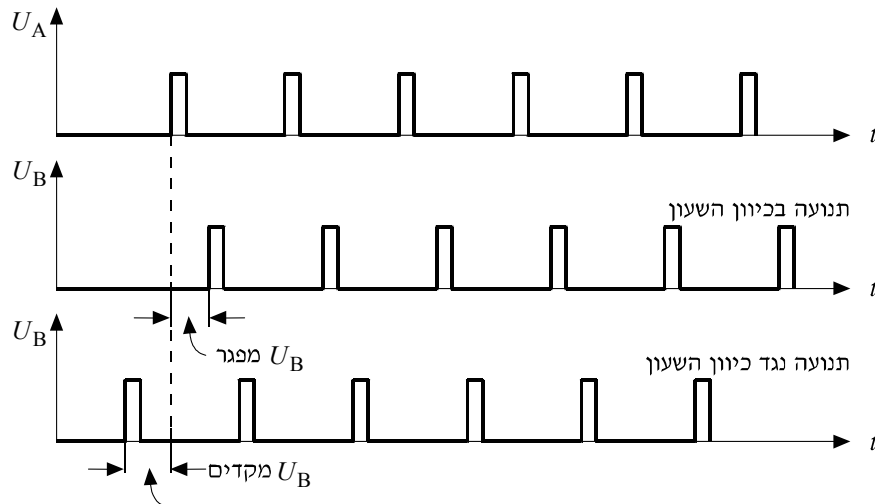
ב. התאמה לשימושים ספרתיים – מאחר שהמקודד האופטי מפיק אות מוצא ספרתי, אין צורך בהמרה אנלוגית-ספרתית (A/D) כשמשלבים אותם במערכות ספרתיות.

החיסרון הבולט של המקודד האופטי הוא, שלא ניתן לקבוע באמצעותו את כיוון הסיבוב של הגוף שאת מהירותו הזוויתית (או מצבו) מודדים. ניתן להתגבר על חיסרון זה על-ידי הוספת גלאים. בעיקרון, למקודד שתי סיביות דרוש גלאי אחד. על-ידי שימוש בשני גלאים A ו-B המוצבים כמתואר באיור 4.49, ניתן לדעת את כיוון התנועה על-פי הפרש המופע בין שתי סדרות הדפקים הנוצרות על-ידי הגלאים.



איור 4.49 מקודד אופטי "שתי סיביות" עם שני גלאים למדידת מהירות התנועה וכיוונה

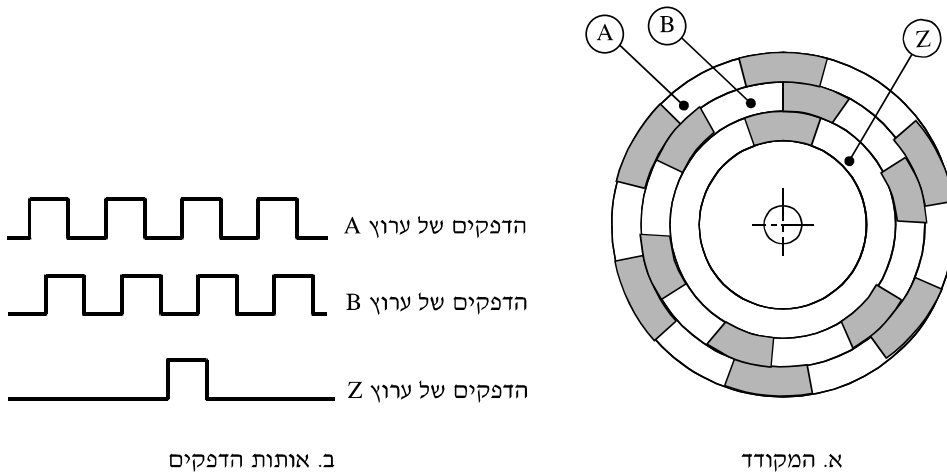
כאשר הגלגל מסתובב בכיוון השעון, סדרת הדפקים של הגלאי B (U_B) מפגרת אחר סדרת הדפקים של גלאי A (U_A). לעומת זאת, כאשר הגלגל מסתובב נגד כיוון השעון, הסדרה U_B מקדימה את הסדרה U_A . הדפקים המתקבלים מתוארים באיור 4.50.



איור 4.50 אותות המתקבלים מהמקודד האופטי המתואר באיור 4.49: U_A הוא המתח מהגלאי A, U_B הוא המתח מהגלאי B

פתרון אחר לבעיית מציאת הכיוון של התנועה הוא חלוקת הגלגל לגזרות בצורה לא-סימטרית, כאשר הגזרות ש"רואה" גלאי אחד מוזזות יחסית לגזרות ש"רואה" גלאי אחר. איור 4.51 מדגים זאת עבור מקודד שתי סיביות הכולל שני גלאים A ו-B (הגלאי Z הממוקם מול החריץ הבודד משמש לקביעת נקודת הייחוס לספירה, zero index).

הגזרות של ערוץ B מוזזות ברבע מחזור יחסית לגזרות של ערוץ A. כתוצאה מכך, יש הפרש מופע של רבע מחזור בין האותות המחזוריים המתקבלים משני הערוצים בזמן סיבוב הגלגל (איור 4.51 ב).



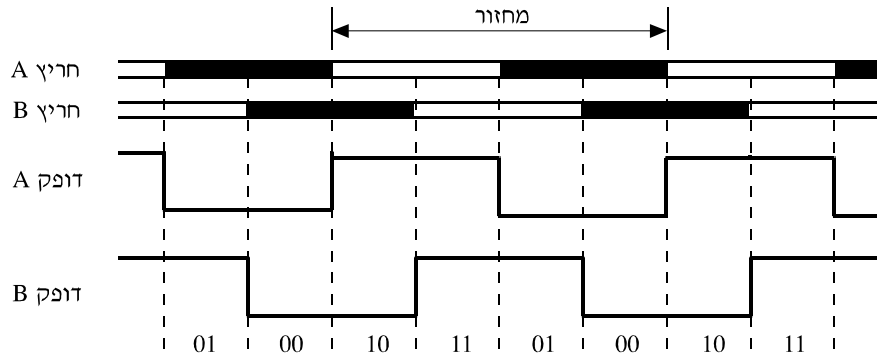
איור 4.51 מקודד אופטי בעל גזרות א-סימטריות

ניתן להראות כי כאשר הסיבוב הוא בכיוון השעון, המספרים הבינריים בני שתי הספרות בכל מחזור מתקבלים בסדר הבא (איור 4.52):

$$00 \rightarrow 10 \rightarrow 11 \rightarrow 01 \rightarrow 00$$

וכאשר הסיבוב הוא נגד כיוון השעון, סדר המספרים בכל מחזור הוא:

$$00 \rightarrow 01 \rightarrow 11 \rightarrow 10 \rightarrow 00$$



איור 4.52 מצב החריצים והדפקים המתקבלים כתוצאה מסיבוב המקודד האופטי האסימטרי (איור 4.51) בכיוון השעון

היות שכל מחזור מאפשר להבחין בין ארבעה מצבים, כושר ההבחנה של מקודד 2 סיביות זה שווה למספר הגזרות מחולק בארבע. למשל, במקודד דו-ערוצי (2 סיביות) בעל 36 גזרות כושר ההבחנה הוא:

$$R = \frac{360}{36 \cdot 4} = 2.5^\circ$$

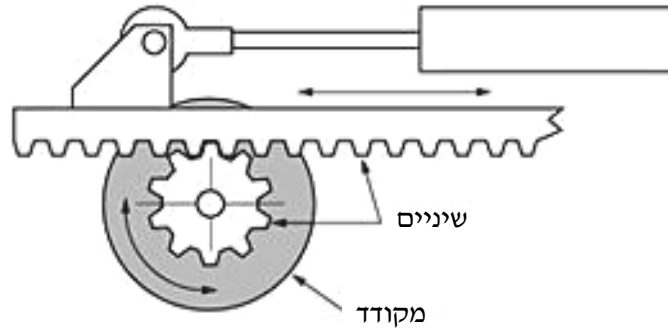
שאלה 4.15

מודדים תנועה זוויתית בעזרת מקודד אופטי של 3 סיביות בעל 2^3 גזרות (כלומר, 8 ערוצים). הזווית "0" מוגדרת על-ידי המילה הבינרית 000. מערכת המדידה קלטה את המילה הבינארית 101. מהי הזווית הרגעית במצב זה?

שאלה 4.16

במערכת לבקרת תנועה מכנית משתמשים במקודד אופטי של n סיביות. המקודד מורכב על גלגל שיניים. הגלגל מחובר לסרגל שיניים שאת תנועתו מודדים (איור 4.53).

בגלגל השיניים יש 48 שיניים, והמרחק בין שן לשן הוא 0.5 cm (בסרגל וגם בגלגל). מערכת המדידה צריכה להבחין בתנועת סרגל מינימלית של 0.3 cm. מהו מספר הסיביות n (מספר הערוצים) הנדרש?



איור 4.53 איור לשאלה 4.16

שאלה 4.17

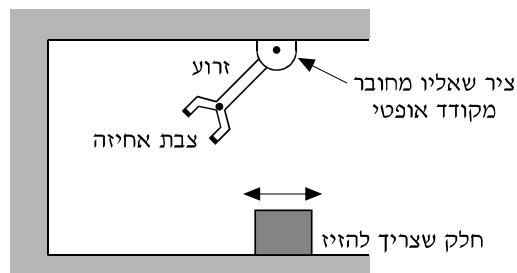
זרוע של רובוט מסתובבת סביב ציר שעליו מורכב מקודד אופטי, כמתואר באיור 4.54.

אורך הזרוע מטר אחד, ועליה להזיז חלקים בדיוק של עשירית מ"מ.

א. מהו מספר הגזרות המינימלי הנדרש במקודד, אם המקודד מתוכנן לפעול בתחום זוויות של 360° ?

ב. מהו מספר הסיביות במקודד?

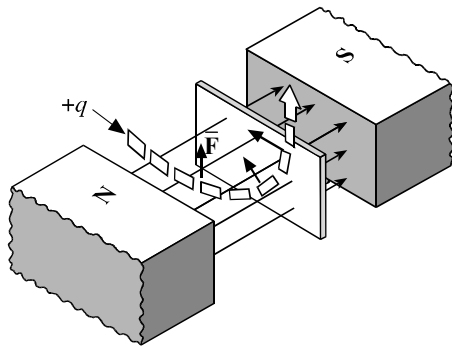
ג. הציעו דרך לשימוש במקודד פשוט יותר אם נדרשת תנועה לאורך 10 cm בלבד. כמה סיביות דרושות כעת?



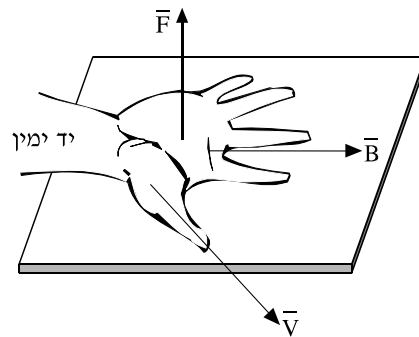
איור 4.54 איור לשאלה 4.17

4.3.6* גלאי שדה מגנטי ושימושיו

הגלאי הנפוץ ביותר כיום למדידת העוצמה של שדה מגנטי מבוסס על התופעה הפיסיקלית הקרויה תוצא הול (Hall Effect). תוצא הול נובע מאחד החוקים הידועים ביותר בתורת החשמל – חוק לורנץ. חוק לורנץ טוען כי כאשר חלקיק טעון נע במהירות \vec{V} בשדה מגנטי \vec{B} , פועל עליו כוח \vec{F} המאונך למישור הנוצר על-ידי הווקטורים \vec{V} ו- \vec{B} (איור 4.55א, כלל הימנית). כתוצאה מכוח לורנץ חלקיק הטעון חיובית והנע בקו ישר לאזור ריק שבין שני קטבים מגנטיים (איור 4.55ב), מוסט ממסלולו הישר ונע בתנועה מעגלית (החץ העבה המראה את כיוון התנועה באיור 4.55ב מצביע כלפי מעלה. הכוח \vec{F} ניצב בכל רגע למהירות \vec{V}).



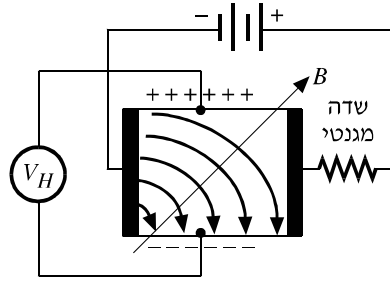
ב. צורת מסלול התנועה של החלקיק הטעון חיובית



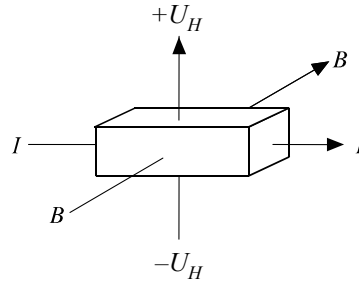
א. כלל הימנית לחלקיק טעון חיובית הנע בשדה מגנטי

איור 4.55 חוק לורנץ

תופעה דומה מתרחשת גם במוליך חשמלי (או במוליך למחצה) שזורם בו זרם חשמלי והנמצא בשדה מגנטי. כידוע במוליכים למחצה נושאי המטען הם חלקיקים שליליים (אלקטרונים), וחלקיקים חיוביים (חורים). איור 4.56 מתאר מוליך למחצה כזה העשוי בצורת פיסה מלבנית בעלת אורך, רוחב ועובי נתונים, שהשדה המגנטי מאונך לפיאתה הצדדית. הזרם החשמלי זורם מהקצה השמאלי לקצה הימני של הפיסה, כלומר, האלקטרונים נעים מימין לשמאל, ואילו החורים נעים משמאל לימין. כתוצאה מכוח לורנץ, האלקטרונים מואצים לעבר הפיאה התחתונה של הפיסה, ואילו החורים מואצים לעבר הפיאה העליונה. הפיאה התחתונה של הפיסה נטענת במטען שלילי והפיאה העליונה נטענת במטען חיובי. אם מחברים את שתי הפיאות הללו להדקים של מד-מתח רגיש (איור 4.56ב), ניתן למדוד את הכא"מ המושרה ביניהן. "מתח הול" זה נמצא ביחס ישר לעוצמת הזרם בפיסה ולעוצמת השדה המגנטי, ולכן אפשר למדוד בעזרתו את עוצמת השדה המגנטי.



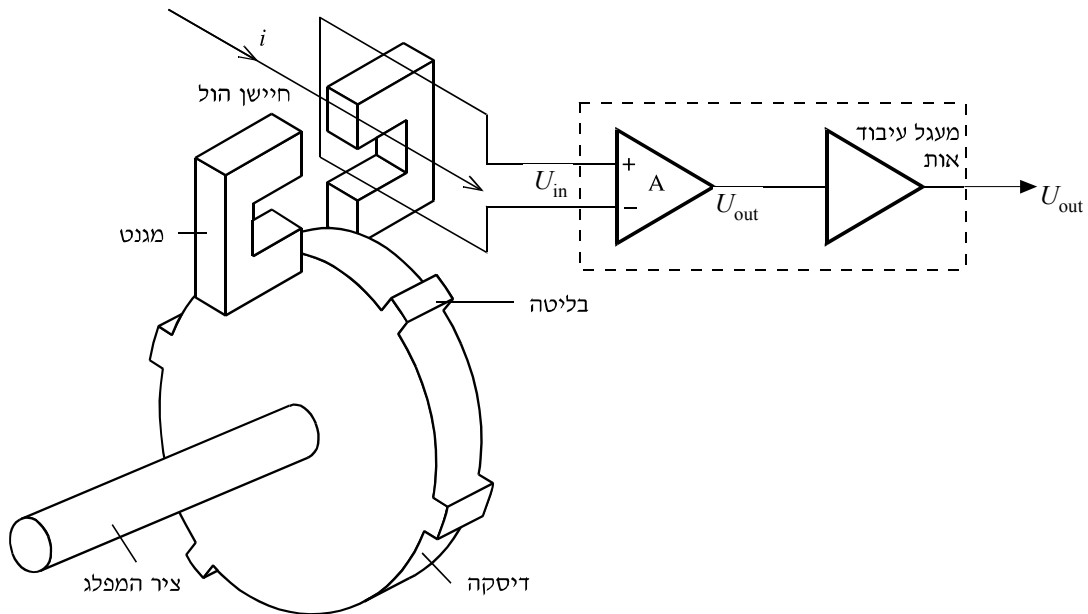
ב. חיישן הול משולב במעגל חשמלי



א. פיסת סיליקון בשדה מגנטי

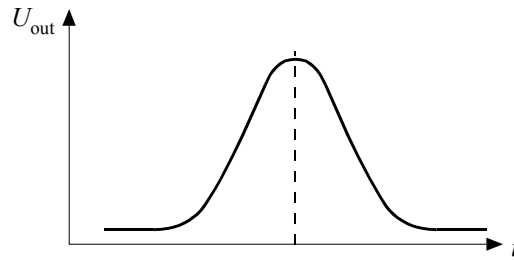
איור 4.56 חיישן הול

חיישן הול תעשייתי בנוי מפיסת סיליקון (chip) בעלת ארבעה הדקים: שניים לחיבור מד-המתח (או למעגל הגברת מתח) ושניים לחיבור מעגל הזרם. בדרך כלל משתמשים בחיישן כזה לגילוי שדה מגנטי בסביבת החיישן. באיור 4.57 מתוארת מערכת המשמשת למדידת מהירות הסיבוב של מפלג (distributor) במכוננית. בנוסף לחיישן הול כוללת המערכת מגנט קבוע, ודיסקה המסתובבת עם המפלג שיש לה "שיניים" (או בליטות) בהיקפה. כאשר שן נעה בתוך המגנט גדלה עוצמת השדה המגנטי שמודד החיישן, ומתקבל דופק מתח, כמתואר באיור 4.57 ב. על-פי מספר הדפקים המתקבלים ביחידת זמן, ניתן לקבוע את מהירות הסיבוב של הדיסקה.



א. תיאור המערכת

איור 4.57 מערכת למדידת מהירות של סיבוב מפלג באמצעות חיישן הול (המשך האיור בעמוד הבא)



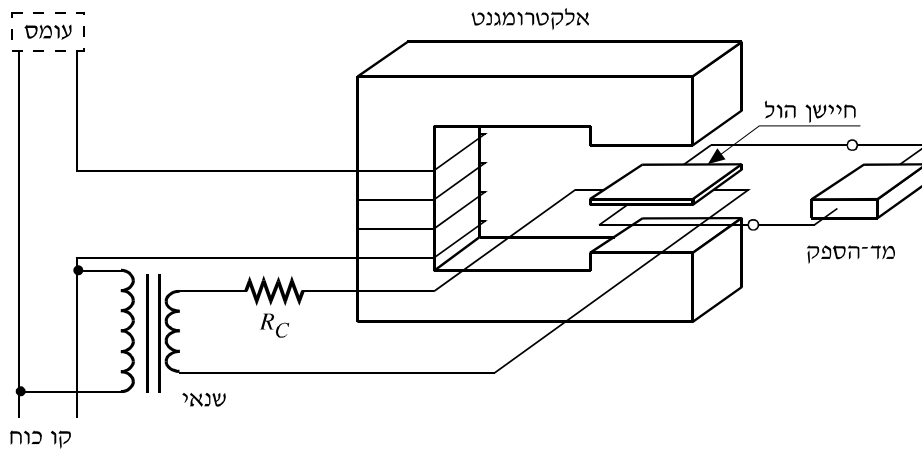
ב. דופק מתח המתקבל מהמעגל

איור 4.57 מערכת למדידת מהירות של סיבוב מפלג באמצעות חיישן הול (המשך מהעמוד הקודם)

שאלה 4.18

באמצעות המערכת המתוארת באיור 4.58 ניתן למדוד את ההספק המסופק לעומס. הסבירו את עקרון הפעולה של המערכת.

רמז: בדקו כיצד משפיעים הזרם והמתח בקו הכוח, על תוצאת המדידה של חיישן הול שבמעגל.

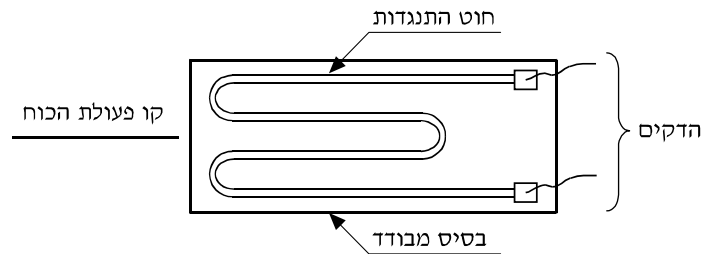


איור 4.58 איור לשאלה 4.18

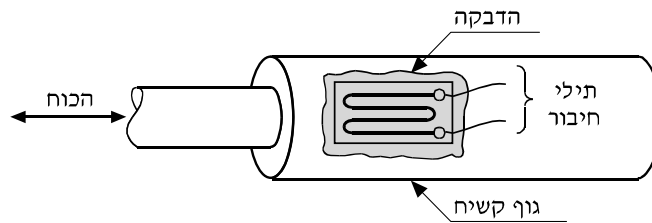
4.4 מדי כוחות ותאוצות

4.4.1 מד-מעוות

לעתים קרובות צריכים למדוד עיוותי צורה של גופים מכניים הנגרמים על-ידי לחצים, הפרשי טמפרטורה ועוד. דוגמה לכך היא שקילה על-ידי מדידת מעוות: מניחים את הגוף על משטח מתכתי ומודדים את משקל הגוף על-ידי מדידת המעוות של המשטח המתכתי. משקל מסוג זה מכונה **תא עומס** (load cell). הרכיב המשמש למדידת עיוות הוא **מד-מעוות** (strain gauge), והוא מתואר באיור 4.59.



א. מבנה עקרוני



ב. המדיד המודבק לגוף קשיח

איור 4.59 מד-מעוות

מד-מעוות בנוי ממוליך עדין ומפותל שעשוי בדרך כלל מסגסוגת של נחושת וניקל (איור 4.59א) ומורכב על בסיס דק מחומר מבודד. את הבסיס הזה מדביקים באופן הדוק למשטח שאת עיוותו מודדים (איור 4.59ב).

כאשר המשטח מתעוות בכיוון הציר של מד-המעוות, משתנה אורכו של המוליך. מתיחת המוט שבאיור 4.59 גורמת להתארכות מד-המעוות, ודחיסת המוט גורמת להתקצרות מד-המעוות. אורך המוליך משפיע על התנגדותו לפי:

$$R = \frac{\rho L}{A}$$

כאשר:

L – אורך המוליך; A – שטח החתך שלו, ו- ρ הוא התנגדותו הסגולית.

התנגדות מד-המעוות תלויה בגודל ובצורה של התעוותות המשטח. רגישות מד-המעוות, המכונה גם **קבוע המדיד** (וסימונו K), מוגדרת כיחס בין השינוי היחסי בהתנגדות לבין השינוי היחסי באורך שגרם לה. כלומר:

$$K = \frac{\Delta R / R}{\Delta L / L}$$

השינוי היחסי באורך $\Delta L / L$ (מסומן לעתים קרובות ב- ϵ) מוגדר כ**מעוות**.

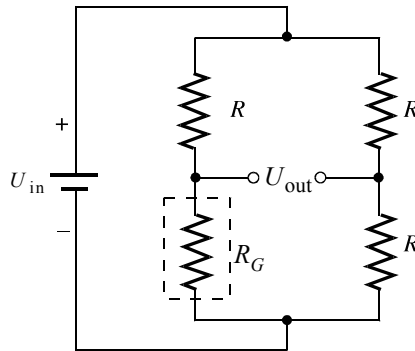
מלבד הרגישות, יש למד-המעוות תכונות נוספות, שהחשובות שבהן הן:

- א. השתנות קבוע המדיד עם הטמפרטורה – באופן אידיאלי השתנות זו תהיה אפס, כדי ששינויי טמפרטורה לא ישפיעו על מדידת המעוות.
- ב. המעוות המרבי – מעוות גדול יותר יוציא את מד-המעוות מן התחום האלסטי שלו ועלול לקלקלו.
- ג. הרגישות בכיוון הניצב – היחס בין שינוי ההתנגדות כתוצאה ממעוות בכיוון הניצב לציר מד-המעוות, לבין שינוי ההתנגדות שייגרם על-ידי אותו מעוות בכיוון ציר מד-המעוות. באופן אידיאלי יחס זה יהיה אפס, כדי לבודד את מדידת המעוות בכיוון הרצוי בלבד. מד-המעוות האידיאלי רגיש למעוותים בכיוון אחד בלבד.

קיימים מדי-מעוות מסוגים רבים וברמות שונות. מבחינת ביצועיהם, נוהגים לחלקם לארבע רמות, מ-A (הסוג הטוב ביותר) עד D. מדי-מעוות הנפוצים ביותר הם מקבוצה B וביצועיהם הם כדלקמן: רגישות $K=2$, K משתנה עם הטמפרטורה בשיעור של 1% ל- 100°F

($100^\circ\text{F} \approx 35^\circ\text{C}$), המעוות היחסי המרבי הוא של 1%, והרגישות בכיוון הניצב היא של 0.5% ביחס לרגישות בכיוון הצייר.

מדי-מעוות מאפשרים להגיע לדיוק של 1% במדידות של מעוות או לחץ. כדי להגדיל את הרגישות, נוהגים לשלב את מד-המעוות במעגל של גשר התנגדויות (איור 4.60).



איור 4.60 מד-מעוות ממומש על-ידי גשר ויטסטון

תיל ההתנגדות של המדיד (R_G באיור 4.60) מהווה את אחת מזרועות הגשר. במצב שבו אין עומס במעגל, כל הנגדים שווים בערכם. במיוחד, התנגדות התיל של המדיד (R_G) שווה להתנגדויות הנגדים בזרועות הגשר ($R_G = R$), ולפיכך במצב זה מתח המוצא הוא אפס וולט.

שאלה 4.19

הוכיחו כי מתח המוצא של הגשר (איור 4.60) נתון על-ידי:

$$U_{\text{out}} = U_{\text{in}} \left(\frac{R_G}{R_G + R} - \frac{R}{R + R} \right) = \frac{U_{\text{in}}}{2} \cdot \frac{R_G - R}{R_G + R}$$

כתוצאה מהעמסה, ההתנגדות של החיישן משתנה בשיעור ΔR . מהמשוואה האחרונה נובע כי מתח המוצא במצב זה נתון על-ידי:

$$U_{\text{out}} = \frac{U_{\text{in}}}{2} \cdot \frac{(R + \Delta R - R)}{(R + \Delta R + R)} = \frac{U_{\text{in}}}{2} \cdot \frac{\varepsilon_r}{2 + \varepsilon_r}$$

כאשר $\varepsilon_r \equiv \Delta R/R$ הוא השינוי היחסי בהתנגדות של מד-מעוות. ברוב המקרים אפשר להניח ש- $\varepsilon_r \ll 2$, ואז:

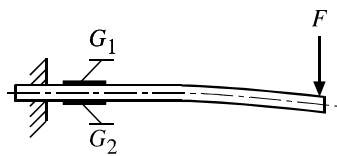
$$(4-9) \quad U_{out} = \frac{U_{in}}{4} \varepsilon_r$$

כלומר, מתח המוצא נמצא ביחס ישר למעוות.

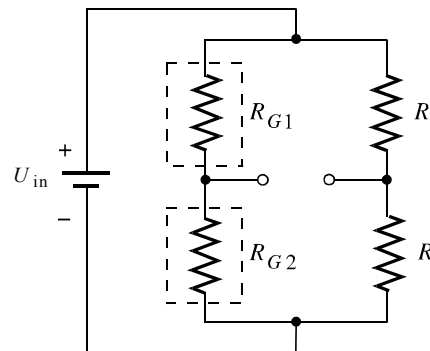
ניתן להגדיל את דיוק המדידה אם משתמשים בשני מדי-מעוות המושפעים מן המאמץ בצורה הפוכה, כלומר, בזמן ההעמסה, התנגדות האחד גדלה והתנגדות השני קטנה. איור 4.61 מתאר גשר וויסטון ובו שני מדי-מעוות.

באיור 4.61 מתוארת קורה שאליה מוצמדים שני חיישני מעוות המהווים שתי זרועות של גשר וויסטון. ללא עומס, התנגדות הזרועות שווה, כלומר, $R_{G1} = R_{G2} = R$, ומתח המוצא הוא אפס, $U_{out} = 0$. כאשר החיישנים מועמסים, ההתנגדות R_{G1} קטנה בשיעור ΔR , וההתנגדות R_{G2} גדלה בשיעור ΔR . כתוצאה מכך, מתח המוצא משתנה וערכו נתון על-ידי:

$$(4-10) \quad U_{out} = \frac{U_{in}}{2} \frac{\Delta R}{R}$$



ב. קורה עם שני מדי-מעוות



א. המעגל החשמלי

איור 4.61 מד מעוות מבוסס גשר וויסטון עם שני נגדים רגישים בגשר

שאלה 4.20

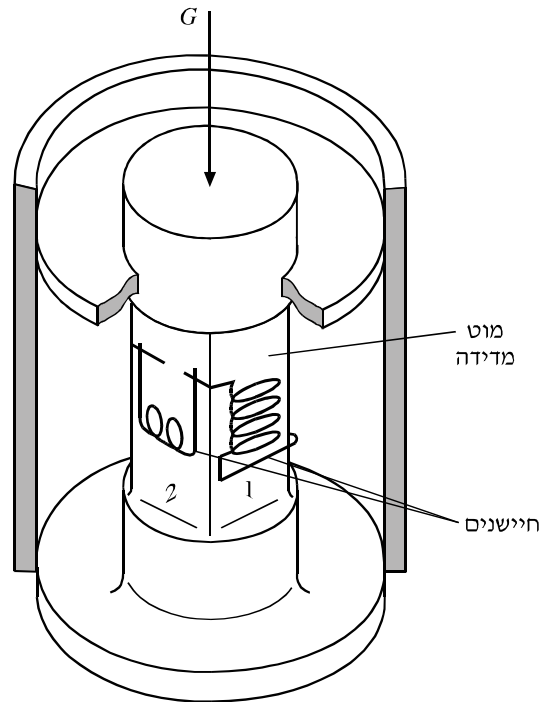
הוכיחו את משוואה (4-10).

למדי-מעוות יש שני שימושים עיקריים:

1. בדיקת מאמצים במבנים ובחלקים של מבנים.
2. מדידת כוחות, לחצים, ומומנטים, וכן גדלים פיסיקליים נוספים שאותם ניתן להמיר למעוות, כמו תזוזה ומהירות של גופים נעים.

נביא שתי דוגמאות לשימוש במד-מעוות.

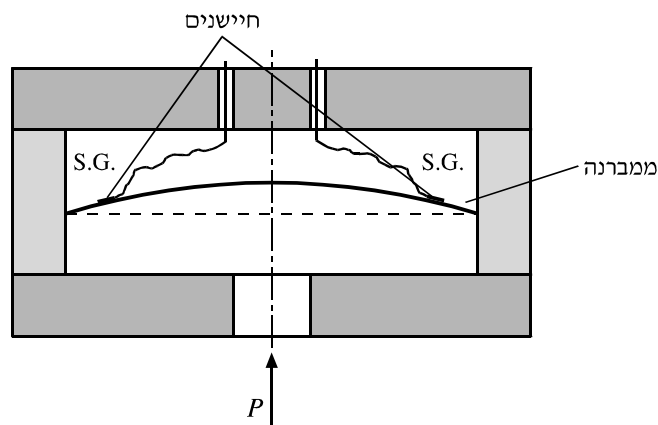
- א. התקן לשקילת גופים הכולל מוט מדידה גילי (איור 4.62). על מוט המדידה מודבקים ארבעה חיישנים (1 ו-2 נראים לעין, 3 ו-4 מוסתרים).



איור 4.62 שימוש במד-מעוות כמתמר של משקל למתח

כוח המשקל המופעל על המוט גורם להקטנת אורכו ולהגדלת עוביו. כתוצאה מכך, ההתנגדות של החיישנים 1 ו-3 קטנה, ושל החיישנים 2 ו-4 גדלה. ארבעת החיישנים מהווים זרועות של גשר ויטסטון. מתח המוצא של הגשר נמצא ביחס ישר למשקל הגוף.

ב. התקן למדידת לחץ (איור 4.63). ההתקן כולל ממברנה גמישה שעליה מודבקים שני חיישני-מעוות המהווים שתי זרועות בגשר ויטסטון. כתוצאה מהפעלת לחץ P , הממברנה משנה את צורתה והתנגדות החיישנים משתנה בהתאם. גם כאן ניתן לכייל את הגשר כך שמתח המוצא יימצא ביחס ישר ללחץ P הפועל על הממברנה.



איור 4.63 השימוש במד-מעוות כמתמר של לחץ למתח

שאלה 4.21

חווו דעתכם: מדוע בוחרים לפתל את המוליך במד-מעוות ואין משתמשים במוליך ישר? (הנחיה: חשבו על השפעת הפיתול על קבוע המדיד).

שאלה 4.22

ההתנגדות של מד-מעוות מסוים היא $R = 100 \Omega$.

- חשבו את שינוי ההתנגדות (באומים) עבור מעוות של 1%.
- חשבו את שינוי ההתנגדות שיתקבל עקב מעוות זהה בכיוון הניצב.

4.4.2 מתמר תאוצה

תפקידו של **מתמר תאוצה** (acceleration transducer) הוא למדוד את תאוצתו הקווית או הזוויתית של גוף. מתמרי תאוצה פועלים לרוב באופן עקיף (כלומר, הם מודדים גודל אחר, אשר מתורגם לתאוצה). מדי-תאוצה כוללים משקולת פנימית המכונה **מסה סייסמית**, שאותה

מצמידים לגוף שאת תאוצתו מעוניינים למדוד. תאוצת המסה הסייסמית M_a זהה בכל רגע לתאוצת הגוף הנבדק. לפי החוק השני של ניוטון, תאוצת המסה הסייסמית היא:

$$(4-11) \quad a = \frac{F}{M}$$

כאשר F הוא הכוח הפועל על המסה הסייסמית.

את הכוח אפשר למדוד בדרכים שונות, למשל, על-ידי מתמר כוח הממומש באמצעות מד-מעוות.

דוגמה 4.9

מד-תאוצה שמודד את תאוצתו של גוף מכיל מסה סייסמית של 100 גרם. התגובתיות של מתמר הכוח שבמד-התאוצה היא 0.5 V/N (חצי וולט לניוטון). בתאוצה מסוימת נמדד כוח של 0.4 ניוטון.

א. חשבו את תאוצת הגוף.

ב. חשבו את מתח המוצא של מתמר הכוח.

פתרון

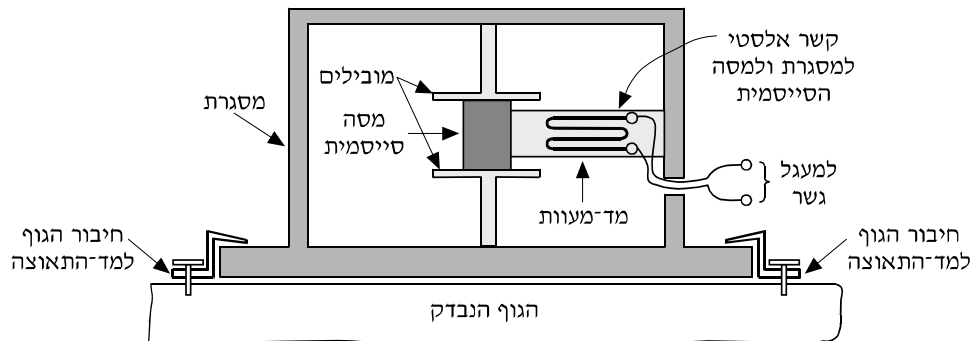
א. תאוצת הגוף היא:

$$a = \frac{F}{M} = \frac{0.4 \text{ N}}{0.1 \text{ kg}} = 4 \text{ m/s}^2$$

ב. מתח המוצא של מתמר הכוח הוא:

$$U = 0.5 \frac{\text{V}}{\text{N}} \times 0.4 \text{ N} = 0.2 \text{ V}$$

באיור 4.64 מתואר מד-תאוצה מעשי.



איור 4.64 מבנה סכמטי של מד-תאוצה

מסגרת מד-התאוצה צמודה לגוף שאת תאוצתו מעוניינים למדוד. המסה הסייסמית מחוברת למסגרת באופן לא קשיח על-ידי חיבור אלסטי (כגון קפיץ), והיא נתונה בין מסילות המאפשרות לה לנוע רק בכיוון האופקי, למשל מימין לשמאל. כאשר הגוף הנמדד מואץ ימינה, המסגרת כולה מואצת ימינה, אבל המסה הסייסמית אינה מואצת באותה מידה עקב החיבור האלסטי שלה למסגרת. התוצאה היא שהמסה הסייסמית מפעילה כוח אופקי בכיוון שמאל על מד-המעוות. מד-המעוות מתמיר את המעוות (או את הכוח הפועל עליו) לשינוי התנגדות, ובאמצעות מעגל גשר – לשינוי מתח. מתח זה נמצא ביחס ישר לתאוצתו של הגוף הנמדד.

ישנם מתמרים נוספים המשמשים למדידת כוח, לחץ, ותאוצה, כגון הגביש הפיאוזו-אלקטרי והגביש הפיאוזו-התנגדותי.

בתעשייה משתמשים במדי-תאוצה במערכות סרוו מתוחכמות. תפקידם הוא לאפשר חישה של שינויי המהירות של הגוף המבוקר כדי שאפשר יהיה לייצבו טוב יותר. הייצוב נעשה על-ידי משוב שלילי במערכת הבקרה.

מצב שבו חשוב לדעת את שינויי המהירות הוא המצב שבו מערכת לבקרת מצבו של גוף נע מתחילה את פעולתה. במצב זה, התאוצה חזקה יחסית. אם יודעים אותה, אפשר להעריך את מצבו העתידי של הגוף המבוקר זמן-מה מראש. הדבר מאפשר לתת אות בקרה משופר.

משתמשים במדי-תאוצה גם במקומות שבהם יש למדוד את עוצמתן של רעידות מכניות. רעידות מכניות נגרמות לעתים עקב כניסת מערכות מכניות למצב של תהודה, מצב המסכן את

המערכת. אפשר לגלות רעידות כאלה במהירות באמצעות מד-תאוצה, ולגרום לשיכוך הרעידות על-ידי אות משוב מתאים ממד-התאוצה.

שאלה 4.23

מד-התאוצה שנתוניו צוינו בדוגמה 4.9 נופל נפילה חופשית.

- א. מהי תאוצת מד-התאוצה?
- ב. חשבו את הכוח הפועל על המסה הסייסמית.
- ג. חשבו את מתח המוצא של מד-המעוות. הניחו כי מד-התאוצה הוא במצב שמתח המוצא מרבי.
- ד. חשבו את התגובתיות של מד-התאוצה ביחידות V/N (הניחו כי מוצא מד-התאוצה הוא המוצא של מד-המעוות).

4.5 סיכום

את מרבית החיישנים והמתמרים שתיארנו בפרק זה ניתן לשלב בחוג המשוב של מערכות בקרה. חלק מהחיישנים פועלים גם כמתמרים ישירים של גדלים פיסיקליים למתחים חשמליים, ולחיישנים אחרים יש להוסיף מעגלי התמרה מיוחדים שבאמצעותם מותמר אות המוצא מהחיישן למתח חשמלי במעגל המשוב.

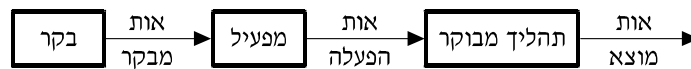
בהמשך נתייחס ליחס שבין המתח (בוולטים) המתקבל ממתמר בענף המשוב של המערכת, לבין הגודל הפיסיקלי הנמדד (כמו טמפרטורה ב- $^{\circ}C$, עוצמת אור בקנדלה, כוח בניוטון וכ"ו) כאל יחס התמסורת של ענף המשוב במערכת.

פרק 5

מפעילים ושילובם במערכות בקרה

5.1 מבוא

המפעיל, או בשמו האחר – רכיב הבקרה הסופי, הוא יחידה המקשרת בין הבקר, או מקור הפקודות במערכת, לבין מקור האנרגיה או החומר המסופקים לתהליך או להתקן המבוקר. בהתאם לפקודות המתקבלות מהבקר, מעביר המפעיל את כמות האנרגיה או החומר הדרושים לתהליך, כמתואר בתרשים המלבנים הבא:



איור 5.1 מיקום המפעיל במערכת בקרה

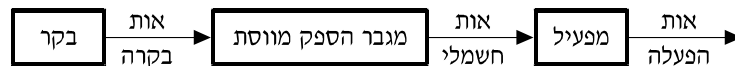
במערכות בקרה קיימת בדרך כלל הפרדה ברורה בין מקור האנרגיה (או החומר) לבין הבקר במערכת. הבקר (שהוא מקור הפקודות) אינו משקיע את האנרגיה הדרושה לתהליך, אלא רק נותן הוראות ביצוע למפעיל. המפעיל הוא שמקבל את כל האנרגיה הדרושה לתהליך או להתקן המבוקר. הבקרים הם בדרך כלל בעלי ממדים קטנים ומבוססים על מעגלים אלקטרוניים מוכללים. לעומתם, גודל המפעיל נמצא ביחס ישר לכמות האנרגיה הדרושה לתהליך המבוקר.

את המפעילים נהוג לסווג על פי אופי התהליך המבוקר, כגון: בקרת חום, בקרת תנועה, בקרת קול וכו'. בפרק זה נתייחס לכמה מפעילים נפוצים המצויים במערכות בקרה כגון מנועים חשמליים, שסתומי בקרה, גופי חימום וכו', כל המפעילים הללו מופעלים באמצעות אות חשמלי. קיימים כמובן גם מפעילים אחרים שפעולתם מכנית בלבד, אולם בהם לא נדון בספר זה.

כדי להבין מה בעצם נדרש ממפעיל במערכת בקרה, נחזור לדוגמאות שהובאו בפרק 2. כדי לבקר את הטמפרטורה במכל (דוגמה 2.2) דרוש שהמבער ייצור את כמות החום הדרושה לתהליך, והדבר תלוי בכמות הדלק המגיעה למבער. ספיקת הדלק למבער נקבעת על-ידי מעגל המשוב והמשווה. המפעיל (המבער) מספק אפוא את כל כמות החומר הדרושה לתהליך, על פי פקודות חשמליות שמקורן במשווה שבמערכת.

באותה צורה, כדי לבקר את התזוזה במערכת לבקרת התזוזה הקווית (דוגמה 2.3) יש לספק אנרגיה חשמלית למנוע בכמות הדרושה להנעת הבורג במערכת. גם כאן כמות האנרגיה החשמלית המסופקת למפעיל ("המנוע") נקבעת על-ידי האותות החשמליים המתקבלים מחוג המשוב ומהמשווה שבמערכת.

בשתי הדוגמאות לעיל ישנו רכיב נוסף הממוקם בין המפעיל לבין מקור הוראות הבקרה. רכיב זה קרוי מגבר הספק מווסת (או מגבר הספק) כמתואר בתרשים המלבנים המוצג באיור 5.2. בפרק זה נתאר מערכות חשמליות מסוג זה.



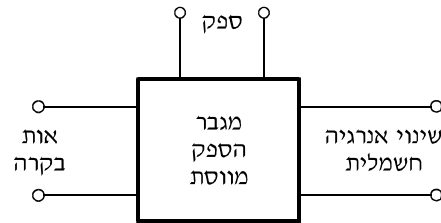
איור 5.2 מיקומו של מגבר ההספק במערכת בקרה

5.2 מעגלי ויסות חשמליים

מגברי הספק מיועדים לוויסות האנרגיה החשמלית (DC או AC) הדרושה לפעולת המפעילים. מקורות האנרגיה הם בדרך כלל בעלי הספק חשמלי אפקטיבי קבוע. למשל, מקור זרם חילופין, בעל מתח ותדר קבועים (תדר של 50 Hz ומתח של 230 V), או מצבר מתח ישר של 12 V. מגברי הספק מבצעים פעולות משני סוגים (לא תמיד שניהם יחד):

- א. ממירים אנרגיה חשמלית מצורת AC לצורת DC או להיפך.
- ב. משנים את ערכו של המתח המסופק למפעיל, ולפעמים לשנות גם מאפיינים אחרים של מקור האנרגיה החשמלית (כגון תדר, עוצמת מתח החילופין, או פרקי הזמן שבהם מסופק המתח למפעיל). את מגבר ההספק ניתן אפוא לתאר באמצעות תרשים המלבנים המוצג

באיור 5.3.



איור 5.3 תרשים מלבנים עקרוני של מגבר הספק מווסת

בהמשך נתאר כמה מגברי הספק המבוססים על מעגלים אלקטרוניים, ומבצעים פעולות של המרת האנרגיה החשמלית וויסותה.

שאלה 5.1

מעגל ויסות חשמלי המוכר לכולנו הוא המתאם (adapter) הביתי, הממיר מתח חילופין של 220 V למתח ישר קבוע (למשל, 6 וולט). הסבירו את המבנה של מתאם זה ואת עקרון פעולתו.

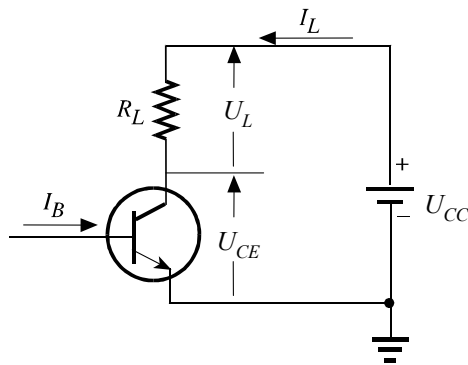
5.2.1 מעגלי ויסות אנרגיה חשמלית על בסיס טרנזיסטור הספק

בסעיף זה נעסוק במעגלי הספק אלקטרוניים המוזנים על-ידי מקור זרם ישר, כגון סוללה, מצבר או מוצא של מיישר זרם. במיוחד נעסוק במעגלים המבוססים על **טרנזיסטורי הספק**, דהיינו טרנזיסטורים שמסוגלים להעביר זרם גדול (אמפרים ואף עשרות אמפרים) בין הקולט לפולט.

5.2.1.1 מתמרי מתח DC למתח DC

טרנזיסטור הספק פועל כמתג (Switch), כלומר, הוא יכול להימצא בשני מצבים בלבד: מצב קיטעון (נתק) או מצב רוויה. מצב הקיטעון מתרחש בהיעדר זרם בסיס, ומצב הרוויה (קצר) מתרחש כאשר הזרם דרך הבסיס גדול דיו. בתצורת פעולה זו, ההפסדים בטרנזיסטור הם קטנים ביותר בהשוואה לתצורות פעולה אחרות. כתוצאה מכך ניתן להשתמש בטרנזיסטורים קטנים יחסית להעברת הספקים חשמליים גדולים למפעיל.

איור 5.4 מתאר מעגל הגברה בסיסי הכולל מקור זרם ישר U_{CC} , צרכן (מפעיל) R_L , וטרנזיסטור הספק (מסוג NPN), המחובר בחיבור פולט משותף.



איור 5.4 מעגל הגברה בסיסי עם טרנזיסטור NPN בחיבור פולט משותף

כידוע, זרם העומס I_L נקבע על-ידי זרם הבסיס I_B ומקדם הגבר הזרם β . בתצורת מיתוג של שני מצבים (בהזנחת מפל המתח על הטרנזיסטור ברוויה) מקבלים כי:

א. במצב הקיטעון:

$$I_B = 0 \Rightarrow I_L = 0 \Rightarrow U_{CE} = U_{CC}$$

ב. במצב הרוויה המתח על העומס הוא אפס:

$$I_B = I_B^{\max} \Rightarrow U_{CE} > 0 \Rightarrow I_L = \beta I_B^{\max} \Rightarrow U_L = I_L R_L$$

והמתח על העומס הוא מקסימלי.

באיור 5.5 מתוארים כמה מחזורי פעולה של מגבר ההספק הממותג בהתאמה לזרמי הבסיס.

כאן

T – מחזור המיתוג

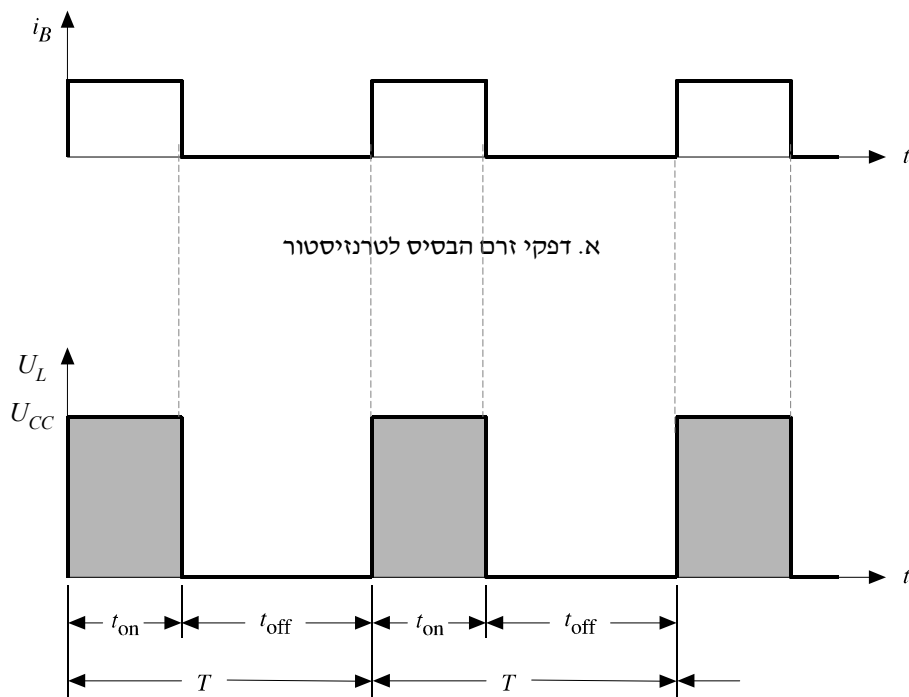
t_{off} – פרק הזמן שבו $I_B = 0$ (הטרנזיסטור בקיטעון)

t_{on} – פרק הזמן שבו הטרנזיסטור ברוויה

הערך הממוצע של המתח המסופק לצרכן הוא אפוא :

$$(5-1) \quad U_L = U_{CC} \cdot \frac{t_{on}}{t_{on} + t_{off}} = U_{CC} \cdot \frac{t_{on}}{T}$$

היחס $D = \frac{t_{on}}{T}$ נקרא **יחס המיתוג** (duty cycle), או **גורם המחזור**.



ב. המתח על העומס

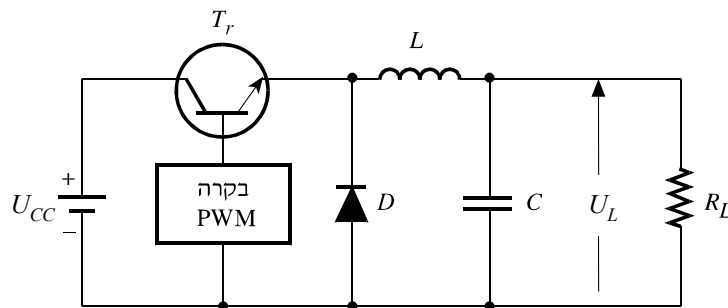
איור 5.5 תרשים זמנים של מגבר הספק

את מחזור המיתוג T קובעים באמצעות מעגל בקרה השולט על זרם הבסיס I_B . מעגל זה משמש גם לוויסות יחס המיתוג בגבולות $0 \leq D \leq 1$ כך שמתח המוצא של המגבר U_L משתנה בתחום :

$$0 \leq U_L \leq U_{CC}$$

בשיטת בקרה זו, הידועה בשם בקרת רוחב הדופק* (Pulse Width Control – PWC), או איפנון רוחב דופק (Pulse Width Modulation – PWM), ניתן לשנות את המתח הממוצע על העומס, אך לא ניתן לשנות את צורתו המלבנית-מחזורית של אות המתח. כדי לקבל מתח ישר בעל ערך קבוע יש להוסיף למעגל ההגברה הבסיסי מסנן המורכב ממשרן וקבל (איור 5.6). הדיודה במעגל זה משמשת לפריקת הסליל כאשר הטרנזיסטור עובר למצב קיטעון.

במעגל שבאיור 5.6 המתח U_L הוא קבוע וערכו שווה לערך הממוצע.



איור 5.6 בקרת PWC באמצעות מעגל הגברה ומסנן

למעגלי המרת מתח DC למתח DC בעל ערך אחר יש שימושים רבים. כאן נזכיר את השימוש במעגלים אלו במערכת החשמלית של רכב, שבה המצבר משמש מקור הזנה חשמלי בעל מתח DC קבוע של 12 וולט.

כאמור, הרכיב העיקרי במעגלי ויסות הוא טרנזיסטור הספק. לדוגמה, טרנזיסטור הספק 2N3055A מתוצרת חברת מוטורולה הוא בעל הנתונים המרביים (Maximum Ratings) הבאים:

זרם קולט מרבי – 15 A

המתח המרבי בין הקולט לפולט – 60 V

הספק החום המתפזר בטרנזיסטור – 115 W

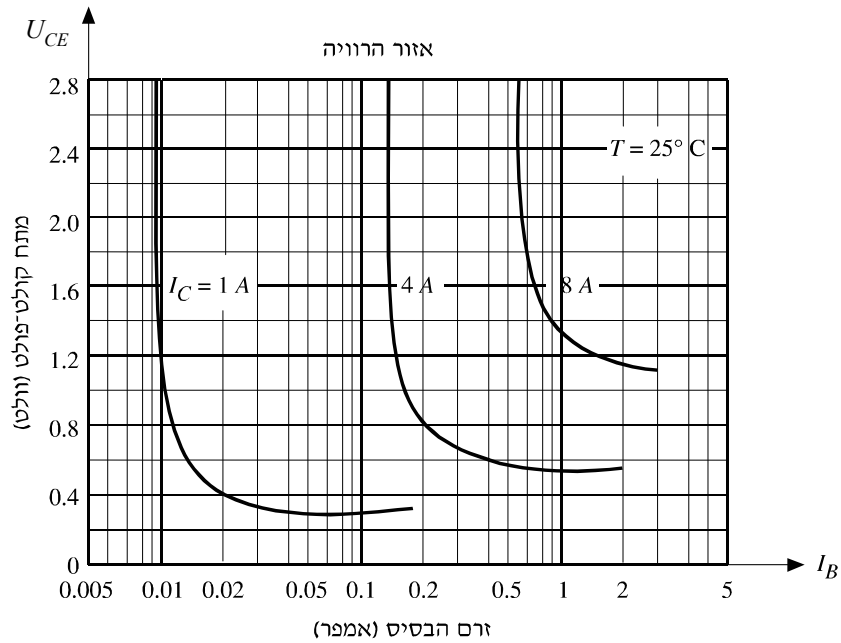
איור 5.7 מתאר את אופייני העבודה של הטרנזיסטור 2N3055A כפי שהם מופיעים בספר היצרן. האופיין מתאר את מפל המתח U_{CE} בין הקולט לפולט בתלות בזרם I_B , עבור כמה ערכים של זרם הקולט I_C .

* רשות

נתייחס לנתונים שבגרף זה עבור שני מצבים קיצוניים:

א. מצב קיטעון שבו I_B הוא אפס, וזרם הקולט I_C זניח. המתח U_{CE} נקבע לפי נתוני קו העבודה קרוב למתח המקור U_{CC} .

ב. מצב רוויה שבו הזרם I_B גבוה דיו כדי שנקודת העבודה תנוע למצב שבו U_{CE} קטן יחסית.



איור 5.7 אופיין של טרנזיסטור הספק

5.1 דוגמה

נקודת העבודה במצב רוויה מוגדרת על-ידי הפרמטרים הבאים: $I_C = 4\text{ A}$, $I_B = 0.2\text{ A}$. מהו המתח קולט-פולט (U_{CE}) במצב זה?

פתרון

מאיור 5.7 מתקבל כי $U_{CE} = 0.8\text{ V}$.

לפי נתוני הטרנזיסטור לגבי זמני המיתוג (פרקי הזמן הדרושים למעבר ממצב קיצוני אחד למשנהו), ניתן להשתמש בתדרים של עד עשרות kHz.

5.2 דוגמה

במעגל המרה (איור 5.8) נתונים הערכים הבאים:

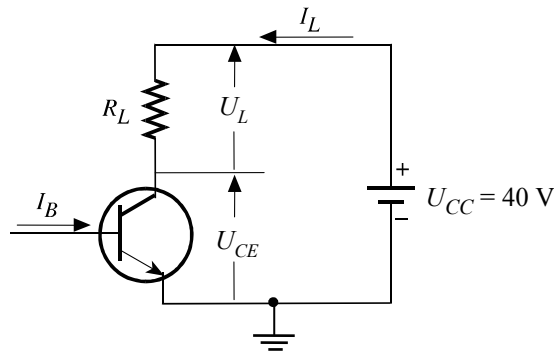
$$U_{CC} = 40 \text{ V} - \text{מתח המקור}$$

$$f = 5 \text{ kHz} - \text{תדר המיתוג}$$

$$D = 0.4 - \text{יחס המיתוג}$$

חשבו את המתח הממוצע על העומס ואת נצילות המעגל. השתמשו באופיין הטרנזיסטור הנתון

באיור 5.7, והניחו כי נקודת העבודה במצב הרוויה היא $I_C = 4 \text{ A}$, $I_B = 0.2 \text{ A}$.



איור 5.8 איור לדוגמה 5.2

פתרון

נחשב תחילה את זמן המחזור T של המיתוג:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{5} = 0.2 \text{ ms}$$

לפיכך פרקי הזמן t_{on} ו- t_{off} הם:

$$t_{on} = T \cdot D = 0.2 \cdot 0.4 = 0.08 \text{ ms}$$

$$t_{off} = 0.2 - 0.08 = 0.12 \text{ ms}$$

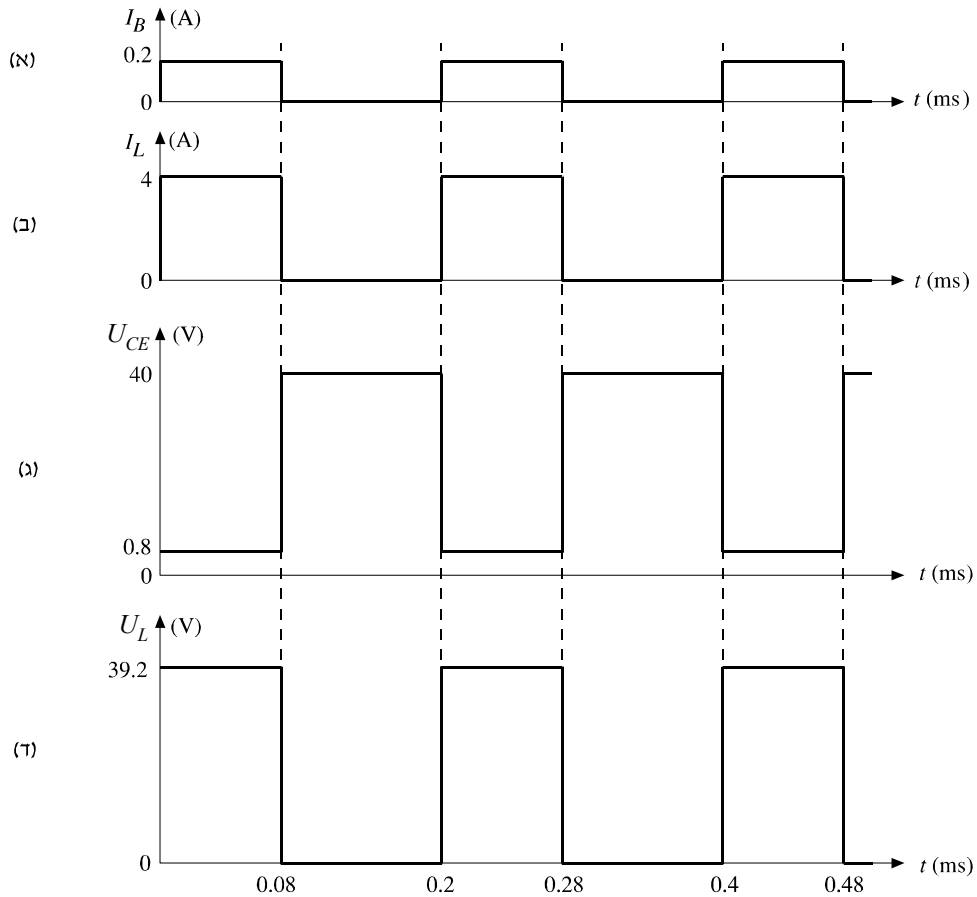
במצב הרוויה של הטרנזיסטור (מצב ההולכה) נתון כי $I_C = 4 \text{ A}$, $I_B = 0.2 \text{ A}$, ולכן $(I_L = I_C)$

$$U_{CE} = 0.8 \text{ V}$$

מכאן, שהמתח על העומס R_L , בזמן הולכת הטרנזיסטור, הוא:

$$U_L^{\max} = 40 - 0.8 = 39.2 \text{ V}$$

איור 5.9 מתאר מחזורים אחדים של המתחים U_L ו- U_{CE} ושל הזרם I_L בתלות בזמן בהתאם ליחס המיתוג הנתון.



איור 5.9 תרשים זמנים של המעגל שבאיור 5.8

- א. דופקי זרם הבסיס
- ב. דופקי זרם העומס
- ג. דופקי מתח קולט-פולט
- ד. דופקי המתח על העומס

נחשב את המתח הממוצע על פני העומס U_L^{aver} ואת ההספק המועבר אליו מהמקור P_L . קיים כי:

$$U_L^{\text{aver}} = U_L \cdot D = 39.2 \cdot 0.4 = 15.68 \text{ V}$$

$$I_L^{\text{aver}} = I_L \cdot D = 4 \cdot 0.4 = 1.6 \text{ A}$$

$$P_L = U_L^{\text{aver}} \cdot I_L^{\text{aver}} = 15.68 \cdot 1.6 = 25.088 \text{ W}$$

הפסד ההספק על פני הטרנזיסטור ΔP_{CE} שווה למכפלה של הערך הממוצע של המתח קולט-פולט U_{CE}^{aver} , והזרם הממוצע I_L^{aver} :

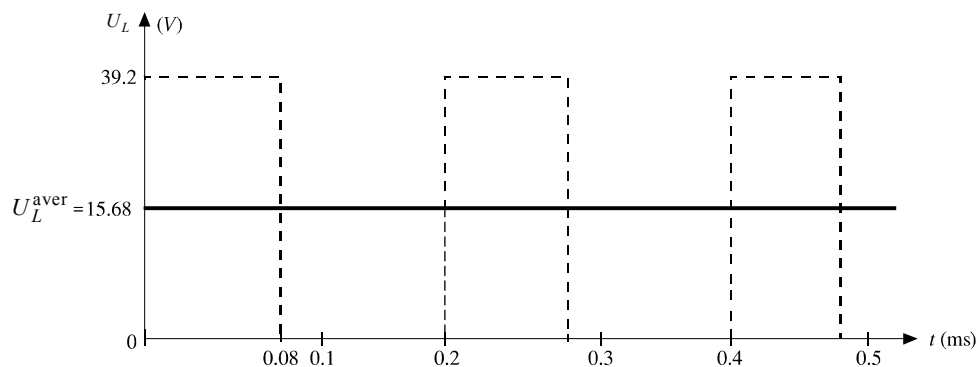
$$\Delta P_{CE} = U_{CE}^{\text{aver}} \cdot I_L^{\text{aver}} = U_{CE} \cdot D \cdot I_L^{\text{aver}} = 0.8 \cdot 0.4 \cdot 1.6 = 0.512 \text{ W}$$

מכאן שנצילות המעגל η היא:

$$\eta = \frac{P_L}{P_L + \Delta P_{CE}} \cdot 100\% = \frac{25.088}{25.088 + 0.512} \cdot 100\% = 98\%$$

דוגמה זו ממחישה את היעילות הגבוהה בהמרת אנרגיה שניתן להשיג במעגלי הספק אלקטרוניים.

אם מוסיפים למעגל המגבר (איור 5.8) מסנן קבל-משרן (איור 5.6), מקבלים מתח קבוע על הדקי העומס, כמתואר באיור 5.10.



איור 5.10 המתח הקבוע על העומס (U_L^{aver}) עם הוספת המסנן למעגל

5.2 שאלה

משנים את יחס המיתוג במעגל ההגברה המתואר בדוגמה 5.2.

חזרו על החישובים בדוגמה עבור שני מקרים:

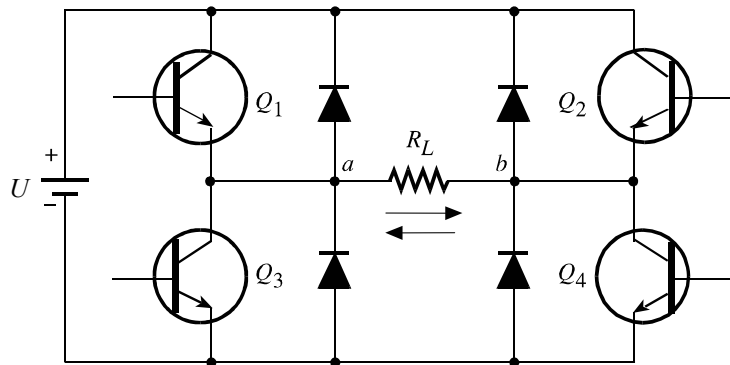
א. $D = 0.8$,

ב. $D = 0.2$.

חשבו את המתח הממוצע ואת הנצילות של המעגל, וסרטטו את צורת המתח על הקולט של הטרנזיסטור ועל העומס (R_L).

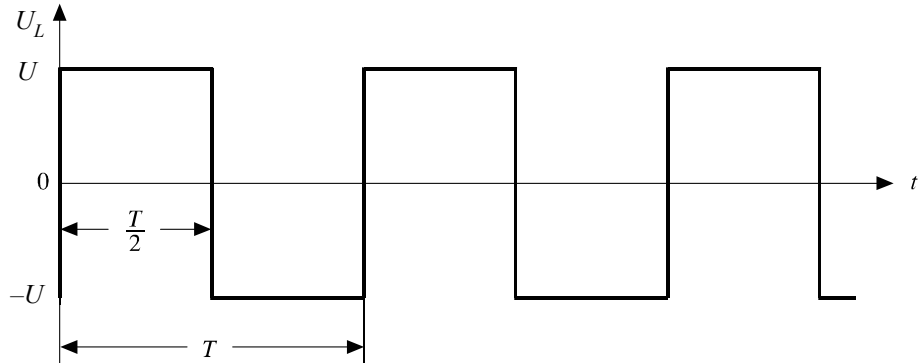
5.2.1.2* ממיר מתח DC למתח AC

ניתן להמיר מתח ישר למתח חילופין באמצעות מעגל הספק כדוגמת המעגל המתואר באיור 5.11 (מעגל זה מכונה מעגל H-bridge, בגלל צורתו המיוחדת):



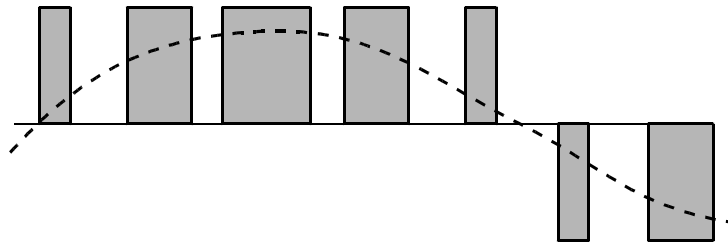
איור 5.11 מעגל H-bridge להמרת מתח DC למתח AC. זרמי הבסיס ממותגים באמצעות מעגל בקרה נפרד.

כאשר הטרנזיסטורים Q_1 ו- Q_4 מוליכים (מצב רוויה) והטרנזיסטורים Q_2 ו- Q_3 במצב קיטעון, הזרם זורם דרך הצרכן מהנקודה a לנקודה b . לעומת זאת, כאשר ממתגים את הטרנזיסטורים Q_2 ו- Q_3 למצב רוויה, הזרם בעומס זורם בכיוון ההפוך. בהנחה שהתקנים הם אידיאליים, מתקבל על הצרכן R_L אות מתח מלבני, כמתואר באיור 5.12.



איור 5.12 אות המתח על העומס (U_L) במעגל שבאיור 5.11

זמן המחזור של האות T נקבע על-ידי מעגל בקרה (PWM) השולט על זרמי הבסיס של הטרנזיסטורים. יחס המיתוג הוא קבוע וערכו 0.5. כדי לקרב את צורת אות המתח המלבני לצורה סינוסית, בקרת PWM ממתגת את הטרנזיסטורים ביחס מיתוג המשתנה עם הזמן. על-ידי שליטה על פרקי הזמן שבהם זורם זרם הבסיס, ניתן ליצור דפקים בעלי רוחב משתנה: דפקים רחבים (יחס מיתוג גדול), שנעשים צרים יותר ויותר (יחס מיתוג קטן). איור 5.13 מתאר מצב שבו זמני המיתוג של הטרנזיסטורים Q_1 ו- Q_4 משתנים, ונוצרים דפקים בעלי רוחב משתנה של מתח חיובי על העומס. משטר מיתוג זהה של הטרנזיסטורים Q_2 ו- Q_3 יוצר דפקים שליליים בעלי רוחב משתנה.



איור 5.13 קבלת מתח AC סינוסי באמצעות שינוי יחס המיתוג במעגל H-bridge

בחלק המחזור שבו הדפקים רחבים יותר מתקבל ממוצע גדול יותר (בערכו המוחלט), ואילו בחלק המחזור שבו הדפקים צרים יותר, מתקבל ממוצע קטן יותר. ככל שמספר הדפקים בחצי המחזור גדול יותר, כך צורת המתח קרובה יותר לצורת אות סינוסי והמתח הממוצע מתקרב לאפס. הוספת מסנן מאפשרת לקבל אות מתח סינוס אידיאלי טהור.

5.3 מנועים חשמליים

מנוע חשמלי מתמיר אנרגיה חשמלית לאנרגיה מכנית סיבובית. האנרגיה החשמלית שהמנוע צורך מתקבלת ממגבר הספק (איור 5.14). מנועים חשמליים מתחלקים למנועי זרם ישר ומנועי זרם חילופין. כמו כן קיימים **מנועי צעד** המופעלים באמצעות דפקים המתקבלים ממעגלים אלקטרוניים.

בהמשך נתאר את השימושים העיקריים של מנועי זרם ישר (ז"י) ומנועי צעד במערכות בקרה, ואת המאפיינים העיקריים של כל אחד מסוגי המנועים הללו.



איור 5.14 מנוע חשמלי ממיר אות חשמלי לתנועה מכנית סיבובית

5.3.1 השימוש במנועים במערכות בקרה

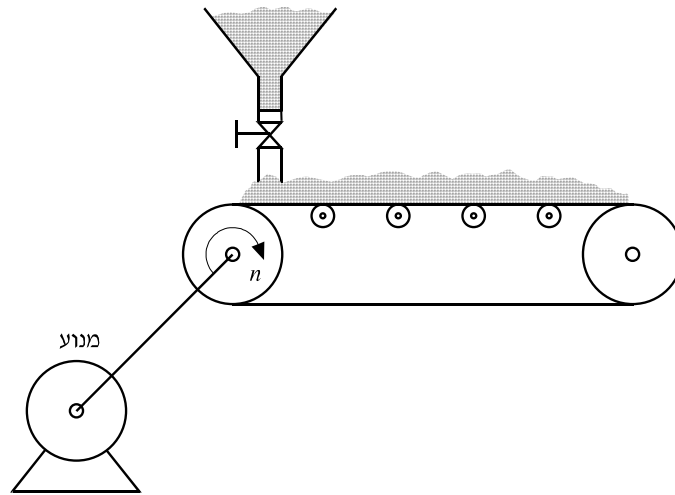
תפקידו של המנוע החשמלי הוא לסובב **עומס מכני** כלשהו המחובר לציר המנוע באופן ישיר או דרך תמסורת (כגון גלגלי שיניים). את תנועת העומס המכני ניתן לאפיין בשתי צורות:

- באמצעות **מהירות הסיבוב** של העומס (למשל, אלף סיבובים בדקה) המשמשת כ**משתנה המבוקר** של המערכת. במצב המתמיד המנוע מסובב את העומס במהירות קבועה. תצורת עבודה זו נקראת מערכת בקרת מהירות.
- באמצעות המצב **הזוויתי** של העומס (למשל, תנועה של תשעים מעלות – רבע הסיבוב) המשמש כמשתנה המבוקר של המערכת.

נביא כמה דוגמאות לשימוש במנועים במערכות בקרה:

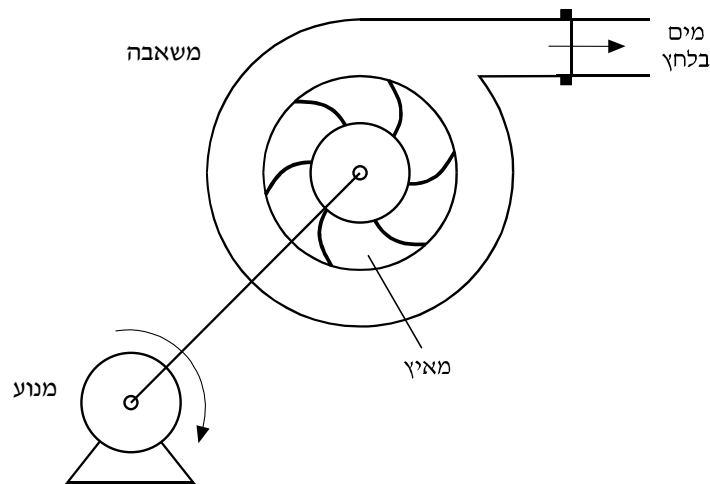
א. בקרת המהירות של סרט נע בפס ייצור. על הסרט מועמס חומר מוצק כלשהו, כמתואר באיור 5.15.

במערכת זו, המשתנה המבוקר הוא מהירות הסרט הנע (הנמצאת ביחס ישר למהירות הסיבוב של המנוע). תפקיד המערכת הוא לשנות את מהירות הסיבוב כדי להתאימה לקצב העמסת החומר על הסרט הנע.



איור 5.15 פס ייצור המופעל באמצעות מנוע

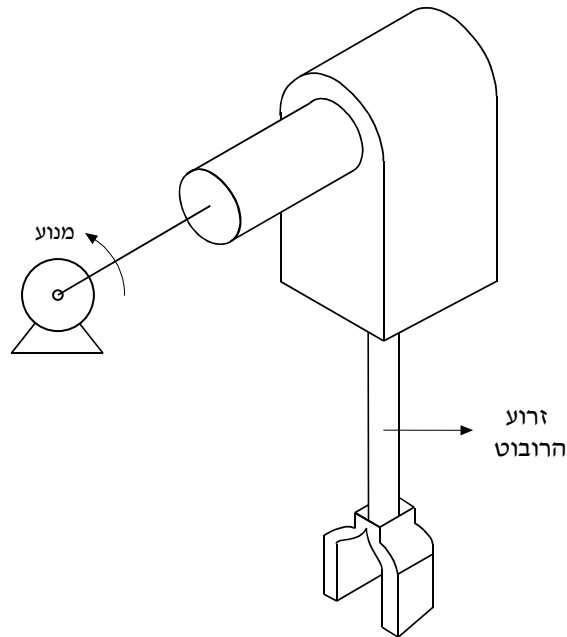
ב. בקרת לחץ המים במשאבה (איור 5.16).



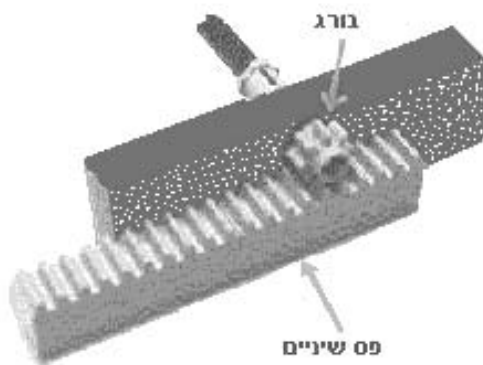
איור 5.16 משאבת מים המופעלת על-ידי מנוע

כדי להבטיח אספקה תקינה של מים לבתים, נדרש לחץ מים קבוע (כחמש אטמוספירות, בדרך כלל) במוצא המשאבה. לכן במערכת בקרה עם מנוע, לחץ המים במוצא המשאבה הוא המשתנה המבוקר של המערכת. הגורם העיקרי המשפיע על לחץ המים הוא רמת צריכת המים על-ידי המשתמשים. לחץ המים במוצא המשאבה נמצא ביחס ישר למהירות הסיבוב של ציר המשאבה המחובר למנוע. בקרת המהירות של המנוע מאפשרת לשמור על לחץ מים תקין במצבים שונים של צריכה.

ג. בקרת תנועה זוויתית של זרוע רובוט (איור 5.17). פעולת זרוע הרובוט מבוססת על תנועות מורכבות בשלושה כיוונים ניצבים. לדוגמה, העברת פריט ממקום למקום דורשת בקרה של זווית ההגבהה של הזרוע ושל זווית הצידוד של הזרוע. במערכת זו, המצב הזוויתי של הזרוע הוא המשתנה המבוקר של המערכת. כדי לשלוט על המצב הזוויתי, מחברים למנוע תמסורת המפחיתה את מספר הסיבובים, או מניעים את המנוע בחלקי סיבוב.



איור 5.17 זרוע של רובוט המופעלת על-ידי מנוע



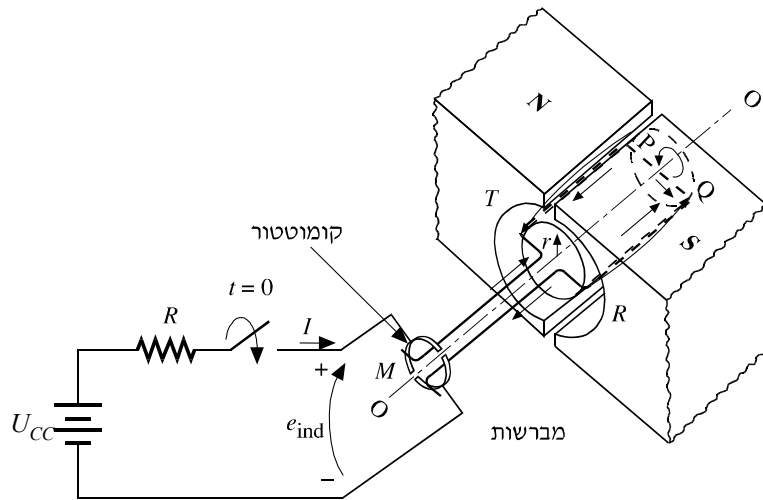
איור 5.18 ממסרת פס שיניים להתמרת תנועה סיבובית לתנועה קווית

ד. בקרת העתק קווי (מרחק) של בורג. כדי לבקר תנועה קווית (למשל, המרחק האופקי שעובר בורג במערכת המתוארת באיור 5.18), ממירים את התנועה הסיבובית של המנוע לתנועה קווית באמצעות ממסרת פס שיניים. במערכת זו, המשתנה המבוקר הוא המרחק האופקי של הבורג. באמצעות שימוש במנוע צעד ניתן להשיג דיוק רב בתנועת הבורג.

5.3.2 מנועי זרם ישר

בפרק 2 (סעיף 2.1.3) למדנו כי פונקציית התמסורת של מנוע ז"י נתונה על-ידי היחס בין מתח ההדקים של המנוע לבין מהירות הסיבוב שלו. בסעיף זה נחזור ונדון בקצרה בפעולת מנוע לזרם ישר, וננתח את התנועה של כריכה (או סליל) המסתובבת בין קוטבי מגנט קבוע. באמצעות ניתוח כזה נוכל לפתח את הקשר המדויק בין מתח ההדקים של המנוע לבין מהירותו הסיבובית. על מנת לחשב קשר זה נחזור תחילה על מושגים מתורת החשמל.

5.3.2.1 הכא"מ המושרה בכריכה מסתובבת בשדה מגנטי



איור 5.19 מבנה עקרוני של מנוע זרם ישר העשוי מכריכה בודדת

באיור 5.19 מתוארת כריכה של מוליך שבה זורם זרם I הנוצר על-ידי מקור מתח קבוע. הזרם מסופק לכריכה באמצעות טבעות המְחֶלֶף (הקומוטטור). הכריכה נמצאת בחריץ של גרעין עגול, וגרעין זה נמצא בין שני קוטבי מגנט בעלי צורה קעורה. כתוצאה מכך נוצר חריץ אוויר בין הגרעין והקטבים המגנטיים; והשדה המגנטי, שהכריכה "רואה" בעת תנועתה בסמוך לקטבים, הוא שדה מגנטי אחיד שגודלו שווה בכל אזור החריץ.

כאשר הכריכה שבאיור 5.19 מסתובבת בשדה המגנטי, מושרה בה מתח. המתח המושרה בכריכה, \mathcal{E}_{ind} , הוא יחסי למהירות הסיבובית של הכריכה, ω , לעוצמת השדה המגנטי האחיד, B , ולשטח הכריכה, A_p .

ערכו המדויק של המתח המושרה נתון במשוואה (5-2):

$$(5-2) \quad \varepsilon_{\text{ind}} = \frac{2\omega A_p}{\pi} B$$

היות והשדה המגנטי הוא אחיד, מכפלת השדה המגנטי B בשטח A_p היא השטף המגנטי Φ , כלומר:

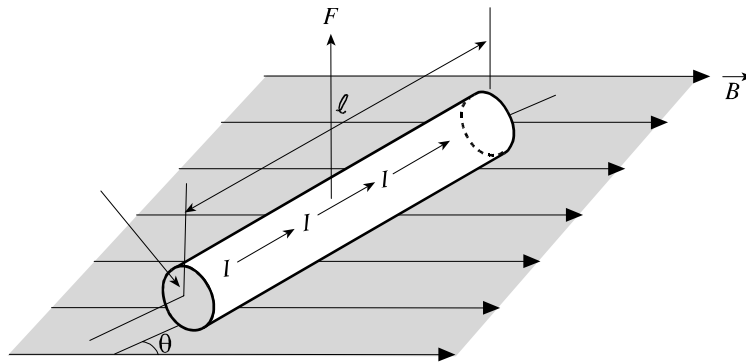
$$A_p B = \Phi$$

נציב זאת במשוואה (5-2), ונקבל את הקשר שבין מהירות הסיבוב של הכריכה לבין הכא"מ המושרה בה:

$$(5-3) \quad \varepsilon_{\text{ind}} = \frac{2\omega A_p}{\pi} B = \frac{2}{\pi} \omega \Phi = n\Phi / 15$$

כאשר $n = \frac{60\omega}{2\pi}$ היא המהירות הסיבובית בסיבובים לדקה.

5.3.2.2 המומנט הנוצר בכריכה המסתובבת בשדה מגנטי



איור 5.20 הכוח F הפועל על מוליך קווי נושא זרם I בשדה מגנטי B

ידוע שכאשר מוליך נושא זרם נמצא בשדה מגנטי פועל עליו כוח. למשל, על מוליך קווי באורך l שדרכו זרם זרם קבוע בעוצמה I , פועל כוח בשיעור F שגודלו נתון במשוואה (5-4):

$$(5-4) \quad F = BIl \sin \theta$$

כאן θ היא הזווית שבין כיוון השדה המגנטי לבין כיוון הזרם I שבמוליך (איור 5.20). גם על הצלעות RQ ו- PT של הכריכה (איור 5.19) פועלים זוג כוחות השווים בגודלם והפוכים בכיוונם. זוג כוחות זה יוצר מומנט סיבוב השואף לסובב את הכריכה למצב שבו מישורה יהיה מקביל לכיוון השדה המגנטי ($\theta = 0$) שאז הכוח שווה לאפס. גודלו המרבי של מומנט זה יחסי למכפלת הכוח המגנטי F , במרחק שבין צלעות הכריכה ונתון במשוואה (5-5):

$$(5-5) \quad M = \frac{2A_p BI}{\pi} = \frac{2}{\pi} \Phi I$$

ניתן להראות כי במנוע מעשי, שבו החלק המסתובב (הקרוי "עוגן", או רוטור) בנוי ממספר רב של כריכות, המומנט מקיים משוואה דומה למשוואה (5-5):

$$(5-6) \quad M = K_m \Phi I$$

כאשר K_m הוא קבוע התלוי במבנה המנוע (מספר הכריכות, צורת הכריכות, וכו').

5.3.2.3 מנוע זרם ישר אידיאלי – ללא עומס

נדון עתה בפעולת מנוע ז"י מסתובב פשוט, הבנוי מכריכה אחת המסתובבת ללא חיכוך בין שני קטבים מגנטיים, כמתואר באיור 5.19. מאחר שהכריכה נמצאת בהתחלה במנוחה, לא מושרה בה מתח, כלומר, $\varepsilon_{\text{ind}} = 0$. כאשר סוגרים את המתג, מקבלים – לפי חוק המתחים של קירכהוף וחוק אום – כי:

$$(5-7) \quad I = \frac{V_{CC} - \varepsilon_{\text{ind}}}{R} = \frac{V_{CC}}{R}$$

כאשר I הוא הזרם הזורם דרך הכריכה, ו- U_{CC} הוא מתח ההדקים על המנוע. עקב זרם זה נוצר מומנט סיבוב M שגודלו נתון על-ידי משוואה (5-5):

$$M = \frac{2}{\pi} \Phi I$$

מומנט זה גורם לתאוצה סיבובית של הכריכה (בדומה לכוח הגורם לתאוצה קווית), כלומר: המהירות הסיבובית n הולכת וגדלה. אבל אם n גדלה, גם המתח ε_{ind} המושרה בכריכה גדל, בהתאם למשוואה (5-3):

$$\varepsilon_{\text{ind}} = n\Phi / 15$$

אבל אם ε_{ind} גדל, אז – לפי חוק המתחים של קירכהוף – הזרם I קטן, שהרי הזרם נתון על-ידי:

$$I = \frac{V_{CC} - \varepsilon_{\text{ind}}}{R}$$

וכתוצאה מכך קטן גם המומנט M , הנתון על-ידי משוואה (5-5).

תהליך זה נמשך, עד אשר ε_{ind} שווה ל- U_{CC} , אז גם I שווה לאפס, ולכן גם מומנט הסיבוב M שווה לאפס, והכריכה ממשיכה להסתובב במהירות קבועה.

5.3.2.4 מנוע זרם ישר מסתובב – עם עומס

נניח עתה כי מנוע זרם ישר מסתובב במהירות קבועה n (שאינו $M = 0$), ואנו מפעילים עליו מומנט סיבוב חיצוני M_L , הגורם לסיבוב בכיוון נגדי למגמת הסיבוב הנוכחית של המנוע. כתוצאה מכך תיווצר תאוטה סיבובית, כלומר: n תקטן. אבל אם n קטנה, המתח המושרה קטן אף הוא, שכן לפי משוואה (5-3):

$$\varepsilon_{\text{ind}} = n\Phi/15$$

אבל אם ε_{ind} קטן, הזרם I גדל, שהרי:

$$I = \frac{U_{CC} - \varepsilon_{\text{ind}}}{R}$$

אם הזרם גדל, מומנט הסיבוב M גדל אף הוא. כך נמשך התהליך, עד אשר M משתווה בגודלו ל- M_L , ואז המנוע נע במהירות סיבובית קבועה, אבל איטית יותר ממהירות המנוע ללא עומס.

דוגמה 5.3

נתון מנוע זרם ישר העשוי מכריכה מסתובבת יחידה – בעלת הנתונים שלהלן (איור 5.19):

$$U_{CC} = 220 \text{ V} \quad R = 3 \text{ } \Omega \quad B = 2.5 \text{ T} \quad \ell = 1 \text{ m} \quad r = 0.5 \text{ m}$$

א. מהו הזרם ההתחלתי במנוע?

ב. מהי המהירות הסיבובית הקבועה שאליה יגיע המנוע ללא עומס?

ג. נניח כי הוספנו מומנט עומס שגודלו 10 Nm . מה תהיה עתה המהירות הסיבובית הקבועה שאליה יגיע המנוע?

פתרון

א. הזרם ההתחלתי במנוע הוא:

$$I = \frac{U_{CC}}{R} = \frac{220}{3} = 73.3 \text{ A}$$

ב. כאשר המנוע מגיע למהירות סיבובית קבועה, המתח V_B שווה למתח המושרה:

$$V_B = \varepsilon_{\text{ind}}$$

אבל:

$$\varepsilon_{\text{ind}} = n\Phi/15$$

והמהירות הסיבובית הקבועה היא:

$$n = \frac{15 \cdot \varepsilon_{\text{ind}}}{\Phi} = \frac{15 \cdot U_{CC}}{\Phi} = \frac{15 \cdot U_{CC}}{A_p B} = \frac{15 \cdot U_{CC}}{\pi r \ell B} = \frac{15 \cdot 220}{\pi \cdot 0.5 \cdot 1 \cdot 2.5} = 840 \text{ rpm}$$

ג. כשהמנוע מגיע למהירות סיבובית קבועה, מתקיים $M = M_L$, כלומר, $M = 10 \text{ Nm}$. אבל:

$$M = \frac{2}{\pi} \Phi I$$

ולכן:

$$I = \frac{M}{\frac{2}{\pi} \Phi} = \frac{M}{\frac{2}{\pi} A_p B} = \frac{M}{\frac{2}{\pi} \pi r \ell B} = \frac{M}{2r \ell B} = \frac{10}{2 \cdot 0.5 \cdot 1 \cdot 2.5} = 4 \text{ A}$$

לפי חוק המתחים של קירכהוף:

$$\varepsilon_{\text{ind}} = U_{CC} - IR$$

נציב את הנתונים, ונקבל:

$$\varepsilon_{\text{ind}} = 220 - (4 \cdot 3) = 208 \text{ V}$$

ועתה נחשב את המהירות הסיבובית (משוואה (5-3)):

$$\omega = \frac{\varepsilon_{\text{ind}}}{\frac{2}{\pi} \Phi} = \frac{\varepsilon_{\text{ind}}}{\frac{2}{\pi} A_p B} = \frac{\varepsilon_{\text{ind}}}{\frac{2}{\pi} \pi r \ell B} = \frac{208}{2 \cdot 0.5 \cdot 1 \cdot 2.5} = 83.2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

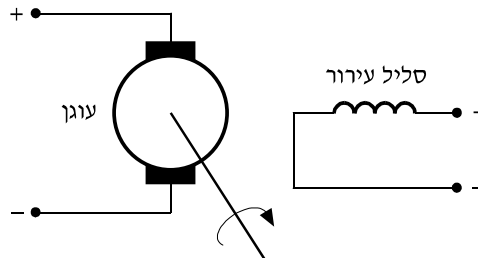
אם מעוניינים לדעת את מספר הסיבובים בדקה (rpm), יש להשתמש בקשר שבין מספר הסיבובים בדקה, n , לבין המהירות הסיבובית ω :

$$n = \frac{60 \omega}{2\pi} = \frac{60 \cdot 83.2}{2 \cdot \pi} = 794.5 \text{ rpm}$$

כלומר, המהירות של המנוע עם העומס קטנה בכ-5% מן המהירות של המנוע הלא מועמס.

5.3.2.5 מנועי זרם ישר מעשיים

את השדה המגנטי במנוע מעשי ניתן ליצור בשתי צורות: באמצעות מגנט קבוע בעל שני קטבים או באמצעות סליל שמלופף על קטבים העשויים פלדה. הסליל נקרא בשם **סליל עירור** (הוא מעורר שדה מגנטי במנוע). הקטבים יחד עם הסליל מהווים אלקטרומגנט היוצר שדה מגנטי חזק, והדבר מתאים במיוחד למנועים גדולים. בסרטוטים חשמליים נהוג לסמן מנוע זרם ישר בצורה המתוארת באיור 5.21. סליל המנוע המסתובב בשדה המגנטי נקרא גם **העוגן**, והזרם הזורם בסליל זה נקרא **זרם העוגן** (זרם הכריכה I בסעיף הקודם).



איור 5.21 סימון חשמלי של מנוע זרם ישר עם סליל עירור

ראינו כי מומנט הסיבוב שמפתח המנוע בזמן סיבובו נמצא ביחס ישר לזרם הזורם בסליל העוגן (משוואה (5-6)):

$$M = K_m \Phi I_a$$

כאשר I_a הוא הזרם הזורם בסליל העוגן.

נראה עתה שהגדלת העומס על ציר המנוע גורמת לעליית זרם העוגן I_a ולגידול בהפסדים החשמליים. (הפסדים אחרים, כגון ההפסדים הנובעים מחיכוך המיסבים, כמעט שאינם תלויים בזרם העוגן).

ההספק החשמלי שמסופק לסליל העוגן נתון על-ידי

$$P_{in} = U_a \cdot I_a$$

כאשר U_a הוא מתח ההדקים של סליל העוגן, ו- I_a הוא הזרם בסליל העוגן.

ההספק המכני שמספק המנוע שווה למכפלת המומנט M במהירות הסיבוב ω :

$$P_{out} = M \cdot \omega = 2\pi M \cdot n/60$$

לפיכך, ההפסדים ΔP במנוע נתונים על-ידי ההפרש :

$$\Delta P = P_{in} - P_{out} = I_a U_a - 2\pi M \frac{Mn}{60}$$

ומכאן שההפסדים נמצאים ביחס ישר לזרם העוגן I_a . היות שהמומנט נמצא ביחס ישר לזרם העוגן, הרי הגדלת המומנט החיצוני גורמת להגדלת ההפסדים החשמליים.

ראינו כי כאשר כריכה מסתובבת במהירות קבועה בשדה מגנטי, נוצר כא"מ מושרה שגודלו נתון על-ידי משוואה (5-3). ניתן להראות כי גם במנוע מעשי המסתובב במהירות קבועה n נוצר כא"מ מושרה ε_{ind} שגודלו נמצא ביחס ישר למהירות :

$$(5-8) \quad \varepsilon_{ind} = K_e \Phi n$$

K_e הוא קבוע, שבדומה לקבוע K_m , ערכו נקבע על-ידי מספר הכריכות בסליל העוגן, צורת הכריכות, וכו'. למעשה, הקשר בין שני קבועים אלו הוא :

$$(5-9) \quad K_m = 9.55 K_e$$

ממשוואה (5-8) ומחוק קירכהוף נוכל לקבל את הקשר בין המהירות הסיבובית n של המנוע לבין המתח U_a על העוגן :

$$(5-10) \quad n = \frac{U_a - I_a \cdot R_a}{K_e \Phi}$$

ראינו כי הגדלת העומס גורמת להגדלת זרם העוגן. ממשוואה (5-10) נובע אפוא כי בדומה למנוע אידיאלי בעל כריכה בודדת, גם במנוע מעשי, הגדלת העומס גורמת לירידה במהירות המנוע. כדי למנוע זאת, מחברים את המנוע למערכת בקרה, שתפקידה להעלות את מתח העוגן U_a בעת הגדלת העומס, כדי לשמור על מהירות קבועה של המנוע.

5.4 דוגמה

נתונים נקובים (נומינליים) של מנוע זרם ישר הם :

$$U_a = 200 \text{ V}$$

$$n = 1200 \text{ rpm}$$

$$I_a = 20 \text{ A}$$

$$R_a = 1.2 \Omega$$

המנוע מסובב עומס עם מומנט של 20 Nm במהירות הנומינלית. ידוע שנצילות המנוע במצב זה היא 90%.

א. מהו הזרם שצורך המנוע במקרה זה?

ב. מהם הפסדי המנוע?

פתרון

א. הספק המוצא של המנוע :

$$P_{\text{out}} = M_L \cdot \omega = M_L \cdot \frac{2\pi}{60} \cdot n$$

$$P_{\text{out}} = 20 \frac{2\pi}{60} \cdot 1200 = 2513 \text{ W}$$

הנצילות η מוגדרת כיחס בין הספק המוצא לבין הספק המבוא.

$$\eta(\%) = \frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} \cdot 100\% = 90\% \quad \text{נתון כי:}$$

$$P_{\text{in}} = \frac{2513 \cdot 100}{90} = 2792.5 \text{ W} \quad \text{ולכן:}$$

$$P_{\text{in}} = U_a \cdot I_a \quad \text{הספק המבוא נתון על-ידי המכפלה:}$$

ולכן הזרם שצורך המנוע הוא :

$$I_a = \frac{P_{\text{in}}}{U_a} = \frac{2792.5}{200} = 13.96 \text{ A}$$

ב. ההפסדים הם :

$$\Delta P = P_{\text{in}} - P_{\text{out}} = 2792.5 - 2513 = 279.5 \text{ W}$$

5.5 דוגמה

התייחס למנוע שנתוניו הנומינליים נתונים בדוגמה 5.4. סרטטו את אופיין השתנות המהירות של המנוע כפונקציה של מומנט העומס. (הניחו שזרם העוגן משתנה בין 0 ל-20 A).

פתרון

נחלץ ממשוואה (5-10) את הגורם $K_e \Phi$ שהוא קבוע למנוע נתון:

$$n = \frac{U_a - I_a \cdot R_a}{K_e \Phi}$$

$$K_e \Phi = \frac{200 - 1.2 \cdot 20}{1200} = 0.147 \frac{\text{V}}{\text{rpm}}$$

ממשוואות (5-6) ו-(5-9) מקבלים כי במצב שבו המהירות קבועה, מתקיים:

$$M_L = K_m \cdot \Phi \cdot I_a = 9.55 K_e \Phi I_a = 1.4 I_a$$

ולכן כאשר $M_L = 0$ מתקיים $I_a = 0$, והמהירות היא:

$$n = \frac{200 - 0}{0.147} = 1361 \text{ rpm}$$

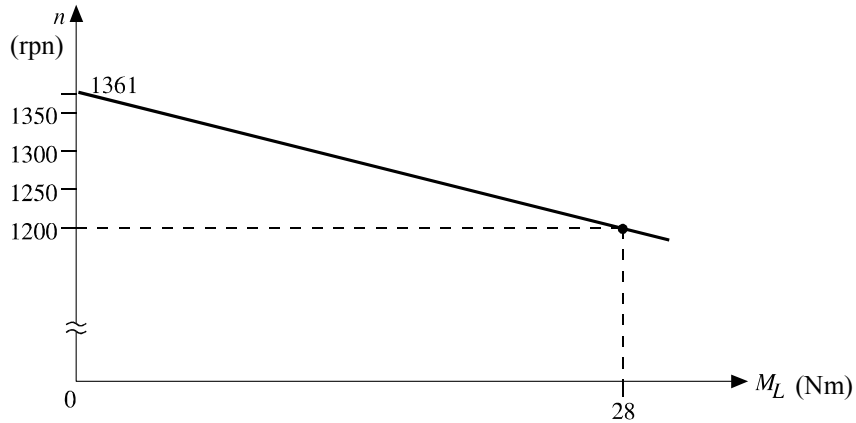
כאשר המנוע מועמס והמהירות היא המהירות הנומינלית מקבלים:

$$M_L = 1.4 I_a = 1.4 \cdot 20 = 28 \text{ Nm}$$

כלומר, עבור $n = 1200 \text{ rpm}$, מקבלים

$$M_L = 28 \text{ Nm}$$

באיור 5.22 מופיע גרף האופיין של המנוע.



איור 5.22 תלות אופיינית של מהירות הסיבוב של מנוע במומנט העומס

5.6 דוגמה

התייחסו למנוע שנתוניו הנומינליים נתונים בדוגמה 5.4. רוצים שהמנוע יסובב עומס חיצוני במהירות של 800 rpm. איזה מתח יש לחבר לסליל העוגן?

פתרון

ממשוואה (5-10) מקבלים כי:

$$n = \frac{U_a - I_a \cdot R_a}{K_e \Phi} \Rightarrow U_a = K_e \Phi n + I_a \cdot R_a$$

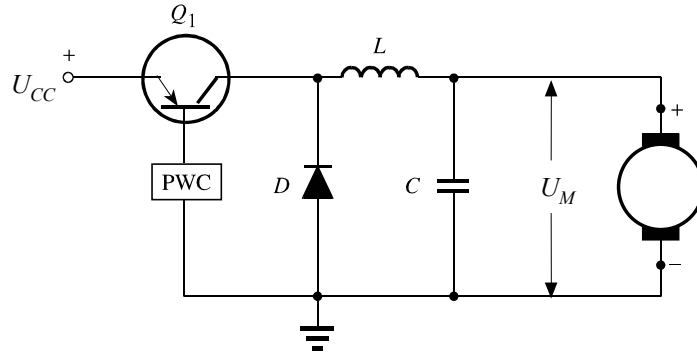
ולכן עבור זרם נומינלי של $I_a = 20 \text{ A}$ ועבור הערך של $K_e \Phi$ שחישבנו בדוגמה הקודמת, מתקבל המתח:

$$U_a = 0.147 \cdot 800 + 20 \cdot 1.2 = 141.6 \text{ V}$$

*5.3.2.6 מעגלי בקרה למנועי זרם ישר

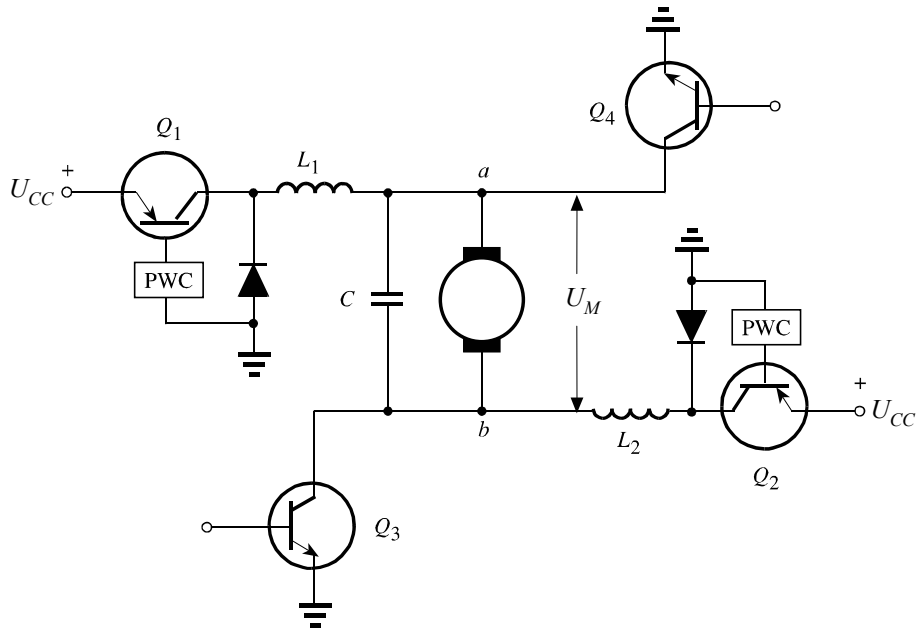
קיים מגוון של מעגלים אלקטרוניים המאפשרים לבקר את מתח ההדקים של מנוע זרם ישר. כאן נתאר מעגל בקרה בשיטת PWC שהוזכר בסעיף 5.2.1.1.

ניתן להזיין את המנוע ממקור מתח ישר (כדוגמת מצבר) דרך מעגל הפועל בשיטת בקרת רוחב הדופק (PWC) (ראו איור 5.23):



איור 5.23 מעגל להגברת מתח ההדקים על מנוע ז"י בשיטת PWC (סיבוב בכיוון אחד)

הטרנזיסטור Q_1 משנה את יחס המיתוג (duty cycle) וקובע את המתח הממוצע U_M המגיע לסליל העוגן של המנוע. מעגל כזה מאפשר למנוע להסתובב רק בכיוון אחד, משום שהקוטביות אינה משתנה. כדי לאפשר למנוע להסתובב בשני הכיוונים, מוסיפים מעגל זהה למעגל הקודם כך שניתן לשנות את קוטביות המתח המגיע למנוע (איור 5.24).

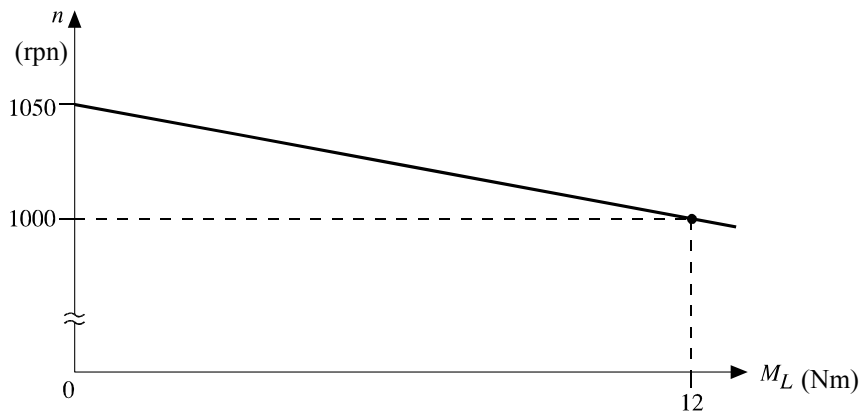


איור 5.24 מעגל לבקרת מתח הדקים של מנוע ז"י בשיטת PWC (H-Bridge)

כאשר הטרנזיסטורים Q_1 ו- Q_3 נמצאים בהולכה (והטרנזיסטורים Q_2 ו- Q_4 נמצאים בקיטעון), המנוע מסתובב בכיוון אחד (במצב זה הזרם זורם מהנקודה a לנקודה b). מיתוג הטרנזיסטורים Q_2 ו- Q_4 למצב הולכה משנה את קוטביות המתח (הזרם זורם מהנקודה b לנקודה a וגורם לסיבוב בכיוון ההפוך).

שאלה 5.3

האופייני המכני של מנוע זרם ישר (התלות בין מהירות המנוע לבין המומנט על צירו) נתון באיור 5.25):



איור 5.25 איור לשאלה 5.3

- במומנט הנומינלי של 12 Nm, המנוע צורך זרם של 8 A. התנגדות סליל העוגן היא 0.6Ω .
- מהו מתח ההזנה הנומינלי של המנוע?
 - רוצים לקבל מהירות של 600 rpm בעומס הנומינלי. מהו המתח הדרוש על סליל העוגן?

שאלה 5.4

נתונים נקובים (נומינליים) של מנוע זרם ישר הם:

$$U = 200 \text{ V}$$

$$I = 80 \text{ A}$$

$$n = 1000 \text{ rpm}$$

$$\eta = 92\%$$

$$R_a = 0.21 \text{ W}$$

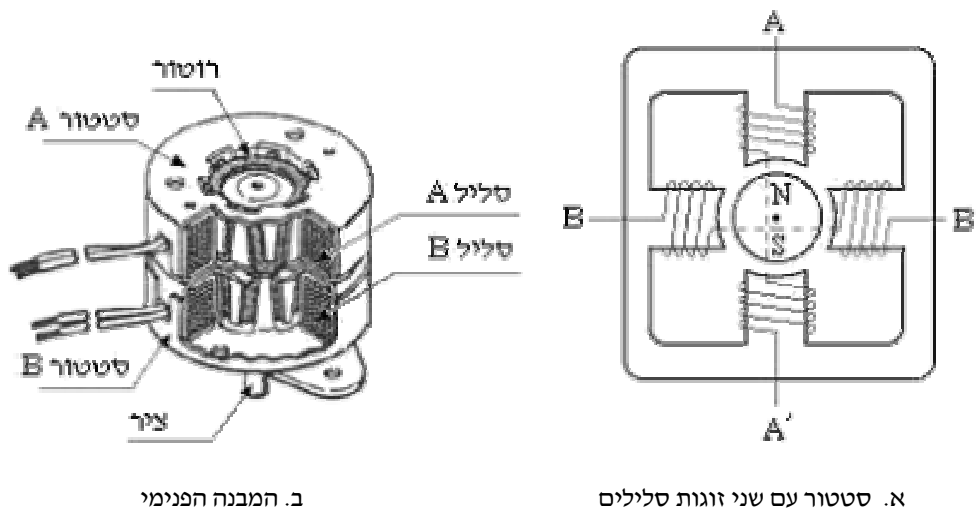
- חשבו את ההפסדים הכלליים של המנוע.
- מהו המומנט הנומינלי של המנוע?
- המנוע פועל במתח של 150 V וצורך זרם של 50 A. מהי מהירות המנוע?

5.3.3 מנועי צעד (Step Motor)

במנוע צעד יוצרים שדה מגנטי מסתובב על-ידי מיתוג מחזורי של סלילי הסטטור באמצעות אות גל ריבועי. המנוע מבצע סדרה של "צעדי סיבוב" בזווית מוגדרת מראש, כאשר כל צעד זוויתי מתבצע בתגובה לאות מתח קבוע הניתן לאחד (או יותר) מסלילי הסטטור שבמנוע.

5.3.3.1 המבנה ועקרון הפעולה של מנוע צעד

כמו כל מנוע חשמלי, מנוע צעד מורכב משני חלקים בסיסיים: החלק הנייד (המסתובב) שהוא הרוטור (או העוגן), והחלק הנייח – הסטטור. הרוטור בנוי ממגנט קבוע (Permanent Magnet) שבו חלקים אחדים ממוגנטים לקוטביות "צפון" (N) וחלקים אחרים ממוגנטים לקוטביות "דרום" (S). הסטטור בנוי מכמה סלילים המלופפים על חומר פרומגנטי, ויוצרים מגנט כאשר זורם בהם זרם קבוע (אלקטרומגנטים). באיור 5.26 א מופיע תיאור עקרוני של מנוע ובו רוטור העשוי מזוג קטבים אחד (S-N), ושמסתובב בין קוטבי סטטור הבנוי מארבעה סלילים. באיור 5.26 ב מופיע תיאור של מנוע צעד מעשי. על-ידי מיתוג הסלילים בצורה מחזורית ניתן ליצור במרכז שדה מגנטי שכיוונו משתנה גם הוא באופן מחזורי. מיתוג הסלילים נעשה בזוגות: כאשר בסלילים AA' זורם זרם ובסלילים BB' לא זורם זרם, ולהפך.



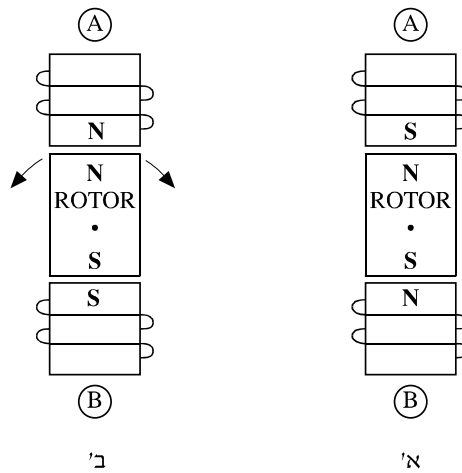
ב. המבנה הפנימי

א. סטטור עם שני זוגות סלילים

איור 5.26 תיאור עקרוני של מנוע צעד

כיווני הזרמים בזוגות הסלילים AA' (או BB') הם הפוכים: כאשר הסליל A (או הסליל B) יוצר שדה מגנטי שכיוונו מ-A ל-A' (או מ-B ל-B') למשל, אזי הסליל A' יוצר שדה מגנטי בכיוון ההפוך מ-A ל-A' (או מ-B ל-B').

בדרך זו נוצרים כוחות דחייה ומשיכה בין קוטבי הרוטור לקוטבי האלקטרומגנטים שבסטטור, ונוצר מומנט הגורם לסיבוב הרוטור. כדי להבין כיצד נוצר מומנט הסיבוב, נניח כי בתחילה מסופק המתח לזוג הסלילים AA' בלבד. קיימות שתי אפשרויות בהתאם למצב הרוטור באותו רגע (איור 5.27): או שהמצב יציב (איור 5.27א) או שנוצרים כוחות דחייה (איור 5.27ב) והמצב של הרוטור אינו יציב.



ב. רוטור וסטטור במצב לא-יציב דחייה בין קטבים שווי סימן

א. הרוטור והסטטור במצב יציב (קטבים מנוגדים נמשכים)

איור 5.27 מצבי רוטור וסטטור במנוע צעד

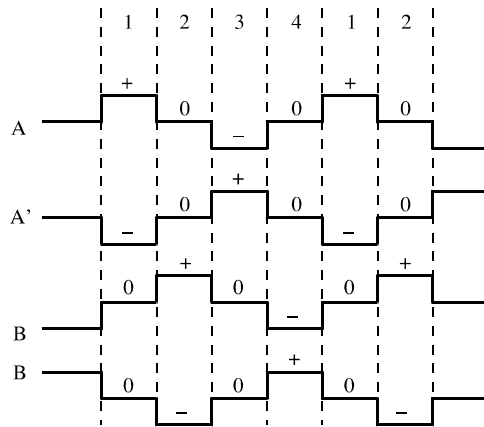
כאמור, תנועת הרוטור מושגת על-ידי מיתוג של זוגות הסלילים בסדר מסוים. איור 5.28 מתאר מיתוג אפשרי של זוגות הסלילים שכולל ארבעה מצבים:

מצב 1: בסליל A זרם בכיוון אחד (+) ובסליל A' זרם זרם בכיוון ההפוך (-). בסלילים B ו-B' לא זרם זרם (0). הרוטור במצב יציב (איור 5.28ב, מצב 1).

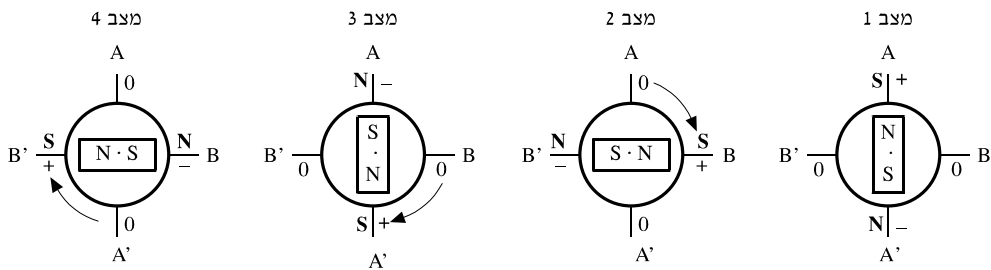
מצב 2: בסליל B זורם זרם בכיוון אחד (+) ובסליל B' זורם זרם בכיוון ההפוך (-). במצב זה, כוחות המשיכה בין קוטבי הרוטור לקוטבי הסטטור גורמים לרבע סיבוב של הרוטור בכיוון השעון.

מצב 3: כמו מצב 1 אולם כיוון הזרמים בסלילים A ו-A' מתהפך. הרוטור שוב מסתובב רבע סיבוב למצב היציב החדש.

מצב 4: כמו מצב 2 כאשר כיווני הזרמים בסלילים B ו-B' הפוכים. הרוטור מבצע רבע סיבוב נוסף למצב היציב החדש.



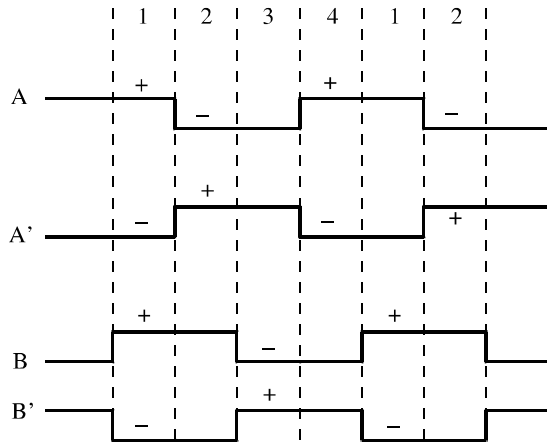
א. תרשים זמנים



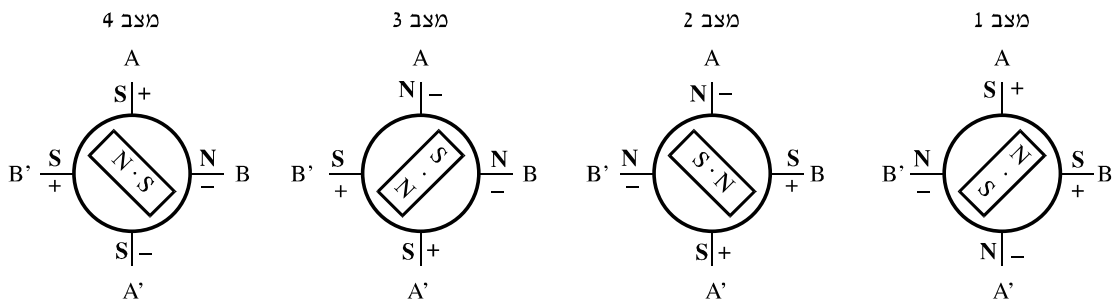
ב. המצב ההדדי של הרוטור וסלילי הסטטור במנוע צעד עם שני זוגות סלילים שבו כל סליל ממוטג בנפרד

איור 5.28 תרשימי זמנים ומצבים במנוע צעד חד-מופעלי

שיטת מיתוג זו נקראת One phase on full step drive. זווית הצעד במנוע הבנוי מרוטור בעל זוג אחד של קטבים היא 90° . ניתן למתג את הסלילים בצורה שונה מעט על-ידי הזנת הזוגות A'A ו-B'B בו בזמן (איור 5.29). במקרה זה מקבלים אותה זווית צעד (90° במנוע המתואר לעיל).



א. תרשים זמנים

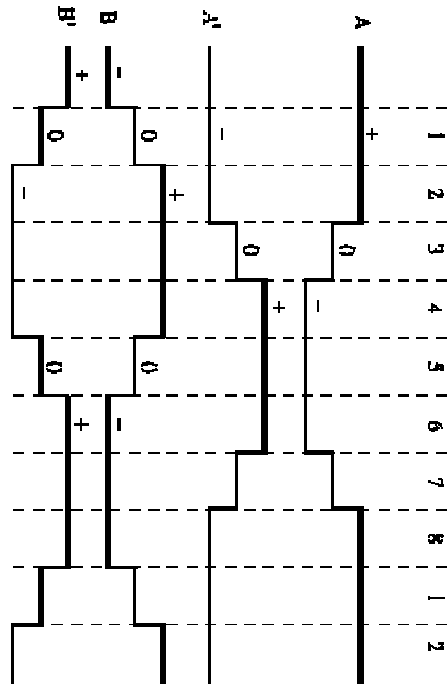


ב. המצב ההדדי של הרוטור וסלילי הסטטור במנוע צעד שבו יש מיתוג משותף של שני זוגות הסלילים

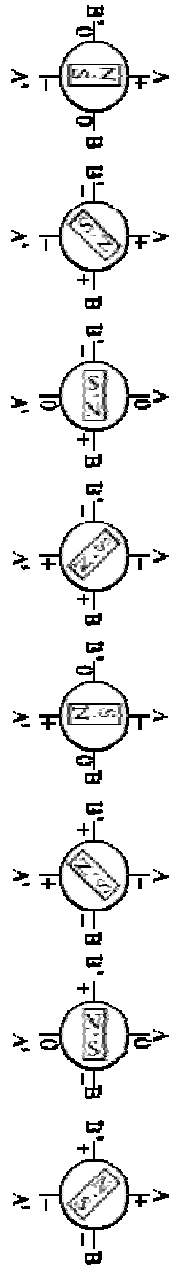
איור 5.29 מנוע צעד דו מופעי

שיטה זו קרויה two phase-on full step drive, ויתרונה בכך שהיא יוצרת כוחות משיכה חזקים יותר.

ניתן לקבל זווית צעד שגודלה מחצית (Half Step) מהזווית המתקבלת בשתי השיטות שתוארו לעיל, על-ידי מיתוג הסלילים בצורה המתוארת באיור 5.30. בשיטה זו קיימים פרקי זמן בהם מוזנים שני זוגות הסלילים, ופרקי זמן אחרים שבהם מוזן רק זוג אחד (איור 5.30).



תרשים זמנים



ב. מצב הרוטור יחסית לסלילי הסטטור במנוע צעד עם מיתוג בקצב כפול (half step)

איור 5.30 מנוע עם חצי צעד

ניתן להקטין את זווית הצעד על-ידי שימוש ברוטור הבנוי מכמה זוגות קטבים (בלי לשנות את מספר הסלילים בסטטור). באמצעות רוטור כזה ניתן להשיג זווית צעד של כמה מעלות בלבד.

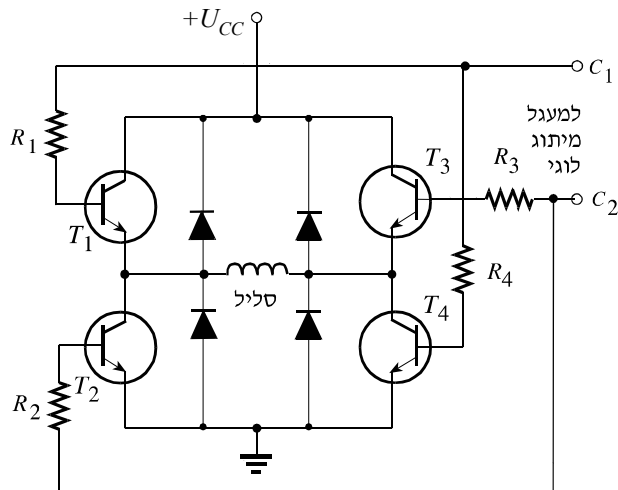
5.3.3.2 מעגלי הבקרה של מנועי צעד

מעגל אלקטרוני "הדוחף" זרם לסליל מנוע (Drive Circuit) ומאפשר לממש את אפשרויות המיתוג שתוארו לעיל מופיע באיור 5.31. הטרנזיסטורים במעגל זה פועלים כמפסקים אלקטרוניים: כאשר זרם הבסיס גדול מערך מסוים, זורם זרם בין הקולט לפולט, וכאשר זרם הבסיס קטן מערך זה, הטרנזיסטור נכנס למצב קיטעון.

לדוגמה, על גודל הזרם וכיוונו בסליל של המנוע שבאיור 5.31 ניתן לשלוט באמצעות מיתוג הטרנזיסטורים T_1, T_2, T_3 ו- T_4 . כאשר הטרנזיסטורים T_1 ו- T_4 במצב הולכה (ו- T_2, T_3 במצב קיטעון), זורם בסליל זרם בכיוון אחד. כאשר הטרנזיסטורים T_2, T_3 במצב הולכה (ו- T_1, T_4 בקיטעון), זורם בסליל זרם בכיוון ההפוך. כאשר כל ארבעת הטרנזיסטורים במצב קיטעון, לא זורם זרם בסליל.

C_1	C_2	כיוון זרם
0	0	אין זרם
1	0	→
0	1	←

ב. מצבי המיתוג

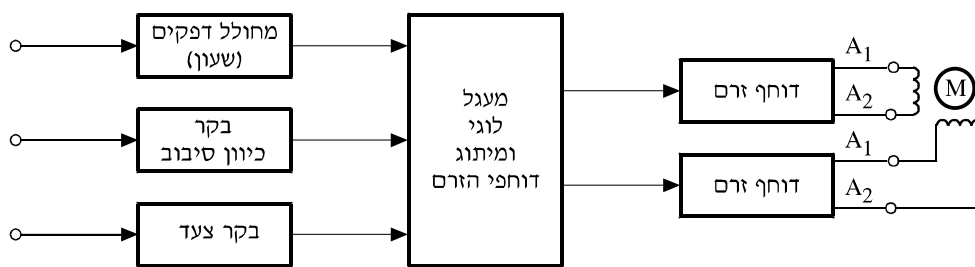


א. המעגל החשמלי

איור 5.31 מעגל לבקרת מנוע צעד

הסדר של מיתוג הטרנזיסטורים נקבע על-ידי מעגל לוגי הפועל על סמך מידע משלושה גורמים (איור 5.32):

- מחולל דפקים (Clock) שקובע את קצב הדפקים ורוחבם;
- בקר כיוון הסיבוב: בכיוון השעון (Clockwise direction – CW) או נגד כיוון השעון (Counter Clockwise direction – CCW);
- בקר צעד שלם (Full Step) או חצי צעד (Half Step).

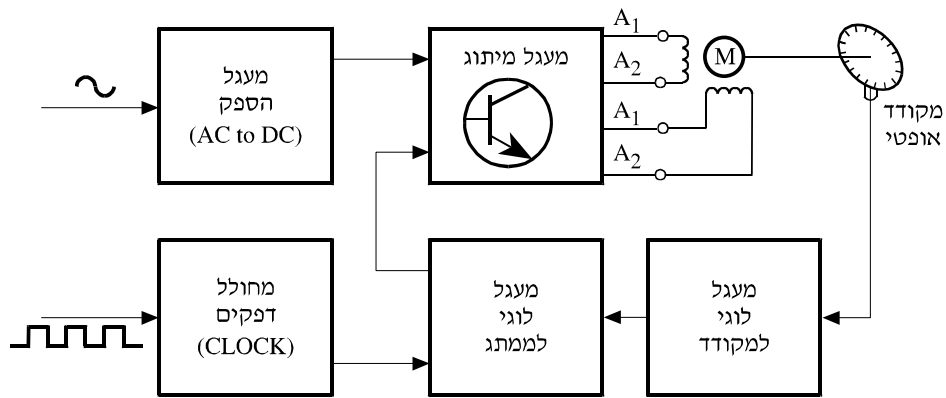


איור 5.32 מבנה כללי של מערכת לבקרת מנוע צעד

למנוע צעד יש כמה יתרונות בולטים:

- המנוע יכול לסובב התקן במעלות אחדות בלבד ובמהירות סיבוב גבוהה ביותר. מנוע צעד מתקדם מגיע לקצב של אלפי דפקים בשנייה. אם נניח שלביצוע סיבוב שלם דרושים כ-100 דפקים, אזי מהירות הסיבוב של ציר המנוע היא כ-20 סיבובים בשנייה, או 1200 סיבובים בדקה בקצב של 2000 דפקים בשנייה.
- היות שקיים קשר "קשיח" בין מספר אותות ההפעלה לבין זווית תנועת הציר, המנוע מצטיין בביצוע מדויק של פקודות. לפיכך, מנוע צעד מתאים במיוחד למערכות בחוג פתוח (ללא משוב).
- כדי להפעיל מנוע צעד דרושים אותות בצורת דפקים חשמליים. לפיכך, קל יחסית לשלב במערכת ממוחשבת, כאשר את כל הפעולות הלוגיות ניתן לממש באמצעות תוכנה.

ניתן לשלב מנועי צעד גם במערכות בקרה בחוג סגור. במערכות כאלו, תנועת ציר המנוע נמדדת באמצעות מקודד אופטי (Encoder), והאות המתקבל מהמקודד מוזן ישירות למערכת הלוגית שבמעגל בקרת המנוע (איור 5.33).



איור 5.33 מערכת לבקרת הזווית של מנוע צעד בחוג סגור עם מקודד אופטי

אחד השימושים החשובים החשובים במנועי צעד הוא במערכות ממוחשבות לייצור חלקים מכניים מדויקים בעיבוד שבבי (מערכות – CNC, Computer Numerical Control). באיור 5.34 מתוארת מערכת CNC כזאת, שבה השליטה בשלושת כיווני התנועה מתבצעת באמצעות שלושה מנועי צעד. המערכת מבוקרת בעזרת תוכנת מחשב.



איור 5.34 מערכת CNC שבה בקרת המנוע מתבצעת באמצעות מחשב

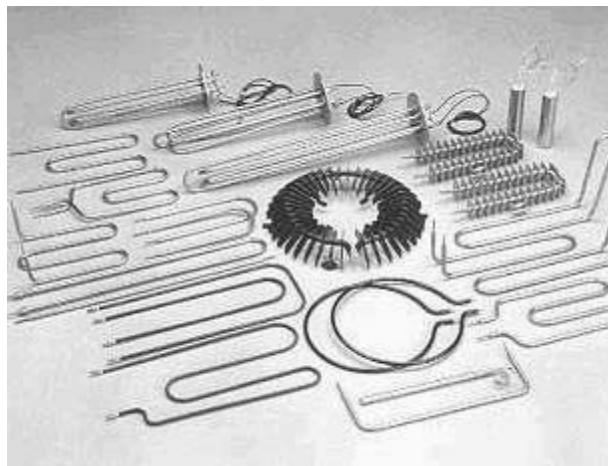
5.4 גופי חימום

5.4.1 המבנה של גופי חימום

בגוף חימום אנרגיה חשמלית מומרת לאנרגיית חום. רוב גופי החימום בנויים מתיל בעל התנגדות סגולית גבוהה הכרוך על חומר מבודד כלשהו. התיל וגם המבודד חייבים לעמוד בטמפרטורות גבוהות של מאות ואף אלפי מעלות צלסיוס בלי להינזק. אחד החומרים הנפוצים לבניית גופי חימום הוא סגסוגת כרום-ניקל שעשויה לעמוד בטמפרטורות של כ- $1,500^{\circ}\text{C}$. כאשר אין צורך להגיע לטמפרטורות גבוהות כל כך, ניתן להסתפק בגופי חימום העשויים נחושת עם ציפוי ניקל. גופי חימום כאלה עמידים בטמפרטורות של עד כ- 300°C .

צורת התיל של גוף החימום היא עגולה או שטוחה – על פי הצורך ליצור מעבר חום יעיל מהגוף הפולט חום לחומר המחומם.

לדוגמה, במגהץ ובקומקום חשמלי נהוג להשתמש בעיקר בתיל שטוח. לעומתם, בתנורי הסקה, גוף החימום בנוי מתיל עגול הכרוך בצורת קפיץ על מוט חרסינה, דבר המגביר את פליטת החום לסביבה באמצעות קרינה. בדוודים חשמליים המיועדים לחימום מים משתמשים בגופי חימום בצורת תיל לוליני המבודד באמצעות חרסינה. התיל מוחדר אל צינור הנמצא בתוך הדוד. הצינור אטום לחדירת המים וכך נמנע מגע בין המים לגוף החימום. באיור 5.35 מופיעים כמה דוגמאות של גופי חימום צינוריים.



איור 5.35 דוגמאות של גופי חימום

221 מפעילים ושילובם במערכות בקרה

את גופי החימום מתארים על-ידי מתח ההדקים הדרוש לפעולתם ועל-ידי ההספק החשמלי המושקע בהם. לדוגמה, תנור שרשום עליו הסימון 230 V , 1.5 KW , פועל במתח הדקים של 230 V והספקו החשמלי הוא $1,500$ וואט. את האנרגיה החשמלית המושקעת בגוף החימום ניתן לבטא באמצעות ההספק החשמלי P :

$$W = U \cdot I \cdot t = P \cdot t$$

כאשר t הוא זמן הפעולה של גוף החימום. יחידת האנרגיה החשמלית היא הג'ול (J), הנתונה על-ידי:

$$[J] = [VA \text{ sec}] = [W \text{ sec}]$$

את כמות החום הדרושה להעלאת הטמפרטורה של גוף שמסתו m מטמפרטורה T_1 לטמפרטורה T_2 ניתן לחשב בעזרת הנוסחה:

$$(5-11) \quad Q = m \cdot c \cdot (T_2 - T_1) = m \cdot c \cdot \Delta T$$

Q היא כמות החום הנמדדת בקלוריות (cal) או בקילוקלוריות (Kcal).

c הוא החום הסגולי של החומר ביחידות של $\frac{\text{Kcal}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}}$ או $\frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot ^\circ\text{C}}$.

ΔT הוא ההפרש בין הטמפרטורה ההתחלתית והטמפרטורה הסופית במעלות צלסיוס.

5.7 דוגמה

א. מהי כמות החום שיש להשקיע להרתחת 100 ליטר מים המצויים בטמפרטורה של עשרים מעלות צלסיוס?

$$\text{נתון: החום הסגולי של מים הוא } c = 1 \frac{\text{Kcal}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}}$$

ב. מהי כמות החום הדרושה כדי להעלות את הטמפרטורה של גוש פלדה, שמסתו 5kg , ב- 800°C ?

$$\text{נתון: החום הסגולי של פלדה הוא } c = 0.11 \frac{\text{Kcal}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}}$$

פתרון

א. נציב את הנתונים במשוואה (5-11), ונקבל:

$$Q = 100 \cdot 1 \cdot (100 - 20) = 8000 \text{ Kcal}$$

ב. במקרה זה:

$$Q = 5 \cdot 0.11 \cdot 800 = 440 \text{ Kcal}$$

הקשר בין אנרגיית חום המבוטאת בקלוריות (Q) לבין אותה אנרגיה הנתונה בגיול (W) הוא:

$$(5-22) \quad Q = 0.24 \cdot W$$

לכן, כדי לחשב את כמות החום בקלוריות המתקבלת מגוף חימום שממיר את כל האנרגיה החשמלית המושקעת בו לאנרגיית חום (ביעילות של 100%), יש לכפול את כמות האנרגיה החשמלית הנתונה ביחידות גיול, בגורם 0.24.

דוגמה 5.8

מהי כמות החום המתקבלת מגוף חימום בעל הספק של 2.2 kW בפרק זמן של מחצית השעה, אם יעילות המרת האנרגיה החשמלית לאנרגיית חום היא 100%?

פתרון

האנרגיה החשמלית המושקעת היא:

$$W = P \cdot t = 2200 \cdot 30 \cdot 60 = 396 \cdot 10^4 \text{ J}$$

ולכן כמות החום המתקבלת היא:

$$Q = 0.24 \cdot W = 0.24 \cdot 396 \cdot 10^4 = 95 \cdot 10^4 \text{ cal} = 950 \text{ Kcal}$$

מעשית, רק חלק מהאנרגיה החשמלית המושקעת מנוצלת באופן יעיל להעלאת הטמפרטורה של החומר המחומם. חלק מהאנרגיה החשמלית הולכת לאיבוד, למשל, כחום המועבר לסביבה של החומר המחומם. הנצילות של התקן חימום מוגדרת על-ידי:

$$(5-12) \quad \eta(\%) = \frac{Q_{out}}{Q_{in}} \cdot 100\%$$

כאשר Q_{out} היא כמות החום היעילה המנוצלת להעלאת טמפרטורת החומר, ו- Q_{in} היא האנרגיה החשמלית המושקעת בגוף חימום. אם נניח כי Q_{out} נתון על-ידי משוואה (5-11), נקבל כי הנצילות נתונה על-ידי:

$$(5-13) \quad \eta(\%) = \frac{m \cdot c(T_2 - T_1)}{0.24 \cdot P \cdot t} \cdot 100\%$$

5.9 דוגמה

קומקום מכיל 2.5 ליטר מים, ומונח על כירה חשמלית בעלת הספק של 2,200 W. טמפרטורת המים עלתה מ-20°C ל-90°C בתוך 9 דקות. חשבו את נצילות הכירה.

פתרון

נציב את הנתונים במשוואה (5-13), ונקבל:

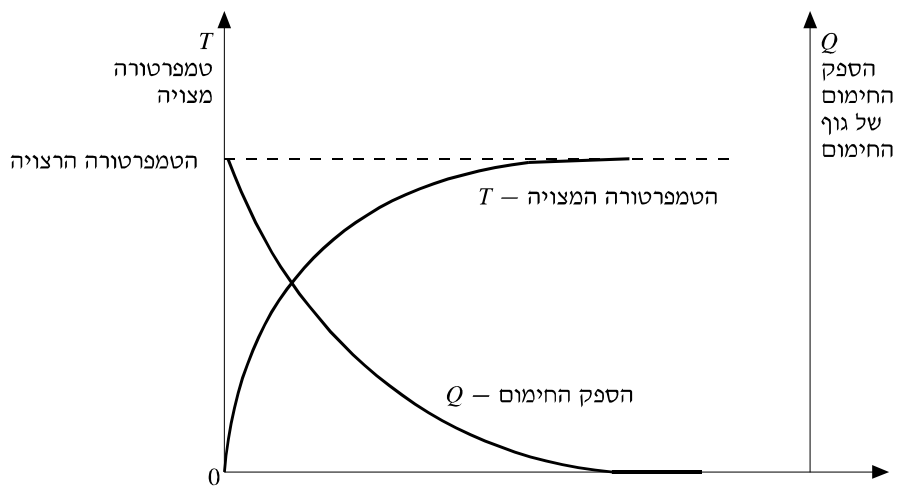
$$\eta(\%) = \frac{m \cdot c(T_2 - T_1)}{0.24 \cdot P \cdot t} \cdot 100\% = \frac{2,500 \cdot 1 \cdot (90 - 20)}{0.24 \cdot 2,200 \cdot 9 \cdot 60} \cdot 100\% = 61.4\%$$

5.4.2 הבקרה של גופי חימום

בחירת הבקרה על גוף חימום המשולב במערכת תלויה, בראש ובראשונה, בדרישות הדיוק של המערכת. הדרך הפשוטה ביותר לבקרה על גוף חימום היא באמצעות תרמוסטט. התרמוסטט בנוי על בסיס חיישן חום דו-מתכתי המחבר ומנתק את גוף החימום, וכך שומר על טמפרטורה בתחום שבין שתי טמפרטורות: טמפרטורת הסף התחתון וטמפרטורת הסף העליון. בשיטה זו אין אפשרות להגיע לדיוק גבוה בשמירת הטמפרטורה הנדרשת. ואמנם בפרק 1 למדנו כי במערכת שמבוקרת באמצעות תרמוסטט נוצרות "תנודות מחזוריות", כתוצאה מכך שהן גוף

החימום והן חיישן המתכת הם בעלי **קיבול חום** מסוים, המונע עלייה (או ירידה) פתאומית של הטמפרטורה בזמן מיתוג התרמוסטט (ראו איור 1.22 בפרק 1).

מעגל בקרה "מתוחכם" יותר מפעיל את גוף החימום בהתאם להפרש הטמפרטורה בינו לבין הטמפרטורה הרצויה. מעגל כזה מפעיל את גוף החימום כך שהספק החום Q_{in} קטן בהדרגה ככל שקטן ההפרש בין הטמפרטורה הרצויה לטמפרטורה המצויה (איור 5.36).



איור 5.36 השינוי בזמן של הטמפרטורה המצויה ושל הספק גוף החימום במערכת בקרת טמפרטורה בחוג סגור כתוצאה מהפרעה פתאומית

ניתן לממש מעגל בקרה כזה, למשל, בשיטת בקרת רוחב דופק (איור 5.6).

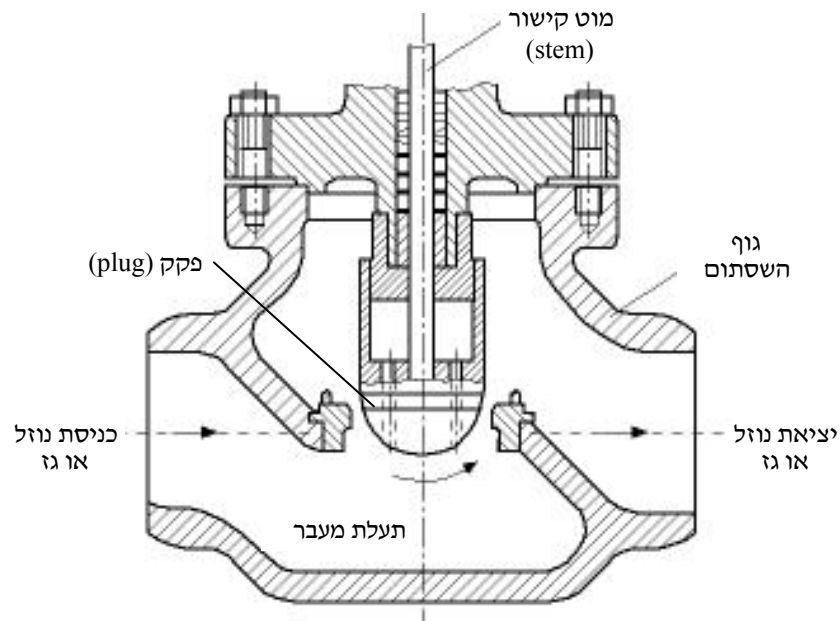
כדי להגיע לעקומת החימום הנדרשת (הקטנה הדרגתית של הספק החום כמתואר באיור 5.36), חייב להתקיים קשר בין השגיאה במערכת הבקרה (ההפרש בין הערך הרצוי לבין הערך המצוי), לבין פרק הזמן t_{on} , שבו מסופק זרם חשמלי למערכת (איור 5.5). ככל שהשגיאה גדולה יותר, כך יגדל גם הזמן t_{on} , ויגדל גם יחס המיתוג D של אות הדופק המלבני.

5.5* שסתומי בקרה

5.5.1 המבנה של שסתום בקרה ועקרון פעולתו

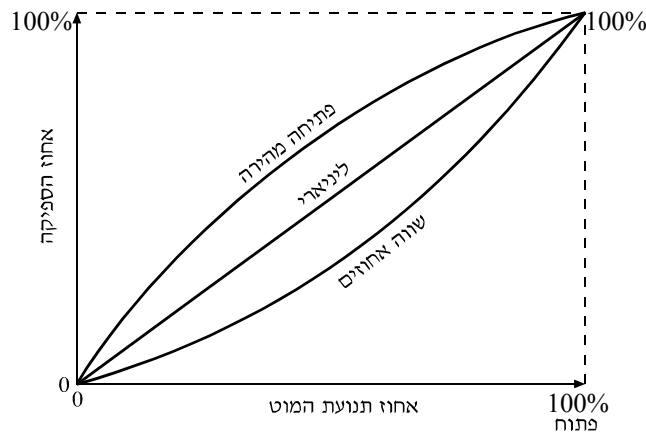
אחד המפעילים השימושיים ביותר בתעשייה הוא **שסתום הבקרה** (המכונה גם שסתום ויסות, ברז ויסות וכו'). באופן כללי, שסתום הוא התקן המיועד לשנות את הספיקה, או את כיוון הזרימה, או את הלחץ, במערכת שבה זורם נוזל או גז. שסתום הבקרה מופעל על-ידי מקור אנרגיה חיצוני. האנרגיה החיצונית יכולה להיות אנרגיה הידראולית (כלומר, אנרגיה של נוזל הנמצא בתנועה), פנימטית (אנרגיה של גז הנמצא בתנועה) או חשמלית. מרכיביו העיקריים של שסתום ויסות כוללים את גוף השסתום ומנגנון ההפעלה שלו (איור 5.37).

בתוך גוף השסתום נמצא רכיב ויסות הספיקה (מוט הקישור והפקק באיור 5.37). החלק הנייד של רכיב הוויסות מונע באמצעות מנגנון ההפעלה, ומשנה את גודלו של החלל שדרכו זורם הנוזל או הגז. דבר זה גורם לשינוי ספיקת החומר דרך השסתום. החלק הנייד יכול לנוע בשתי צורות: בתנועה קווית או בתנועה סיבובית. גוף השסתום השימושי ביותר המותאם לתנועה סיבובית הוא בעל צורה כדורית.



איור 5.37 המבנה הכללי של שסתום ויסות (חתך)

אופיין של שסתום בקרת ספיקה מבטא את התלות בין ספיקת הנוזל או הגז לבין פתיחת השסתום (מיקום החלק הנייד). בדרך כלל, תלות זו נתונה באחוזים מהשינוי המרבי האפשרי. למשל, באיור 5.38, מתוארת התלות של אחוז הספיקה באחוז תנועת המוט. שלושת אופייני השסתום השימושיים ביותר הם: אופיין שווה אחוזים (Equal Percentage), אופיין ליניארי (Linear) ואופיין פתיחה מהירה (Quick Opening).

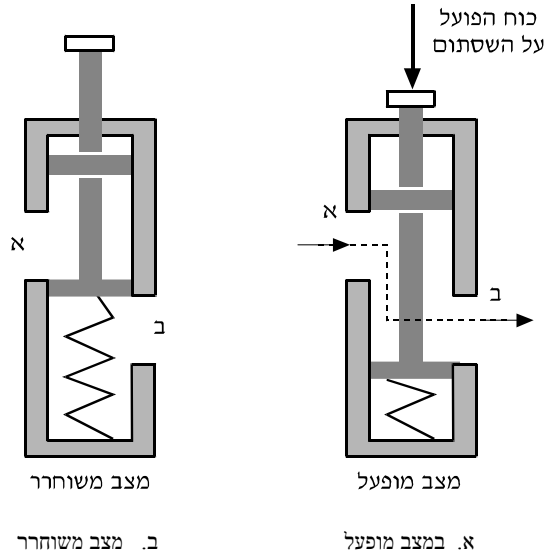


איור 5.38 אופיינים של שסתום ויסות

ניתן למיין את השסתומים לשני סוגים על פי המבנה שלהם: שסתומים בעלי שני פתחים (דו-דרכי, 2way), ושסתומים בעלי שלושה פתחים (שסתום תלת-דרכי). קיימים גם שסתומים עם מספר רב של פתחים שאליהם לא נתייחס במסגרת זו). שסתום עם שני פתחים יכול להיות בשני מצבים: מצב שבו החומר עובר דרך השסתום, ומצב שבו החומר אינו עובר דרך השסתום.

באיור 5.39 נתון תיאור סכמטי של שסתום בשני מצבים אלו. באיור 5.39א מתואר השסתום כשהוא מופעל באמצעות כוח הפועל על קפיץ. במצב זה הקפיץ נלחץ, וחומר (נוזל או גז) זורם מפתח א לפתח ב. במצב "משוחרר", (איור 5.39ב), הקפיץ נמצא במצבו הרגיל ואין זרימת חומר מפתח א לפתח ב. אות ההפעלה בשסתום זה הוא כוח חיצוני המשנה את מצב השסתום.

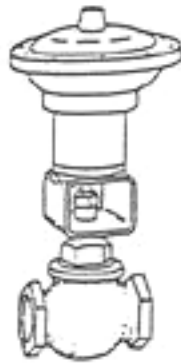
נהוג להבחין בין שסתום "פתוח רגיל" (N.O) לבין שסתום "סגור רגיל" (N.C). שסתום NO הוא שסתום שבו ללא הפעלה קיימת זרימת חומר חופשית מפתח א לפתח ב. אות ההפעלה גורם לסגירת המעבר. לעומת זאת, בשסתום NC לא מתקיימת זרימה חופשית של חומר ללא אות הפעלה, ועם הפעלת האות, השסתום נפתח.



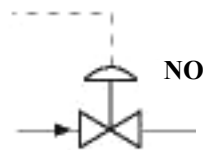
איור 5.39 שסתום ויסות בעל שני פתחים

שאלה 5.5

איזה שסתום מתואר באיור 5.39, שסתום NO או שסתום NC? הסבירו.
 באיור 5.40 נתון הסמל המקובל של שסתום בקרה בעל שני פתחים, ובאיור 5.40 ב מופיע שסתום בקרה מעשי.



ב. שסתום מעשי

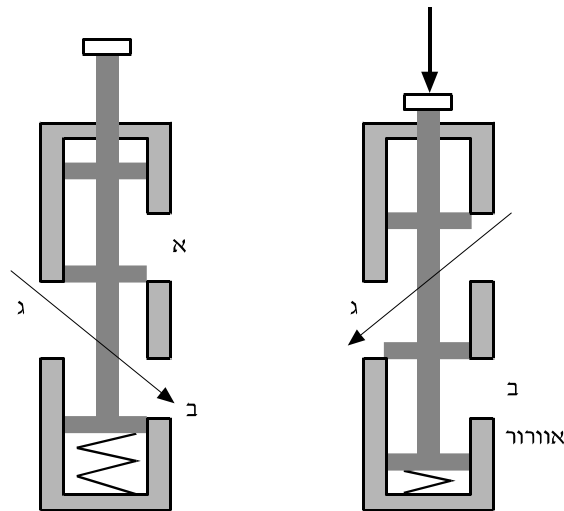


א. הסמל המקובל של שסתום ויסות בעל שני פתחים NO

איור 5.40 סימון ומבנה שסתום מעשי

שסתום בעל שלושה פתחים פועל גם הוא (בדרך כלל) בשני מצבי פעולה (ייתכנו גם שלושה מצבי פעולה). מצבי השסתום מתוארים באיור 5.41. במצב "מופעל", החומר זורם בשסתום מפתח א לפתח ג (פתח ב חסום), ובמצב "משוחרר" החומר זורם מפתח ג לפתח ב (פתח א חסום). גם כאן נהוג להבחין בין שסתום שהוא NO לבין שסתום שהוא NC, אולם במקרה זה ההבחנה תלויה גם בנתוני המערכת שבה משולב השסתום.

לדוגמה, השסתום שבאיור 5.41 הוא שסתום NC אם הוא נועד להעביר גז מקו לחץ גבוה למכל סגור (לצילינדר של בוכנה, למשל). במקרה זה פתח א' מחובר לקו בלחץ הגבוה, פתח ג' מחובר למכל, ואילו פתח ב' מעביר את הגז לאטמוספירה (או ללחץ נורמלי). בשסתום NC משוחרר, גז יכול לעבור מהמכל לאטמוספירה. הפעלת השסתום גורמת למעבר הגז מקו הלחץ הגבוה למכל. שסתום דומה שהוא NO, מעביר במצב "משוחרר" גז מקו הלחץ הגבוה אל המכל.



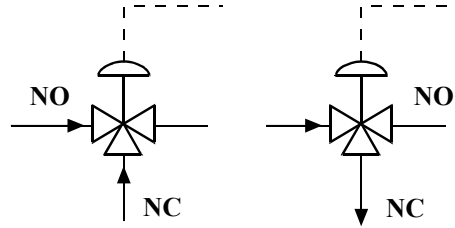
א. מצב מופעל – גז עובר מקו לחץ גבוה למכל ב. מצב משוחרר גז עובר מהמכל לאטמוספירה

איור 5.41 שסתום ויסות בעל שלושה פתחים

באיור 5.42 נתון הסמל המקובל של שסתום בקרה בעל שלושה פתחים, ובאיור 5.42ב מופיע שסתום בקרה מעשי בעל שלושה פתחים.



ב. תיאור של שסתום מעשי



א. הסמל המקובל של שסתום ויסות בעל שלושה פתחים

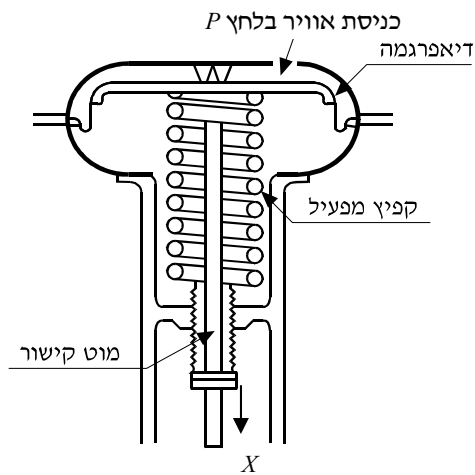
איור 5.42 שסתום שלושה פתחים

5.5.2 מנגנוני ההפעלה של שסתומי בקרה

בסעיף זה נסביר את עקרון ההפעלה של השסתום. נתייחס לשני סוגים של מנגנוני הפעלה בהתאם למקור האנרגיה החיצונית המפעילה את השסתום.

5.5.2.1 מנגנון הפעלה פנימטי

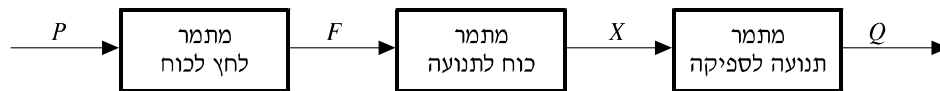
מקור האנרגיה במנגנון זה הוא אוויר דחוס, ולכן אות המבוא למנגנון הוא אות לחץ הנמדד ביחידות לחץ (פסקל או אטמוספירות). איור 5.43 מתאר מנגנון הפעלה המבוסס על דיאפרגמה (diaphragm).



איור 5.43 מבנה עקרוני של שסתום ויסות בעל מנגנון הפעלה פנימטי

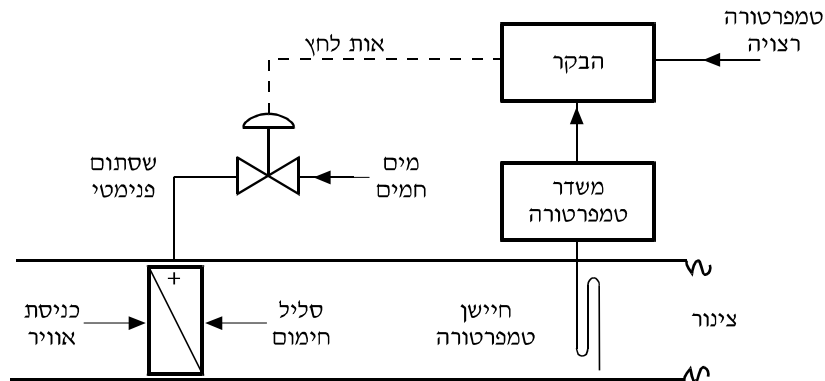
אות ההפעלה ניתן באמצעות אוויר המוזרם דרך "פתח כניסת האוויר". לחץ האוויר P מפעיל כוח F הפועל על הדיאפרגמה. ערכו של הכוח F נקבע על-ידי השטח האפקטיווי A של הדיאפרגמה.

כתוצאה מהפעלת הכוח $F = P \cdot A$, הדיאפרגמה נעה ואיתה נע גם מוט הקישור (Actuator stem). הלחץ P מותמר אפוא להעתק X של מוט הקישור. המוט מניע את החלק הנייד של השסתום וכך גורם לשינוי ספיקת החומר Q . תרשים מלבנים המתאר את פעולת השסתום הפנימי נתון באיור 5.44.



איור 5.44 תרשים מלבנים של פעולת השסתום הפנימי

מערכת בקרה שבה משולב שסתום פנימי מתוארת באיור 5.45.

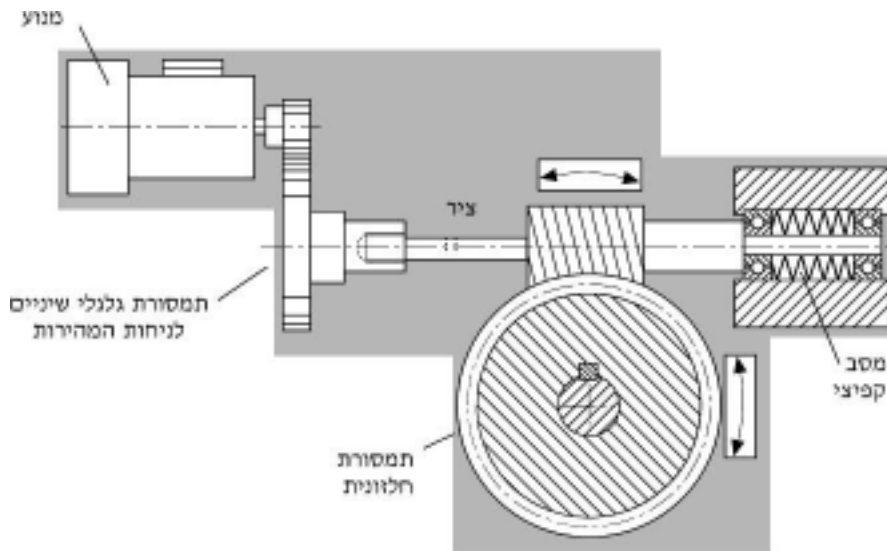


איור 5.45 מערכת לבקרת טמפרטורה עם שסתום פנימי לוויסות כמות המים החמים

במערכת זו מחממים אוויר בצינור באמצעות "סליל חימום" המכיל מים. את הטמפרטורה של האוויר בצינור מודדים באמצעות חיישן טמפרטורה המשדר את ערכה לבקר המערכת. הבקר יוצר אות הפעלה פנימי המועבר לשסתום בעל שני פתחים. באמצעות השסתום מווסתים את כמות המים הזורמים ב"סליל" וכך גם את הטמפרטורה של האוויר בצינור.

5.5.2.2 מנגנון הפעלה חשמלי

במנגנון זה האנרגיה הדרושה להנעת מוט הקישור של השסתום מסופקת על-ידי מנוע חשמלי. התנועה הסיבובית של ציר המנוע מתורגמת לתנועה זוויתית (או קווית) של החלק הנייד בשסתום בעזרת תמסורת חלזונית. איור 5.46 מתאר מנגנון מכני הממיר את התנועה הסיבובית של המנוע לתנועה זוויתית של השסתום.



איור 5.46 מנגנון להמרת תנועה סיבובית לתנועה זוויתית של שסתום

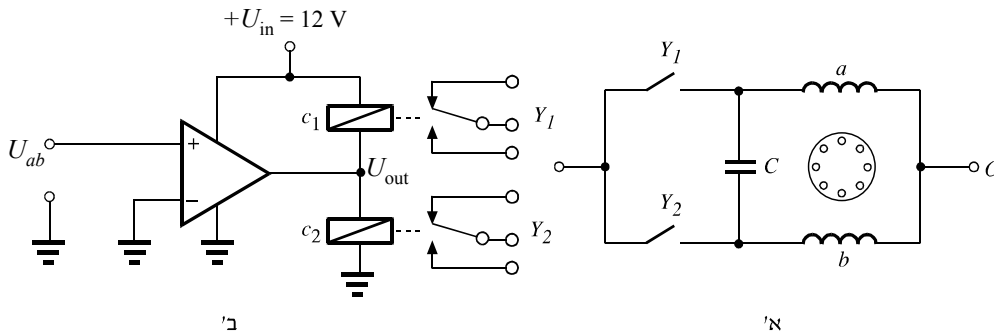
גלגלי השיניים במערכת משמשים לתמסורת המפחיתה את סיבובי הציר, בעוד שהחילזון עם הגלגל החלזוני הצמוד לו מפחיתים עוד את מספר הסיבובים ומשנים את כיוון התנועה הסיבובית ב- 90° . בצורה זו ניתן לשלוט במדויק במהלך השסתום. ברור כי כדי שאפשר יהיה לפתוח ולסגור את השסתום, דרוש שהמנוע יסתובב לשני הכיוונים. לשם כך משתמשים במנועי זרם חילופין ובמעגל בקרה מתאים.

למוט השסתום יש טווח תנועה מסוים, וחשוב שהמנוע יתנתק מההזנה החשמלית כאשר המוט מגיע לאחת משתי הנקודות הקיצוניות, שבהן השסתום פתוח לגמרי או סגור לגמרי. לשם כך משתמשים במפסקי גבול ובפוטנציומטר מתאים. אות המתח המתקבל מהפוטנציומטר משמש לבקרת מיקום המוט ומצב השסתום.

5.10 דוגמה

במערכת שבאיור 5.45 מעוניינים להפעיל את השסתום באמצעות מנוע חשמלי (במקום אות הפעלה פנימטי). כדי שהמנוע יוכל להסתובב בשני הכיוונים ממתגים אותו באמצעות שני ממסרים Y_1 ו- Y_2 (איור 5.47). כאשר

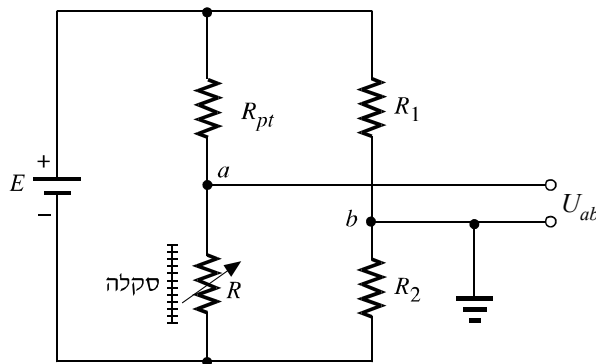
Y_1 סגור, המנוע מסתובב בכיוון אחד, וכאשר Y_2 סגור המנוע מסתובב בכיוון השני. הממסרים מופעלים על פי המתח U_{out} המתקבל ממגבר שרת הפועל כמשווה (איור 5.47). ערכו של המתח U_{out} יכול להיות 0 V או +12 V, בהתאם לקוטביות המתח U_{ab} במבוא החיובי של מגבר השרת. כאשר $U_{ab} < 0$, מתקבל במוצא המגבר שרת מתח של 0 V ואז מופעל הממסר C_1 , והמגע Y_1 נסגר. כאשר $U_{ab} > 0$, מתח המוצא של מגבר השרת הוא +12 V, מופעל הממסר C_2 וסוגר את המגע Y_2 . (במעגל זה אי אפשר לסגור בו-בזמן את שני המגעים).



א. מעגל עם שני ממסרים למיתוג הפעולה של מנוע חשמלי. ב. מעגל לבקרת הממסר

איור 5.47 איור לדוגמה 5.10

נניח שהממסר Y_1 גורם לפתיחת השסתום ולהגדלת ספיקת המים החמים, והממסר Y_2 גורם לשסתום להסתובב בכיוון ההפוך, כלומר, להקטנת ספיקת המים החמים. לכן המצב שבו $U_{ab} < 0$ מתאים למצב שבו טמפרטורת האוויר נמוכה מהטמפרטורה הרצויה, ואילו המצב $U_{ab} > 0$ מתאים למצב שבו טמפרטורת האוויר גבוהה מהטמפרטורה הרצויה. ניתן לקבל אות מתח כזה באמצעות מעגל הכולל גשר ויטסטון שאחת מזרועותיו כוללת חיילן טמפרטורה (ראו סעיף 4.1.4.3). איור 5.48 מתאר מעגל כזה.



איור 5.48 איור לדוגמה 5.10 – גשר ויטסטון הכולל נגד רגיש לטמפרטורה (R_{pt})

נניח כי הערך הרצוי של הטמפרטורה הוא $T_s = 250^\circ\text{C}$. אם חיישן חום בנוי מנגד תקני $Pt - 100$, אזי בטמפרטורה של $T_s = 250^\circ\text{C}$, התנגדותו היא 194Ω . מכוונים את הנגד המשתנה R להתנגדות זו, ומודדים את המתח U_{ab} . קל להיווכח כי כאשר הטמפרטורה בפועל נמוכה מהטמפרטורה הרצויה, המתח U_{ab} שלילי, ואילו במצב שבו הטמפרטורה בפועל גבוהה מהטמפרטורה הרצויה, המתח U_{ab} חיובי. מכאן שמערכת המשלבת את המעגל שבאיור 5.47 עם המעגל באיור 5.48, פועלת עם משוב שלילי, כנדרש במערכת בקרה בחוג סגור.

5.6 שאלה

המערכת המתוארת בדוגמה 5.10 אינה מערכת מושלמת, היות שחסר בה "מצב המנוחה", שבו המנוע המפעיל את השסתום אינו מסתובב כלל. הציעו דרך לשפר את המערכת כדי שתכלול, בנוסף לשני המצבים שתוארו (שסתום נפתח ושסתום נסגר), גם את מצב המנוחה שבו מצב השסתום נשאר קבוע.

5.6 סיכום

מפעיל במערכת בקרה הוא רכיב הממוקם בין הבקר לבין התהליך המבוקר. אות המבוא למפעיל הוא בדרך כלל אות חשמלי (אלקטרוני). אות המוצא מהמפעיל הוא אות חשמלי, מכני, פנימטי, הידראולי, וכו', ונקבע על פי סוג המפעיל והתהליך המבוקר.

– המפעילים הנפוצים במערכות בקרה הם מגברי הספק אלקטרוניים, מנועים חשמליים, גופי חימום, ושסתומים פנימטיים והידראוליים.

– מגברי הספק אלקטרוניים מגבירים את האותות החלשים יחסית המתקבלים מהבקר, ומפיקים במוצאם את המתחים והזרמים הדרושים לפעולת התהליך המבוקר.

– ניתן לווסת את ההספק של מגבר הספק בשיטת בקרת רוחב דופק (PWC).

– **מנועים חשמליים** נחלקים לקבוצות על פי מקור האנרגיה החשמלית הדרוש להפעלתם: מנועי זרם ישר (ז"י), מנועי זרם חילופין (ז"ח) ומנועי צעד.

– מרבית המנועים בנויים מסליל, או מגנט קבוע, המסתובב בשדה מגנטי. השדה המגנטי נוצר על-ידי מגנטים קבועים או על-ידי אלקטרומגנט.

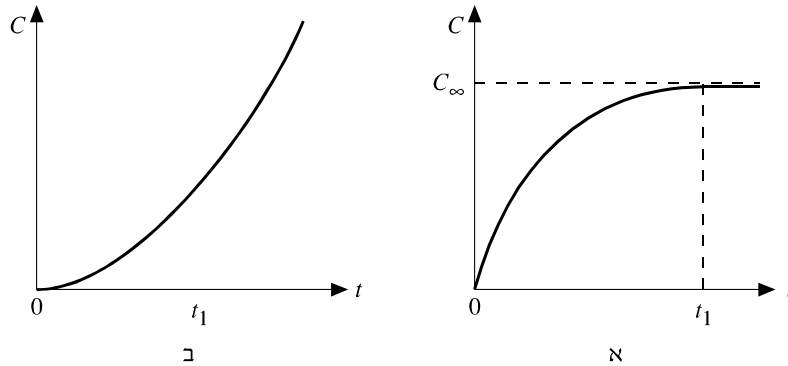
- **מנועי ז"י** בנויים מסליל מסתובב – הרוטור (או מספר סלילים) שדרכו זורם זרם חשמלי ממקור מתח ישר. השדה המגנטי נוצר על-ידי סלילי הסטטור המוזנים גם הם בזרם ישר.
- מנוע ז"י אידיאלי ללא חיכוך אינו צורך זרם כאשר הוא מסתובב במהירות קבועה. במנוע מעשי (עם עומס) צריכת הזרם בסליל הרוטור היא יחסית למומנט שנוצר על-ידי העומס.
- מהירות הסיבוב של מנוע ז"י היא יחסית למתח המושרה בסליל הרוטור. המתח המושרה, ולכן גם מהירות המנוע, קטנים יותר ככל שהעומס על המנוע גדול יותר (במתח קבוע של מקור חיצוני).
- **מנועי צעד** בנויים ממגנט (או מספר מגנטים) קבוע (הרוטור) המסתובב בין זוגות של סלילי הסטטור. הזרם בסלילי הסטטור יוצר שדה מגנטי מסתובב, שגורם לכוחות משיכה ודחייה בין הרוטור לסטטור וכך לסיבוב הרוטור.
- השדה המגנטי המסתובב במנועי צעד נוצר על-ידי מיתוג מחזורי של זוג (או זוגות) סלילי הסטטור. תדר המיתוג ומספר זוגות סלילי הסטטור קובע את מהירות הסיבוב ואת זווית הסיבוב של הרוטור.
- **גופי חימום** משמשים כמפעילים במערכות לבקרת טמפרטורה ובמערכות לבקרת כמות החום. גוף חימום חשמלי הופך אנרגיה חשמלית לאנרגיית חום.
- לגופי חימום קבוע זמן גדול יחסית שבו יש להתחשב בחישוב ביצועי מערכות הבקרה.
- **שסתומי בקרה** פנימטיים והידראוליים משמשים כמפעילים במערכות בקרת כיוון זרימה, בקרת ספיקה, בקרת מפלס, וכו'. באמצעות השסתום ניתן לווסת את כמות החומר (גז, נוזל) שבתהליך המבוקר.
- הפעלת השסתומים נעשית באמצעים חשמליים, פנימטיים, או הידראוליים.
- ההפעלה החשמלית של שסתום מתבצעת בדרך כלל באמצעות ממסרים אלקטרו-מגנטיים או ממסרים "אלקטרוניים".

התגובה הדינמית של מערכות בקרה

6.1 מהי תגובה דינמית?

בפרק 2 עסקנו בתגובה של מערכת הנמצאת במצב של שיווי משקל (התגובה הסטטית). במיוחד חישבנו את אות המוצא (האות המצוי) המתקבל במערכת אידיאלית שבה התמסורות אינן תלויות בזמן. לגבי מערכות לא אידיאליות, הגבלנו את החישוב לאות המוצא המתקבל ממערכת שהגיעה למצב מתמיד לאחר שינוי באות המבוא. במערכת הנמצאת במצב מתמיד, היחס בין אות המוצא לבין אות המבוא לרכיבי המערכת אינו משתנה, ולכן התמסורת במצב הזה היא **תמסורת סטטית** של רכיבי המערכת. לעתים קרובות אנו מעוניינים לדעת גם את תגובת הרכיבים או המערכת **לפני** שהמערכת הגיעה למצב המתמיד, כלומר, בזמן המעבר מהרגע שבו השתנה אות המבוא ועד להתייצבות המערכת במצב המתמיד החדש.

תגובת המערכת בפרק זמן זה קרויה **התגובה הדינמית** של המערכת. זוהי אפוא תגובת המערכת מרגע שהתחיל השינוי באות המבוא ועד להיווצרות מצב חדש של שיווי משקל. בעת התגובה הדינמית, האות המבוקר במערכת (אות המוצא) משנה את ערכו בתלות בזמן. כפי שנראה בהמשך, לא תמיד שינוי באות המבוא מביא את המערכת למצב מתמיד חדש. ייתכן מצב שבו האות המבוקר גדל בזמן תגובת המעבר, ולאחר פרק זמן מסוים (זמן המעבר) הוא מתייצב על ערך קבוע (או מתכנס לערך קבוע; איור 6.1א). ייתכן גם מצב שונה שבו, כתוצאה משינוי באות המבוא, אות המוצא ממשיך לגדול (או לקטון) ולעולם לא מתייצב על ערך קבוע (איור 6.1ב). במקרה זה, התגובה הדינמית של המערכת נמשכת, והמערכת אינה מגיעה למצב של שיווי משקל. אומרים על מערכת כזו שהיא מערכת "לא יציבה". במערכות בקרה עם משווא שבהן אנו מעוניינים לשלוט על משתנה מסוים או לייצבו על ערך נתון, מצב בלתי יציב אינו רצוי, ולכן חשוב להבין כיצד ניתן למונעו.



איור 6.1 תלות אות המוצא בזמן

א. אות מתכנס

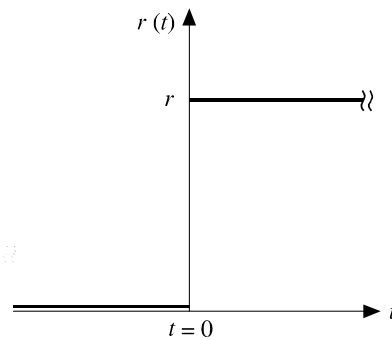
ב. אות מתבדר

הצורה שבה משתנה אות המבוא בזמן קובעת במידה רבה את הצורה שבה האות המצוי משתנה בזמן. שינוי באות המבוא, הנקרא גם אילוץ, הוא בעיקרון שינוי שרירותי, אם כי נהוג להבחין בין שלושה סוגים עיקריים של אילוצים:

א. אילוץ מדרגה

אות המבוא גדל באופן פתאומי מערך 0 לערך קבוע חדש r (איור 6.2). נניח כי השינוי באות המבוא מתרחש ברגע $t=0$. את התלות בזמן של אות מבוא מסוג זה ניתן לתאר על-ידי:

$$(6-1) \quad r(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ r, & t \geq 0 \end{cases}$$

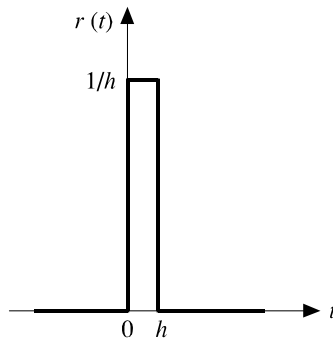


איור 6.2 אילוץ מדרגה

נעיר כי שינוי כזה מתאר מצב אידיאלי, היות שבדרך כלל, שינוי של גודל פיסיקלי אינו יכול להתרחש פתאום (בפרק זמן שאורכו 0).

2. אילוף הלם

שינוי מסוג אילוף הלם באות המבוא מתואר באיור 6.3. עד לרגע $t = 0$ אות המבוא הוא $r = 0$. ברגע $t = 0$ האות גדל פתאום לערך קבוע של $1/h$, כאשר h הוא פרק הזמן שבו אות זה שונה מאפס.



איור 6.3 אילוף "הלם"

לאחר פרק הזמן h , האות r חוזר ומתאפס כאשר $h \rightarrow 0$, עוצמת אות המבוא שואפת לאינסוף, אולם המכפלה של עוצמת האות בפרק הזמן שבו מופיע האות היא קבועה ושווה ליחידה. התגובה הדינמית של מערכת לאות הלם חשובה ביותר, היות שממנה ניתן ללמוד על יציבות המערכת.

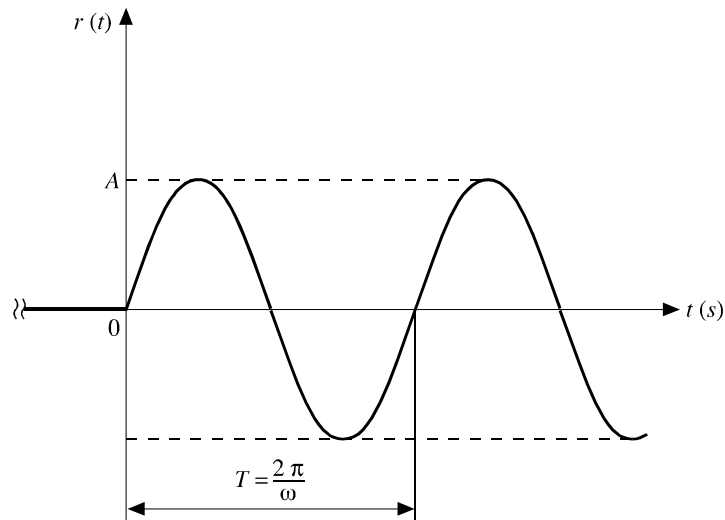
ג. אילוף סינוסי (או אילוף מחזורי)

כאן אות המבוא הוא $r = 0$ עד לרגע $t = 0$ לאחר מכן אות המבוא משתנה בזמן בצורה סינוסית (איור 6.4):

$$(6-2) \quad r(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

כאשר A היא תנופת האות, ω הוא התדר הזוויתי של האות (ביחידות של רדיאנים/שנייה), φ היא הזווית (המופע) של האות ברגע $t = 0$.

כפי שנראה בהמשך (פרק 8) אילוץ כזה שימושי גם הוא באפיון מערכות ובבדיקת יציבותן.



איור 6.4 אילוץ סינוסי

התגובה הדינמית של רכיבים ושל מערכות לכל אחד משלושת סוגי האילוץ שתיארנו לעיל משתנה ממערכת למערכת, ותלויה בתכונות הרכיב או המערכת. נהוג לחלק את המערכות לקבוצות, על פי צורת התגובה הדינמית שלהן לאילוץ מדרגה. בהמשך נסקור את המאפיינים של שתי קבוצות חשובות:

1. מערכות בעלות תגובה מעריכית פשוטה שבהן אות המוצא מפגר בזמן אחר אות המבוא. מערכות אלו ניתן לאפיין באמצעות קבוע זמן יחיד.
2. מערכות שהתגובה שלהן מעריכית מורכבת או "תנודתית". מערכות אלו לא ניתן לאפיין באמצעות קבוע זמן יחיד.

מסיבות שלא נרחיב כאן, הקבוצה הראשונה נקראת גם "מערכת מסדר ראשון", בעוד שהקבוצה השנייה נקראת "מערכות מסדר שני" (קיימות גם מערכות מסדר יותר גבוה).

בפרק זה נדון בתגובות שתי קבוצות מערכות אלו לאילוץ מדרגה. פרק נפרד ייוחד לתגובות המערכות הללו לאילוץ סינוסי.

6.2 התגובה הדינמית של מערכות מסדר ראשון

6.2.1 הקדמה

המשתף למערכות בקבוצה זו הוא העובדה שאות המוצא מפגר בזמן אחר השינוי המהיר (שינוי מדרגה) באות המבוא.

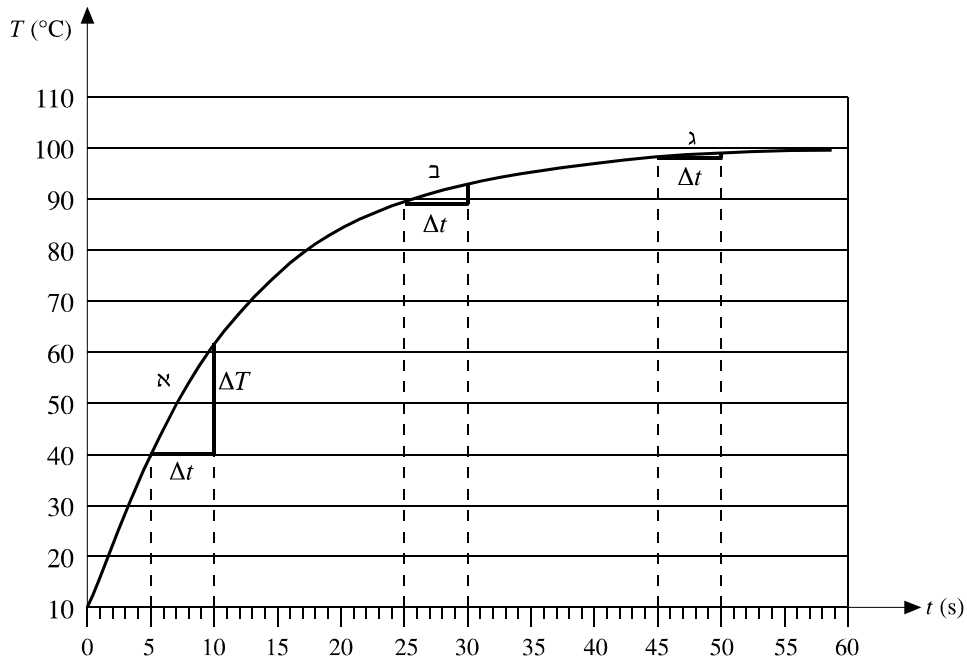
דוגמה למקרה כזה המוכרת מחיי היום-יום היא שינוי הטמפרטורה של גופים. כאשר מכניסים גוף לתנור שבו כבר נשמרת טמפרטורה גבוהה, למשל 100°C , טמפרטורת הגוף עולה בהדרגה. רק לאחר זמן מסוים מגיעה טמפרטורת הגוף לטמפרטורה השוררת בתנור. תהליך החימום בתנור הוא הדרגתי.

בתחילה, הפרש הטמפרטורות בין הגוף לסביבה (האוויר בתנור) הוא גדול, ולכן האנרגיה התרמית עוברת לגוף בקצב מואץ והטמפרטורה שלו עולה במהירות. ואולם עם כל עלייה בטמפרטורת הגוף, ההפרש בין הטמפרטורה שלו לטמפרטורת התנור הולך וקטן, וקצב ההתחממות יורד. באופן תיאורטי, התהליך מסתיים רק לאחר זמן אין-סופי. באופן מעשי, אפשר לקבוע כי ברגע מסוים ההפרש אינו משמעותי עוד, והתהליך הסתיים.

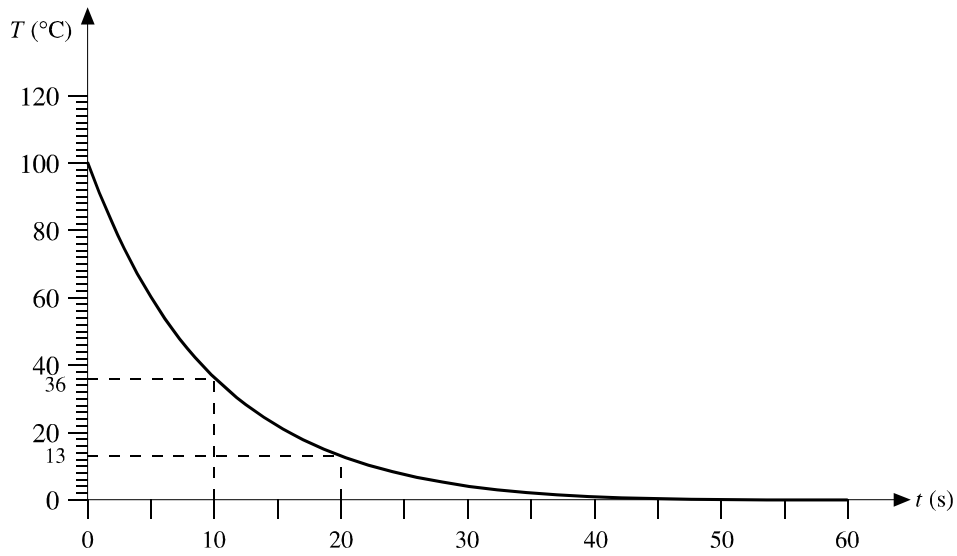
באיור 6.5 מוצג גרף של עליית הטמפרטורה של גוף מ- 10°C ל- 100°C .

באיור אפשר לראות את שיעור עליית הטמפרטורה ΔT (ב- $^{\circ}\text{C}$) בפרקי זמן Δt קבועים (בשניות), בזמנים שונים לאורך התהליך.

אם מוציאים את הגוף החם מן התנור ומכניסים אותו למכל גדול ובו מי קרח, הטמפרטורה יורדת באופן הדרגתי, כמתואר באיור 6.6.



איור 6.5 עליית טמפרטורה של גוף



איור 6.6 ירידת הטמפרטורה בזמן קירור של גוף

241 התגובה הדינמית של מערכות בקרה

בגרף שבאיור 6.6 אפשר לראות כי ב-10 השניות הראשונות ($t = 0$ עד $t = 10$ s) הטמפרטורה יורדת מ- 100°C ל- 36°C , כלומר, ירידה של 64°C ; ב-10 השניות הבאות ($t = 10$ s עד $t = 20$ s) הטמפרטורה יורדת עד 13°C , כלומר, ירידה של 23°C בלבד ב-10 השניות הבאות, הירידה קטנה עוד יותר.

הטמפרטורה אינה יכולה להשתנות בבת אחת, משום שגוף חם אוגר אנרגיית חום, וכדי שהטמפרטורה תרד חייבת אנרגיה זו להיפלט לסביבה.

ככל שהטמפרטורה יורדת, כן **קצב השינוי** של טמפרטורת הגוף הולך וקטן. תגובה מסוג זה מתוארת על-ידי הפונקציה $e^{-t/\tau}$, כפי שיפורט בהמשך. בנוסחה זו:

$$e = 2.718 \text{ הוא בסיס הלוגריתם הטבעי}$$

τ – הוא מקדם הנקרא קבוע זמן, ותלוי במאפייני המערכת.

מכיוון שמשנתנה הזמן t מופיע כמעריך בפונקציה, תגובה מסוג זה קרויה **תגובה מעריכית**. תגובה מעריכית נמשכת זמן אין-סופי. מבחינה מעשית, כאשר ההפרש בין הערך הרגעי של התגובה לערך בזמן אין-סופי קטן מאוד ובלתי מורגש, נהוג לומר שהתגובה התייצבה.

על-פי הביטוי המתמטי של התגובה המעריכית אפשר לחשב את הערך של המשתנה המבוקר ברגע נתון t כלשהו. כמו כן אפשר לחשב מראש כמה זמן t דרוש עד שהמשתנה מגיע לערך נתון כלשהו.

ערך המשתנה המבוקר, בכל רגע ורגע, נקבע על-ידי שלושה גורמים:

C_0 – הערך ההתחלתי (למשל: טמפרטורה התחלתית של גוף לפני שהוא מוכנס לתנור).

C_{∞} – הערך שאליו שואף המשתנה המבוקר להגיע אחרי זמן רב (למשל: הטמפרטורה בתנור).

τ – קבוע הזמן, הנקבע על-ידי רכיבי המערכת.

הביטוי המתמטי הכללי של תגובה מעריכית הוא :

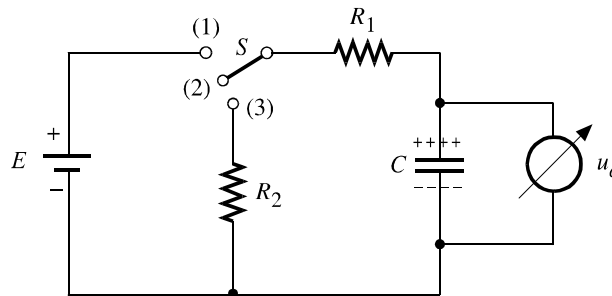
$$(6-3) \quad C(t) = C_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + C_\infty \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = C_\infty + (C_0 - C_\infty)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

כאשר $C(t)$ הוא ערך המשתנה המבוקר בזמן t .

ההוכחה המתמטית של נוסחה (6-3) חורגת מהמסגרת של ספר לימוד זה. אבל בהמשך נשתמש בנוסחה לחישוב התגובה במקרים שונים.

6.2.2 תגובת מעבר של מערכת מסדר ראשון: טעינה ופריקה של קבל

באיור 6.7 מתואר מעגל הכולל קבל לוחות, נגד (מעגל RC טורי) ומקור מתח ישר. מעגל זה הוא דוגמה למערכת מסדר ראשון (מערכת עם פיגור בזמן). נניח כי המפסק S נמצא במצב (2). הקבל אינו טעון ולכן המתח על הקבל הוא $u_c = 0$. נתייחס למתח u_c כאל אות המוצא של המערכת, ואל המתח בקצה המפסק S כאל אות המבוא. ברגע מסוים, שנשמנו $t = 0$, מעבירים את המפסק S למצב (1). כתוצאה מהשינוי הפתאומי באות המבוא בזמן $t = 0$, אות המוצא u_c גדל, היות שהקבל מתחיל להיטען. תהליך טעינת הקבל נמשך עד שנוצר שוויון פוטנציאלים: הפוטנציאל של הלוח השלילי של הקבל שווה לפוטנציאל ההדק השלילי של המקור, והפוטנציאל של הלוח החיובי של הקבל שווה לפוטנציאל ההדק החיובי של המקור. במצב זה מתקיים אפוא $u_c = E$.



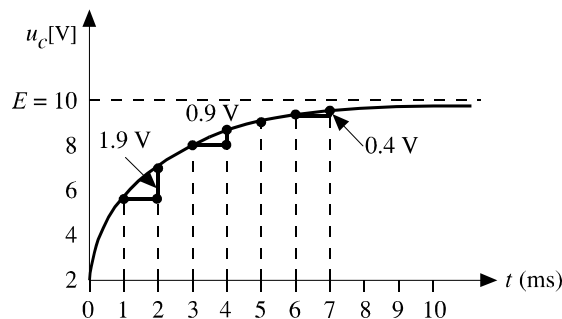
איור 6.7 מעגל RC עם מקור מתח ישר

לפני תחילת הטעינה מתח הקבל היה $u_c = 0$, ואילו בגמר הטעינה מתח הקבל הוא $u_c = E$. במהלך הטעינה עצמה מתח הקבל גדל והולך. האם קצב הגידול קבוע? בזמן הטעינה לא חל שינוי במתח שבין הדקי המקור, אך השדה החשמלי שיוצרים המטענים השליליים המצטברים על לוח הקבל, הוא בכיוון כזה, שהוא "דוחה" מטענים שליליים נוספים ה"רוצים" להגיע אל הלוח. דחייה זו חזקה יותר ככל שהמטען השלילי שהצטבר כבר על הלוח גדול יותר. לכן מספר המטענים המגיעים ללוח ביחידת זמן קטן והולך, כלומר, גידול המטען על הקבל קטן והולך. כידוע, המתח u_c על הקבל נתון על-ידי:

$$u_c = \frac{q}{C}$$

כאשר C הוא קיבול הקבל ו- q הוא המטען הרגעי על הלוחות. הקיבול C של הקבל קבוע, לכן, אם קצב גידול המטען על הקבל קטן והולך, גם קצב גידול המתח u_c על הקבל קטן והולך.

באיור 6.8 נתון גרף של המתח u_c (אות המוצא) על הקבל כפונקציה של הזמן. באיור צוינו עליות המתח בתחומי זמן שונים. גרף זה ממחיש את העובדה שקצב עליית המתח על הקבל קטן עם הזמן. עוד רואים בגרף כי המתח על הקבל מתקרב עם הזמן למתח המקור E .



איור 6.8 עליית המתח על הקבל הנטען בתחומי זמן שונים

את קצב הגידול של המתח u_c המתואר באיור 6.8 ניתן לתאר באמצעות משוואה (6-3). ואמנם, אם נציב את הערך C_∞ כמתח שאליו שואף אות המוצא, ואם נניח כי המתח ההתחלתי על הקבל הוא אפס ($C_0 = 0$), נקבל:

$$(6-4) \quad u_c(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$$

τ , קבוע הזמן במערכת זו, נתון על-ידי מכפלת ההתנגדות R_1 בקיבול C :

$$(6-5) \quad \tau = R_1 C$$

שאלה 6.1

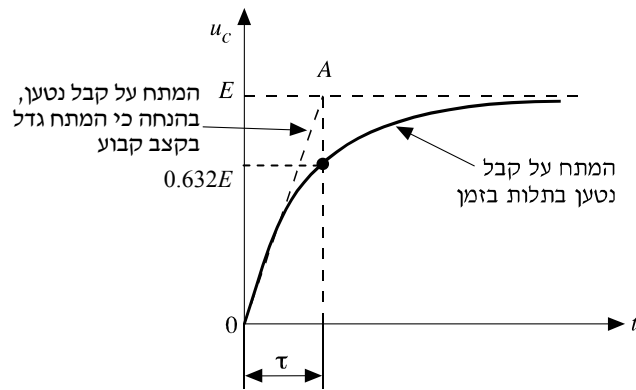
הראו שכאשר R_1 נתון ביחידות אום ו- C ביחידות פרדיי, המכפלה $R_1 C$ נתונה ביחידות זמן (שניות).

שאלה 6.2

רשמו את המשוואה המתארת את הזרם במעגל, $i(t)$, בתלות בזמן. הנחיה: השתמשו בחוק קירכהוף למעגל שבאיור 6.7 כאשר המפסק S במצב 1:

$$E = u_c(t) + i \cdot R_1$$

בגרף המתאר את תלות המתח u_c בזמן t , הערך של τ מתקבל על-ידי נקודת החיתוך של המשיק לגרף בזמן $t = 0$, עם הקו האופקי $u_c = E$ (הנקודה A באיור 6.9).



איור 6.9 המתח על קבל נטען בתלות בזמן

מאיור 6.9 ברורה גם המשמעות של הפיגור בזמן של תגובת המערכת: המתח u_c מפגר אחר המתח E בפרק זמן השווה ל- $\tau = RC$. ניתן להראות כי בזמן τ , המתח u_c הוא 63.2% מערכו של המתח E , ולאחר זמן של 5τ , מתח הקבל u_c מגיע ל-99.3% מערכו הסופי. מעשית נהוג

אפוא לקבוע כי אחרי זמן של 5τ מרגע תחילת הטעינה, מסתיים זמן המעבר של מעגל RC טורי.

שאלה 6.3

השתמשו במשוואת הקבל $u_c = E(1 - e^{-t/\tau})$ והוכיחו כי:

$$u_c(t = \tau) = 0.63 E$$

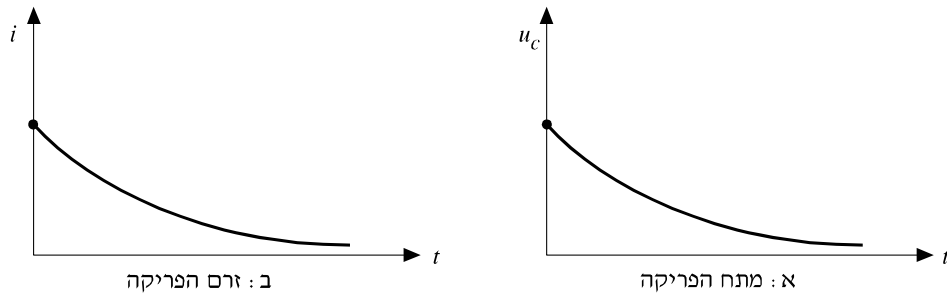
$$u_c(t = 5\tau) = 0.993 E$$

שאלה 6.4

השתמשו במשוואת הקבל כדי לחשב את הזמן הדרוש לעליית מתח הקבל u_c מאפס ל- $10 V$ במעגל RC טורי, כאשר קבוע הזמן הוא $\tau = 10 \text{ ms}$, ומתח המקור הוא $E = 20 V$. מה יהיה זמן זה כאשר קבוע הזמן גדול פי שניים ($\tau = 20 \text{ ms}$)? מה תוכלו להסיק מכך על היחס בין זמן הטעינה לקבוע הזמן?

משוואה (6-3) לעיל מתארת גם את המתח של קבל במצב של פריקה. נניח כי לאחר שהעברנו את המתג למצב (1) (איור 6.7), והקבל נטען לפחות ל-99.3% מערך המתח E , מעבירים את המתג S במהירות למצב (3) (ראו איור 6.7). במצב זה הקבל פורק את מטענו, ובנגדים זורם זרם פריקה i . זרם פריקה זה נובע מכך שכאשר המתג במצב (3), הקבל פועל כמקור מתח וגורם למעבר זרם בנגדים. המתח u_c בזמן הפריקה משתנה על-פי התגובה המעריכית. כלומר, קצב הפריקה קטן עם הזמן.

בתחילת הפריקה $u_c \approx E$, ובסיומה $u_c \approx 0$. בין שני המצבים האלה, מתח הקבל קטן והולך. ככל שמטענים רבים יותר עוזבים לוח אחד של הקבל ומגיעים ללוח השני, הטעון במטען מנוגד, הפרש הפוטנציאלים בין הלוחות קטן והולך. ככל שמתח הקבל גדול יותר, המטענים נעים בהשפעת מתח גדול יותר, ועל פי חוק אום, הזרם דרך הנגד גדול יותר. כלומר, הקבל פורק את מטענו מהר יותר, ככל שהמתח על הקבל גדול יותר. עם ירידת מתח הקבל, קטן גם קצב פריקת הקבל, וכתוצאה מכך קטן קצב ירידת המתח. קצב ירידת המתח על הקבל הולך וקטן אפוא עם הזמן. תיאור כמותי של קצב זה מתקבל כאשר מסרטטים גרף של מתח הפריקה וזרם הפריקה כפונקציה של הזמן. גרף אופייני כזה נתון באיור 6.10.



איור 6.10 עקומי הפריקה של קבל

היות שבתהליך הפריקה $u_c(t \rightarrow \infty) = 0$, הרי שממשוואה (6-3) נובע כי המתח $u_c(t)$ (מתח הפריקה) נתון על-ידי:

$$(6-6) \quad u_c(t) = E \cdot e^{-t/\tau}$$

כאשר קבוע הזמן τ במקרה זה הוא המכפלה $\tau = C(R_2 + R_1)$. שימו לב כי קבוע הזמן של הפריקה אינו זהה לקבוע הזמן של הטעינה, היות שבזמן הפריקה התנגדות המעגל היא $R_1 + R_2$ (איור 6.7). כאן מגדירים את תקופת המעבר כפרק הזמן 5τ שבו מתח הפריקה קטן ל-0.7% מערכו ההתחלתי (כלומר, ערכו מגיע לכ-0.00674 E).

6.2.3 תגובת מעבר של מערכות בקרה מסדר ראשון

על הקבל שעסקנו בו לעיל ניתן להסתכל כעל "מערכת מסדר ראשון הפועלת בחוג פתוח". התגובה הדינמית המתוארת באיור 6.8, למשל, היא אפוא התגובה של מערכת בחוג פתוח. נבדוק: כיצד מגיבה לאילוץ מדרגה באות המבוא מערכת בקרה עם משוב (כלומר, מערכת הפועלת בחוג סגור) הכוללת רכיב שיוצר פיגור בזמן (כמו הקבל).

לשם כך יש להרחיב את מושג פונקציית התמסורת הסטטית לרכיבים ומערכות שבהם היחס בין אות המוצא לאות המבוא אינו קבוע בזמן. במיוחד, פונקציית התמסורת אמורה לתאר את תגובת המערכת גם במצב מעבר, בין המצב המתמיד ההתחלתי לבין המצב המתמיד החדש.

דוגמה 6.1: האנלוגיה שבין טעינת קבל למילוי מכל

כדוגמה לתגובת מעבר של מערכת מסדר ראשון יכול לשמש התהליך של מילוי מכל בנוזל (מערכת דומה הכרנו כבר בדוגמה 2.8, איור 2.51). כאן נראה את האנלוגיה בין מילוי של מכל לבין טעינת קבל. באיור 6.11 מתואר מכל גלילי ששטחו A ולתוכו מוזרם נוזל בספיקה לא קבועה $q_i(t)$ (שנייה³/מ²) התלויה בזמן. נסמן ב- $h(t)$ המפלס הרגעי של הנוזל בזמן t . בפרק זמן קצר מאוד, Δt , שבו ניתן להניח כי q_i אינו משתנה, גובה הנוזל h משתנה מערך התחלתי $h(t)$, לערך $h(t + \Delta t)$, כלומר תוספת הגובה Δh בפרק זמן זה היא:

$$(6-7) \quad \Delta h = h(t + \Delta t) - h(t) = \frac{q_i(t)}{A} \Delta t$$

ואמנם תוספת נפח הנוזל בזמן Δt שווה ל- $q_i \Delta t$, ולכן היחס שבין תוספת נפח הנוזל לשטח חתך המכל, שווה לתוספת הגובה של הנוזל במכל. על מנת לדעת את גובה הנוזל לאחר פרק זמן ארוך יחסית (ארוך יחסית לפרק הזמן Δt) נצטרך לבצע **סכימה** (אינטגרציה) של משוואה (6-7) בכל פרק הזמן שבו המכל מתמלא. נניח שהתחלנו את המילוי של מכל ריק ($h = 0$) בזמן $t = 0$, אזי כעבור T שניות גובה הנוזל במכל נתון על-ידי

$$(6-8) \quad h(T) = \frac{1}{A} \sum q_i(t) \Delta t$$

כאשר \sum מציינ סכימה על כל קטעי הזמן Δt שבין $t = 0$ לבין $t = T$, ואנו מניחים כי בכל קטע זמן כזה (קצר כרצוננו), q_i אינו משתנה. אם הספיקה היא **קבועה** לכל אורך הזמן T , כלומר, q_i אינו תלוי כלל בזמן, נקבל כי גובה הנוזל לאחר T שניות הוא:

$$h = \frac{q \cdot T}{A}$$

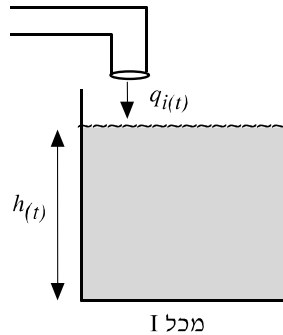
אם לעומת זאת q_i אינו קבוע כפי שהנחנו מראש, אלא משתנה ב"קפיצות" מ- Δt אחד ל- Δt הבא, יש לחשב את הסכום במשוואה (6-8) בדומה לחישוב המתח על הקבל במעגל RC (איור 6.7). במקרה המיוחד שבו הספיקה $q_i(t)$ קטנה באופן **מעריכי** עם הזמן, ניתן לקבל את $h(t)$ מאנלוגיה לטעינת קבל. במקרה זה קיים כי

$$(6-9) \quad q_i(t) = q_0 e^{-t/\tau_H}$$

כאשר במשוואה (6-9) q_0 הוא קבוע שאינו תלוי בזמן (הספיקה ב- $\left(\frac{3}{\text{שנייה}}\right)$ מ³) ברגע $t = 0$ ו- τ_H הוא קבוע זמן (ביחידות של שניות) הקובע את קצב ירידת הספיקה עם הזמן. החישוב במקרה זה מבוסס על העובדה כי את הספיקה q_i ניתן לדמות לזרם החשמלי i במעגל הטעינה,

ואת שטח המכל A לקיבול הקבל C . אם מניחים גם שהמפלס h שקול (אנלוגי) למתח על הקבל u_c (ראו איור 6.9) הרי שמשוואה (6-8) שקולה למשוואת המתח על הקבל במעגל טעינה (איור 6.9) שהמטען ההתחלתי עליו הוא אפס:

$$(6-10) \quad u_c = \frac{1}{C} \sum i(t) \Delta t$$



איור 6.11 מכל המתמלא הספיקה משתנה $q_i(t)$ התלויה בזמן

כזכור הזרם $i(t)$ במעגל טעינת הקבל קטן באופן מעריכי, ולכן המתח u_c כעבור t שניות נתון על-ידי משוואה (6-4):

$$u_c = E(1 - e^{-t/\tau})$$

כאן $\tau = RC$ הוא קבוע הזמן של מעגל הטעינה. מהאנלוגיה שבין הגדלים במשוואות (6-8) ו-(6-10) נוכל לרשום אפוא את המשוואה הבאה עבור המפלס h בזמן t :

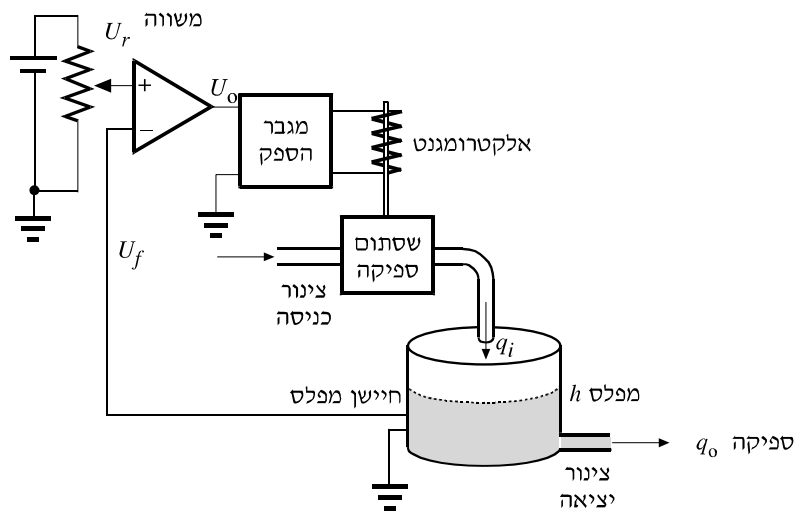
$$(6-11)^* \quad h(t) = \frac{q_0}{A} (1 - e^{-t/\tau_H})$$

כלומר, לאחר זמן ארוך מאוד, המפלס מתייצב על הערך הקבוע $\frac{q_0}{A}$. בתקופת המעבר (זמן המילוי), תגובת מערכת המכל נתונה על-ידי משוואה (6-11).

* שימו לב כי הגודל q_0 בנוסחה זו מציין את הספיקה ההתחלתית למכל ברגע $t = 0$ (ולא ספיקה מהמכל כמו באיור 2.51).

במסגרת ספר זה לא נוכל להרחיב את מושג פונקציית התמסורת למערכת כללית עם משוב המגיבה במצב מעבר. עם זאת ננתח את תגובת המעבר של מערכת בקרה עם משוב שבה יש רכיב אחד בעל פיגור בזמן, ורכיבים נוספים בעלי פונקציית תמסורת קבועה (הזהה לתמסורת הסטטית).

לצורך הניתוח נחזור למערכת בקרת המפלס בחוג סגור שחלק ממנה הכרתם בדוגמה 2.8 (איור 2.51).



בניגוד לדוגמה 6.1 לעיל, המתארת מערכת של מכל עם צינור כניסה יחיד בחוג פתוח, החלק העיקרי במערכת המתוארת באיור 2.51 כולל מכל עם שני צינורות: צינור כניסה שבאמצעותו מתמלא המכל, וצינור יציאה שדרכו מתרוקן המכל. בנוסף לכך, ניתן לשלוט על כמות הנוזל הנכנס למכל ביחידת זמן (כלומר על ספיקת הנוזל למכל) באמצעות המשאבה המזרימה את הנוזל למכל. ככל שמהירות הסיבוב של המשאבה גדולה יותר, נשאב נוזל רב יותר אל פתח הצינור שבראש המכל. כאשר המערכת נמצאת במצב מתמיד, הנוזל הדרוש לתהליך יוצא בספיקה קבועה מצינור היציאה של המכל, ובו בזמן נכנס למכל נוזל באותה ספיקה קבועה דרך צינור הכניסה. כתוצאה מכך, גובה פני הנוזל במכל נשאר קבוע.

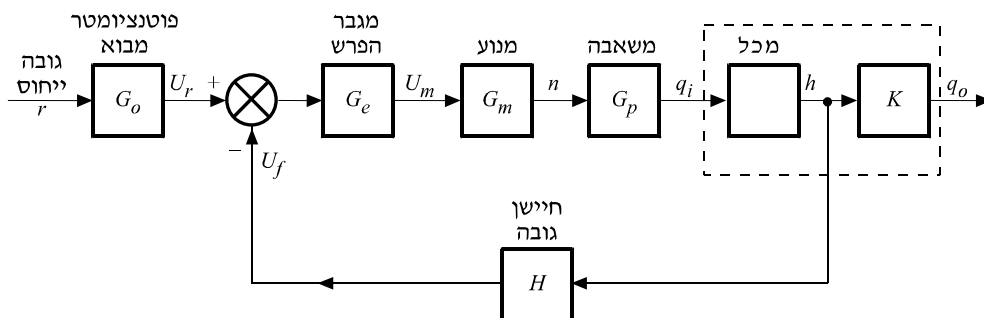
נקבע כי מפלס הנוזל \$h\$ במכל יהיה המשתנה המבוקר, כלומר, האות המותמר למתח במסלול המשוב של המערכת. כאמור, על המפלס במכל ניתן לשלוט בעזרת המשאבה: המשאבה

מזרימה למכל נוזל בספיקה של q_i מטרים מעוקבים לשנייה $\left(\frac{m^3}{שנייה}\right)$. כמו כן, המפלט עשוי גם לרדת כתוצאה מספיקת הנוזל דרך הצינור שבתחתית המכל. נסמן ב- q_0 את ספיקת הנוזל דרך צינור היציאה (q_0 נמדד באותן יחידות כמו q_i). חיישן המותקן לאורך המכל מודד את גובה הנוזל בכל רגע ורגע, ויוצר במוצאו מתח חיובי U_b שנמצא ביחס ישר למפלט h . מתח הייחוס U_r המסופק לבקר (המשמש כמגבר וכמסכם) נקבע על-ידי מצב הפוטנציומטר, ונמצא ביחס ישר לגובה הרצוי של הנוזל במכל. הפרש המתחים $U_r - U_f$ נמצא אפוא ביחס ישר לשגיאה במפלט. כאשר המפלט יורד אל מתחת לגובה הרצוי, הפרש המתחים גדל. המתח U_m שמספק הבקר למנוע גדל אף הוא, וכתוצאה מכך גדלה גם מהירות הסיבוב n של המשאבה, והספיקה q_i של הנוזל הנכנס למכל. לעומת זאת, כאשר המפלט עולה מעל לערך הרצוי, הפרש המתחים $U_r - U_f$ נעשה שלילי, והמנוע מפסיק את פעולתו. כתוצאה מכך הספיקה q_i יורדת לאפס והמפלט יורד.

באיור 6.12 נתון תרשים מלבנים של המערכת, ורשומות בו התמסורות של הרכיבים השונים במערכת (כולל המנוע המפעיל את המשאבה).

בהמשך נניח כי פונקציות התמסורת של המשאבה, של המגבר, של המנוע ושל חיישן הגובה, הן קבועות בזמן (תמסורות סטטיות). לכן, הספיקה q_i של הנוזל הנכנס למכל נמצא ביחס ישר למהירות הסיבוב n של המשאבה.

בתרשים לא מופיעה תמסורת המכל, היות שהיחס בין המפלט h לבין הספיקה q_i אינו גודל קבוע אלא תלוי בכל רגע בערכו של h . רק במצב המתמיד, כאשר h ו- q_i קבועים בזמן, היחס ביניהם קבוע גם הוא ושווה לתמסורת הסטטית של המכל.



איור 6.12 תרשים מלבנים של מערכת לבקרת מפלס נוזל במכל

שימו לב למלבן הנוסף המופיע במוצא המערכת באיור 6.12. מלבן זה מציין את העובדה שהספיקה q_0 של הנוזל היוצא מן המכל נקבעת על-ידי גובה הנוזל במכל. ואמנם, הספיקה q_0 נוצרת בגלל לחץ הנוזל על הצינור שבתחתית המכל. ידוע כי הלחץ בכל נקודה בנוזל נמצא ביחס ישר לגובה הנוזל מעל לנקודה זו (הלחץ ההידרוסטטי). לחץ הנוזל בצינור היציאה נמצא אפוא ביחס ישר למפלס, ולכן גם ספיקת הנוזל היוצא מצינור זה נמצאת ביחס ישר למפלס:

$$(6-12) \quad q_0 = Kh$$

כאשר K הוא קבוע שאינו תלוי בספיקה או במפלס הנוזל במכל (מהם הממדים של K ?). במצב המתמיד, המפלס קבוע ומתקיים $q_i = q_0$. לכן, המפלס במצב זה הוא היחס $h = q_i/K$ ופונקצית התמסורת של המכל במצב זה היא $\frac{h}{q_i} = \frac{1}{K}$. אם ידוע הקבוע K , אפשר עקרונית לחשב את המפלס לכל ערך של ספיקת המשאבה q_i , ולכן גם לכל אות מבוא רצוי.

שאלה 6.5

חשבו את המפלס במצב המתמיד במערכת המפלס עם משוב (איור 6.12), אם הגובה הרצוי הוא $r = 5$ מטר. נתונות התמסורות של פוטנציומטר הייחוס, המגבר, המנוע, המשאבה וחיישן הגובה (ביחידות SI), בהתאמה:

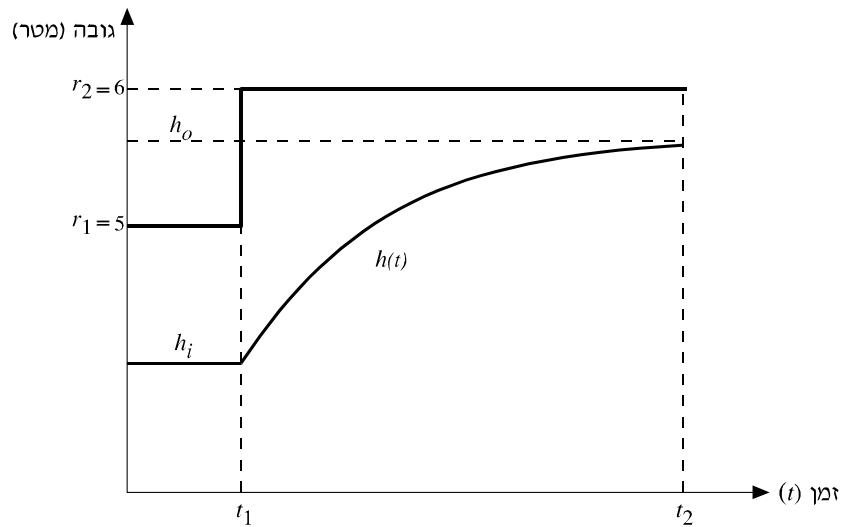
$$K = 0.1 \text{ (קבוע הפרופורציה של המכל)}, H = 10, G_p = 10^{-3}, G_m = 0.5, G_e = 50, G_0 = 10$$

באילו יחידות נמדדת כל אחת מתמסורות אלו?

אם עניתם נכון על השאלה האחרונה, נסו לענות גם על השאלה הבאה:

נניח כי ברגע מסוים t_1 משנים באופן פתאומי (שינוי מדרגה) את המפלס הרצוי מ- $r_1 = 5$ מטר ל- $r_2 = 6$ מטר (איור 6.13). בהנחה שהתמסורות של רכיבי המערכת אינן משתנות, קל לראות כי לאחר זמן מסוים t_2 (תיאורטית אין-סופי) המפלס החדש מתייצב על ערך הגדול בשיעור מסוים מהמפלס הקודם (מהו שיעור זה?). אולם כיצד מגיבה המערכת לפני שהיא מתייצבת במצב המתמיד החדש? כלומר, מהו ערכו של אות המוצא $(h(t))$ בכל רגע ורגע בין הזמן t_1 לבין הזמן t_2 ?

על שאלה זו נוכל לענות רק אם נדע את הקשר בין המפלס h בכל רגע ורגע לבין הספיקה q_i . כאמור, קשר זה אינו קשר פשוט, היות שבזמן המעבר $(t_1 < t < t_2)$, $q_i \neq q_0$, ולכן המפלס h אינו נמצא ביחס ישר ל- q_i . כאן באה לעזרתנו האנלוגיה שבין המכל לקבל, שבה השתמשנו בדוגמה 6.1. תגובת המכל דומה לתגובת הקבל: כאשר משנים באופן פתאומי את הספיקה למכל (q_i) , הקצב של שינוי המפלס הולך וקטן באופן מעריכי מהערך ההתחלתי h_i , עד שהוא מתייצב על הערך המתמיד החדש h_0 (ראו איור 6.13).



איור 6.13 שינוי המפלס מהערך h_i לערך הסופי h_0 כתוצאה משינוי מדרגה באות המבוא מהערך r_1 לערך r_2

כמו הקבל, מתנהג המכל כרכיב עם פיגור בזמן שיש לו קבוע זמן אופייני τ_H . ניתן להראות כי אם משנים את הספיקה q_i בקפיצת מדרגה (בזמן $t = 0$) מערך התחלתי q_{i1} לערך חדש q_{i2} (ראו משוואה (6-1)), המפלס h משתנה בזמן בצורה מעריכית (משוואה (6-3)):

$$(6-13) \quad h(t) = \frac{q_{i1}}{K} e^{-t/\tau_H} + \frac{q_{i2}}{K} (1 - e^{-t/\tau_H}) = \frac{q_{i2}}{K} - \frac{(q_{i2} - q_{i1})}{K} e^{-t/\tau_H}$$

כאשר הקבוע K מוגדר במשוואה (6-12).

ההוכחה המלאה של משוואה (6-13) חורגת ממסגרת הלימוד שלנו, אולם קל לראות שהיא מקיימת את התנאים שדרשנו. ואכן, בזמן $t = 0$, המפלס הוא $h(0) = h_i = \frac{q_{i1}}{K}$ וזהו הערך

במצב מתמיד לפני השינוי הפתאומי. כאשר $t \rightarrow \infty$, האיבר השני באגף ימין במשוואה שואף לאפס, ולכן $h(\infty) = h_0 = \frac{q_{i_2}}{K}$, וזהו ערך המפלס במצב המתמיד החדש. בזמן המעבר, $h(t)$ גדל באופן מעריכי (אם $q_{i_2} > q_{i_1}$) כמתואר באיור 6.13. קבוע הזמן של המכל נמצא ביחס ישר ל"קייבול" המכל (באנלוגיה לקייבול הקבל C). ליתר דיוק: ניתן להראות כי קבוע הזמן של מכל בעל שטח חתך A, הוא $\tau_H = A/K$, ולכן, ככל ששטח המכל גדול יותר, תגובת המכל "איטית" יותר.

שאלה 6.6

א. בהסתמך על היחס $q_0 = Kh$, הסבירו מדוע לאחר שינוי פתאומי בספיקה q_i , קצב העלייה של המפלס הולך וקטן.

רמז: קצב העלייה של המפלס נמצא ביחס ישר להפרש $q_i - q_0$.

ב. נניח כי מערכת המפלס פועלת במצב מתמיד. ברגע מסוים מפסיקים את פעולת המשאבה (כלומר, $q_i = 0$). סרטטו גרף של השתנות המפלס בתלות בזמן. כעבור כמה זמן יגיע גובה המפלס ל-0.7% מערכו ההתחלתי?

בשלב זה אנו "מצוידים" בידע שדי בו כדי לחשב את תגובת המערכת בזמן המעבר, כלומר, את תגובת המערכת בתלות בזמן $h(t)$, מרגע השינוי באות המבוא למערכת ועד שהמערכת מתייצבת במצב המתמיד החדש. כזכור, הקשר בין השינוי Δh באות המוצא, לבין השינוי Δr באות המבוא נתון על-ידי משוואת המשוב (משוואה (2-3)):

$$(6-14) \quad \Delta h(\infty) = \frac{G_0 G_c G_m G_p (1/K)}{1 + H G_c G_m G_p (1/K)} \cdot \Delta r$$

הסימונים הם אלה שרשומים באיור (6.12). הסימון $\Delta h(\infty)$ נועד להדגיש את העובדה שהמפלס מתייצב במצב המתמיד החדש רק לאחר זמן אינ-סופי. כמו כן אנו מניחים כי במשוואה (6-9),

$$\frac{h}{q_i} \equiv \left(\frac{1}{K} \right)$$

התמסורת של המכל במצב המתמיד היא

ברור כי קצב שינוי המפלס במכל בזמן המעבר הוא מרבי ברגע השינוי עצמו ($t = 0$), והוא קטן ככל שהזמן עובר. אנו טוענים כי תגובת המערכת בזמן המעבר גם היא תגובה מעריכית, אולם **קבוע הזמן שלה שונה מקבוע הזמן של המכל.**

את התגובה הדינמית של המערכת עם המשוב ניתן לרשום בצורה הבאה:

$$(6-15) \quad \Delta h(t) = \Delta h(\infty) \cdot (1 - e^{-t/\tau_1})$$

(גם ההוכחה של משוואה (6-15) חורגת ממסגרת הלימוד של ספר זה).

במשוואה (6-15), τ_1 הוא קבוע הזמן של המערכת עם המשוב ו- $\Delta h(\infty)$ נתון במשוואה (6-9).

ניתן להראות כי קבוע הזמן τ_1 של מערכת המפלט מקיים את המשוואה:

$$(6-16) \quad \tau_1 = \frac{\tau_H}{1 + H G_c G_m G_p (1/K)}$$

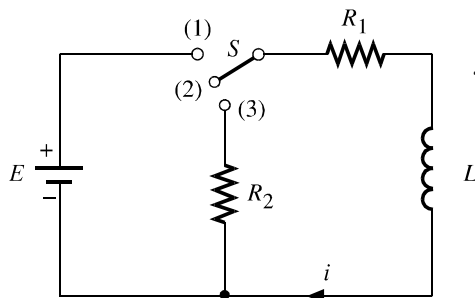
כלומר, קבוע הזמן האפקטיבי של המערכת, τ_1 בחוג הסגור, קטן מקבוע הזמן של המכל, τ_H , בחוג הפתוח.

מסקנה: המשוב גורם להקטנת קבוע הזמן בהשוואה לאותה מערכת כשהיא פועלת בחוג פתוח. מסקנה זו נכונה למעשה לכל מערכת עם משוב שיש בה רכיב אחד עם פיגור בזמן.

אם Δr שלילי, הרי ממשוואה (6-14) נובע כי גם $\Delta h(\infty) < 0$. ברור כי במקרה זה, השינוי במפלט $\Delta h(t)$ הוא שלילי, כלומר, המפלט יורד באופן מעריכי מרגע השינוי באות המבוא.

6.7 שאלה*

השתמשו בנתוני המערכת שבשאלה 6.5 וחשבו כעבור כמה זמן יתרוקן מכל ששטח החתך שלו $A = 1 \text{ m}^2$, עד למחצית גובהו ההתחלתי, כאשר מבצעים שינוי מדרגה של $\Delta r = -5 \text{ m}$. מהו קבוע הזמן של המערכת (τ_1)? כמה זמן דרוש למכל כדי להתרוקן עד לשיעור של 0.7% מהמפלט ההתחלתי?



איור 6.14 מעגל RL עם מקור מתח ישר

6.8 שאלה*

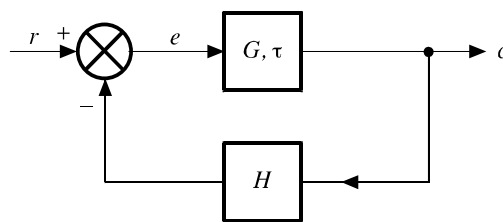
המעגל החשמלי המתואר באיור 6.14 זהה למעגל החשמלי שבאיור 6.7, אלא שהקבל C הוחלף במשרן L.

מתורת החשמל ידוע שהזרם במעגל RL טורי מתנהג בצורה דומה לזרם במעגל RC טורי: אם בתחילה הזרם i הוא אפס, הרי העברת המפסק ממצב (2) למצב (1) גורמת לעליית הזרם במשך באופן מעריכי מאפס עד להתייצבותו על הערך הקבוע $\frac{E}{R_1}$. קבוע הזמן של מעגל RL הוא $\tau = \frac{L}{R_1}$ כאשר L הוא השראות המשך (ביחידות הנרי).

- א. רשמו באופן מפורש את המשוואה המתארת את תלות הזרם i בזמן, מהרגע ($t = 0$) שבו מעבירים את המפסק ממצב (2) למצב (1).
- ב. מהו המתח על המשך בזמן זה (הכא"מ המושרה)? רשמו את המשוואה המתארת את u_L (המתח על המשך) בתלות בזמן.
- ג. לאחר זמן מסוים (תיאורטית – אין-סופי), מעבירים את המתג ממצב (1) למצב (3) (כלומר, מנתקים את המשך ממקור המתח). כתוצאה מכך, המשך מתנהג כמו קבל שפורק את מטענו, והזרם במעגל קטן באופן מעריכי. רשמו את המשוואה המתארת את הזרם בנגד R_2 בתלות בזמן הפריקה (כלומר, מרגע העברת המפסק ממצב (1) למצב (3)).
- ד. סרטטו גרף מקורב של תלות המתח על הנגד R_2 בזמן, בתהליך הפריקה של המשך.

לסיכום:

מערכת עם משוב מסדר ראשון אפשר לתאר באמצעות תרשים מלבנים כדוגמת התרשים שבאיור 6.15. באיור זה, G היא התמסורת הסטטית הכללית של החוג הקדומני, ו- τ הוא קבוע הזמן של רכיב בעל פיגור בזמן בחוג הקדומני (כלומר, רכיב שמתנהג כמו המכל במערכת המפלט). H היא התמסורת הכללית של חוג המשוב.



איור 6.15 תרשים מלבנים של מערכת בקרה מסדר ראשון עם משוב שלילי

במצב המתמיד מתקיים:

$$\frac{c}{r} = \frac{G}{1 + GH}$$

שינוי מדרגה Δr באות המבוא גורם לתגובה מעריכית של אות המוצא c , שקבוע הזמן האפקטיבי שלה הוא τ_1 :

$$(6-17) \quad \tau_1 = \frac{\tau}{1 + HG}$$

בזמן המעבר אות המוצא c כתוצאה מהאילוץ Δr נתון על-ידי המשוואה:

$$(6-18) \quad c = c_o + \frac{G\Delta r}{1 + GH} (1 - e^{-t/\tau_1})$$

כאשר c_o הוא ערך אות המוצא ברגע ההתחלה ($t = 0$). כאשר הזמן שואף לאין-סוף, אות המוצא שואף לערך הקבוע

$$(6-19) \quad c(t = \infty) = c_o + \frac{G\Delta r}{1 + GH}$$

השגיאה של אות המוצא, כלומר, ההפרש בינו לבין האות הרצוי במצב המתמיד, שואפת לערך הקבוע e :

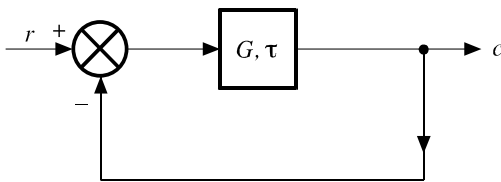
$$(6-20) \quad e(t = \infty) = \frac{\Delta r}{1 + HG}$$

מכאן נובע שככל שההגבר של החוג הקדומני G גדול יותר, השגיאה של אות המוצא במצב המתמיד, כתוצאה משינוי פתאומי באות המבוא, קטנה יותר (ראו גם משוואה (2-5) בסעיף 2.5). בהמשך נלמד כי שיקולים אחרים גורמים לכך שלא ניתן להשתמש בהגברים גבוהים מדי, ונדרשת "פשרה" בקביעת ערכו האופטימלי של ההגבר G .

6.9 *שאלה

הסבירו את הטענה הבאה:

"מערכת בקרה בעלת משוב יחידה (איור 6.16), הכוללת רכיב מסדר ראשון עם פיגור בזמן τ והגבר G במצב המתמיד, יכולה לעקוב אחר שינוי מדרגה באות המבוא עד כדי שגיאה קבועה".



איור 6.16 מערכת בקרה עם משוב יחידה

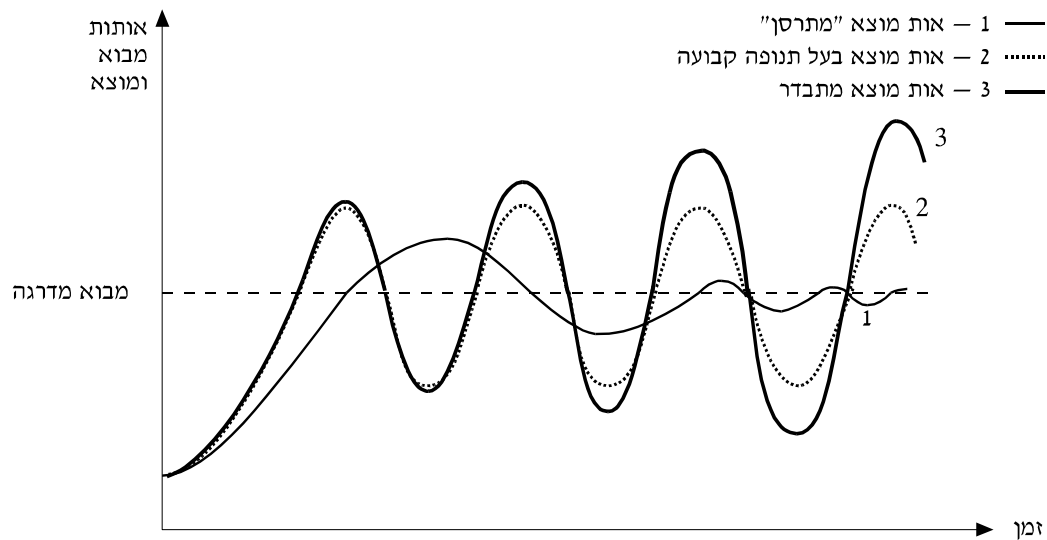
*פעילות מחשב מס 3

1. הפעילו את היישום "מערכות בקרה", ובחרו במערכת "בקרת מפלס".
2. טענו והציגו את המערכת ששמרתם בפעילות מחשב מס' 2.
שימו לב: המערכת שטענתם, הכוללת בקרה יחסית, היא מערכת בקרה מסדר ראשון בחוג סגור. לפיכך, תגובת המעבר של המערכת היא תגובה מעריכית האופיינית למערכות מסדר ראשון.
3. קבעו את אות המבוא כ"אות מדרגה" בגובה של 6 מטר.
4. לחצו על מתג ההפעלה ביישום כדי לחשב את תגובת המעבר של המערכת. מהו אות המוצא במצב המתמיד? מהו אות המוצא לאחר פרק זמן השווה לקבוע הזמן של המכל? חשבו את האות במצב המתמיד באמצעות נוסחת המשוב, תוך שימוש בערכי התמסורות שקבעתם. השווו את הערך המחושב לערך שמתקבל ביישום. עד כמה טובה ההתאמה? חזרו ובדקו את ההתאמה בין תוצאת היישום לתוצאת החישוב הידני עבור שני ערכי אות מבוא נוספים: $r = 10 \text{ m}$, $r = 1 \text{ m}$.
5. שמרו את התוצאות המתקבלות עבור $r = 6 \text{ m}$ בטבלה כקובץ טקסט על-ידי לחיצה על הסמלון "שמור".
6. פתחו את היישום "excel" וקראו את התוצאות בטבלה ששמרתם. השתמשו בפונקציות היישום של excel כדי למצוא את הפונקציה המעריכית המתאימה לערכי אות המוצא שבטבלה. מהו קבוע הזמן של הפונקציה שמצאתם? השוו את קבוע הזמן הזה לקבוע הזמן המתקבל ממשוואה (6-12). האם הערכים קרובים? הסבירו.
7. ממשוואה (6-9) ניתן להסיק כי תגובת המערכת במצב המתמיד אינה תלויה בקבוע הזמן של המכל. אמתו מסקנה זו באמצעות חישוב תגובת המעבר עבור כמה ערכים שונים של קבוע הזמן τ של המכל. מהם הזמנים שבהם מתקבל אות מוצא השווה ל-0.66 מהערך במצב המתמיד, בכל אחד מקבועי הזמן שבחרתם?
8. מהי תמסורת פוטנציומטר המבוא שעבורה אות המוצא שווה לאות המבוא?

6.3 התגובה הדינמית של מערכות מסדר שני

6.3.1 הקדמה

מערכות מסדר שני יכולות להגיב לאות מדרגה בצורה שונה ממערכות מסדר ראשון. במערכות אלו, אות המוצא בזמן המעבר עלול להתנווד בתנודות בעלות תנופה קבועה או משתנה.

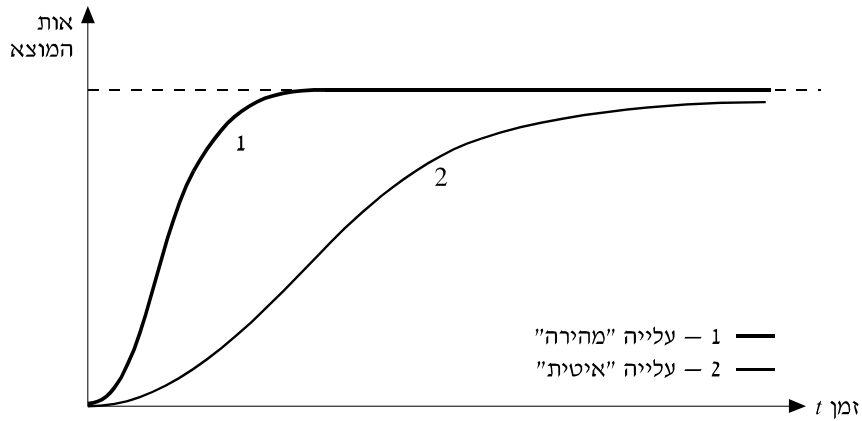


איור 6.17 תגובות אופייניות של מערכות מסדר שני לשינוי מדרגה באות המבוא

באיור 6.17 מופיעות: (1) תנודות **מרוסנות**, שבהן תנופת אות המוצא מתנוודדת סביב ערך שיווי המשקל ושואפת אליו כאשר הזמן שואף לאינסוף; (2) תנודות בעלות **תנופה קבועה** שבהן אות המוצא מתנוודד סביב ערך שיווי המשקל בצורה מחזורית ובתנופה קבועה; (3) תנודות **לא מרוסנות**, שבהן אות המוצא מתנוודד סביב ערך קבוע כאשר התנופה הולכת וגדלה עם הזמן. המקרה האחרון מתאים למערכת במצב **לא יציב**. זהו מצב שאינו רצוי בדרך כלל במערכות בקרה, ובמיוחד במערכות עם משוּב.

קיימות גם מערכות מסדר שני שהתגובה שלהן לשינוי מדרגה באות המבוא דומה לתגובת מערכות מסדר ראשון: עלייה מעריכית (או ירידה מעריכית) של אות המוצא בזמן המעבר, עד

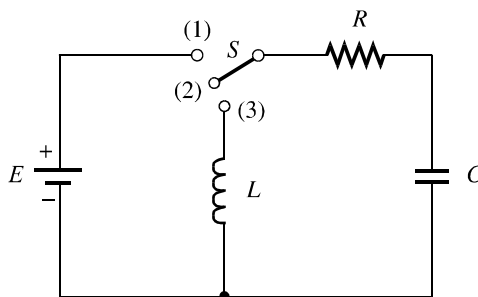
להתייצבותו על ערך קבוע (איור 6.18). כפי שנראה, העלייה (או הירידה) המעריכית במערכות אלה מורכבת יותר מהתגובה של מערכות מסדר ראשון, שכן היא תלויה בשני קבועי זמן ולא בקבוע אחד בלבד.



איור 6.18 עלייה מעריכית של אות המוצא במערכת מסדר שני: 1 – עלייה מהירה, 2 – עלייה איטית יותר

6.3.2 תגובת מעבר של מערכת מסדר שני: מעגל RLC

דוגמה למערכת מסדר שני בחוג פתוח שיכולה להתנהג כמערכת "תנודתית", או כמערכת בעלת תגובה מעריכית, היא המעגל החשמלי RLC המתואר באיור 6.19.



איור 6.19 מעגל RLC עם מקור מתח ישר

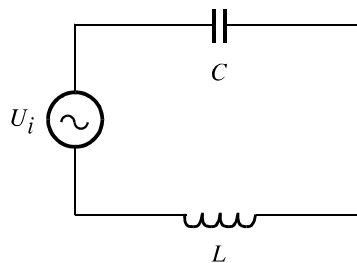
מעגל זה כולל קבל ונגד המחוברים בטור, ומשרן L המחובר במקביל לקבל C . נניח כי בתחילה, המפסק S נמצא במצב (2) והקבל אינו טעון. כאשר מעבירים את המפסק ממצב (2) למצב (1), הקבל נטען והמתח עליו גדל בצורה מעריכית עם קבוע זמן $\tau = RC$. לאחר שהמתח על הקבל מגיע לערכו המקסימלי E (תיאורטית בזמן אין-סופי), מעבירים את המפסק S ממצב (1) למצב (3). במצב זה הקבל פורק את מטענו דרך הנגד R והמשרן L . המעגל המתקבל, שבו נגד, קבל ומשרן מחוברים בטור, נקרא **מעגל תהודה**.

במעגל תהודה נוצרות תנודות (oscillations) אנרגיה: האנרגיה החשמלית האצורה בקבל הופכת לאנרגיה מגנטית במשרן, והאנרגיה המגנטית חוזרת והופכת לאנרגיה חשמלית בקבל – וחוזר חלילה. אם ההתנגדות האומית של המעגל היא אפס (כלומר, $R = 0$), תנודות אלה הן מחזוריות, והתדר שלהן נקרא **התדר הטבעי** (natural frequency) של מעגל LC .

ניתן להראות (ההוכחה חורגת ממסגרת ספר זה) כי התדר הזוויתי הטבעי של מעגל LC נתון על-ידי:

$$(6-21) \quad \omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

כאשר L נתון בהנרי ו- C נתון בפאראד, התדר ω_n מתקבל ברדיאנים לשנייה. התדר הטבעי ω_n נקרא גם **תדר תהודה**, היות שהעכבה (ההתנגדות) של מעגל LC בתדר זה שווה לאפס (כזכור, ההתנגדות של מעגל זרם חילופין תלויה בתדר!). ניתן להראות כי כאשר מקור מתח בעל תדר הניתן לשינוי פועל במעגל LC טורי ללא התנגדות אומית (איור 6.20), התנגדות המעגל היא הנמוכה ביותר כאשר הוא נמצא בתהודה, כלומר, כאשר התדר של מקור המתח שווה לתדר הטבעי של המעגל.



איור 6.20 מעגל LC טורי עם מקור מתח חילופין

261 התגובה הדינמית של מערכות בקרה

תוספת של התנגדות R במעגל LC גורמת ל"הפסדי" אנרגיה (חימום הנגד), ולכן התנודות במעגל RLC כדוגמת המעגל שבאיור 6.19, הולכות ומתרטנות עם הזמן. התדר ω_d של התנודות המרוסנות במעגל RLC נתון על-ידי:

$$(6-22) \quad \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

ζ הוא קבוע הנקרא **מקדם הריסון** של המעגל, וערכו תלוי בערכי הנגד, הקבל, והמשרן:

$$(6-23) \quad \zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

את תנודות האנרגיה במעגל המרוסן מודדים באמצעות שינויי הזרם והמתח במעגל. במעגל RLC שבאיור 6.19 (המפסק במצב 3) הזרם מתנודד בתדר ω_d , וכך גם המתח על רכיבי המעגל. יתירה מזו, ניתן לראות כי התנופה A של תנודות המתח על רכיבי המעגל קטנה בצורה מעריכית:

$$(6-24) \quad A(t) = A_0 e^{-t/\tau_A}$$

כאשר A_0 הוא קבוע (התנופה) שאינו תלוי בזמן, ו- τ_A הוא קבוע המתייחס לירידה בתנופת התנודות עם הזמן. τ_A נתון על-ידי:

$$(6-25) \quad \tau_A = \frac{1}{\zeta \omega_n}$$

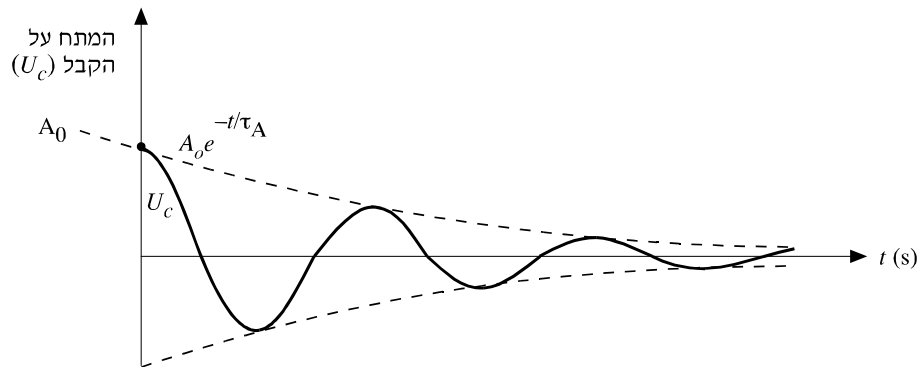
כלומר, ככל שמקדם הריסון ζ גדול יותר, כך קבוע הזמן של הדעיכה τ_A קטן יותר, והתנודות מתרטנות מהר יותר. מרגע העברת המפסק S למצב (3), המתח על הקבל במעגל RLC (איור 6.19) משתנה בזמן על פי פונקציית **קוסינוס דועכת**:

$$(6-26) \quad U_c = A_0 e^{-t/\tau_A} \cos(\omega_d t)$$

כאשר התדר ω_d הוא תדר התנודות המרוסנות (ראה משוואה (6-22)).

משוואה (6-26) דומה בצורתה למשוואה המתארת תגובה מעריכית בלא תנודות (למשל, פריקת קבל). ואולם כעת מופיע בנוסחה המרכיב המחזורי המבטא את התנודות.

הדעיכה המעריכית של המתח על הרכיבים במעגל מודגמת באיור 6.21, שבו מתואר המתח על הקבל U_c .



איור 6.21 דעיכת התנופה של תנודות המתרסנות לפי הפונקציה המעריכית $A_0 e^{-t/\tau}$

שימו לב לקו המקוקו שבאיור 6.21 הממחיש כי במקרה זה קבוע הזמן τ_A מתייחס לדעיכה בתנופה של התנודות.

שאלה 6.10

במעגל RLC ללא מקור מתח (איור 6.19, כאשר S במצב 3), המתחים על הנגד, הקבל והמשרן, הם U_e, U_c, U_L בהתאמה. מחוק קירכהוף נובע כי בכל רגע מתקיים:

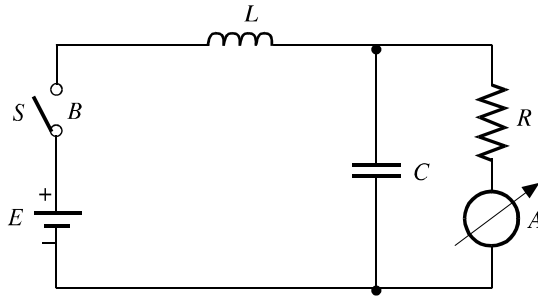
$$U_e + U_c + U_L = 0$$

בהנחה שכל שלושת המתחים מתוארים על-ידי משוואה הדומה למשוואה (6-26), אולם עם תנופה ומופע שונים, סרטטו במערכת צירים אחת את התלות של U_L, U_c, U_e בזמן. מהו הקשר בין התנופות של המתחים הללו?

הערה: המופע φ_i של כל אחד מהמתחים מופיע בארגומנט של פונקציית הקוסינוס $U = A_0 e^{-t/\tau_A} \cos(\omega_d t + \varphi_i)$

באיור 6.22 נתון מעגל RLC שונה מעט מהמעגל שבאיור 6.19. זהו מעגל RLC מעורב. כאשר סוגרים את המפסק S יוצרים למעשה אות מדרגה במבוא (שינוי המתח בנקודה B), היוצר אות מוצא (אות זרם בנגד), הנמדד במד הזרם A . אות המוצא משתנה בזמן במשך פרק זמן קצר שהוא זמן המעבר (מהו הזרם במצב המתמיד בתום זמן המעבר?). גם כאן התנהגות המעגל נקבעת על-ידי מקדם הריסון ζ של המעגל המעורב, ותלויה אפוא בערכי הנגד, הקבל והמשרן. מקדם הריסון נתון על-ידי:

$$(6-27) \quad \zeta = \frac{1}{2RC\omega_n} = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$



איור 6.22 מעגל RLC מעורב עם מקור זרם ישר

שאלה 6.11

השוו את משוואה (6-23) למשוואה (6-27). מהי, לדעתכם, הסיבה הפיסיקלית להבדל בין המשוואות?

מבחינים בין שלושה מקרים אופייניים של התנהגות אות המוצא במערכת זו:

א. מערכת עם תגובה תת-מרוסנת: $\zeta < 1$

ב. מערכת עם תגובה בעלת ריסון יתר: $\zeta > 1$

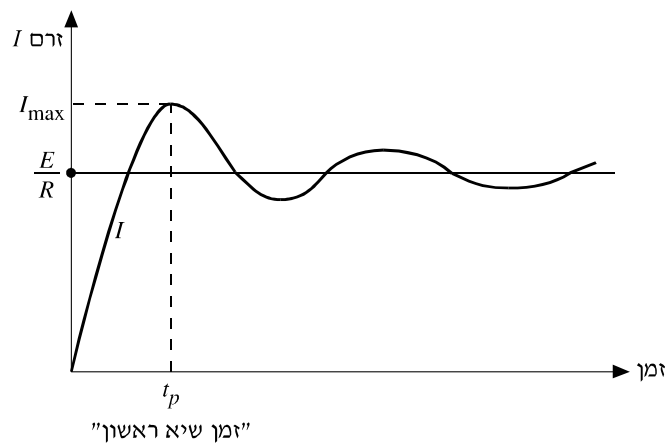
ג. מערכת עם תגובה בעלת ריסון קריטי: $\zeta = 1$

בנספח שבסוף הספר מובאות הנוסחאות המדויקות של אות המוצא (הזרם במעגל) בכל אחד ממקרים אלו. בכל אחד מהמקרים זרם המוצא גדל מאפס לאחר סגירת המתג S . במקרה הראשון (מערכת בעלת תגובה תת-מרוסנת), מקדם הריסון $\zeta < 1$, והזרם מתנהג כמתואר באיור 6.23: הזרם עולה תחילה לערך מרבי הגדול מערכו במצב המתמיד, ולאחר מכן מתנדד באופן מחזורי סביב ערכו במצב המתמיד, עד להתייצבותו על הערך הקבוע E/R . תדר התנדודת המרוסנות הוא ω_d (משוואה (6-22)) וקבוע זמן הדעיכה של התנדודות הוא τ_A (משוואה (6-25)).

במקרה השני (מערכת בעלת ריסון יתר), $\zeta > 1$, והזרם מתנהג כמתואר באיור 6.24: הזרם גדל בצורה מעריכית לערכו הקבוע E/R ללא תנדודות. בנספח אנו מראים כי בניגוד למערכת מסדר ראשון, עלייה מעריכית זו אינה מאופיינת על-ידי קבוע זמן יחיד אלא על-ידי שני קבועי זמן. קבועי זמן אלו הם השורשים הממשיים של המשוואה הריבועית:

$$(6-28) \quad X^2 + 2\zeta\omega_n X + \omega_n^2 = 0$$

כאשר ζ ו- ω_n הם מקדם הריסון והתדר הטבעי של המעגל.

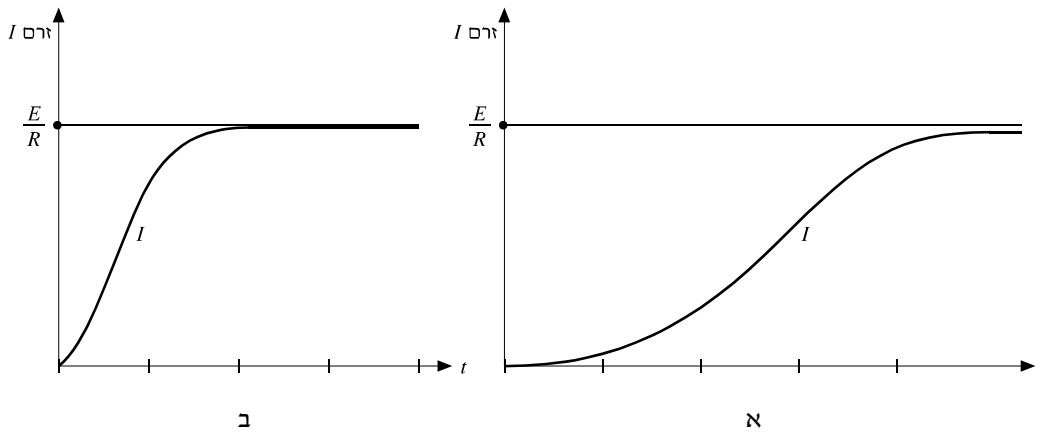


איור 6.23 תגובה תנדודתית למערכת תת-מרוסנת מסדר שני ($\zeta < 1$)

שאלה 6.12

מהו התנאי לכך שלמשוואה הריבועית (6-28) יהיו שני שורשים ממשיים שונים זה מזה?

במקרה השלישי (מערכת בעלת ריסון קריטי), $\zeta = 1$, והזרם במעגל גדל בצורה מעריכית לערכו במצבו המתמיד (איור 6.24). אולם עליית הזרם במקרה זה מהירה ביותר: למעשה מהירה יותר מאשר בכל מעגל אחר בעל אותו תדר טבעי (ω_n). זו הסיבה שלמעגל עם ריסון קריטי יש חשיבות רבה במקרים שבהם נדרשת תגובה מהירה ביותר.



איור 6.24 תגובה לא-תנודתית למערכת מסדר שני עם ריסון יתר
 א. $\zeta > 1$
 ב. $\zeta = 1$

דוגמה 6.2

במעגל RLC מעורב עם מקור מתח ישר (איור 6.22) נתונים ערכי המשרן והקבל במעגל: $C = 100 \mu\text{F}$, $L = 0.01 \text{ H}$. באיזה נגד יש להשתמש כדי שלאחר סגירת המפסק המתח על הנגד יגדל באופן מעריכי במהירות המקסימלית וללא תנודות?

פתרון

המתח על הנגד $U_R(t)$ שווה למכפלת הזרם בנגד $I(t)$ בהתנגדותו R . עליית המתח היא מהירה יותר אם מקדם הריסון של המעגל מקיים $\zeta = 1$. התדר הטבעי ω_n של המעגל נקבע לפי ערכי הקבל והמשרן במעגל בלבד:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{10^{-2} \cdot 10^{-4}}} = 10^3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

ואילו מקדם הריסון ζ תלוי בערך הנגד R :

$$\zeta = \frac{1}{2RC\omega_n} = 1$$

לכן, כדי שיתקיים התנאי $\zeta = 1$, ההתנגדות R חייבת לקיים את המשוואה:

$$2RC\omega_n = 1$$

ולפיכך,

$$R = \frac{1}{2C\omega_n} = \frac{1}{2 \cdot 10^{-4} \cdot 10^3} = 5 \Omega$$

כאמור, תגובת מעגל RLC היא דוגמה לתגובה של מערכת בקרה מסדר שני בחוג פתוח. לכל המערכות מסדר שני יש שני פרמטרים אופייניים הקובעים את אופי תגובת המעבר של המערכות לכל אות מבוא:

א. התדר הטבעי של המערכת – ω_n

ב. מקדם הריסון של המערכת – ζ

בכל המערכות הללו, מקדם הריסון ζ קובע את קצב הריסון:

א. כאשר $0 < \zeta < 1$ המערכת היא בעלת תגובה תנודתית מרוסנת.

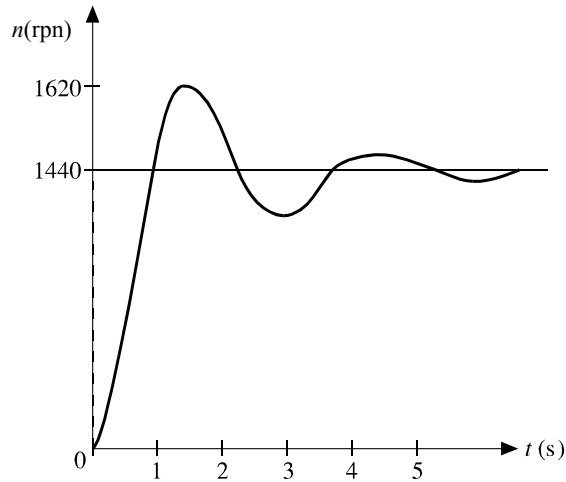
ב. כאשר $\zeta > 1$ המערכת מתרסנת באופן מעריכי ללא תנודות.

ג. כאשר $\zeta = 1$ הריסון הוא גבולי – המערכת מתרסנת ללא תנודות במהירות הגבוהה ביותר.

ד. כאשר $\zeta = 0$ התגובה מתנודדת בתנודות בעלות תנופה קבועה.

שאלה 6.13

לפניכם תגובה של מערכת מסדר שני שבה אות המוצא הוא מהירות הסיבוב של מנוע DC, ואות המבוא הוא המתח המסופק למנוע (מערכת בחוג פתוח). הגרף באיור 6.25 מתאר את מהירות הסיבוב כתוצאה משינוי מדרגה במתח המבוא.



איור 6.25 תגובת המנוע (מהירות הסיבוב) לשינוי מדרגה במתח המבוא

על-פי הגרף, חשבו בקירוב:

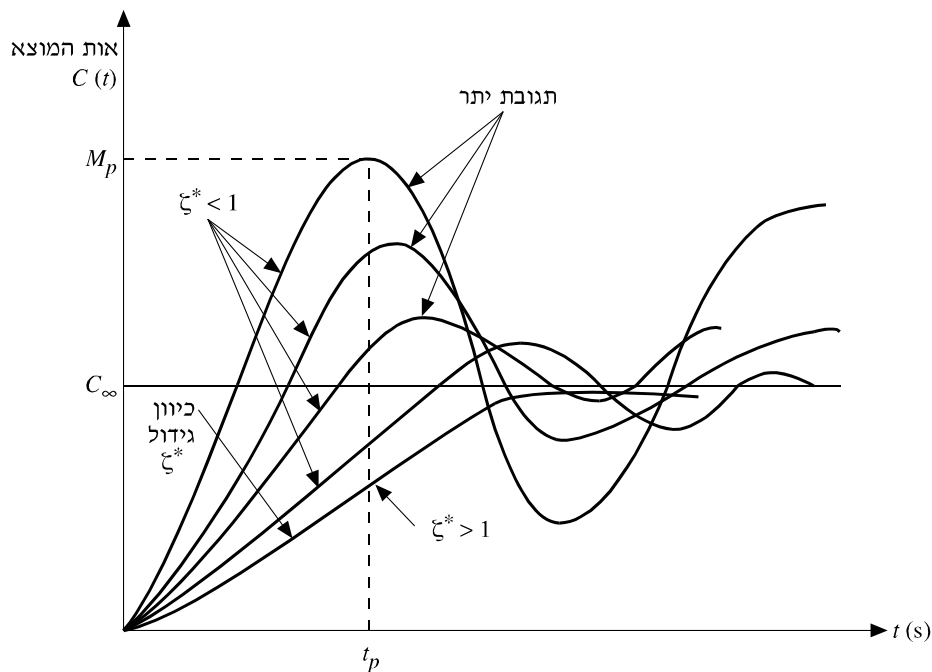
- א. את תדר התנודות המרוסנות ואת זמן המחזור שלהן.
- ב. את מקדם הריסון של המערכת.
- ג. את התדר הטבעי (ω_n) של המערכת.
- ד. את קבוע הזמן של דעיכת התנודות במערכת.

6.3.3* תגובת מעבר של מערכות מסדר שני

בסעיף 6.2.3 עסקנו בתגובת מערכת בחוג סגור שבה אחד הרכיבים בחוג הקדומני הוא בעל "פיגור בזמן" מסדר ראשון (מערכת בקרת המפלט עם מכל אגירה). ראינו כי תגובת המערכת לאות מדרגה היא תגובה מעריכית (תגובה מסדר ראשון), שקבוע הזמן האפקטיבי שלה קטן מקבוע הזמן של המערכת בחוג הפתוח. גם תגובת המעבר של מערכת בחוג סגור שבה אחד הרכיבים הוא בעל תגובה מסדר שני, היא שונה מתגובת אותה מערכת כאשר היא פועלת בחוג פתוח. כללית, מערכת בחוג סגור היא בעלת תגובה האופיינית למערכת מסדר שני אם קיים בה רכיב אחד בעל תגובת חוג פתוח מסדר שני, או אם קיימים בה שני רכיבים בעלי תגובת חוג פתוח מסדר ראשון המחברים ביניהם בטור (אם שני הרכיבים מחוברים במקביל, אזי רק כאשר הם בעלי קבועי זמן שונים ניתן להתייחס למערכת כאל מערכת מסדר שני. מה קורה כאשר שני הרכיבים המחברים במקביל הם

בעלי אותו קבוע זמן? גם מערכת הכוללת רכיב מסדר ראשון ורכיב נוסף, הקרוי אינטגרטור, המחובר אליו בטור (על האינטגרטור נרחיב בהמשך) מתנהגת כמערכת מסדר שני.

כמו מערכות מסדר ראשון בחוג סגור, גם מערכות מסדר שני בחוג סגור יכולות לכלול רכיבים נוספים שהם בעלי תמסורת סטטית קבועה. התמסורת הכללית של מערכת בחוג סגור תלויה בשני הפרמטרים המאפיינים גם את תגובתה בחוג פתוח: התדר הטבעי של המערכת בחוג הסגור (ω_n^*) , ומקדם הריסון (ζ^*) של המערכת בחוג הסגור. גדלים אלו אמנם אינם זהים לגדלים המאפיינים את תגובת המערכת בחוג הפתוח $(\omega_n$ -ו- $\zeta)$, אולם גורמים לתגובת מעבר הדומה בצורתה לתגובת המעבר של המערכת בחוג הפתוח. במיוחד, **צורת** התגובה המרוסנת של המערכת בחוג הסגור נקבעת על-ידי ערכו של מקדם הריסון האפקטיבי ζ^* , כפי שניתן לראות באיור 6.26.



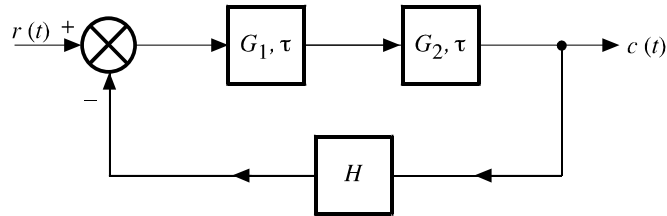
איור 6.26 תגובת המעבר של מערכת מסדר שני בחוג סגור לאות מדרגה במבוא. C_∞ הוא ערך אות המוצא לאחר זמן אין-סופי

באיור זה מתוארים אותות המוצא $C(t)$ של מערכת מסדר שני בחוג סגור שמתקבלים בתגובה לשינוי מדרגה באות המבוא, עבור ערכים שונים של פרמטר הריסון ζ^* . **תגובת היתר** של אות המוצא היא ההפרש בין הערך המרבי של אות המוצא (בדרך כלל הערך בתנודה הראשונה), לבין הערך במצב המתמיד החדש (C_∞). כמו במערכת בחוג פתוח (מעגל RLC), ככל שמקדם הריסון גדול יותר, כך התגובה תנועתית פחות ותגובת היתר

קטנה יותר. גם כאן, העלייה המהירה ביותר (ללא תנודות) מושגת כאשר $\zeta^* = 1$. לעומת זאת, אם $\zeta^* = 0$, מתקבלות תנודות בעלות תנופה קבועה והמערכת אינה מתייצבת. חישוב הגדלים ω_n^* ו- ζ^* עבור מערכת כלשהי מסדר שני הפועלת בחוג סגור, חורג ממסגרת ספר זה. נסתפק אפוא בניחותה שתי דוגמאות פרטיות שידגימו האמור לעיל.

6.3.3.1 מערכת הכוללת שני רכיבים מסדר ראשון בעלי פיגור זהה בזמן המחוברים בטור

מערכת כזאת ניתן לתאר באמצעות תרשים מלבנים הכולל חוג קדומני ובו שני מלבנים המסמלים את שני הרכיבים בעלי הפיגור בזמן, ומלבן בעל תמסורת קבועה בחוג המשוב (איור 6.27).



איור 6.27 מערכת מסדר שני הכוללת שני רכיבים מסדר ראשון בעלי פיגור זמן זהה המחוברים בטור

את ההגבר הסטטי של שני הרכיבים מסדר ראשון נסמן על-ידי G_1 ו- G_2 בהתאמה, ונניח כי קבוע הזמן שלהם τ , זהה.

ניתן להראות כי במערכת זו, התדר הטבעי ω_n^* ומקדם הריסון ζ^* מקיימים את המשוואות:

$$(6-29) \quad \zeta^* = \frac{1}{\sqrt{1 + GH}}$$

$$(6-30) \quad \omega_n^* = \frac{\sqrt{1 + GH}}{\tau}$$

כאשר $G = G_1 G_2$. שימו לב כי H ו- G הם בעלי יחידות הופכיות, ולכן מכפלתם היא חסרת ממדים. כמו כן, G ו- H הם בדרך כלל גדלים חיוביים, ולכן במערכת זו, $\zeta^* < 1$, והתגובה הדינמית היא אפוא בעלת ריסון תת-קריטי (תגובה תנודתית). יתירה מזו, אם מגדילים את ההגברים (G או H), גורמים להקטנת ζ^* ולתנודות חזקות יותר בתדר אפקטיבי גבוה יותר.

שאלה 6.14

השתמשו בביטוי הכללי עבור תדר התנודות המרוסנות ω_d (משוואה (6-22)), ורשמו נוסחה המתארת את התלות של ω_d במאפייני המערכת G_2, G_1, τ ו- H .

את תגובת המערכת לשינוי מדרגה Δr באות המבוא במצב המתמיד, ניתן לחשב באמצעות ההגברים G_1, G_2 ו- H :

$$(6-31) \quad \Delta c(t = \infty) = \frac{G\Delta r}{1 + GH}$$

כלומר, השינוי באות המוצא Δc , "עוקב" אחרי השינוי באות המבוא, עד כדי היחס הקבוע $\left(\frac{G}{1 + GH}\right)$.

גם השיאה e כתוצאה משינוי מדרגה Δr שואפת עם הזמן לערך קבוע, שערכו:

$$(6-32) \quad e(t = \infty) = \frac{\Delta r}{1 + GH}$$

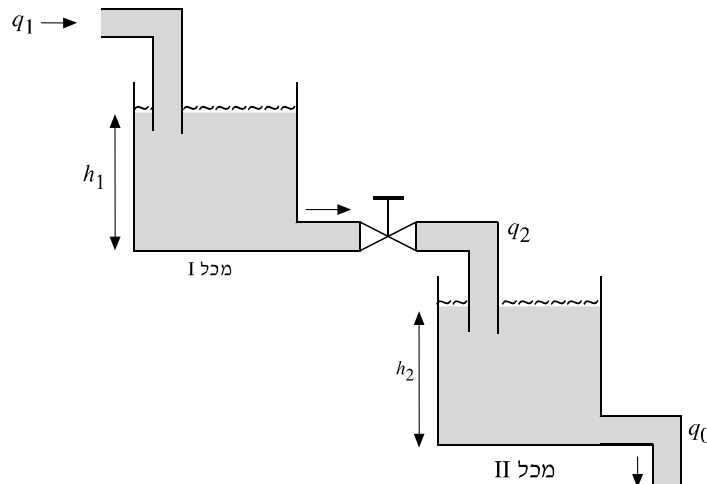
(השוו עם משוואה (2-5)).

לפיכך, השיאה אינה מתאפסת כאשר המערכת מגיעה למצב המתמיד החדש.

דוגמה 6.3: בקרת מפלס של שני מכלים מחוברים בטור

בסעיף 6.2.3 ניתחנו את התגובה של מערכת בקרת מפלס עם מכל אחד הפועלת בחוג סגור. ראינו כי כאשר מערכת זו פועלת בחוג פתוח, פיגור הזמן τ_H שווה ליחס שבין שטח החתך A של המכל, לבין קבוע המכל, K : $\tau_H = A/K$. לעומת זאת, כאשר אותה מערכת פועלת בחוג סגור, קבוע הזמן האפקטיבי שלה (τ_1) קטן, וערכו ניתן במשוואה (6-16).

עתה נניח כי למערכת שבאיור 6.11 מוסיפים עוד מכל, כך שהנוזל מהמכל העליון עובר למכל תחתון וממנו מנוקז החוצה. מערכת כזאת מתוארת באיור 6.28.



איור 6.28 מערכת בקרת מפלס עם שני מכלים מחוברים בטור

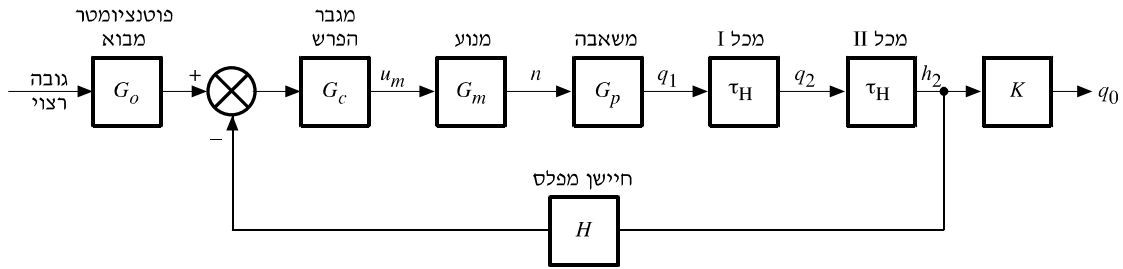
מד-המפלט במערכת מודד את גובה הנוזל במכל II ($c = h_2$), בעוד שמשאבה מספקת למכל הראשון נוזל בספיקה q_1 . הספיקה מהמכל התחתון היא q_0 . באנלוגיה למשוואות המתארות מכל בודד במצב המתמיד, כאשר מערכת זו נמצאת במצב מתמיד, מתקיים

$$(6-33) \quad q_2 = K_1 h_1 = q_1$$

$$q_0 = K_2 h_2 = q_2$$

K_1 ו- K_2 הם קבועי המכל הראשון והשני, בהתאמה. אם המכלים ומערכות הצינורות המחוברים להם זהים, אזי $K_1 = K_2 = K$, וממשוואה (6-33) נובע כי $h_1 = h_2$, כלומר, במצב המתמיד, המפלט זהה בשני המכלים! באיור 6.29 נתון תרשים המלבנים של המערכת עם שני המכלים (השווה לאיור 6.12).

שימו לב כי קבועי הזמן של שני המכלים (A/K) וההגברים הסטטיים שלהם ($1/K$) זהים.



איור 6.29 תרשים מלבנים של מערכת שני המכלים המחוברים בטור

ממשוואה (6-29) מקבלים כי מקדם הריסון האפקטיבי של המערכת הוא:

$$(6-34) \quad \zeta^* = \frac{1}{\sqrt{1 + G_c G_m G_p H / K^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + GH}}$$

כאשר G הוא ההגבר הסטטי הכולל של החוג הקדומני (לא כולל הגבר פוטנציומטר המבוא). התדר הטבעי האפקטיבי של התנודות במערכת הוא (משוואה 6-30):

$$(6-35) \quad \omega_n^* = \frac{\sqrt{1 + G_c G_m G_p H / K^2}}{(A/K)} = \left(\frac{K}{A}\right) \sqrt{1 + GH}$$

התדר של התנודות המרוסנות, ω_d , מקיים:

$$(6-36) \quad \omega_d = \omega_n^* \sqrt{1 - \zeta^{*2}} = \frac{\sqrt{G_c G_m G_p H / K^2}}{A/K} = \frac{\sqrt{G_c G_m G_p H}}{A}$$

כלומר, תדר התנודות המרוסנות של המערכת אינו תלוי בהגבר הסטטי של המכלים.

מהמשוואות שלעיל נובע גם כי כאשר $H \rightarrow 0$, המערכת מתנהגת כמערכת בחוג פתוח, ומקדם הריסון $\zeta^* \rightarrow 1$. לפיכך במצב זה, השינוי במפלט h_2 כתוצאה משינוי מדרגה במבוא הוא ללא תנודות.

שאלה 6.15

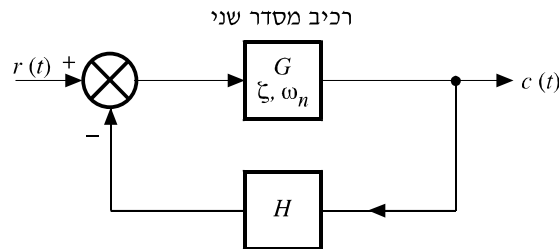
משנים את גובה הייחוס שינוי מדרגה Δr . חשבו את השינוי Δh_2 במצב המתמיד החדש. השתמשו בתמסורות הרכיבים הרשומות באיור 6.29.

שאלה 6.16

ממשוואה (6-34) נובע כי כאשר $H \rightarrow 0$, $\zeta^* \rightarrow 1$. כיצד מגיבה המערכת במצב זה לאות מדרגה במבוא?

6.3.3.2 מערכת בחוג סגור הכוללת רכיב שהוא בעל תגובה מסדר שני בחוג פתוח

תרשים המלבנים של מערכת כזאת נתון באיור 6.30. היא התמסורת הסטטית השקולה של כל הרכיבים בחוג הקדומני (לרבות הבקר והרכיב מסדר שני) ζ ו- ω_n הם מקדם הריסון והתדר הטבעי של הרכיב מסדר שני, בהתאמה (בחוג הפתוח).



איור 6.30 תרשים מלבנים כללי של מערכת בקרה בחוג סגור הכוללת רכיב אחד מסדר שני בחוג הקדומני

כמו במערכת הקודמת, גם במערכת זו שינוי מדרגה Δr באות המבוא, גורם לשינוי Δc באות המוצא, כאשר במצב המתמיד מתקיים:

$$(6-37) \quad \Delta c = \frac{G \Delta r}{1 + GH}$$

כאשר G ו- H נתונים ביחידות הופכיות.

גם השגיאה במצב המתמיד ($e(t = \infty)$) זהה לשגיאה במערכת המתוארת בסעיף הקודם (משוואה (6-32)):

$$e(t = \infty) = \frac{Ar}{1 + GH}$$

כלומר, גם במערכת זו קיימת במצב המתמיד החדש שגיאה קבועה שאינה מתאפסת. ניתן להראות כי את תגובת המעבר של המערכת מאפיינים תדר טבעי (ω_n^*) ומקדם ריסון (ζ^*) המקיימים את המשוואות הבאות:

$$(6-38) \quad \omega_n^* = \omega_n \sqrt{1 + GH}$$

$$(6-39) \quad \zeta^* = \frac{\zeta}{\sqrt{1 + GH}}$$

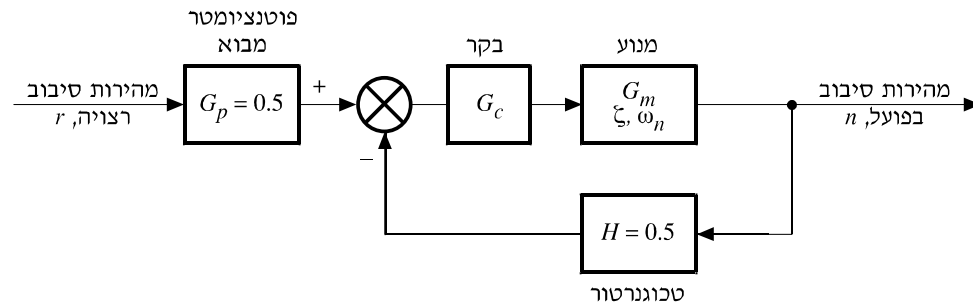
כאשר ω_n ו- ζ הם הקבועים של המערכת בחוג הפתוח.

אם המכפלה של G ו- H חיובית, הרי ממשוואה (6-39) נובע כי התגובה הדינמית של המערכת בחוג סגור הנה מרוסנת פחות (כלומר, בעלת מקדם ריסון קטן יותר) מאשר התגובה של אותה מערכת בחוג הפתוח. במקרה קיצוני, כאשר G (או H) גדולים מדי, הערך של מקדם הריסון האפקטיבי ζ^* שואף לאפס, ולמערכת עלולה להיות תגובת יתר גדולה מאוד (ראו איור 6.26). מאידך, השגיאה e במצב המתמיד קטנה ככל G - (או H) גדולים יותר. כאן אנו נתקלים אפוא שוב באחת הבעיות הנפוצות בתכנון מערכות בקרה עם משוב שנדרשת בהן תגובת יתר קטנה ככל האפשר: מציאת ההגבר G , שעבורו השגיאה במצב המתמיד החדש תהיה קטנה ככל האפשר, ובו בזמן, מקדם הריסון יהיה גדול ככל האפשר.

דוגמה 6.4: מערכת לבקרת מהירות הסיבוב של מנוע זרם ישר

בתנאים מסוימים, מערכת של מנוע זרם ישר ובקר מנוע מגיבה כמו מערכת מסדר שני בחוג פתוח. את מהירות הסיבוב של ציר המנוע ניתן למדוד בעזרת טכוגנרטור שמתח המוצא שלו נמצא ביחס ישר למהירות הסיבוב. נתון כי מערכת של מנוע זרם ישר ובקר המתנהגת כמערכת מסדר שני היא בעלת הגבר סטטי $G_m = 10 \text{ rpm/V}$, מקדם ריסון $\zeta = 1.1$, ותדר טבעי $\omega_n = 0.1 \text{ rad/s}$. מודדים את מהירות ציר המנוע באמצעות טכוגנרטור שהגבר הסטטי שלו הוא $H = 0.5 \text{ Volt/rpm}$. המתח שיוצר פוטנציומטר המשוב מיתוסף (בקוטביות הפוכה) למתח המתקבל מפוטנציומטר המבוא. אות המתח המתקבל מפוטנציומטר המבוא נמצא ביחס ישר למהירות הסיבוב הרצויה של ציר המנוע (ראו איור 6.31).

$$\text{הגבר פוטנציומטר המבוא הוא } G_p = 0.5 \frac{\text{Volt}}{\text{rpm}}, \text{ והגבר הבקר הוא } G_e = 1$$



איור 6.31 תרשים מלבנים של מערכת בקרת מהירות בחוג סגור

- המנוע מסתובב במהירות קבועה של 50 rpm. גורמים לשינוי מדרגה במהירות הרצויה בשיעור של $\Delta r = 20 \text{ rpm}$. העזרו בנוסחאות שבנספח 1 וחשבו את:
- המהירות הסיבובית החדשה של ציר המנוע לאחר זמן אין-סופי (כלומר, במצב המתמיד החדש).
 - השגיאה של המערכת במצב המתמיד החדש.
 - תדר התנודות המרוסנות בזמן המעבר. בכמה גדל תדר זה בהשוואה לביצועי המערכת בחוג הפתוח?
 - תגובת היתר בזמן המעבר.
 - קבוע הזמן של דעיכת התנודות ("זמן ההתייבשות").
 - רגע השיא הראשון וזמן המחזור של התנודות המרוסנות. סרטטו (בקירוב) את תגובת המערכת בזמן המעבר.

פתרון

א. את המהירות הסיבובית של ציר המנוע במצב המתמיד החדש נחשב באמצעות משוואה (6-31) בשינוי קל:

$$\Delta c = \frac{G \cdot G_p \Delta r}{1 + GH}$$

במשוואה זו, G_p היא התמסורת של פוטנציומטר המבוא (מדוע כופלים את משוואה (6-31) בגודל G_p ?) לאחר הצבת הגדלים $H = G_p = 0.5 \frac{\text{Volt}}{\text{rpm}}$ ו- $G = G_m \cdot G_c = 10 \text{ rpm/Volt}$ (שימו לב ליחידות!), מקבלים עבור $\Delta r = 20$:

$$\Delta c = \frac{10 \cdot 0.5 \cdot 20}{1 + 10 \cdot 0.5} = 16.67 \text{ rpm}$$

כלומר, שינוי מדרגה של 20 סיבובים לדקה באות הרצוי, גורם להגדלת מהירות הסיבוב של המנוע בשיעור של כ-17 סיבובים לדקה, והמהירות במצב המתמיד החדש היא כ-67 סיבובים לדקה.

ב. את שגיאת המערכת במצב המתמיד החדש נחשב באמצעות משוואה (6-32). נקבל:

$$e = \frac{\Delta r}{1 + GH} = \frac{20}{1 + 10 \cdot 0.5} = \frac{20}{6} = 3.33 \text{ rpm}$$

(שגיאה זו היא, כמובן, ההפרש בין Δr לבין Δc במצב המתמיד החדש).

ג. נחשב את מקדם הריסון האפקטיבי של המערכת בחוג הסגור. ממשוואה (6-39) נקבל:

$$\zeta^* = \frac{\zeta}{\sqrt{1 + GH}} = \frac{1.1}{\sqrt{1 + 10 \cdot 0.5}} = 0.45$$

התדר הטבעי של המערכת בחוג סגור (משוואה (6-38) הוא:

$$\omega_n^* = \omega_n \sqrt{1 + GH} = 0.1 \sqrt{1 + 10 \cdot 0.5} = 0.245 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

ולכן תדר התנודות המרוסנות הוא ω_d^*

$$\omega_d^* = \omega_n^* \sqrt{1 - \zeta^{*2}} = 0.245 \sqrt{1 - 0.45^2} = 0.22 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

לעומת זאת, אין תנודות בחוג הפתוח (!), כי מקדם הריסון של המנוע (המערכת בחוג הפתוח) גדול מיחידה.

ד. כדי לחשב את תגובת היתר נשתמש במשוואה (נ-4), הנתונה בנספח, ונציב בה את ערכו של מקדם הריסון האפקטיבי $\zeta^* = 0.45$:

$$M_0 = e^{-\pi \zeta^* / \sqrt{1 - \zeta^{*2}}} = e^{-\pi \cdot 0.45 / \sqrt{1 - 0.45^2}} \approx 0.28$$

הערך המקסימלי של מהירות הסיבוב בזמן המעבר הוא אפוא:

$$50 + 16.67 \cdot 1.28 = 71.3 \text{ rpm}$$

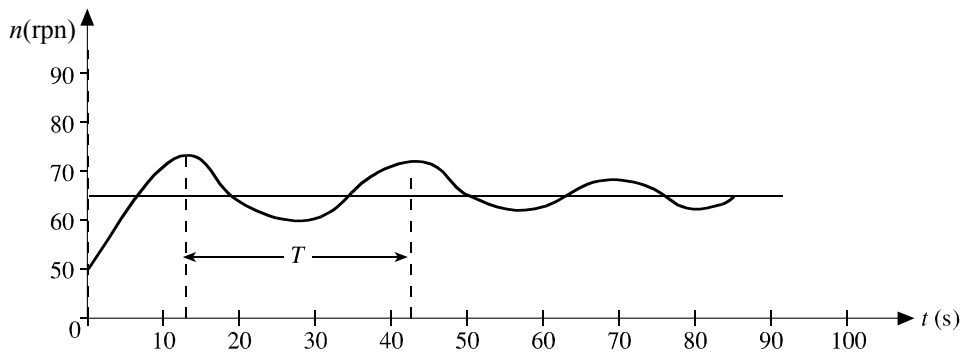
ה. את קבוע הזמן של דעיכת התנודות נקבל בעזרת משוואה (נ-6) המופיעה בנספח, לאחר הצבת הערכים האפקטיביים ζ^* , ω_n^* :

$$\tau_1 = \frac{3 - \ln \sqrt{1 - \zeta^{*2}}}{\zeta^* \omega_n^*} = \frac{3 - \ln \sqrt{1 - 0.45^2}}{0.45 \cdot 0.245} \approx 31 \text{ sec}$$

1. רגע השיא הראשון מתקבל ממשוואה (3-נ) שבנספח:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d^*} = \frac{\pi}{0.22} = 14 \text{ sec}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_d^*} \approx 28 \text{ s}$$



איור 6.32 איור לדוגמה 6.4

הגרף שבאיור 6.32 מתאר בקירוב את תגובת המעבר של המערכת.

הדוגמה האחרונה ממחישה את "המחיר" של בקרה בחוג סגור: המנוע עצמו הוא בעל תגובת מעבר עם ריסון יתר (כלומר, תגובה ללא תנודות), אבל הוספת המשוב גורמת לתגובת מעבר תנודתית. מאידך, ללא משוב, שינוי של $\Delta r = 20$ סיבובים לדקה באות המבוא, מגדיל את מהירות המנוע בשיעור ההגבר של המסלול הקדומני ($A_c = 100$ סיבובים לדקה!) במקרה זה ה"מחיר" הוא כדאי: תגובת היתר היא קטנה יחסית (25%), וגם מספר התנודות המרוסנות עד למצב קרוב למצב המתמיד הוא קטן יחסית (כ-2-3 תנודות).

בפרק הבא נראה כי גם על בעיית התנודות ניתן להתגבר על-ידי שימוש בבקר שיש לו תכונות שונות מבקר בעל הגבר סטטי קבוע.

שאלה 6.17

חזור על דוגמה 6.4 עבור הגבר סטטי של בקר $G_c = 100$ (ההגברים האחרים אינם משתנים). האם גם במצב זה ה"מחיר" של המשוב הוא כדאי? הסבירו.

6.4 סיכום

את התגובה הדינמית של מערכת מסדר שני הפועלת בחוג סגור ניתן לאפיין באמצעות שני פרמטרים הדומים לפרמטרים של תגובת המערכת בחוג הפתוח:

א. מקדם הריסון האפקטיבי ζ^*

ב. התדר הטבעי האפקטיבי ω_n^* .

את הפרמטרים האלה אפשר לחשב באמצעות מקדם הריסון והתדר הטבעי של המערכת בחוג הפתוח, ובאמצעות התמסורות הסטטיות של רכיבי המערכת. כמו במערכת מסדר שני בחוג פתוח, גם צורת התגובה של מערכת חוג סגור נקבעת על-ידי ערכו של מקדם הריסון האפקטיבי:

א. כאשר $\zeta^* > 1$, היא תגובה בעלת ריסון יתר, ללא תנודות.

ב. כאשר $\zeta^* < 1$, התגובה היא תנודתית ובעלת תת-ריסון.

ג. כאשר $\zeta^* = 1$, התגובה היא בעלת ריסון קריטי, ללא תנודות.

ד. כאשר $\zeta^* = 0$, התגובה התנודתית היא ללא ריסון.

* פעילות מחשב מס' 4

1. הפעילו את היישום "מערכות בקרה". בחרו במערכת "בקרת מפלס". פתחו את תרשים המלבנים של המערכת ששמרתם בפעילות מס' 2.

2. קבעו את הגברי הפוטנציומטר והחיישן ($G_1 = G_0 = 1$), והגדילו את ההגברים של המנוע, המשאבה והמכל לערכים המרביים בתחום המותר. קבעו את קבוע הזמן של המכל ל-1 דקה. בחרו בבקר הפועל בתצורה של "בקרה יחסית-אינטגרלית" (על משמעות מושג זה נעמוד בפרקים הבאים). קבעו את הגבר הבקר ל- $G_c = 10$, ואת קבוע הזמן של הבקר ל- $\tau = 0.1$ דקה. קבעו את המפלס ברגע $t = 0$, ל- $h_i = 0$. בבקרה "יחסית-אינטגרלית" המערכת פועלת כמערכת מסדר שני בחוג סגור.

3. הפעילו את מתג ההדמיה ביישום כדי לחשב את התגובה הדינמית של המערכת לאות מבוא של $r = 6$ m. מהו אות המוצא במצב המתמיד? מהי השגיאה של המערכת במצב המתמיד? שימו לב לצורת אות המוצא המתקבל. האם במצב זה המערכת פועלת כמערכת מסדר שני "תת מרוסנת" או עם "ריסון יתר"? הסבירו.

4. חשבו את ערך השגיאה של אות המוצא במצב המתמיד לכל תחום ההגבר של הבקר, כלומר, מ- $G_c = 0.2$ ועד $G_c = 1000$ (בקפיצות של פי 10). מהי הסטייה של אות המוצא מהערך הרצוי $h = 6$ m? **הערה:** ניתן להראות כי לכל הגבר G_c של הבקר, ערך השגיאה של מערכת בקרת המפלט במצב המתמיד שואף לאפס. לכן ההפרשים המתקבלים בהדמיה, הם תוצאה של שגיאות חישוביות הנוצרות בכל תהליך חישוב במחשב ספרתי.

5. הקטינו בהדרגה את הגבר הבקר פי שניים בכל פעם (כאשר כל יתר הגדלים במערכת אינם משתנים) מהערך ההתחלתי $G_c = 10$ עד לערך הסופי $G_c = 0.2$. לכל מקרה חשבו את התגובה הדינמית של המערכת לאות המדרגה. כיצד משתנה התגובה כתוצאה מהקטנת הגבר הבקר למחצית? מהו (בקירוב) הערך של G_c שבו המערכת עוברת ממצב של ריסון יתר למצב של תת ריסון? מהו הערך של מקדם הריסון ζ במצב גבולי זה? רשמו בכל מקרה גם את הזמן שבו המפלט נשאר בגבולות של $\pm 5\%$ מהמצב המתמיד, כלומר, בתחום שבין 5.7 מטר לבין 6.3 מטר (זהו זמן ההתייצבות. ראו משוואה (5-1) בנספח).

6. קבעו שוב את הגבר הבקר ל- $G_c = 10$. חזרו על סעיף 5 לעיל, אלא שהפעם הגדילו בהדרגה את קבוע הזמן של המכל מהערך ההתחלתי $\tau = 1$ דקה לערך הסופי $\tau = 20$ דקות. מהו (בקירוב) הערך של τ שבו המערכת עוברת ממצב של ריסון יתר למצב של תת ריסון. רשמו את זמן ההתייצבות המקורב (t_s) בכל מקרה.

7. ידוע כי מקדם הריסון ζ של מערכת בקרת המפלט נמצא ביחס ישר להגבר הבקר (G_c) וביחס הפוך ל**שורש הריבועי** של קבוע הזמן של המכל (τ). כדי לבדוק זאת, ערכו טבלה ורשמו בה את הערך של $(1/t_s)$ לכל ערך מתאים של G_c של הגבר. סרטטו גרף של הגודל $(1/t_s)$ כפונקציה של G_c . עד כמה קרוב הגרף שקיבלתם לקו ישר? הסבירו.

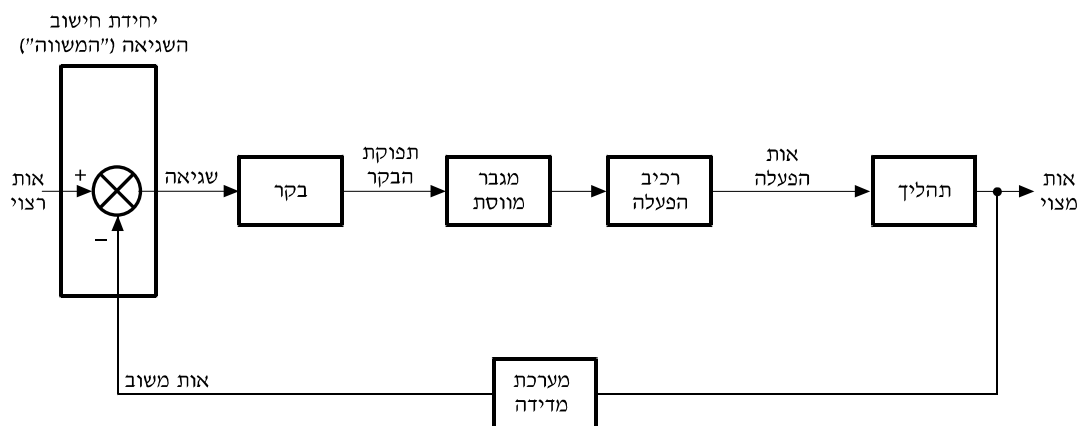
רמז: לפי משוואה (5-1) שבנספח, הגודל $(1/t_s)$ נמצא ביחס ישר בקירוב ל- ζ . לכן, על סמך האמור לעיל, הוא נמצא ביחס ישר גם ל- G_c . השתמשו בנתונים שקיבלתם בסעיף 6 לעיל, וסרטטו גרף של הגודל $(1/t_s)$ כפונקציה של הגודל $1/\sqrt{\tau}$. האם גם כאן הגרף שקיבלתם קרוב לקו ישר? הסבירו.

פרק 7

סוגי בקרים ושילובם במערכות בקרה

7.1 מבוא

בפרק 1 למדנו כי תפקידו העיקרי של הבקר הוא לקבוע או לווסת את ערכו של הערך הרצוי במערכת. במערכת בקרה בחוג סגור, תפקידו של הבקר לשמור שערכו של הגודל המבוקר לא יחרוג מן הגבולות שנקבעו מראש. אות המבוא לבקר נקבע על-ידי ההפרש בין האות הרצוי לבין האות המצוי של המשתנה המבוקר (השגיאה), ואילו האות המתקבל שווה ל"תפוקת" הבקר (איור 7.1).



איור 7.1 תרשים מלבנים של מערכת בקרה בחוג סגור הכוללת בקר, מגבר מווסת ורכיב הפעלה

הפעולות שמבצע הבקר ועל פיהן נקבעת תפוקתו דומות לפעולות שמבצעת יחידת עיבוד מרכזית במחשב (CPU): סדרה של "חישובים" המבוצעים על אות(ות) המבוא בהתאם ל"תוכנית" מוגדרת מראש. אופי התוכנית והחישובים נקבע על-ידי אופן המימוש של הבקר. למשל, בבקרים הממומשים על-ידי מעגלים אלקטרוניים **אנלוגיים**, (ולכן קרויים בקרים אנלוגיים), תוצאת ה"חישוב" היא אות אנלוגי.

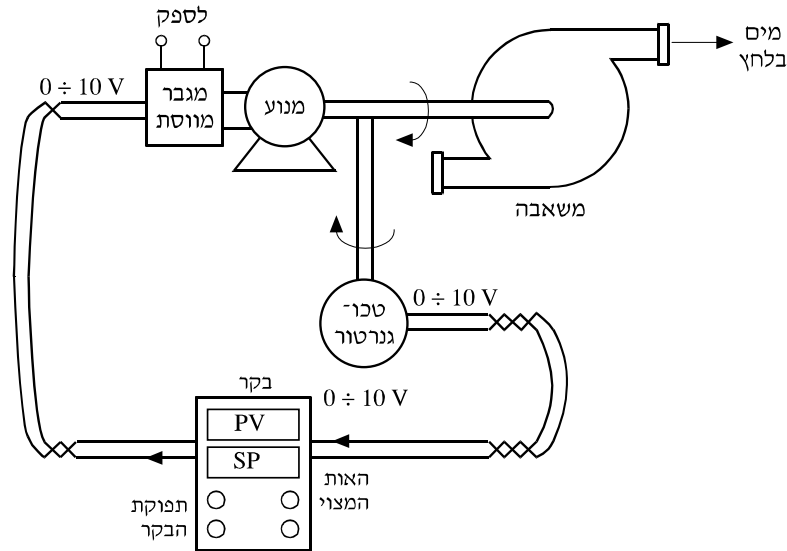
תפוקת הבקר היא אות חלש יחסית, ולכן אות זה מוגבר במגבר מווסת (איור 7.1). האות המתקבל מהמגבר קובע את מצבו של רכיב ההפעלה, הנקרא גם רכיב הבקרה הסופי. באמצעות שינויים של אות ההפעלה, גורם אפוא הבקר לשינויים באות המצוי ולשמירתו בתחום הרצוי. היות שלצורך הפעולות שמבצעים בקרים אלקטרוניים לא נדרש הספק חשמלי גבוה, קיימת בדרך כלל הפרדה בין חלקי המערכת שהם צרכני אנרגיה "כבדים", כמו רכיבי ההפעלה והתהליך (הרכיב המבוקר) לבין רכיבי המערכת שצורכים רק אנרגיה מעטה. רכיבים אלה הם הבקר, החיישנים והמתמרים.

תוצאת החישוב – תפוקת הבקר – שולטת במצבו של רכיב הבקרה הסופי, דרך המגבר המווסת. בהתאם למצב זה נקבע גודלו של המשתנה הפיסיקלי (אות ההפעלה), אשר משפיע על התיקון הנדרש של האות המצוי (המשתנה המבוקר).

לדוגמה, באיור 7.2 מתוארת מערכת לבקרת לחץ המים המסופקים ליישוב באמצעות משאבה צנטריפוגלית. במערכת זו, לחץ המים במוצא המשאבה הוא האות המבוקר. שינוי בצריכת המים על-ידי התושבים משפיע על הלחץ, ולכן מהווה הפרעה לפעולת המערכת. ניתן לשמור על לחץ מים בגבולות נתונים על-ידי שינוי מהירות הסיבוב של המנוע המפעיל את המשאבה. מהירות הסיבוב של המנוע נמדדת על-ידי טכונגרטור, המתמיר את המהירות הסיבובית למתח. מתח משוב זה נמסר לבקר ומושווה לערך הרצוי. הבקר מפיק במוצאו מתח בהתאם להפרש שבין המתח הרצוי למתח המצוי (השגיאה). מתח המוצא של הבקר מוגבר על-ידי מגבר המחובר למנוע.

המשאבה, המנוע והמגבר המווסת שייכים לחלק "הכבד" של המערכת, הצורך את מרבית האנרגיה החשמלית המסופקת למערכת. חלקי המערכת האחרים הקשורים לחוג הבקרה כוללים את הבקר ואת הטכונגרטור, והם פועלים במתחים נמוכים יחסית.

בתעשייה מקובל להשתמש באותות תקניים (סטנדרטיים) של מתח (או של זרם) בחוגי הבקרה, בתחום שבין 0 ל-10 וולט. במקרה זה יש לבחור טכונגרטור המפיק מתח של 0-10 וולט בכל תחום המדידה, ובקר שתפוקתו מוגבלת גם היא לתחום מתחים זה. בבקר המתואר באיור 7.2 מופיעות תצוגות ספרתיות של הערך הרצוי – SP (set point) ושל הערך המצוי – PV (process variable). תפוקת הבקר תלויה בערך השגיאה $e = SP - PV$, ונקבעת, כאמור, על-פי "תוכנית" מוכנה מראש.



איור 7.2 מערכת בחוג סגור לבקרת מהירות הסיבוב של משאבה

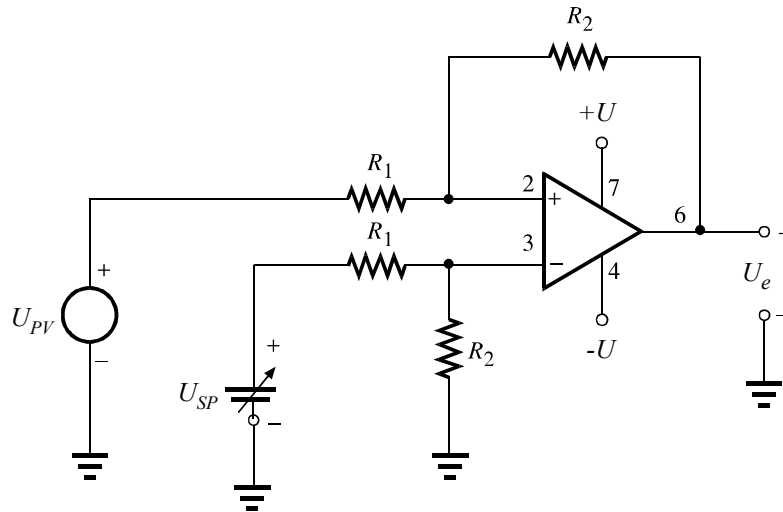
- בפרק זה נעסוק בבקרים אנלוגיים, המתחלקים לשני סוגים, על-פי צורת תפוקתם:
- א. בקרים שתפוקתם היא בעלת שני ערכים בלבד. הם נקראים בקרים דו-מצביים.
 - ב. בקרים בעלי תפוקה רציפה.

התפוקה של בקר רציף משתנה באופן רציף בין הערך המזערי לערך המרבי (למשל, מאפס עד 10 V). בהמשך נראה כי האופן שבו הבקר הרציף משנה את תפוקתו בתלות בשגיאה, קובע את **תצורת הפעולה** של מערכת הבקרה בכלל, ואת **סדר** המערכת (מערכת מסדר ראשון, שני, ואף גבוה יותר) בפרט. תחילה נתאר את הרכיב המשותף לשני סוגי הבקרים – הרכיב **המשווה** (comparator, ראו איור 7.1).

7.2 המשווה ויצירת אות השגיאה

כל בקר כולל בתוכו יחידת מבוא הנקראת **משווה**. בפרק 1 למדנו כי תפקיד **המשווה** במערכת בקרה הוא ליצור אות מתח שהוא ההפרש בין אות המתח הרצוי לבין אות המתח המצוי (השגיאה). השגיאה היא חיובית כאשר הערך הרצוי (SP) גבוה מהערך המצוי (PV), ושלילית

במצב ההפוך. קיימות כמה דרכים שבהן ניתן ליצור אות חשמלי שנמצא ביחס ישר להפרש בין שני מתחים. בהמשך נתאר משוואה המבוססת על פעולת מגבר הפרש (Difference Amplifier) (איור 7.3).



איור 7.3 מימוש של משוואה באמצעות מגבר הפרש

נחשב את מתח המוצא U_e של מגבר הפרשים (איור 7.3). נניח כי המגבר הוא אידיאלי (עכבת המבוא אין-סופית), וכי המתחים במבוא הלא-מהפך (נקודה 2) ובמבוא המהפך (נקודה 3) שווים.

מחוק הזרמים למבוא הלא-המהפך נקבל:

$$\frac{U_{PV} - U_2}{R_1} = \frac{U_2 - U_e}{R_2}$$

ומכלל מחלק המתח למבוא המהפך נקבל:

$$U_3 = \frac{U_{SP}}{(R_1 + R_2)} \cdot R_2$$

מאחר שהנחנו כי $U_2 = U_3$, ניתן לחלץ משתי משוואות אלו את U_e :

$$U_e = U_{out} = \frac{R_2}{R_1} (U_{SP} - U_{PV})$$

אם משתמשים בנגדים המקיימים $R_1 = R_2 = R$, מקבלים מתח ללא הגברה: $U_{out} = U_{SP} - U_{PV}$.

7.1 דוגמה

נניח כי במערכת לבקרת הטמפרטורה במכל מים (דוגמה 1.6), תחום השינוי של האות הרצוי ותחום העבודה של חיישן הטמפרטורה הוא בין 0°C ל- 100°C . מתמר הטמפרטורה מייצר מתח בין 0 V ל- 10 V עבור תחום המדידה המלא. הערך הרצוי של הטמפרטורה נקבע ל- 65°C , והטמפרטורה בפועל היא 78°C . חשבו את מתח השגיאה U_{out} שיוצר המשווה אם גם למקור המתח הרצוי, תחום שבין 0 V ובין 10 V .

פתרון

$$U_{SP} = \left(\frac{10\text{ V}}{100^{\circ}} \right) \cdot 65^{\circ} = 6.5\text{ V}$$

$$U_{PV} = \left(\frac{10\text{ V}}{100^{\circ}} \right) \cdot 78^{\circ} = 7.8\text{ V}$$

לכן, מתח השגיאה הוא: $U_{out} = U_{SP} - U_{PV} = 6.5 - 7.8 = -1.3\text{ V}$.

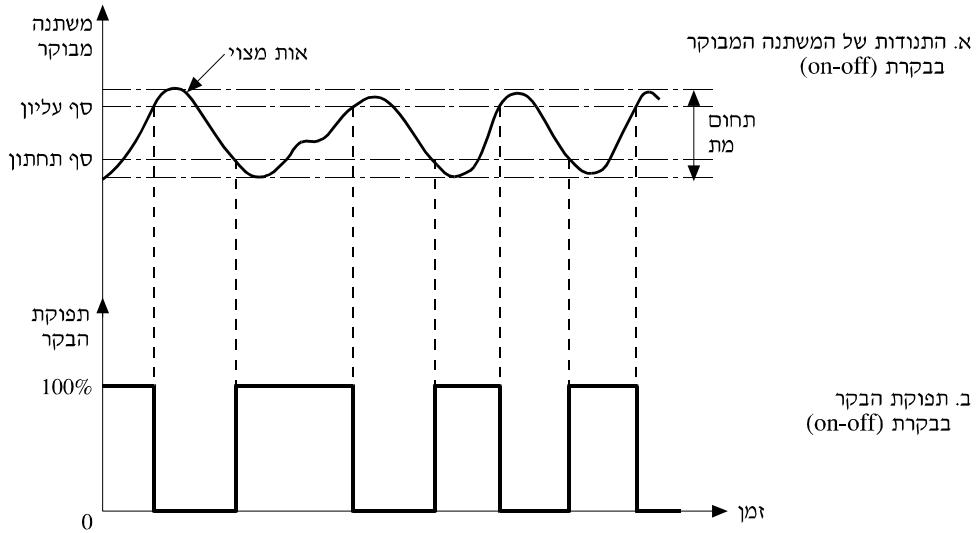
7.3 בקרה דו-מצבית

הבקר הדו-מצבי הוא הפשוט ביותר במערכות בקרה. התפוקה של בקר זה היא בעלת שני ערכים בלבד. אף כי עקרונית אפשריים כל שני ערכים שהם, נהוג להתייחס לשני מצבים: מצב שבו ערך התפוקה הוא מזערי ומצב שבו ערך התפוקה הוא מרבי. היות שתפוקת הבקר היא אות המבוא לרכיב ההפעלה של המערכת, הרי גם רכיב זה יימצא בשני מצבים בלבד. לדוגמה, התרמוסטט (הבקר) בדוד חשמלי ביתי הוא בקר דו-מצבי המחבר את גוף החימום לרשת ומפעיל אותו (בתפוקה של 100%) או מנתק אותו.

מערכת בקרה שבה משולב בקר דו-מצבי נקראת מערכת **בקרה דו-מצבית**. מערכת כזאת היא, למשל, מערכת החימום שתיארנו בפרק 1 (מערכת התרמוסטט, איור 1.20). ראינו כי הטמפרטורה של סביבת גוף החימום במערכת זו (האות המבוקר) נעה באופן מחזורי בין ערך מזערי לערך מרבי (איור 1.22). המחזוריות בשינוי הטמפרטורה נגרמת כתוצאה מכך שהבקר (שהוא התקן הדו-מתכת במערכת זו) מפעיל או מנתק את גוף החימום על-פי שני מצבי סף: כאשר הטמפרטורה עולה מעל לערך מסוים (הסף העליון) התקן הדו-מתכת פותח את המעגל החשמלי (תפוקת הבקר יורדת לאפס), וכאשר הטמפרטורה יורדת אל מתחת לערך מסוים (הסף התחתון) תפוקת הבקר גדלה ל-100% (התקן הדו-מתכת סוגר את המעגל החשמלי, איור 7.4). (מעשית, מצבי הסף לפעולת הבקר במערכת זו נקבעים על-פי מצב הבורג יחסית לדו-מתכת – ככל שהבורג גורם לכיפוף ראשוני גדול יותר של הדו-מתכת כך מצבי הסף קרובים יותר זה לזה, ראו איור 1.21).

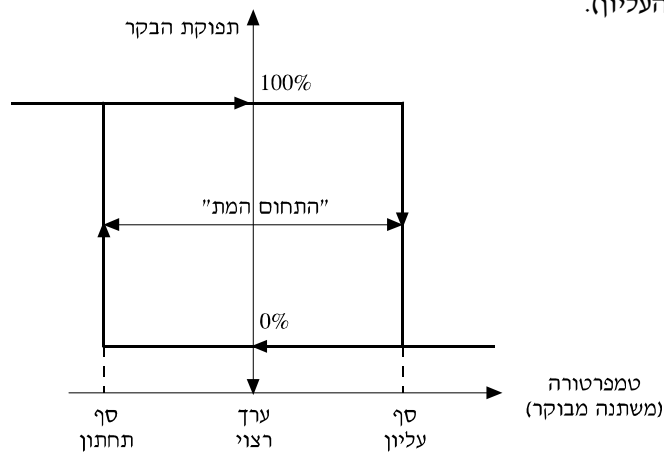
התחום בין הערך המזערי והערך המרבי שבו מתנוודד האות המבוקר (הטמפרטורה בסביבת גוף החימום במערכת התרמוסטט) נקרא ה"תחום המת" של המערכת (system deadband, איור 7.4). הסף העליון והסף התחתון הם ערכי הטמפרטורה ברגעים שבהם הבקר מפסיק (או מתחיל) את פעולת גוף החימום.

מאיור 7.4 אנו למדים כי האות המבוקר (הטמפרטורה) אינו משתנה מיד לאחר שינוי תפוקת הבקר: קיים פרק זמן מסוים שבו הטמפרטורה ממשיכה לעלות גם לאחר הפסקת פעולת גוף החימום, ולהפך – הטמפרטורה יורדת במשך זמן מסוים גם לאחר הפעלת גוף החימום. הסיבה לפיגור זה מקורה בתכונת ה**חשל** של הבקר (הדו-מתכת) שעליה למדנו בפרק שעסק במכשירי מדידה והתמרה (ראו סעיף 3.5.1). כמו כל התקן התמרה, גם התקן הדו-מתכת "מתנגד" לשינוי במצבו. "התנגדות" זו גורמת לכך שתגובתו "מאחרת": היא מתרחשת פרק זמן מסוים לאחר שהטמפרטורה עוברת את הסף העליון הרצוי, ופרק זמן מסוים (שונה בדרך כלל) אחרי שהטמפרטורה יורדת מתחת לסף התחתון הרצוי. גם רכיבים אחרים במערכת יכולים להשפיע על רוחב התחום המת. למשל, במערכת התרמוסטט, גוף החימום הוא בעל קיבול חום מסוים המשפיע אף הוא על רוחב התחום המת. במערכות בקרה דו-מצביות רבות מקנים לבקר תכונת חשל מלאכותית, כדי שרוחב התחום המת לא יהיה קטן מדי. ואמנם, ככל שרוחב התחום המת קטן יותר, כך תדר הפעולה של המפעיל גדול יותר (המפעיל "נכבה" ו"נדלק" בתדר גבוה יותר). הגדלת התחום המת מקטינה אפוא את קצב השינויים בפעולת המפעיל, ומפחיתה את הסיכוי שיתקלקל.



איור 7.4 המשתנה המבוקר ותפוקת הבקר בבקרה דו מצבית
 א. התנודות של המשתנה המבוקר בבקרה דו-מצבית
 ב. תפוקת הבקר בבקרה דו-מצבית

מעשית, קביעת רוחב התחום המת נעשית על-ידי קביעת סף תחתון לאות המבוא לבקר שעבורו התפוקה גדלה מאפס למאה אחוז, וקביעת סף עליון שונה לאות המבוא שעבורו תפוקת הבקר קטנה ממאה אחוז לאפס. איור 7.5 מתאר את התחום המת באמצעות "עקומת החשל" של הבקר. עקומה זו מתארת מחזור פעולה מלא של הבקר. כיווני החיצים בתרשים מצביעים על תצורת העבודה של הבקר (בדוגמה זו, מעבר מתפוקה אפס לתפוקה של 100% כאשר הטמפרטורה מגיעה לסף התחתון, ומעבר מתפוקה של 100% לתפוקה 0 כאשר הטמפרטורה מגיעה לסף העליון).

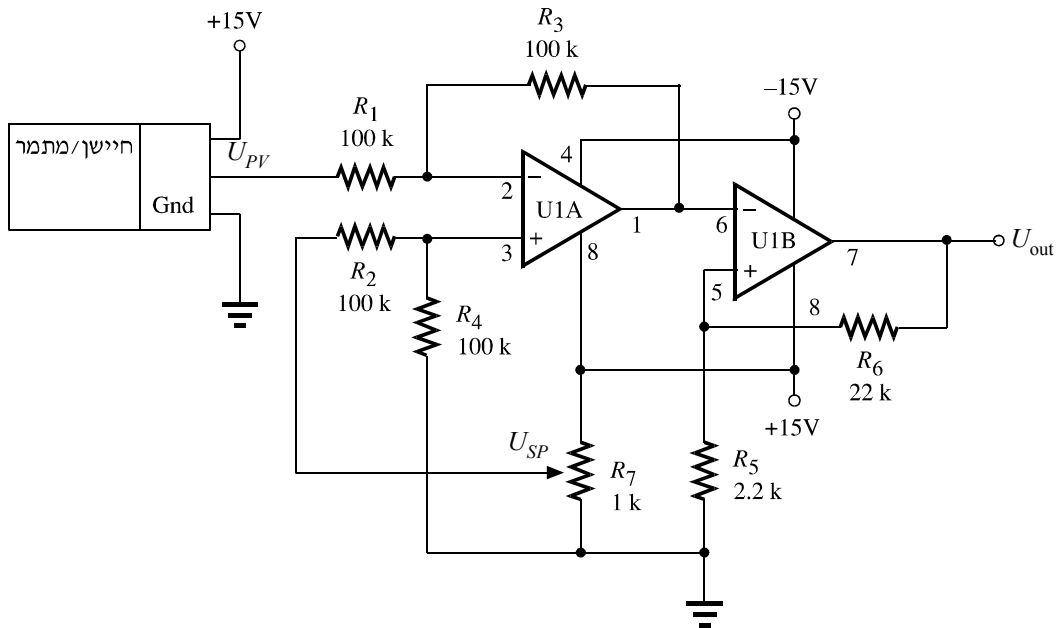


איור 7.5 עקומת החשל (היסטואיס) של בקר דו-מצבית

רוחב התחום המת של המערכת שווה לרוחב עקומת החשל של בקר דו-מצבי אם תגובת הרכיבים האחרים במערכת היא מהירה בהשוואה לתגובת הבקר. בבקרים דו-מצביים תעשייתיים יש אפוא חשיבות רבה לאפשרות לווסת את עקומת החשל של הבקר.

בקר דו-מצבי שבו ניתן לווסת את רוחב עקומת החשל, אפשר לממש באמצעות מגברי שרת, כגון מעגל משווה עם חשל (Schmitt Trigger) (איור 7.6). אמנם מעגל כזה אינו מאפשר להשיג דיוק גבוה, והוא מתאים בדרך כלל רק לתהליכים איטיים, כגון תהליכי חימום או בקרת מפלס, אולם בשל פשטותו ומחירו הזול הוא נפוץ במערכות בקרה רבות.

במעגל המתואר באיור 7.6 מתפקד מגבר השרת הראשון (U1A) כמגבר הפרש, ויוצר אות מתח שהוא ההפרש בין אות המתח המתקבל מהחיישן (U_{PV}) לבין אות המתח הרצוי U_{SP} (אות השגיאה). מגבר השרת השני (U1B) פועל כבקר דו-מצבי בעל חשל. מתח המוצא U_{out} ממגבר זה הוא בעל שני ערכים בלבד: מתח הרוויה החיובי, ומתח הרוויה השלילי. רוחב התחום המת נקבע על-ידי ערכם של נגדי המשוב R_5 ו- R_6 .



איור 7.6 מימוש בקר דו-מצבי באמצעות מגבר שרת (U1B) הפועל בתחום הרוויה

7.1 שאלה

הוכיחו כי רוחב התחום המת בבקר המתואר באיור 7.6 נתון על-ידי :

$$\text{רוחב תחום מת} = 2U_{\text{sat}} \frac{R_5}{(R_5 + R_6)}$$

כאשר U_{sat} הוא מתח הרוויה של המגבר U1B.

הערה : הניחו כי מתח הרוויה החיובי זהה למתח הרוויה השלילי.

את רוחב התחום המת הנתון כאן בוולטים, ניתן להמיר ליחידות המידה המתאימות של הגודל הפיסיקלי המבוקר (למשל °C), אם ידועים נתוני המתמר היוצר את אות המבוא (U_{PV}) למגבר ההפרש U1A.

7.2 דוגמה

במערכת בקרה דו-מצבית לבקרת טמפרטורה בחוג סגור, קובעים את הערך הרצוי ל-80°C. רוחב התחום המת הרצוי הוא 6°C. ידוע שכאשר הבקר במצב ON, הטמפרטורה עולה בקצב של $4 \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{min}}$, וכאשר הבקר במצב OFF, הטמפרטורה יורדת בקצב של $1 \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{min}}$.

מניחים שהטמפרטורה משתנה באופן ליניארי בתלות בזמן, וכי רוחב התחום המת נקבע על-פי עקומת החשל של הבקר.

א. סרטטו גרף של שינוי הטמפרטורה כפונקציה של הזמן.

ב. תארו את אות המוצא של הבקר בתלות בזמן.

ג. תארו את עקומת החשל של הבקר.

ד. מהו יחס המיתוג?

פתרון

א. ערכו של התחום המת הוא 6°C, ולכן הטמפרטורה נעה בתחום שבין 77°C ל-83°C. קצב החימום הוא $4 \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{min}}$, ולכן זמן החימום t_1 הדרוש להעלאת הטמפרטורה ב-6°C הוא :

$$t_1 = \frac{6}{4} = 1.5 \text{ min}$$

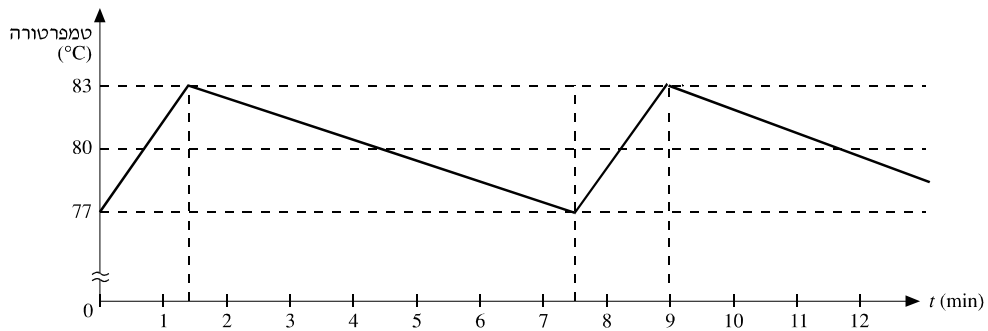
קצב הקירור הוא $1 \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{min}}$, ולכן זמן הקירור t_2 הדרוש להורדת הטמפרטורה ב- 6°C הוא:

$$t_2 = \frac{6}{1} = 6 \text{ min}$$

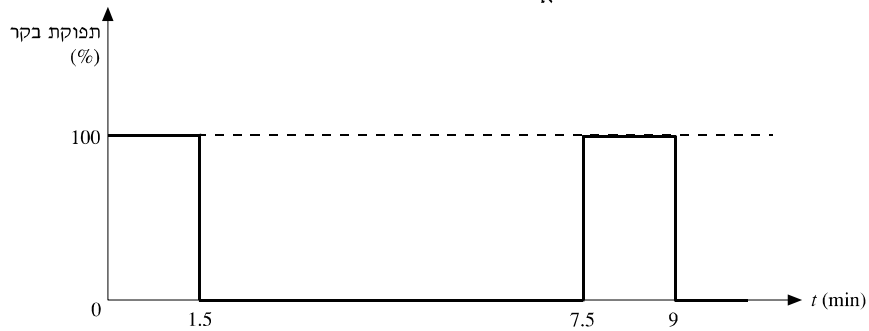
זמן המחזור של שינויי הטמפרטורה T הוא אפוא:

$$T = t_1 + t_2 = 1.5 + 6 = 7.5 \text{ min}$$

הגרף של שינויי הטמפרטורה בתלות בזמן נתון באיור 7.7א.



א

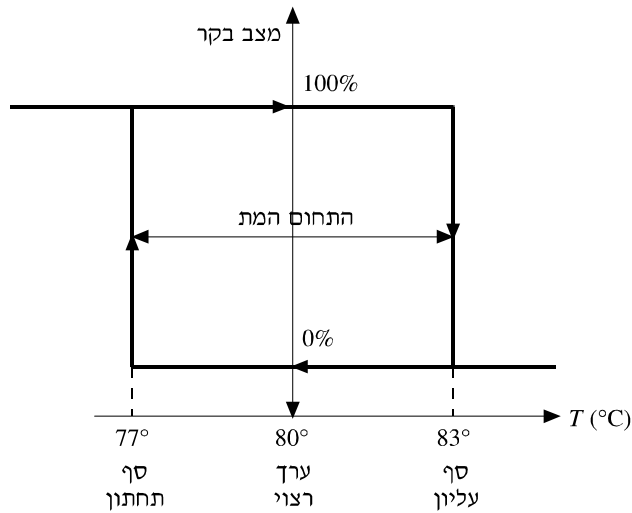


ב

איור 7.7 איור לדוגמה 7.2

ב. תפוקת הבקר מתוארת באיור 7.7ב.

ג. עקומת החשל של הבקר מתוארת באיור 7.8.



איור 7.8 עקומת החשל לדוגמה 7.2

יחס המיתוג (או גורם המחזור, $D.C = \text{duty cycle}$) מוגדר כיחס בין הזמן שבו תפוקת הבקר היא 100% (הזמן t_1) לזמן המחזור T . לפיכך, יחס המיתוג בדוגמה זו הוא:

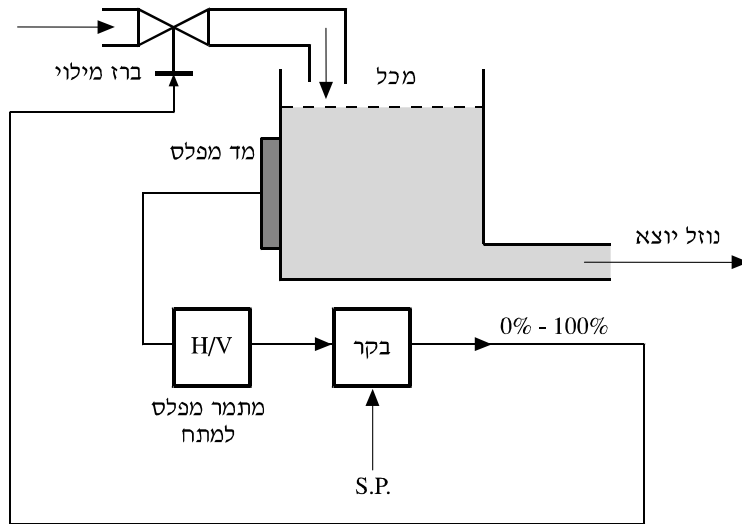
$$D.C. = \frac{t_1}{T} 100\% = \frac{1.5}{7.5} 100\% = 20\%$$

שאלה 7.2

מערכת בקרה לוויסות מפלס המים במכל מתוארת באיור 7.9.

מד המפלס ממיר את שינוי גובה המים בתחום שבין 2 m ל-3 m לשינויי מתח חשמלי בתחום (0-10) V באופן ליניארי. הבקר סוגר את ברז המילוי במתח של 8 V, ופותח אותו במתח של 6 V.

סרטטו את עקומת החשל של הבקר. מהו במקרה זה המפלס הרצוי?



איור 7.9 איור לשאלה 7.2

7.4 בקרה רציפה

החיסרון הבולט של בקר דו-מצבי טמון בכך שאי-אפשר להימנע מתנודות באות המוצא. מערכות שבהן תדר התנודות "הטבעי" (התלוי בדרך כלל ברכיב או בתהליך המבוקר) הוא קטן יחסית, או שלא דרושה בהן שגיאה אפס מתאימות לסוג בקרה זו. למשל, במערכת לבקרת טמפרטורה הכוללת גוף חימום חשמלי, השפעת גוף החימום על טמפרטורת האוויר היא איטית, היות שנדרש פרק זמן ארוך יחסית לחימום המערכת. במקרה זה, בקרה דו-מצבית היא יעילה, נוחה ואף זולה יחסית. לעומת זאת, כאשר מדובר, למשל, בבקרת התנודה של מעלית בבניין רב קומות, ברור שלא ייתכן מצב שבו המעלית נעה בצורה מחזורית סביב המצב הרצוי. כאן על הבקר לעצור את מנוע המעלית **בדיק** ברגע שהמעלית מגיעה למצב הרצוי. בתצורת **בקרה רציפה**, תפוקת הבקר גורמת להאצה (או להאטה) של תנועת המעלית בהתאם למרחקה מהמצב הרצוי – ככל שקטן המרחק בין המעלית למצב הרצוי, כך יורדת תפוקת הבקר, ומהירות המעלית קטנה. במצב הרצוי, מהירות המעלית מתאפסת. בתצורת בקרה רציפה ניתן אפוא להקטין את תדר התנודות של אות המוצא, ואף להקטין את השגיאה; וכפי שנראה, אף לקבל שגיאה אפס באות המוצא. קיימות כמה שיטות למימוש בקרים בשיטת

הבקרה הרציפה – בהתאם לתלות התפוקה של הבקר בערך השגיאה הרגעי הנקבע על-ידי המשווה. השיטות הנפוצות ביותר הן **בקרה יחסית** (פרופורציונית), **בקרה אינטגרלית**, **בקרת נגזרת**, ו**שילוב** של שתיים או שלוש מהשיטות הללו. בהמשך נתאר בקצרה את המבנה העקרוני של הבקרים הפועלים בתצורות אלו, ואת היתרונות והחסרונות של כל שיטה.

7.4.1 בקרה יחסית (P-Proportional)

ראינו כי בבקרה דו-מצבית, תפוקת הבקר היא או תפוקה מלאה (100%) או תפוקה אפס (0%). לעומת זאת, התפוקה של בקר פרופורציוני נמצאת ביחס ישר לגודל השגיאה המתקבלת מהמשווה. במערכת כזאת, עוצמת האות המועבר מהבקר לרכיב ההפעלה תלויה אפוא בסטייה של האות המצוי מן האות הרצוי (גודל השגיאה).

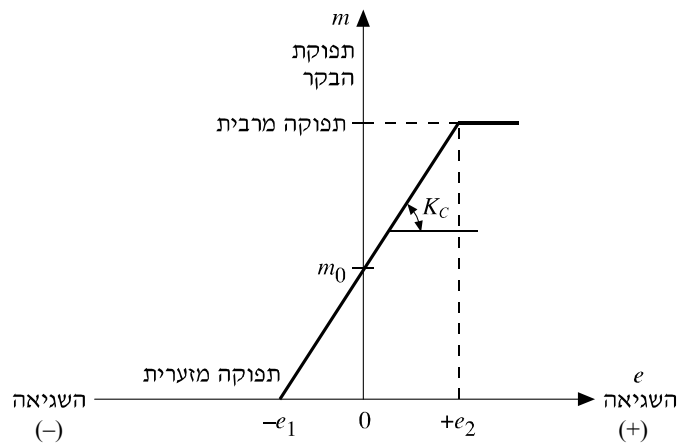
נסמן ב- $m(t)$ את תפוקת הבקר בכל רגע נתון t , (בוולט). התלות של $m(t)$ בשגיאה **הרגעית** $e(t)$ נתונה על-ידי:

$$(7-1) \quad m(t) = K_c \cdot e(t) + m_0$$

כאשר:

K_c הוא הגבר הבקר (קבוע הפרופורציה) שהוא גודל חסר ממדים ו- m_0 הוא תפוקת הבקר בשגיאה אפס (או מתח ההסט בוולטים). זהו גודל קבוע שאינו תלוי בגודל השגיאה.

אופיין הבקר (איור 7.10) מתאר את התלות של תפוקת הבקר הפרופורציוני בגודל השגיאה.



איור 7.10 אופיין של בקר פרופורציוני

מהאופייין אנו למדים כי כאשר ההגבר K_c שואף לאין-סוף (שיפוע האופייין שואף ל- 90°), הבקר הפרופורציוני מתנהג כבקר ON-OFF. עוד אנו למדים כי כאשר השגיאה הרגעית $e(t)$ היא אפס, תפוקת הבקר היא m_0 . בשגיאה השלילית המרבית ($-e_1$) תפוקת הבקר יורדת לאפס, ואילו בשגיאה החיובית המרבית ($+e_2$) תפוקת הבקר מגיעה לערכה המרבי. בתחום שבין $-e_1$ ל- $+e_2$ תגובת הבקר מתוארת על-ידי קו ישר, כלומר, התפוקה נמצאת ביחס ישר לגודל השגיאה.

לערך התפוקה בשגיאה אפס (m_0) יש חשיבות רבה כאשר הבקר הפרופורציוני פועל **במצב מתמיד** בחוג סגור. במצב זה נהוג לקבוע את m_0 ל-50% מהתפוקה המרבית של הבקר. כל שינוי בשגיאה $e(t)$ גורם אז להגדלה או הקטנה של התפוקה, בהתאם לסימן השגיאה ולגודלה. כפי שנראה בהמשך, חסרונו של הבקר הפרופורציוני טמון בכך שערכו של m_0 תלוי בערך האות הרצוי (או כל אות מבוא אחר למערכת): כל שינוי של אותות המבוא למערכת מצריך שינוי של התפוקה בשגיאה אפס.

ראינו כי את השגיאה $e(t)$ נהוג לבטא באחוזים מתחום המדידה בתהליך המבוקר:

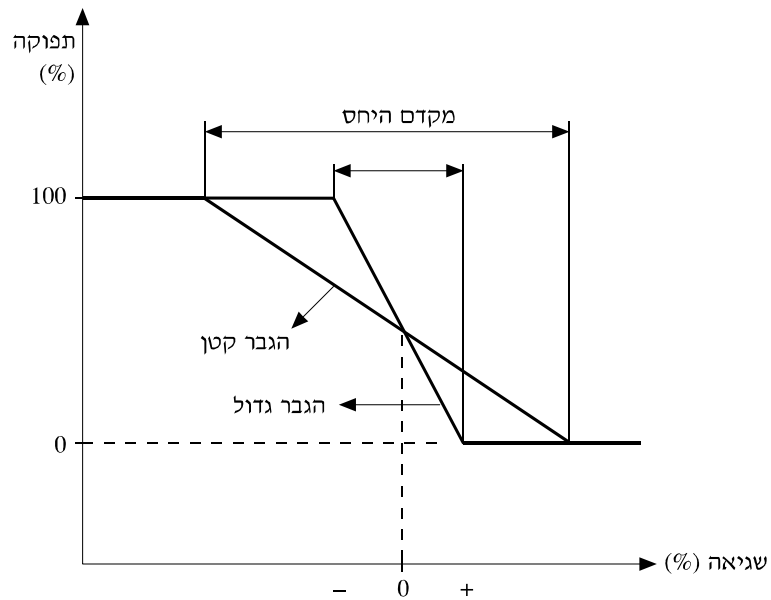
$$\text{שגיאה באחוזים} = \frac{(\text{ערך מצוי} - \text{ערך רצוי})}{(\text{ערך מזערי של אות מבוקר} - \text{ערך מרבי של אות מבוקר})} \cdot 100\%$$

גם את תפוקת הבקר נהוג לבטא באחוזים מתחום הערכים המרבי:

$$\text{תפוקת הבקר באחוזים} = \frac{(\text{תפוקה מזערית} - \text{תפוקה בפועל})}{(\text{תפוקה מזערית} - \text{תפוקה מרבית})} \cdot 100\%$$

הגבר הבקר K_c קובע את השיפוע של אופייין הבקר: הגבר גדול יותר גורם לשיפוע גדול יותר. כאשר אופייין הבקר מתאר את תלות התפוקה (באחוזים) בשגיאה הנתונה גם היא באחוזים (איור 7.11), השיפוע של האופייין נתון על-ידי היחס בין התפוקה המרבית (100%) לבין תחום השגיאה האפשרי (באחוזים). תחום השינוי של השגיאה הדרוש להעביר את התפוקה מ-0% ל-100% נקרא **מקדם היחס** (PB – Proportional Band) של הבקר. מקדם היחס מוגדר אפוא על-ידי:

$$(7-2) \quad PB = \frac{100}{K_C}$$



איור 7.11 אופיין של בקרים פרופורציוניים בעלי הגבר קטן והגבר גדול (יחסית)

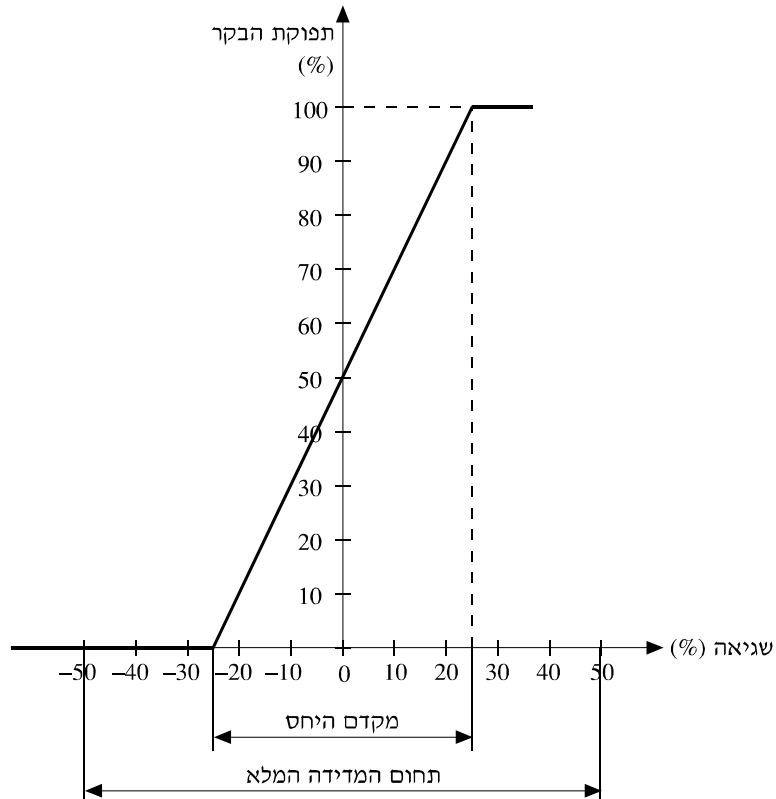
7.3 דוגמה

סרטטו אופיין של בקר פרופורציוני בעל הגבר של $K_c = 2$, כאשר התפוקה בשגיאה אפס היא $m_0 = 50\%$.

פתרון

$$PB = \frac{100}{K_C} = 50 \text{ : (7-2)}$$

מכאן שכאשר השגיאה משתנה בתחום של $50\% (\pm 25\%)$ מתחום המדידה המלא, תפוקת הבקר משתנה בין 0% ל- 100% (איור 7.12).



איור 7.12 איור לדוגמה 7.3

שאלה 7.3

נתון בקר פרופורציוני בעל $K_c = 2.5$. ידוע שתפוקת הבקר היא 65% בשגיאה אפס. חשבו את מקדם היחס (PB) של הבקר, וסרטטו את אופיין הבקר.

שאלה 7.4

נתונה מערכת לבקרת טמפרטורה בתנור, הפועלת בתחום 500°C - 900°C . מקדם היחס של הבקר הפרופורציוני הוא 20%. בתנאים הנקובים (ללא שגיאה), הטמפרטורה בתנור היא 700°C ותפוקת הבקר היא 50%. עקב העמסת המערכת יורדת הטמפרטורה ל- 690°C .

חשבו את:

- א. שגיאת המערכת באחוזים;
- ב. תפוקת הבקר החדשה.

לעתים קרובות מעוניינים לתאר באופן גרפי את תפוקת הבקר בערכים מוחלטים (וולטים), למשל). במקרה זה יש לדעת את תחום העבודה המלא של הבקר, וגם את תחום השגיאה המוחלטת. נבחר זאת בדוגמה הבאה.

דוגמה 7.4

נתון כי תחום השינוי של השגיאה המוחלטת וגם תחום השינוי של תפוקת הבקר המוחלטת הוא 0 עד 10 וולט. הגבר הבקר הוא $K_c = 5$, ונתון כי $m_0 = 50\%$. סרטטו גרף של תפוקת הבקר (בוולטים) כפונקציה של השגיאה (בוולטים).

פתרון

$$. m_0 = \frac{50\%}{100\%} \cdot 10 \text{ V} = 5 \text{ V}$$

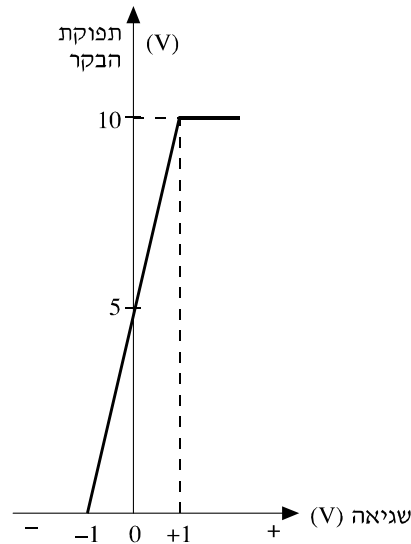
תפוקת הבקר המוחלטת בשגיאה אפס היא 5 V

$$. PB = \frac{100}{5} = 20$$

מקדם היחס הוא 20

לכן, שינוי של 20% בשגיאה, השקול לשינוי מוחלט של $2 \text{ V} = \frac{20}{100} \cdot 10 \text{ V}$, גורם לשינוי תפוקה של 100% (10 V).

איור 7.13 מתאר את אופיין הבקר בערכים מוחלטים של המתח.



איור 7.13 איור לדוגמה 7.4

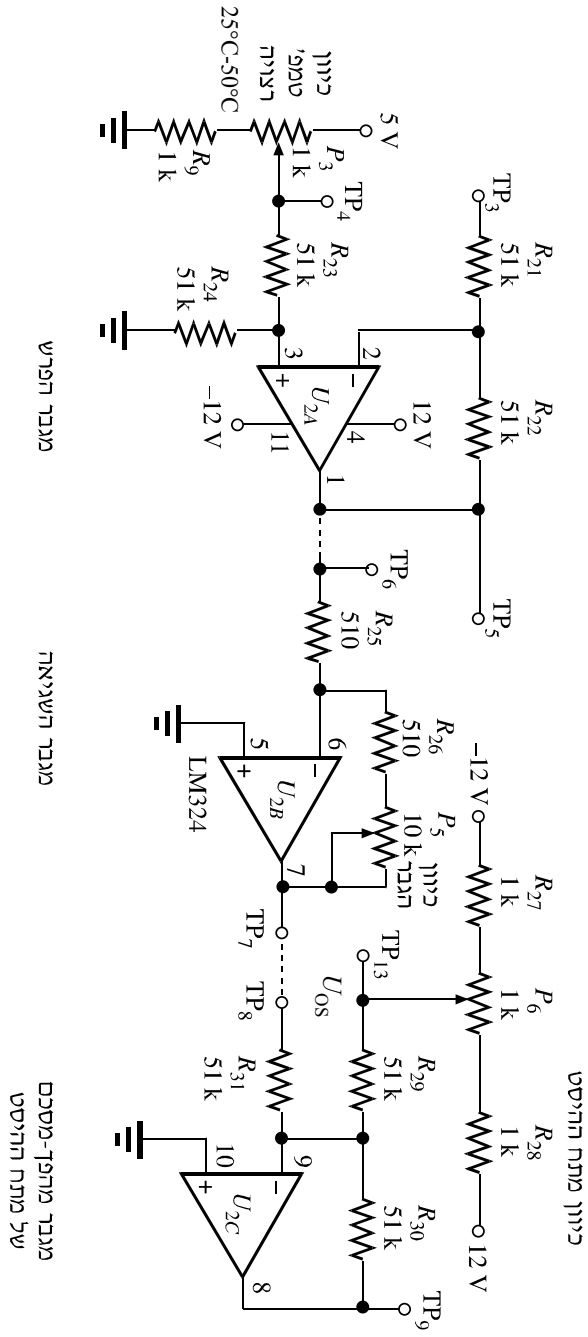
גם בקרים פרופורציוניים ניתן לממש באמצעות מעגלים אלקטרוניים המבוססים על מגברי שרת. במיוחד ניתן להשתמש במגבר מסכם כדי לממש בקר פרופורציוני. אולם שלא כמו בקר דו-מצבי, הפועל בין שני מצבי הרוויה של המגבר, אות המוצא של מגבר מסכם לעולם אינו נמצא בתחום הרוויה.

באיור 7.14 מתוארת דוגמה למעגל אלקטרוני המממש בקר פרופורציוני וכולל מגבר-מסכם כזה.

המגבר הראשון במעגל זה (U_{2A}) הוא **מגבר הפרש** היוצר את השגיאה (U_{error}) בנקודה TP_6 . המגבר U_{2B} הוא מגבר שגיאה שמתח המוצא שלו (המתח בנקודה TP_7) נתון על-ידי:

$$(7-4) \quad U_{TP_7} = -\frac{R_f}{R_{25}} \cdot U_{error}$$

כאן R_f הוא סכום ההתנגדויות של הפוטנציומטר P_5 וההתנגדות הקבועה R_{26} .



איור 7.14 מימוש בקר פרופורציוני באמצעות מגבר מסכם ומגבר מהפך

שאלה 7.5

בהנחה שהמגברים במעגל שבאיור 7.14 הם מגברים אידיאליים, הראו כיצד מקבלים את משוואה (7-4).

המגבר U_{2C} , כולל נגד משוב (R_{30}) שהתנגדותו השווה להתנגדות נגד המבוא (R_{31}) , ולכן הוא פועל כמגבר מהפך. בנוסף לכך, במגבר זה מתווסף למתח המבוא מתח ההסט, U_{OS} , שערכו נקבע על-ידי מצב הפוטנציומטר P_6 . אות המוצא מהמעגל U_{out} הוא אפוא:

$$(7-5) \quad U_{out} = -\left(\frac{R_{30}}{R_{31}}\right)U_{TP7} - \left(\frac{R_{30}}{R_{29}}\right)U_{OS} = \frac{R_f}{R_{25}}U_{error} - U_{OS}$$

הגבר הבקר K_c נקבע אפוא על-ידי יחס ההתנגדויות של הנגדים $\left(\frac{R_f}{R_{25}}\right)$ במעגל. כן מתקיים שכאשר $U_{error} = 0$ אז $U_{out} = U_{OS} = m_0$.

שאלה 7.6

הוכיחו את משוואה 7.5.

דוגמה 7.5

נתוני המעגל שבאיור 7.14 הם:

$$U_{SP} = 5 \text{ V}, \quad U_{OS} = -1 \text{ V}, \quad R_{14} = 510 \Omega, \quad R_f = 2315 \Omega$$

מצאו את תפוקת הבקר U_{out} כאשר מתקבל מתח $U_{PV} = 4.5 \text{ V}$ ממתמר המדידה. מהו הגבר הבקר במעגל זה?

פתרון

$$U_{error} = U_{SP} - U_{PV} = 5 - 4.5 = 0.5 \text{ V} \quad \text{מתח השגיאה הוא:}$$

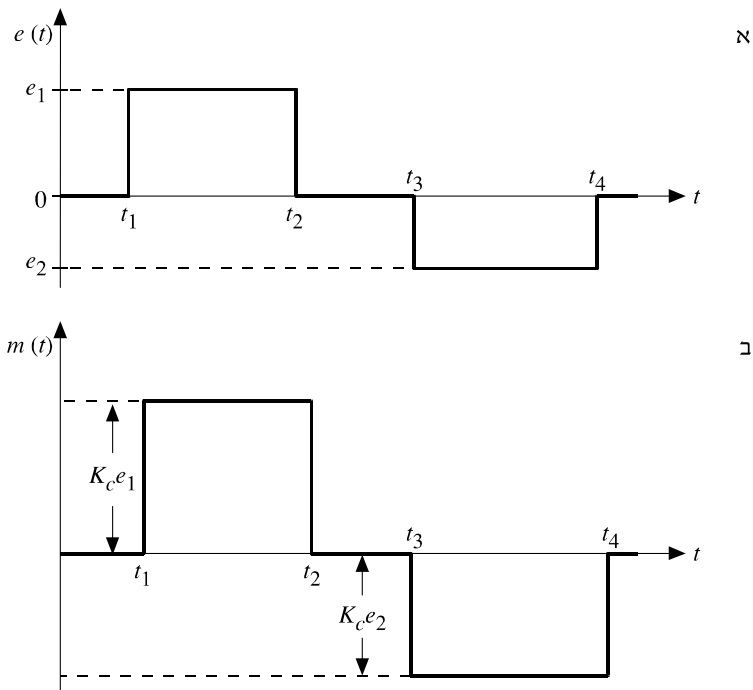
$$K_c = \frac{R_f}{R_{25}} = \frac{2315}{510} = 4.54 \quad \text{הגבר הבקר במגבר השגיאה הוא:}$$

נציב במשוואה (7-5) ונקבל:

$$U_{out} = K_c U_{error} - U_{OS}$$

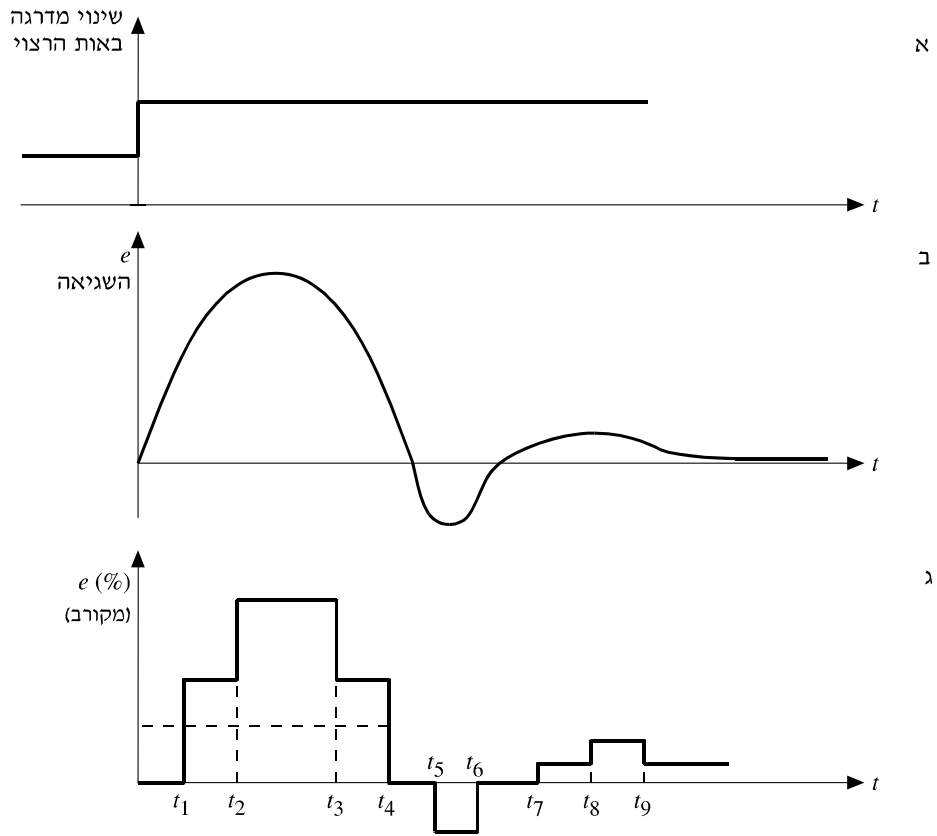
$$U_{out} = \frac{2315}{510} \cdot 0.5 + 1 = 3.27 \text{ V}$$

נהוג לבדוק בקרים או לאפיין את תפוקתם באמצעות הפעלתם בחוג פתוח. בבדיקה כזאת מאלצים את הבקר על-ידי אות מבוא בצורת אות מדרגה המדמה את השגיאה. בדיקת התפוקה נותנת מידע על תקינותו של הבקר. באיור 7.15 מתואר גרף אות שגיאה $e(t)$ כלשהו וגרף התפוקה המתאים שהתקבל מהבקר (איור 7.15.ב). כאן הנחנו כי תפוקת הבקר בשגיאה אפס היא $m_0 = 0$.



איור 7.15 תפוקת בקר פרופורציוני
 א. אות השגיאה במערכת
 ב. תפוקת הבקר הפרופורציוני עקב אות השגיאה

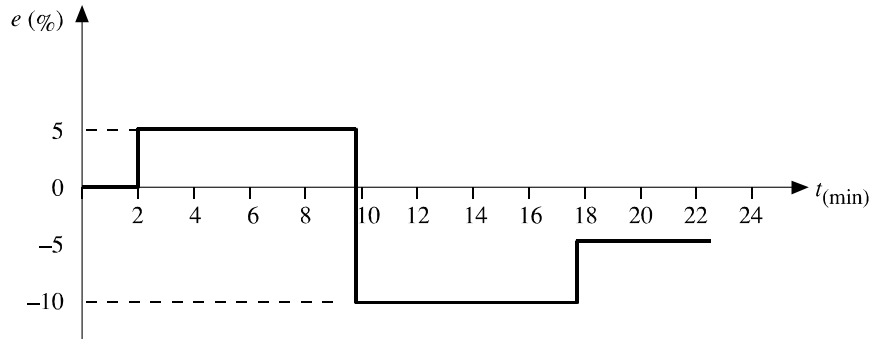
כאשר מבצעים את הבדיקה של הבקר במערכת בחוג סגור, השגיאה תלויה לא רק באות הרצוי, אלא גם בגורמים נוספים, כגון סוג התהליך, סוג ההפרעות, נתוני הבקר וכו'. באיור 7.16 מתוארת השתנות אופיינית של השגיאה $e(t)$ במערכת בחוג סגור, כתוצאה משינוי מדרגה באות הרצוי (איור 7.16.א). את תפוקת הבקר הפרופורציוני במערכת זו נוכל לחשב במקורב אם נהפוך את גרף השגיאה הרציף (איור 7.16.ב) לגרף "מדרגות" כדוגמת הגרף שבאיור 7.16.ג. תפוקת הבקר בכל רגע בדוגמה זו נתונה על-ידי מכפלת ההגבר בשגיאה הקיימת באותו הרגע.



איור 7.16 אותות אופייניים במערכת בקרה בחוג סגור
 א. אילוץ מדרגה
 ב. אות השגיאה המדויק
 ג. אות השגיאה המקורב על-ידי פונקציית מדרגות

שאלה 7.7

בבקר פרופורציוני (P), ההגבר הוא $K_c = 2.5$, והתפוקה בשגיאה אפס היא $m_0 = 40\%$. גרף השגיאה של הבקר נתון באיור 7.17. סרטטו גרף של תפוקת הבקר באחוזים בתלות בזמן.



איור 7.17 איור לשאלה 7.7

חסרונו העיקרי של הבקר הפרפורציוני טמון בכך שאינו מאפשר מצב שבו האות המבוקר המצוי יהיה שווה לאות הרצוי (עם שגיאה אפס) **בכל מצב מתמיד שהוא**. כפי שנראה בדוגמה הבאה, ניתן אמנם לקבוע את m_0 בבקר כך שבמצב מתמיד מסוים של המערכת השגיאה תתאפס; אולם בכל מצב מתמיד אחר, למשל, בתוצאה מתוספת הפרעה קבועה למערכת, השגיאה תהיה שונה מאפס.

דוגמה 7.6

נחזור למערכת בקרת הטמפרטורה במכל מים (דוגמה 1.6 בפרק 1) שתרכיבים המלבנים שלה הובא בדוגמה 2.2 (פרק 2). כדי לאפיין את תגובת המערכת, נמדדה טמפרטורת המים החמים (T_{out}) בתלות בקצב הספיקה q של הדלק למבער (למשל, כאשר השסתום מנותק מהבקר). נמצא כי את הטמפרטורה T_{out} (ב- $^{\circ}\text{C}$) ניתן לתאר באמצעות קו ישר שמשוואתו היא:

$$(7-6) \quad T_{out} = 12.5 q + 31.25$$

כאשר ספיקת הדלק q , נתונה ב- ק"ג/דקה .

המגבר בדוגמה 2.2 פועל כבקר פרופורציוני שתחום העבודה שלו 10 וולט, ותפוקתו בשגיאה אפס היא $m_0 = 50\%$ (כלומר, תפוקה מרבית של 10 וולט ותפוקה מזערית אפס). תחום השינוי המרבי של טמפרטורת המים הוא $\Delta T = 80^{\circ}\text{C}$, והגבר השסתום הוא $G_3 = 0.3 \frac{\text{ק"ג}}{\text{דקה}}$. מכאן שמשוואת השסתום היא $q = G_3 \cdot U_c$, כאשר U_c (בוולט) הוא המתח המתקבל מהבקר.

ההגברים של מתמר הטמפרטורה ופוטנציומטר המבוא שווים, כאשר בדוגמה זו:

$$G_1 = H = 0.025 \frac{\text{Volt}}{^\circ\text{C}}$$

א. המערכת פועלת במצב מתמיד. מהו הגבר הבקר (וולט/וולט) במצב זה?

רשמו את משוואת הבקר (ביחידות מוחלטות) במצב זה, וסרטטו את גרף התפוקה של הבקר.

ב. קובעים את הטמפרטורה הרצויה ל- $T_r = 50^\circ\text{C}$. מהי תפוקת הבקר במצב המתמיד? מהי השגיאה במצב זה? (הערה: השתמשו במשוואת התהליך (7-6)).

ג. משנים את הטמפרטורה הרצויה ל- $T_r = 60^\circ\text{C}$. מהי תפוקת הבקר במצב המתמיד החדש? מהי השגיאה במצב זה?

ד. מעוניינים לשנות את תפוקת הבקר בשגיאה אפס כך שבמצב המתמיד החדש ($T_r = 60^\circ\text{C}$), השגיאה תהיה אפס. באיזה ערך של U_0 (תפוקת בקר בוולטים בשגיאה אפס) יש לבחור?

פתרון

בבעיות שבפרק 2 אפיינו את המערכת הפועלת במצב המתמיד באמצעות ההגברים הסטטיים של הרכיבים (ובאמצעותם חישבנו את התמסורת הכללית, או את השגיאה במצב המתמיד, וכו'). אבל בבעיה שלפנינו, הקשר בין הטמפרטורה המצויה (אות המוצא) לבין אות המוצא של רכיב ההפעלה במערכת (במקרה זה ספיקת השסתום q), נתון על-ידי משוואה ליניארית (משוואה (7-6)). משוואה זו מתקיימת כאשר המערכת פועלת במצב מתמיד הן בחוג פתוח והן בחוג סגור. כאשר המערכת פועלת בחוג סגור (עם משוב), יש להתחשב כמובן בעובדה שאות המוצא מהבקר (תפוקת הבקר) נקבע על-ידי השגיאה של המערכת, כלומר, ההפרש בין האות המצוי לאות הרצוי. מתמטית, הבעיה של חישוב השגיאה נעשית מסובכת יותר, היות שלא ניתן לאפיין כל רכיב במערכת על-ידי פרמטר יחיד (ההגבר הסטטי) כפי שעשינו בפרק 2.

א. התפוקה של הבקר בשגיאה אפס (בוולטים) היא 50% מהתפוקה המרבית, כלומר:

$$U_0 = \frac{m_0 \cdot 10}{100} = 50 \cdot 0.1 = 5 \text{ V}$$

לפי הנתון, שינוי מרבי בטמפרטורת המים ($\Delta T = 80^\circ\text{C}$) גורם לשינוי מתח של $80 \cdot 0.025 = 2.0 \text{ V}$ במוצא מתמר הטמפרטורה ($H = 0.025$). לפיכך, תפוקת הבקר משתנה

ב- 10 V כאשר השגיאה המתקבלת משתנה ב- 2 V . נסמן ב- G_c את ההגבר הסטטי של הבקר (ב-Volt/Volt). תפוקת הבקר U_e נתונה אפוא על-ידי:

$$U_e = -G_c \cdot e + U_0 = -G_c e + 5$$

כאשר השגיאה e משתנה בין -1.0 V לבין $+1.0 \text{ V}$. אם $e = 0$, מתקבלת תפוקה $U_c = 5 \text{ V}$, וכאשר $e = -1.0 \text{ V}$, התפוקה היא מרבית (10 V). במצב שבו $e = +1.0 \text{ V}$, התפוקה היא מזערית (0 V). את G_c נוכל אפוא לחשב בעזרת שתי המשוואות הבאות:

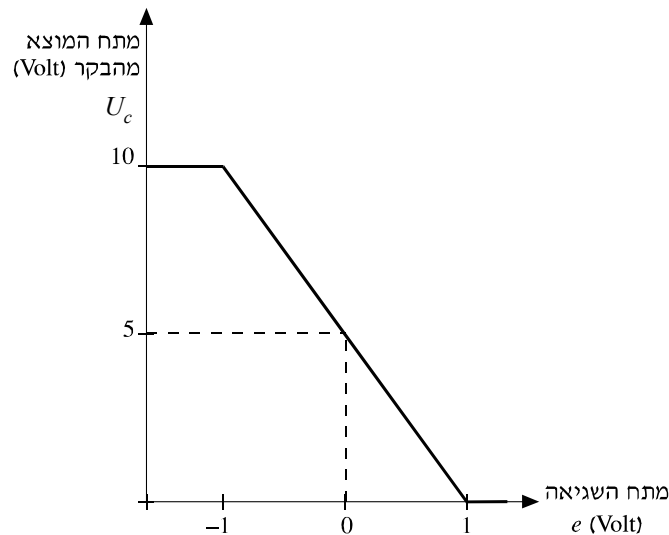
$$10 = 1.0 G_c + 5$$

$$0 = -1.0 G_c + 5$$

מקבלים כי $G_c = 5.0 \text{ (Volt/Volt)}$.

המשוואה המתארת את תפוקת הבקר (בוולטים) ומתוארת באיור 7.18 נתונה אפוא על-ידי

$$(7-7) \quad U_c = -5e + 5$$



איור 7.18 איור לדוגמה 7.6

ב. כדי לחשב את השגיאה במצב מתמיד שבו $T_r = 50^\circ\text{C}$, יש לפתור שתי משוואות: משוואת התהליך (7-6) ומשוואת הבקר (7-7). את משוואת התהליך (7-6) נרשום בצורה שונה מעט. ראשית נשתמש בעובדה כי $q = G_3 U_c = 0.3 \cdot U_c$. שנית, נזכור כי את T_{out} ממירים למתח, כלומר, אות המתח המצוי (הנמצא ביחס ישר לטמפרטורה המצויה) נתון על-ידי:

$$U_b = H \cdot T_{\text{out}} = H(12.5 q + 31.25)$$

(כאן U_b מסמן את האות המצוי בוולטים).

כלומר :

$$U_b = 0.025 \cdot (12.5 \cdot 0.3U_c + 31.25) = 0.025 \cdot (3.75U_c + 31.25)$$

לעומת זאת, אות המתח הרצוי U_r , הנמצא ביחס ישר לטמפרטורה הרצויה, הוא :

$$U_r = G_1 \cdot 50 = 0.025 \cdot 50 = 1.25 \text{ V}$$

מכאן, שהשגיאה e במצב המתמיד היא :

$$e = U_b - U_r = 0.025 \cdot (3.75U_c + 31.25) - 1.25$$

במצב המתמיד שתי המשוואות הבאות חייבות להתקיים בו-בזמן :

$$U_c = -5e + 5 \quad \text{(I) משוואת הבקר :}$$

$$e = 0.025 \cdot (3.75U_c + 31.25) - 1.25 \quad \text{(II) משוואת התהליך :}$$

מתקבלות אפוא שתי משוואות בשני נעלמים e ו- U_c , ופתרון הוא :

$$U_c = 5 \text{ V}$$

$$e = 0 \text{ V}$$

כלומר, במצב שבו הטמפרטורה הרצויה היא $T_r = 50^\circ\text{C}$, השגיאה היא אפס ותפוקת הבקר שווה ל- U_0 (5 V).

ג. ברור כי כאשר משנים את הטמפרטורה הרצויה, משוואת הבקר אינה משתנה :

$$U_c = -5e + 5$$

לעומת זאת, השגיאה משתנה, ומשוואת התהליך במצב החדש היא :

$$e = 0.025 \cdot (3.75 U_c + 31.25) - 0.025 \cdot 60 = 0.025 \cdot (3.75U_c + 31.25) - 1.5$$

גם כאן מתקבלות שתי משוואות בשני הנעלמים e ו- U_c .

הפתרון הוא :

$$U_c = 5.85 \text{ V}$$

$$e = -0.17 \text{ V}$$

כלומר, כאשר מעלים את הטמפרטורה הרצויה ב- 10°C , תפוקת הבקר גדלה ב-0.85 V (כ-8.5% מהשינוי המרבי), ואילו השגיאה נעשית שלילית (קטנה מאפס).

ד. הפעם משוואת התהליך אינה משתנה, ולכן מתקיים:

$$e = 0.025 \cdot (3.75 U_c + 31.25) - 1.50$$

לעומת זאת, לאחר שינוי של U_0 משוואת הבקר היא שונה. אם מניחים כי ההגבר נשאר קבוע ($G_c = 5$), מקבלים כי:

$$U_c = -5e + U_0$$

כאשר U_0 אינו ידוע.

אנו דורשים כי במצב החדש $e = 0$. מכאן מקבלים את המשוואה:

$$0.025 \cdot (3.37 U_c + 31.25) - 1.50 = 0$$

שפתרונה הוא:

$$U_c = 7.66 \text{ V}$$

כלומר, תפוקת הבקר בשגיאה אפס צריכה להיות $U_0 = 7.66 \text{ V}$.

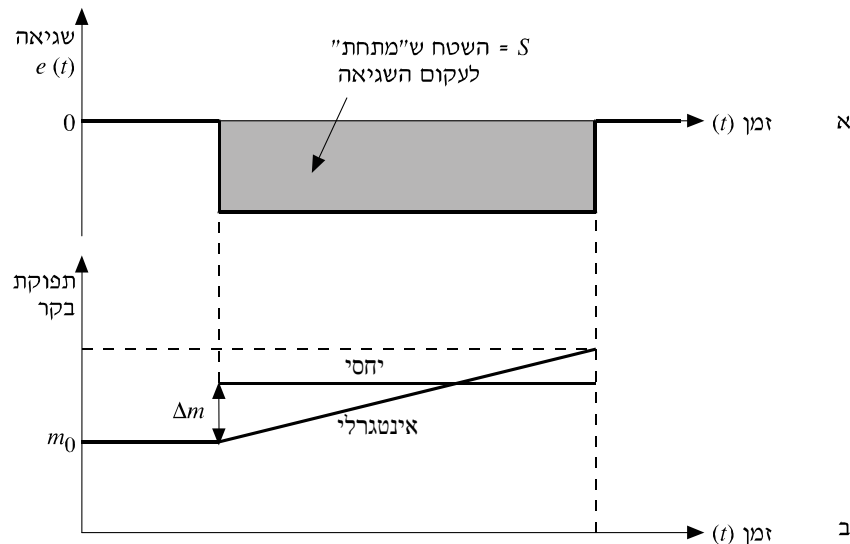
הדוגמה האחרונה ממחישה את הבעייתיות שבשימוש בבקר פרופורציוני. בקר זה אינו מאפשר מצבים שבהם השגיאה של המערכת במצב המתמיד, כתוצאה משינוי מדרגה בעומס, או באות המבוא, מתאפסת בכולם (אלא אם משנים את התפוקה בשגיאה אפס לכל עומס ולכל אות רצוי נתון, דבר בלתי מעשי לחלוטין). בסעיף הבא נראה כיצד ניתן להתגבר על בעיה זו.

7.4.2* בקרה אינטגרלית (I-Integral) ובקרה פרופורציונית-אינטגרלית (PI)

את בעיית איפוס השגיאה במצב המתמיד אפשר לפתור על-ידי שימוש בבקרה אינטגרלית.

בבקרה אינטגרלית, תפוקת הבקר אינה נמצאת ביחס ישר לשגיאה (כמו בבקר פרופורציוני), אלא ביחס ישר לשטח שבין עקום השגיאה (המתאר את התלות של e בזמן) לבין ציר הזמן. באיור 7.19 מומחש ההבדל בין שני אופני בקרה אלו. באיור 7.19 מתואר שינוי מדרגה בשגיאה (מדרגה שלילית) בתלות בזמן. כתוצאה מהשינוי

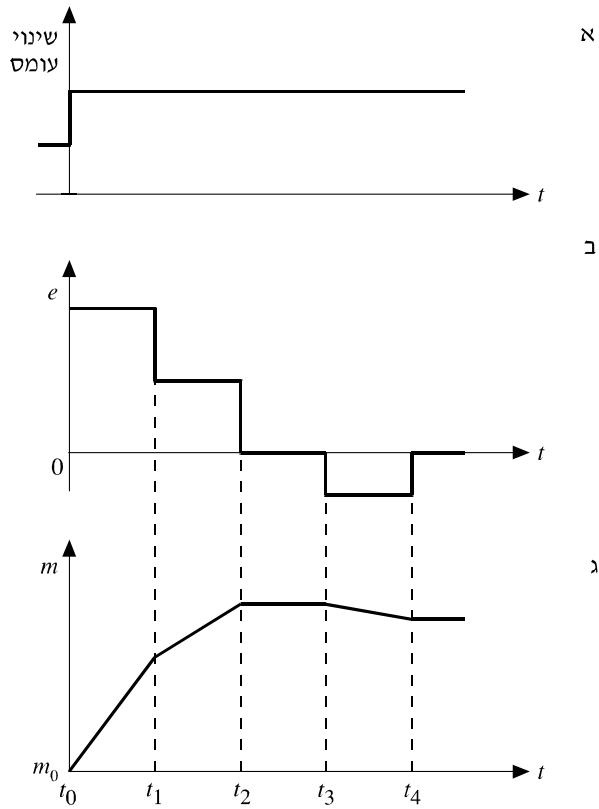
בשגיאה, תפוקת הבקר הפרופורציוני משתנה גם היא בקפיצת מדרגה (בשיעור Δm). לעומת זאת, תפוקת הבקר האינטגרלי גדלה באופן ליניארי עם הזמן בהתאם לשטח S שבין הקו האופקי המתאר את $e(t)$ לבין ציר הזמן. גודלו של שטח זה הוא כמובן פונקציה של הזמן t . ככל שהזמן גדל, גם השטח גדל, ולכן גם תפוקת הבקר גדלה.



איור 7.19 תפוקת הבקר אינטגרלי לעומת בקר פרופורציוני
 א. אות שגיאה מלבני (שלילי) במערכת
 ב. תגובת בקר פרופורציוני ובקר אינטגרלי לאות השגיאה

כאמור, במערכת בקרה הפועלת בחוג סגור, השגיאה יכולה להשתנות בצורה מסובכת יותר מאשר שינוי המדרגה המתואר באיור 7.19א. לדוגמה, שינוי מדרגה בעומס (או שינוי מדרגה באות המבוא למערכת, איור 7.20א) גורם לשינויים אופייניים בשגיאה $e(t)$, המתוארים בקירוב על-ידי פונקציית המדרגות שבאיור 7.20ב. איור 7.20ג מתאר את התפוקה של בקר אינטגרלי כתוצאה משגיאה כזאת.

אנו רואים כי כל עוד קיימת שגיאה כלשהי (חיובית או שלילית), תפוקת הבקר ממשיכה להשתנות. התפוקה נשארת קבועה אך ורק כאשר השגיאה מתאפסת (למשל, בדוגמה זו בין t_2 לבין t_3). ערכה של התפוקה בשגיאה אפס נקבע על-ידי צורת ההשתנות של $e(t)$ בזמן, לפני הזמן שבו השגיאה מתאפסת, ועל-ידי פרמטר נוסף – **מהירות האינטגרציה** של הבקר. ככל שמהירות האינטגרציה גדולה יותר, כך השיפוע של גרף התפוקה (לאותה שגיאה) – גדול יותר. באמצעות פרמטר זה ניתן לאפס את השגיאה הנוצרת בזמן שינוי מדרגה באות המבוא, למשל, כאשר המערכת פועלת בחוג סגור (וזאת בניגוד לבקר פרופורציוני, שאינו מאפס את השגיאה במצב המתמיד החדש).



איור 7.20 אותות אופייניים במערכת בקרה אינטגרלית

- א. אילוף מדרגה בעומס
- ב. השגיאה במערכת (מקורבת על-ידי פונקציית מדרגות)
- ג. תפוקת הבקר האינטגרלי

מהירות האינטגרציה של הבקר האינטגרלי שנסמנה על-ידי K_i , נתונה ביחידות של $1/s$. הגודל ההופכי למהירות האינטגרציה הוא **זמן האינטגרציה** של הבקר, T_i , וערכו נמדד, כמובן, ביחידות זמן (שניות).

מתמטית, נהוג לתאר את פעולת הבקר האינטגרלי על-ידי המשוואה:

$$(7-8) \quad m(t) = \frac{1}{T_i} \int e(t) + m_0 = K_i \int e(t) + m_0$$

כאשר T_i הוא זמן האינטגרציה ביחידות s , ו- m_0 היא תפוקת הבקר בשגיאה אפס. הסימן \int מסמל את פעולת האינטגרציה, שהיא פעולה השקולה לחישוב השטח S שמתחת לעקומת השגיאה $e(t)$ (איור 7.19א).

כאשר מתארים את השגיאה באמצעות פונקציית "מדרגות" (כמו באיור 7.20 ב), אפשר לרשום את משוואת הבקר כך:

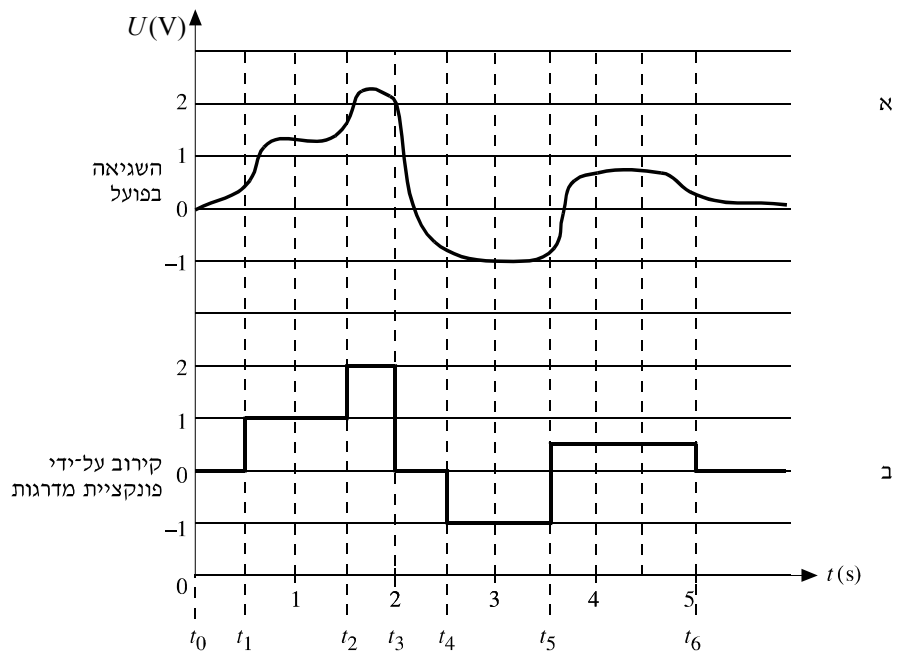
$$(7-9) \quad m = \frac{\sum e_k \Delta t_k}{T_i} + m_0$$

כאשר e_k הוא ערך פונקציית השגיאה במדרגה ה- k , ו- Δt_k הוא אורך המדרגה ה- k (בשניות).

בדוגמה הבאה נראה כיצד ניתן לחשב את התפוקה של בקר אינטגרלי באמצעות משוואה (7-9).

7.7 דוגמה

באיור 7.21 א מתוארת השגיאה (בוולטים) הנוצרת כתוצאה מהגדלה פתאומית של העומס במערכת בקרה הפועלת בחוג סגור. לצורך החישובים מובא קירוב של העקום האמיתי על-ידי פונקציית מדרגות מלבנית (איור 7.21 ב).



איור 7.21 איור לדוגמה 7.7
 א. השגיאה במערכת
 ב. קירוב השגיאה על-ידי פונקציית מדרגות

309 סוגי בקרים ושילובם במערכות בקרה

בקירוב זה מתוארת השגיאה e בתחום שבין $t = 0$ לבין $t = 5$, בעזרת 6 המדרגות המתחילות בזמנים $t_0 = 0, t_1 = 0.5, t_2 = 1.5, t_3 = 2, t_4 = 2.5, t_5 = 3.5$ שניות, בהתאמה. נתון שזמן האינטגרציה של הבקר הוא $T_i = 2/3$ s וכי התפוקה בשגיאה אפס היא $m_0 = 0$. יש לחשב את התפוקה של הבקר בסיומו של כל קטע זמן. מניחים שהתפוקה בזמן $t = 0$ היא אפס.

פתרון

א. ברגע הסיום $t_1 = 0.5$ s של קטע הזמן הראשון, מתקיים $\frac{e\Delta t}{T_i} = 0$, היות שהשגיאה בקטע זמן זה היא אפס. לפיכך, התפוקה נשארת אפס, $U_1 = 0$.

ב. ברגע סיום של הקטע השני, $e_2 = 1, t_2 = 1.5$ s, התפוקה היא:

$$U_2 = U_1 + \frac{e_2 \Delta t_2}{T_i} = 0 + 1 \frac{(1.5 - 0.5)}{2/3} = 1.5 \text{ V}$$

ג. בסיומו של הקטע השלישי $e_3 = 2, t_3 = 2$ s, התפוקה היא:

$$U_3 = U_2 + \frac{e_3 \Delta t_3}{T_i} = 1.5 + \frac{2 \cdot (2 - 1.5)}{2/3} = 3 \text{ V}$$

ד. בקטע הרביעי השגיאה היא אפס, ולכן התפוקה ברגע הסיום של קטע זמן זה, $t_4 = 2.5$ s אינה משתנה: $U_4 = U_3 = 3 \text{ V}$

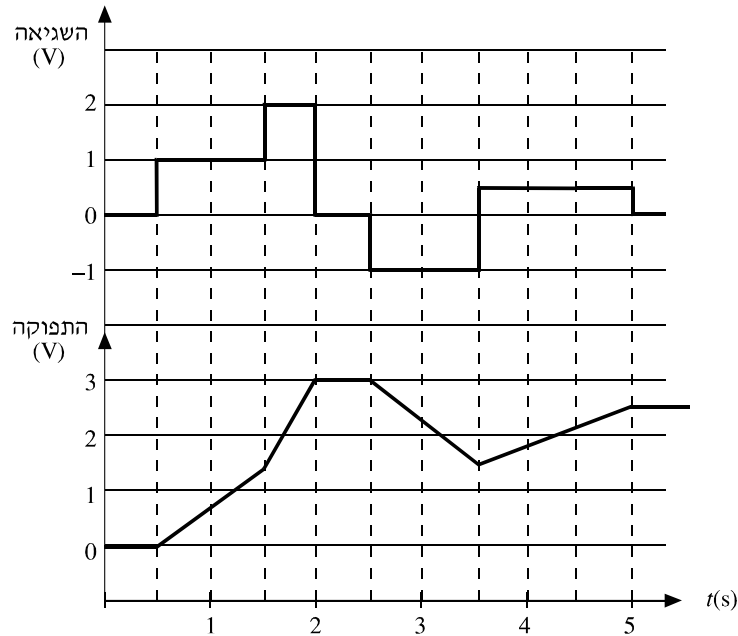
ה. בקטע החמישי השגיאה היא שלילית ($e_5 = -1$), ולכן:

$$U_5 = U_4 + \frac{e_5 \Delta t_5}{T_i} = 3 - \frac{(3.5 - 2.5)}{2/3} = 1.5 \text{ V}$$

ו. בקטע האחרון שבין $t_5 = 3.5$ s ל- $t_6 = 5.0$ s, השגיאה שוב חיובית ($e_6 = +0.5$). והתפוקה בסוף קטע זמן זה היא:

$$U_6 = U_5 + \frac{e_6 \Delta t_6}{T_i} = 1.5 + \frac{0.5(5 - 3.5)}{2/3} = 2.625 \text{ V}$$

באיור 7.22 מופיע גרף התפוקה המחושבת של הבקר מתחת לגרף השגיאה.



איור 7.22 איור לדוגמה 7.7 – תפוקת הבקר האינטגרלי

מדוגמה 7.7 אנו למדים כי בזמנים $t > 5$, כאשר השגיאה חוזרת לאפס, התפוקה נשארת קבועה $m = 2.625 \text{ V}$, אך אינה חוזרת לערכה בזמן $t = 0$ (0 V). למעשה, קיבלנו כי עבור $t > 5$, התפוקה בשגיאה אפס היא $m_0 = 2.625 \text{ V}$. ואמנם, כתוצאה מהגדלת העומס, גם תפוקת הבקר צריכה לגדול, כדי להגיע לשגיאה אפס במצב המתמיד החדש. מאידך, פעולת הבקר האינטגרלי דורשת זמן מסוים לביטול השגיאה. אם השינויים בעומס מופיעים לעתים קרובות מדי, הבקר אינו "מספיק" לאפס את השגיאה. לכן הבקר האינטגרלי מאט את תגובת המערכת, מצב שיכול לגרום לתנודות בלתי רצויות במשתנה המבוקר.

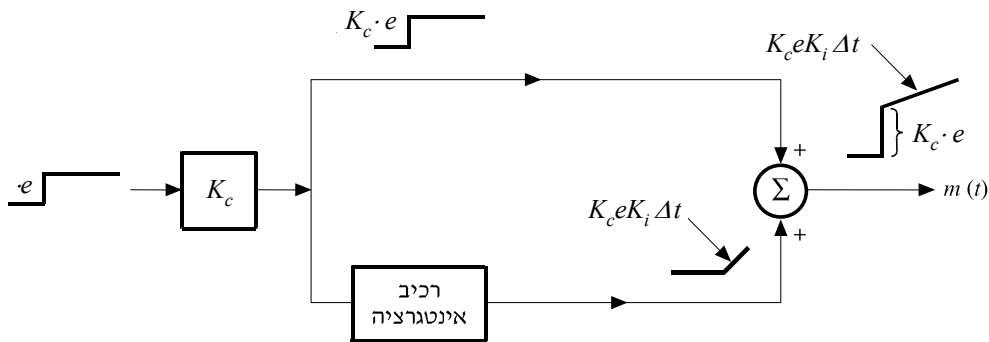
כדי לזרז את פעולת הבקרה האינטגרלית ולהקטין את התנודות במשתנה המבוקר, נהוג לשלב את הבקרה האינטגרלית והבקרה הפרופורציונית. בקר משולב כזה נקרא בקר פרופורציוני-אינטגרלי (בקר PI).

החלק הפרופורציוני של הבקר הפרופורציוני-אינטגרלי מגיב מיד לכל שינוי בשגיאה, ובכך הוא משפר את התגובה הדינמית של המערכת. לעומת זאת, החלק האינטגרלי פועל לביטול השגיאה. הפעולה המשולבת של שתי שיטות הבקרה גורמת לתיקון השגיאה מהר יותר ועם פחות תנודות במשתנה המבוקר.

את משוואת בקר PI ניתן לרשום כצירוף משוואות (7-1) ו-(7-8):

$$(7-10) \quad m(t) = K_c \left[e(t) + K_I \int e(t) dt \right] + m_0$$

כאשר K_c הוא ההגבר המשותף של החלק הפרופורציוני והחלק האינטגרלי, ו- K_I היא מהירות האינטגרציה של החלק האינטגרלי. באיור 7.23 מופיע תרשים מלבנים המתאר את תגובתו של בקר PI לשגיאת מדרגה בגובה e לאחר פרק זמן Δt . החלק הפרופורציוני של הבקר תורם תפוקה שגודלה $K_c e$, והחלק האינטגרלי תורם תפוקה שערכה גדל ליניארית בזמן $K_c K_I e \Delta t$.



איור 7.23 השינוי בתפוקת בקר פרופורציוני-אינטגרלי בפרק זמן Δt כתוצאה משגיאת מדרגה e

לאחר פרק זמן Δt , אות המוצא הוא סכום שתי התרומות: החלק הפרופורציוני ($K_c e$) והחלק האינטגרלי ($K_c K_I e \Delta t$).

7.8 דוגמה

נניח שהשגיאה של בקר PI משתנה בזמן על-פי הגרף שבאיור 7.24. כיצד תשתנה תפוקת הבקר?

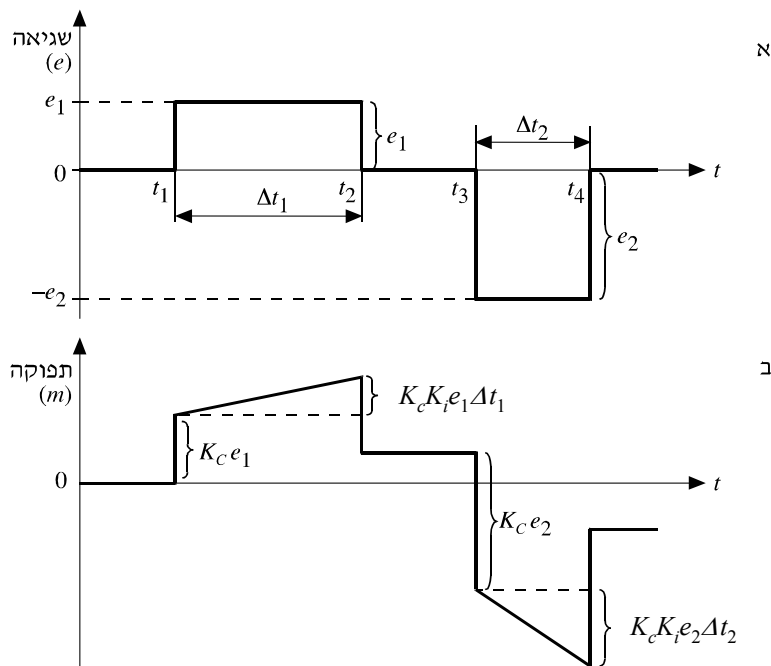
פתרון

שינוי התפוקה בזמן מתואר באיור 7.24. אנו רואים שעד לרגע t_1 , התפוקה היא אפס כי השגיאה היא אפס. בפרק הזמן Δt_1 שבו $t_1 \leq t < t_2$ (ושבו השגיאה קבועה e_1), גדלה התפוקה בהדרגה מהערך $K_c e_1$ לערך $K_c e_1 + K_c K_I e_1 \Delta t_1$. לאחר מכן, בזמן שבין t_2 לבין t_3 , השגיאה שוב אפס, ולכן התפוקה קטנה בקפיצה לערך הקבוע $K_c K_I e_1 t_1$ (התרומה הפרופורציונית מתאפסת). בפרק הזמן Δt_2 , שבו הזמן t מקיים $t_3 \leq t < t_4$, השגיאה

היא שלילית ושיעורה e_2 . כתוצאה מכך התפוקה קטנה באופן מידי (בזמן $t = t_3$) בשיעור של $K_c e_2$, ולאחר מכן קטנה בהדרגה עד לערך:

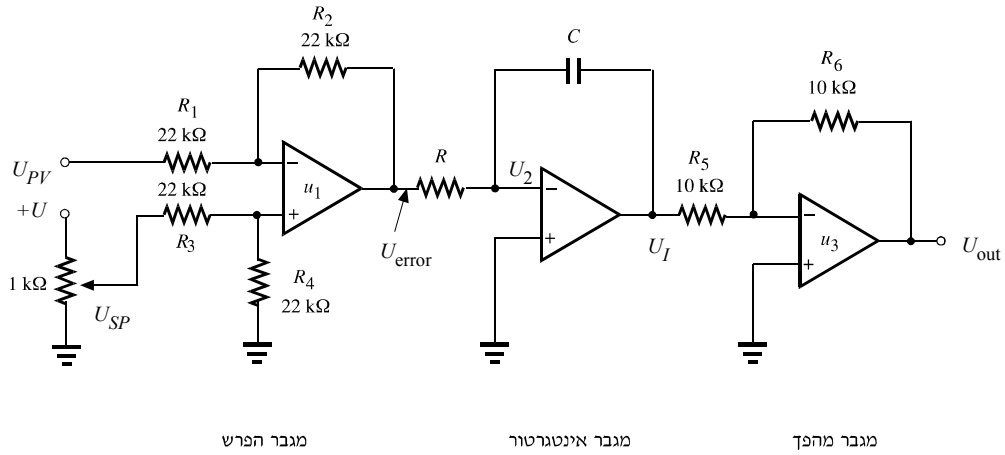
$$K_c K_i e_1 \Delta t_1 - K_c e_2 - K_c K_i e_2 \Delta t_2$$

בזמן $t \geq t_4$, השגיאה שוב מתאפסת, וכתוצאה מכך התפוקה גדלה בעליית מדרגה לערך הקבוע החדש $K_c K_i (e_1 \Delta t_1 - e_2 \Delta t_2)$.



איור 7.24 איור לדוגמה 7.8

בדומה לבקרה פרופורציונית, גם בקרה אינטגרלית ניתן לממש בעזרת **מגברי שרת**. בתצורה זו, מגבר הפועל **כאינטגרטור** מחליף את המגבר המסכם בבקר הפרופורציוני. איור 7.25 מתאר דוגמה למעגל כזה (השוו למעגל שבאיור 7.14). במעגל זה C הוא קבל במשוב האינטגרטור שהזרם דרכו נמצא ביחס ישר לקצב שינוי המתח בין הדקו (הזרם בקבל מקיים את המשוואה $i = C \frac{dU}{dt}$, כאשר C הוא קיבול הקבל ו- $\frac{dU}{dt}$ הוא הנגזרת לפי הזמן של המתח בין הדקי הקבל).



איור 7.25 מימוש בקר אינטגרלי באמצעות מגבר אינטגרטור ומגבר מהפך

את הקשר בין מתח המוצא של האינטגרטור (U_I) לבין מתח השגיאה U_{error} ניתן לקבל מחוק הזרמים לצומת המהפך של האינטגרטור (בהנחה שעכבת המבוא של האינטגרטור היא אין-סופית):

$$\frac{U_{error} - U_2}{R} = -C \frac{d}{dt}(U_I - U_2)$$

אם ההגבר של האינטגרטור הוא A , אזי:

$$U_I = -AU_2$$

ולכן:

$$U_{error} = -RC \left[\frac{d}{dt} \left(1 + \frac{1}{A} \right) U_I \right] - \frac{U_I}{A}$$

ואם A הוא אין-סופי, מקבלים:

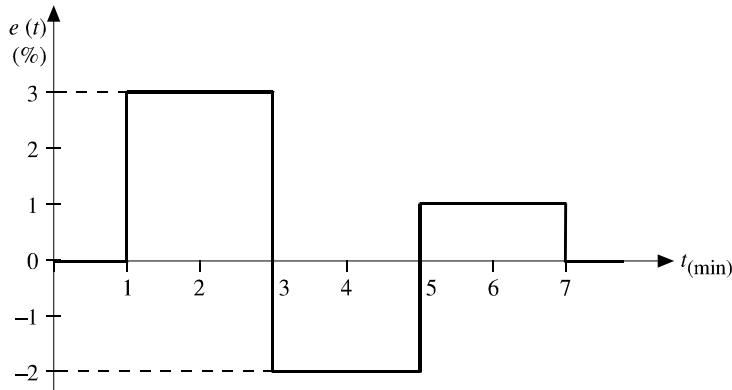
$$(7-11) \quad U_I = -\frac{1}{RC} \int U_{error} dt$$

כאן ביצענו פעולה מתמטית הפוכה לגזירה – אינטגרציה של משוואה.

הביטוי $\frac{1}{RC}$ הוא בעל ממדים הופכיים לזמן, ולכן הוא שווה ל- K_I , קבוע מהירות האינטגרציה של הבקר.

שאלה 7.8

נתון בקר אינטגרלי בעל $T_i = 1/K_I = 0.2 \text{ min}$ ו- $m_0 = 20\%$. שינוי העומס בתהליך החימום גורם להשתנות השגיאה כמתואר באיור 7.26.



איור 7.26 איור לשאלה 7.8

סרטטו את גרף תפוקת הבקר המתאים. מהי התפוקה כאשר השגיאה מתאפסת בזמנים $t > 7$?

7.4.3* בקרת נגזרת (D-Derivative) ובקרה יחסית-נגזרת אינטגרלית (PID)

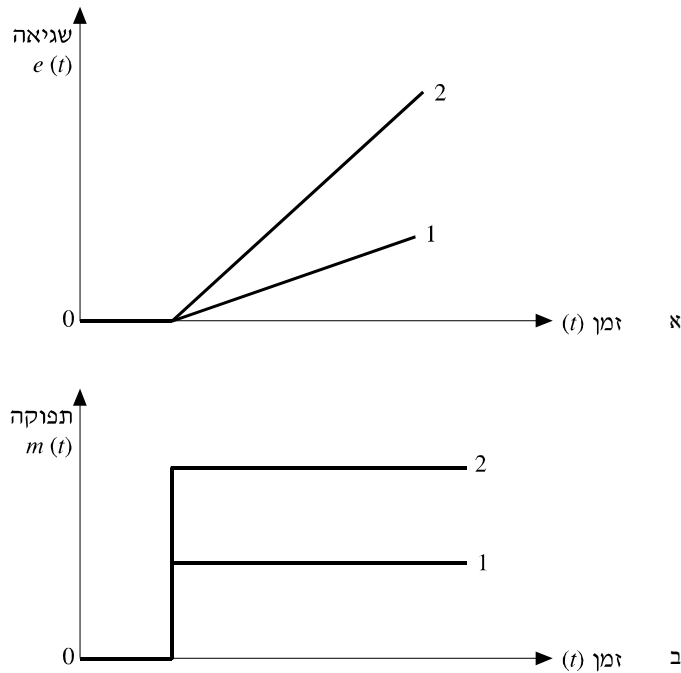
בקרת נגזרת פועלת בצורה הפוכה לבקרה אינטגרלית. בקר פרופורציוני-אינטגרלי הוא בעל ביצועים טובים מאוד במערכות שבהן לא נדרשת תגובה מהירה מאוד לשינויים פתאומיים בעומס (או באותות המבוא) למערכת. זאת משום שלמרות התרומה של החלק הפרופורציוני, לתגובה הפרופורציונית-אינטגרלית עדיין דרוש זמן מסוים עד למצב שבו השגיאה מתאפסת. כדי להתגבר על חיסרון זה, מוסיפים לבקר PI רכיב נוסף הנקרא **בקר נגזרת** (בקר D). התפוקה של בקר נגזרת נמצאת ביחס ישר לקצב השינוי של השגיאה, או לנגזרת של השגיאה לפי הזמן:

$$(7-12) \quad m(t) = T_d \frac{de(t)}{dt}$$

במשוואה זו, מקדם הנגזרת T_d נמדד בשניות.

בקר נגזרת הוא בעל תכונה של "ניבוי", מבחינת יכולתו להקדים "תרופה למכה". ואמנם אם השגיאה קטנה ביותר, אך גדלה בקצב מהיר, תפוקת הבקר גדולה יותר, בהתאם לקצב הגידול של השגיאה.

איור 7.27 מתאר את התגובה של בקר נגזרת D לשגיאה הגדלה בקצב קטן יחסית (1) ולשגיאה הגדלה בקצב גדול יותר (2). בקר נגזרת מגיב מיד, כלומר, הבקר מבטל חלק מן הפיגור בתהליך, והתפוקה גדולה יותר ככל ששיפוע גרף השגיאה גדול יותר. חסרונה של בקרת D הוא בכך שאינה מגיבה לשגיאה קבועה, גדולה ככל שתהיה. (נגזרת של קבוע היא אפס). מסיבה זו משתמשים בבקר נגזרת רק בשילוב עם בקרה פרופורציונית ובקרה אינטגרלית (בקר PID). אפשר גם להשתמש בבקר PD, המשלב בקרה פרופורציונית עם בקר נגזרת, אולם הוא שימושי פחות מבקרי PID. בקרה מסוג PD מקובלת במערכות שזמן התגובה שלהן הוא הגורם החשוב ביותר.



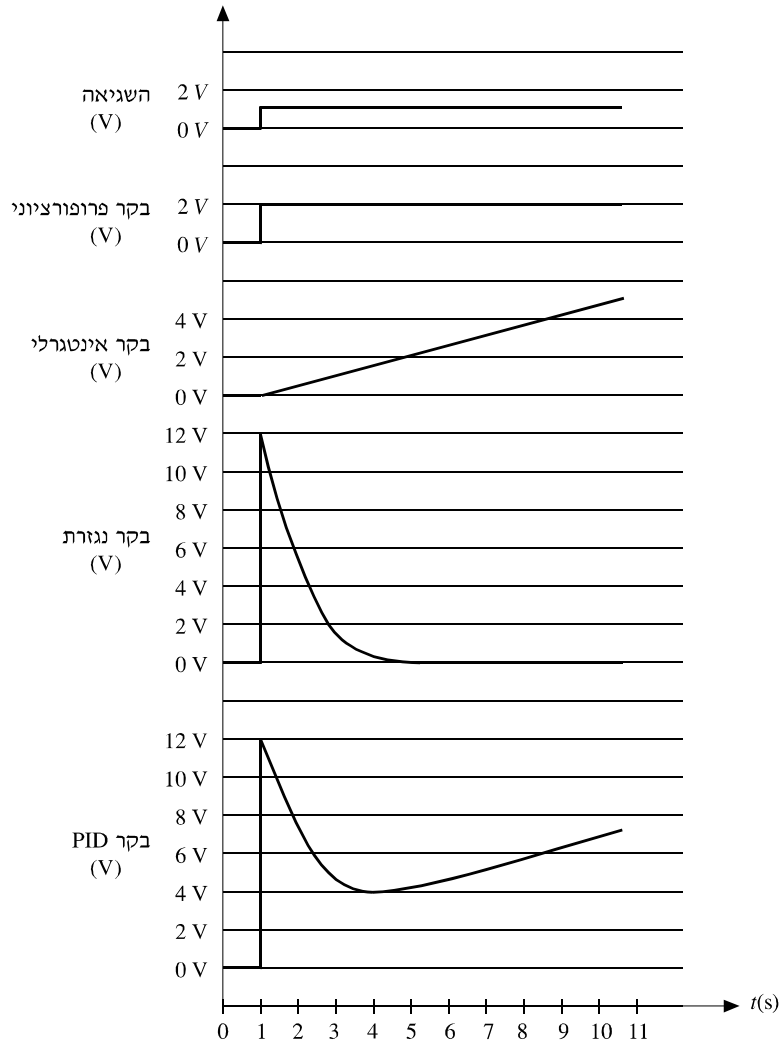
איור 7.27 התגובה של בקר נגזרת (D)
 א. שגיאות במערכת הגדלות לינארית עם הזמן
 ב. תפוקת בקר נגזרת לשגיאות

איור 7.28 ממחיש את ההבדלים בתפוקה של הבקרים השונים (פרופורציוני, אינטגרלי, ונגזרת), וכן את התפוקה של בקר PID, בתגובה לשינוי מדרגה בשגיאה בזמן $t = 1$ s. שימו לב שהתגובה של בקר נגזרת ($t = 1$ s) מתרחשת למעשה רק בזמן זה (הנגזרת של פונקציית מדרגה היא פונקציית דלתה הידועה גם בשם "פונקציית הלם"), ולאחר מכן היא חוזרת לאפס. ("הזנב" המתקבל בתפוקת בקר הנגזרת בזמנים $1 < t < 5$ הוא ביטוי לחוסר ה"אידיאליות" של בקר זה). התפוקה של בקר PID היא סכום התפוקות של שלוש תצורות הבקרים, וכצפוי, לאחר זמן מסוים (בדוגמה זו, לאחר 5 שניות), היא מורכבת מתגובת החלק הפרופורציוני והאינטגרלי בלבד.

ניתן לרשום את המשוואה של בקר PID כצירוף של משוואות (7-1), (7-8) ו-(7-12):

$$(7-13) \quad m(t) = K_C \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int e(t) dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \right] + m_0$$

המקדמים T_d ו- T_i , K_c המופיעים במשוואה זו נקראים קבועי הבקר PID.



איור 7.28 תפוקות אופייניות של בקרים בתצורות שונות (פרופורציוני, אינטגרלי, נגזרת ו-PID) לשינוי מדרגה בשגיאה

בבקרים אלקטרוניים ניתן לכוון מקדמים אלו לפי רצוננו או לאפשר לבקר לכוון את עצמו (Auto-Tuning). קיימת גם דרך ניסויית (שאותה לא נפרט במסגרת זו) לקביעת המקדמים, המבטיחה בקרה אופטימלית של התהליך המבוקר.

7.5 סיכום

התגובה הדינמית של מערכת בקרה הפועלת בחוג סגור מושפעת במידה רבה מתצורת הפעולה של הבקר במערכת. תצורות הבקרה העיקריות הן בקרה פרופורציונית, אינטגרלית ונגזרת, וכן שילוב שלהן (בקרה דו-מצבית היא מקרה גבולי של בקרה פרופורציונית עם הגבר אין-סופי).

תגובת המעבר של מערכת הפועלת במצב מתמיד לשינוי מדרגה באות המבוא (שיכול להיות גם שינוי פתאומי בעומס, למשל) נקבעת על-ידי סוג הבקר במערכת. בזמן המעבר, האות המצוי במערכת עם בקרה פרופורציונית משתנה עם הזמן, אולם **אינו** חוזר למצב שבו הוא שווה לאות הרצוי. צורת האות בזמן המעבר תלויה בסדר התהליך (או הרכיב המבוקר) במערכת: במערכת הכוללת רכיב יחיד בעל פיגור בזמן (סדר ראשון) התגובה היא מעריכית, ואילו בתהליך מסדר שני (או סדר גבוה יותר) האות המצוי עלול "להתנודד" סביב מצבו המתמיד החדש (בבקרה **דו-מצבית** האות המצוי **תמיד** מתנודד סביב המצב המתמיד החדש).

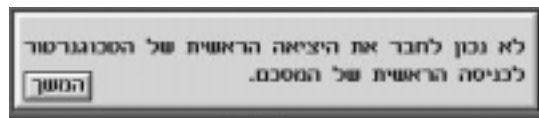
בבקרה פרופורציונית-אינטגרלית (או פרופורציונית-אינטגרלית-נגזרת), האות המצוי יכול לחזור למצב שבו השגיאה היא אפס (האות המצוי = האות הרצוי). גם כאן צורת ההתכנסות בזמן המעבר תלויה בסדר התהליך (או הרכיב המבוקר) במערכת.

מערכת הכוללת בקר PI (או PID) המבקר תהליך (או רכיב) מסדר ראשון, היא מערכת מסדר שני (לפחות), ולכן תגובת המעבר שלה מאופיינת על-ידי התדר הטבעי (ω_n) של המערכת ומקדם הריסון (ξ) של המערכת (ראו פרק 6).

מערכת הכוללת בקר PI (או בקר PID) המבקר תהליך (או רכיב) מסדר שני, היא מערכת מסדר שלישי (לפחות) שגם אותה ניתן לאפיין באמצעות גדלים דומים לגדלים שתיארנו בפרק הקודם. במערכות אלו, הצורה והקצב של ההתכנסות של האות המצוי לאות הרצוי נקבעים על-ידי הערכים של כל שלושת הפרמטרים המאפיינים בקר PID, ההגבר K_c , קבוע זמן האינטגרציה T_i , וקבוע זמן הגזירה T_d .

* פעילות מחשב מס' 5

1. הפעילו את היישום "מערכות בקרה". בחרו במערכת "בקרת מצב אנטנה סיבובית". קראו בעיון את ההנחיות לבניית תרשים המלבנים של המערכת.
2. בנו את תרשים המלבנים של המערכת. בבניית המערכת יש לשים לב לנקודות הבאות:
 - א. במערכת זו ישנם שני משוברים (משוב מהירות ומשוב מצב). את האותות משני המשוברים (המתקבלים מהטכוגנרטור ומפוטנציומטר המשוב) יש לסכם באמצעות הרכיב "מסכם". אות המוצא מהרכיב "מסכם" משמש אות המבוא (השלילי) לרכיב "מחסר".
 - ב. בעיקרון, אין זה משנה לאיזה מבוא (משני המבואות) של ה"מסכם" מחברים את שני ענפי המשוב. עם זאת, עלולה להופיע הודעה בנוסח:



איור 2.29

- ג. בהנחיות לבניית התרשים כתוב כי בקר "אינטגרטור" מייצג את הרכיב "אנטנה". בנוסף לכך יש להשתמש בסמלון של בקר לייצוג הבקר במערכת. בבניית התרשים יש אפוא להוסיף תחילה סמלון של "בקר" עבור המערכת, ולאחר מכן סמלון נוסף של "בקר" עבור רכיב האנטנה (הסדר חשוב!).
3. לאחר שבניתם ואישרתם את תרשים המלבנים של המערכת (באמצעות לחיצה על הסמלון "אשר"), קבעו את ההגברים הסטטיים ואת יחידות ההגבר של הרכיבים במערכת. בחרו בבקרה פרופורציונית וקבעו את ערך ההגבר של הבקר ל- $G_c = 500$. קבעו את הגבר המנוע ל- $G_m = 10$, את קבוע הזמן של המנוע ל- $\tau_m = 0.01 \text{ min}$, ואת תנאי ההתחלה לאפס. בחרו ב"בקרה אינטגרלית" עבור האינטגרטור, וקבעו את זמן האינטגרציה ל- $\tau_a = 0.001 \text{ min}$. קבעו ערך כלשהו להגבר האינטגרטור (גודל זה אינו משפיע על תגובת המערכת). קבעו את הגברי הפוטנציומטר ומפוטנציומטר המשוב ל-1, ואת הגבר הטכוגנרטור ל- $G_u = 0.1$. בחרו כאות מבוא את מדרגה שעוצמתו 3 יחידות. קבעו את יחידות אות המבוא המתאימות. שמרו את תרשים המערכת עם ערכי ההגברים שקבעתם לרכיבים השונים במחשב.

4. חשבו את תגובת המעבר של המערכת לאות המדרגה. מהי השגיאה במצב המתמיד? מהי צורת התגובה של המערכת ("ריסון-יתר" או "תת-ריסון")?

5. נבדוק את השפעת קבוע הזמן של המנוע על תגובת המערכת. לשם כך, חשבו את תגובת המערכת עבור שלושה ערכים של קבוע הזמן (בשניות): $\tau_m = 0.01$, $\tau_m = 0.02$, $\tau_m = 0.04$. רשמו את "זמן התגובה", שהוא (בקירוב) הזמן שבו ערך אות המוצא מגיע ל-95% מהערך במצב המתמיד (במקרה זה, זמן התגובה הוא הזמן שבו אות המוצא מגיע לערך 2.85). בהנחה שמכפלת מקדם הריסון בתדר הטבעי ($\zeta \omega_n$) במערכת בקרת האנטנה נמצאת ביחס הפוך לקבוע הזמן של המנוע, מה תוכלו להסיק מכך על תלות זמן התגובה של המערכת בקבוע זמן זה?

הערה ניתן להוכיח כי במערכת בקרת האנטנה, $\zeta \omega_n \propto \frac{1}{\tau_m}$.

6. נבדוק את השפעת משוב המהירות על תגובת המערכת. לשם כך, קבעו שוב את קבוע הזמן של המנוע ל- $\tau_m = 0.01$ שניות, הקטינו את הגבר הטכוגנרטור לערך המינימלי המותר (0.001). השוו את זמן התגובה במקרה זה לזמן התגובה שקיבלתם בסעיף 5 לעיל. שימו לב שאות המוצא ממשיך לגדול גם מעל לערך הנתון בטבלה (מסיבות חישוביות, החישוב במקרה זה נפסק כאשר האות מגיע לערך מרבי השווה לאות המבוא).

מסקנה: למערכת בעלת משוב מצב בלבד יש מקדם ריסון קטן ממקדם הריסון של המערכת בעלת שני המשובים (מצב ומהירות). הוספת משוב המהירות מגדילה את מקדם הריסון של המערכת, ולמעשה הופכת את תגובת המערכת מתת-מרוסנת למרוסנת-יתר, ולכן תורמת ליציבות המערכת.

תגובת התדר של מערכות בקרה

8.1 מהי תגובת תדר?

בפרק 6 למדנו על התגובה הדינמית של מערכת לאות **מדרגה** במבוא המערכת. אות המדרגה משמש בעיקר לאפיון תכונות המערכת במצב **המעבר**, כלומר, בזמן שבו המערכת עוברת ממצב שבו אות המוצא קבוע, למצב שבו מתקבל אות מוצא קבוע חדש.

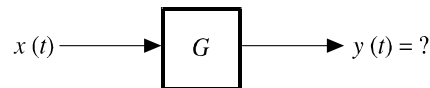
אולם במערכות בקרה, אותות המבוא יכולים להיות אותות בעלי צורות שונות ומשונות. במיוחד, **אותות מחזוריים** מהווים מרכיב חשוב במערכות אלקטרוניות בכלל, ובמערכות בקרה בפרט. כידוע, כל אות מחזורי ניתן לתיאור כסכום של אותות סינוסיים בעלי תדרים שונים ותנופות (אפליטודות) שונות. התדר של אות הסינוס בעל התנופה הגדולה ביותר בסכום זה, שווה לתדר המחזורי של האות. תדר זה נקרא התדר היסודי. התדרים של אותות הסינוס האחרים בסכום הם כפולות של התדר היסודי, והם קרויים תדרים הרמוניים. מחקירת התגובה של מערכת לאות מבוא סינוסי ניתן אפוא להסיק על התגובה של המערכת לאותות מחזוריים בכלל, ולתלות של התגובה **בתדר** האות המחזורי, בפרט. התגובה של מערכת בקרה **לאות מבוא סינוסי** בתלות בתדר האות, היא **תגובת התדר של המערכת**. כפי שנראה בהמשך, מתגובת התדר של מערכת בקרה ניתן ללמוד על **פונקציית התמסורת** של המערכת. לפיכך, מידיעת תגובת התדר של מערכת ניתן להסיק גם על תגובת המערכת לכל אות מבוא שהוא, ולאותות מחזוריים, בפרט.

8.2 תגובת התדר של מערכת לאות מבוא סינוסי

המלבן שבאיור 8.1 מתאר מערכת בקרה עם אות מבוא התלוי בזמן $x(t)$, ואות מוצא התלוי אף הוא בזמן $y(t)$. נניח שאות המבוא למערכת הוא אות הסינוס:

$$x(t) = X \sin \omega t$$

כאשר X הוא תנופת האות והמכפלה ωt מציינת זווית הנמדדת ברדיאנים.



איור 8.1 תרשים מלבנים של מערכת עם אותות מבוא ומוצא מחזוריים

הגודל המאפיין את מחזוריות האות הוא ω , התדר הזוויתי של האות, שיחידותיו הן $\left[\frac{\text{רדיאנים}}{\text{שנייה}} \right]$.

הקשר בין התדר הזוויתי ω לבין תדר האות f שיחידותיו הן הרץ (או "מחזורים בשנייה") הוא:

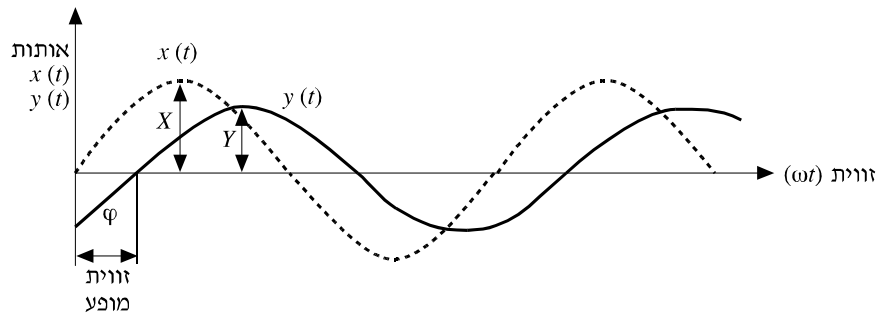
$$\omega = 2\pi f$$

איזה אות y מתקבל במוצא המערכת? הגיוני להניח שהאות במוצא יהיה גם הוא פונקציה מחזורית של הזמן. ואכן, אות המוצא מקיים את הכלל היסודי הבא:

במערכת בקרה **ליניארית** (כדוגמת המערכות שבהן אנו עוסקים בספר זה), אות מבוא סינוסי יוצר אות מוצא סינוסי בעל תדר זהה לתדר אות המבוא, אך מוזז בזווית מופע ϕ ביחס לאות המבוא.

התנופה של אות המוצא יכולה להיות שונה (גדולה או קטנה) בגורם G מתנופת אות המבוא G הוא אפוא ההגבר של מערכת הבקרה. גם ההגבר G וגם הזווית ϕ תלויים בתדר ω .

באיור 8.2 מתוארת בצורה גרפית התלות בזמן של שני האותות. בדוגמה זו רואים כי אות המוצא $y(t)$ מפגר אחר אות המבוא $x(t)$ בזווית המופע φ .



איור 8.2 התלות בזמן של אותות מבוא ומוצא מחזוריים

את הכלל היסודי נוכל לרשום בצורה הבאה:

$$(8-1) \quad G = \frac{y(t)}{x(t)}$$

או

$$(8-2) \quad Y \cdot \sin(\omega t \pm \varphi) = G \cdot X \sin \omega t$$

כאשר $y(t) = Y \sin(\omega t \pm \varphi)$ הוא אות המוצא.

על-פי ההגדרה, ההגבר G זהה למעשה לפונקציית התמסורת של המערכת. לפיכך, במקרה זה, פונקציית התמסורת היא היחס בין שתי פונקציות סינוסיות בעלות אותו מחזור, שקיים ביניהן הפרש מופע φ .

בהמשך נראה כי פונקציה המקיימת תנאים אלו נוח לתאר כפונקציה מרוכבת, כלומר, פונקציה שערכיה הם מספרים מרוכבים.

אך תחילה נחזור בקצרה על יסודות תורת המספרים המרוכבים, ועל אופן השימוש בפאזורים (חומר שנלמד בתורת החשמל)*.

כידוע, אפשר להציג מספר מרוכב Z באחת הצורות הבאות:

– **הצורה הקרטזית:** $Z = a + jb$
 כאשר a הוא החלק הממשי ו- b הוא החלק המדומה של המספר המרוכב j הוא יחידת האורך על הציר המדומה המקיים $j = \sqrt{-1}$.

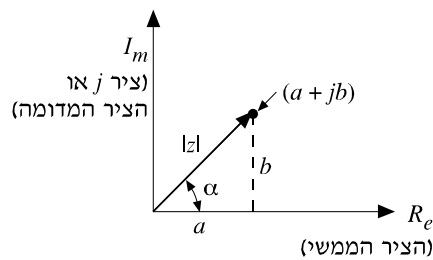
– **הצורה הקוטבית,** $Z = |Z| \angle \alpha$, כאשר הסימן $\angle \alpha$ מציין את הזווית α .
 היא הזווית, ו- $|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ הוא הגודל (או העוצמה, או הערך המוחלט) של המספר המרוכב.

הערה: נהוג לסמן פונקציה טריגונומטרית הפוכה על-ידי arc tg , או tg^{-1} , או inv tg (זה האחרון בגלל הסימון הקיים במחשבונים).

– **הצורה הטריגונומטרית:** $Z = |Z|(\cos \alpha + j \sin \alpha)$. ומכאן $a = |Z| \cos \alpha$,
 $b = |Z| \sin \alpha$.

– **הצורה המעריכית:** $Z = |Z|e^{j\alpha}$

כל מספר מרוכב Z אפשר לתאר בצורה גרפית במישור המרוכב, במערכת צירים קרטזית או במערכת צירים קוטבית. ראו איור 8.3.



איור 8.3 תיאור מספר מרוכב כווקטור במישור המרוכב

* רשות

לכל מספר מרוכב Z קיים מספר מרוכב צמוד Z^* בעל אותו גודל ובעל זווית שווה בגודלה אך הפוכה בכיוונה:

$$Z^* = \alpha - jb = |Z| (\cos \alpha - j \sin \alpha) = |Z| \angle -\alpha = |Z| e^{-j\alpha}$$

נציג את Z ואת Z^* בצורה הטריגונומטרית ובצורה המעריכית:

$$(8-3) \quad e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha$$

$$(8-4) \quad e^{-j\alpha} = \cos \alpha - j \sin \alpha$$

נחשב את ההפרש בין שני המספרים, ונקבל ביטוי עבור $\sin \alpha$:

$$\sin \alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}$$

נחבר את שני המספרים ונקבל ביטוי עבור $\cos \alpha$:

$$\cos \alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}$$

אם $Z_1 = a_1 + jb_1$ הוא מספר מרוכב, ו- $Z_2 = a_2 + jb_2$ הוא מספר מרוכב אחר, אזי **המכפלה** שלהם $Z_1 \cdot Z_2$ גם היא מספר מרוכב שהערך המוחלט שלו הוא:

$$(8-5) \quad |Z_1 Z_2| = |Z_1| \cdot |Z_2|$$

כלומר, שווה למכפלת הערכים המוחלטים של Z_1 ו- Z_2 . הזווית של המכפלה היא סכום הזוויות של המספרים Z_1 ו- Z_2 , כלומר:

$$(8-6) \quad \angle Z_1 Z_2 = \angle Z_1 + \angle Z_2$$

אם $Z_1 = a_1 + jb_1$ הוא מספר מרוכב, ו- $Z_2 = a_2 + jb_2$ הוא מספר מרוכב אחר שעוצמתו שונה מאפס, אזי **המנה** שלהם Z_1/Z_2 גם היא מספר מרוכב שהערך המוחלט שלו הוא:

$$(8-7) \quad |Z_1/Z_2| = |Z_1|/|Z_2|$$

כלומר, שווה למנת הערכים המוחלטים של Z_1 ו- Z_2 . הזווית של המנה היא הפרש הזוויות של המספרים Z_1 ו- Z_2 , כלומר:

$$(8-8) \quad \angle Z_1/Z_2 = \angle Z_1 - \angle Z_2$$

עתה נראה כי פונקציית התמסורת G היא גודל מרוכב.

כזכור, התדר הזוויתי הממוצע מוגדר כחסם בין שינוי הזווית α , לבין פרק הזמן t שבו מתרחש השינוי:

$$\omega = \alpha/t$$

$$\alpha = \omega t$$

ולפיכך:

נציב במקום α את הביטוי ωt , ונקבל:

$$\sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

$$\cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

אך על-פי הכלל היסודי אמת המוצא הוא סינוסי. נציג אפוא את אמת המבוא ואת אמת המוצא בצורה המעריכית:

$$x(t) = X \cdot \sin \omega t = X \cdot \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

$$y(t) = Y \cdot \sin(\omega t + \varphi) = Y \cdot \frac{e^{j(\omega t + \varphi)} - e^{-j(\omega t + \varphi)}}{2j} =$$

$$= Y \cdot \frac{1}{2j} [e^{j\omega t} \cdot e^{+j\varphi} - e^{-j\omega t} \cdot e^{+j\varphi}] =$$

$$= Y \cdot \frac{1}{2j} e^{+j\varphi} [e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}] = Y \sin \omega t \cdot e^{+j\varphi}$$

היחס בין אמת המוצא לבין אמת המבוא הוא:

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{Y \sin \omega t \cdot e^{+j\varphi}}{X \sin \omega t} = \frac{Y}{X} e^{+j\varphi}$$

אך על-פי ההגדרה, היחס $\frac{y(t)}{x(t)}$ הוא פונקציית התמסורת G .

מהשוויון האחרון נובע אפוא כי G הוא גודל מרוכב שהערך המוחלט שלו הוא $\frac{Y}{X}$ והזווית שלו היא φ . כלומר:

$$(8-9) \quad G = \frac{Y}{X} e^{+j\varphi} = |G| \angle +\varphi$$

כל אמת סינוסי ניתן להצגה כגודל מרוכב (בהצגה קוטבית) בעל ערך מוחלט וזווית מתאימים:

$$R e^{j(\omega t + \varphi)} = R [\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)]$$

$$R e^{j\varphi} \quad \text{פאזור}$$

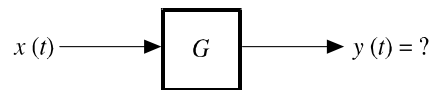
הייצוג הפאזורי של האות נתון על-ידי:

ואנו נאמר כי האות מיוצג על-ידי הפאזור שלו. בהמשך נתייחס אפוא להצגה הקוטבית של האות $zX \sin(\omega t + \phi)$ כאל פאזור בעל ערך מוחלט X וזווית ϕ . ולהפך: אם נתון פאזור X/ϕ ניתן לדעת בקלות את אות הסינוס המיוצג על-ידי פאזור זה; מוסיפים את הזווית ωt לזווית המופע ϕ ומקבלים את הצורה הכללית של האות הסינוסי: $X \sin(\omega t + \phi)$.

8.1 דוגמה

א. רשמו את הביטוי המתמטי של אות המוצא של מערכת שפונקציית התמסורת שלה נתונה על-ידי הגודל המרוכב $G = \frac{10}{1 + 2j\omega}$, ואות המבוא הוא $x(t) = 5 \sin \omega t$.

ב. רשמו את הנוסחה של $y(t)$ עבור התדר $\omega = 3$ (rad/s).



איור 8.4 איור לדוגמה 8.1

פתרון

א. נציג תחילה את G בצורה הקרטזית ולאחר מכן בצורה הקוטבית:

$$G = \frac{10}{1 + 2j\omega} = \frac{10(1 - 2j\omega)}{(1 + 2j\omega)(1 - 2j\omega)} = \frac{10}{(1 + 4\omega^2)} - j \frac{20\omega}{(1 + 4\omega^2)} = \frac{10}{\sqrt{1 + 4\omega^2}} \angle G$$

כאשר הזווית $\angle G$ מקיימת:

$$\angle G = \arctg\left(\frac{-20\omega}{10}\right) = -\arctg(2\omega)$$

אם נכפול את הביטוי של $x(t)$ בצורתו הקוטבית בביטוי של G בצורתו הקוטבית נקבל את אות המוצא $y(t)$:

$$y(t) = Gx(t) = \frac{10}{\sqrt{1 + 4\omega^2}} \cdot \angle G \cdot 5 \angle 0 = \frac{50}{\sqrt{1 + 4\omega^2}} \angle G$$

הזווית $\angle G$ של האות $y(t)$ גורמת להזזת המופע של פונקציית הסינוס בשיעור של:

$$\angle G = -\arctg(2\omega)$$

מכאן שאות המוצא הוא:

$$y(t) = \frac{50}{\sqrt{1+4\omega^2}} \sin[\omega t - \arctg(2\omega)]$$

ב. נציב $\omega = 3$ בביטוי האחרון, ונקבל:

$$y(t)_{(\omega=3)} = 8.22 \sin(3t - 0.447\pi)$$

כצפוי, אות המוצא הוא אות סינוסי שהתדר שלו זהה לתדר של אות המבוא, אך המופע שלו מפגר בשיעור של $\varphi = 0.447\pi$.

ראינו אפוא כי פונקציית התמסורת G של מערכת בקרה היא גודל מרוכב. יתירה מזו, פונקציית התמסורת G תלויה בתדר ω , ולפיכך ניתן להציג את G בצורה:

$$G = G(\omega) = a(\omega) + j\omega b(\omega)$$

כאשר a ו- b הם מספרים ממשיים שיכולים להיות תלויים ב- ω . באגף ימין של המשוואה האחרונה רשמנו את התדר ω באופן מפורש בחלק המדומה של G , כדי להבליט את המשמעות של הגדלים a ו- b . ואמנם, על-ידי הוצאת a מחוץ לסוגריים, מקבלים:

$$G(\omega) = a\left(1 + j\omega \frac{b}{a}\right)$$

ואפשר לראות שהמכפלה $\omega \frac{b}{a}$ היא חסרת ממדים פסיקליים.

לפיכך, הביטוי b/a הוא בעל ממד של זמן, ומכונה גם קבוע הזמן של הרכיב או של המערכת: $\tau = b/a$.

נוכל אפוא לרשום את פונקציית התמסורת בצורה הבאה:

$$(8-10) \quad G(\omega) = a(1 + j\omega\tau)$$

כאשר הערך המוחלט $|G|$ נתון על-ידי:

$$|G| = |a| \cdot \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}$$

והזווית $\angle G$ נתונה על-ידי:

$$\angle G = \arctg(\omega\tau)$$

8.3 תגובת התדר של רכיבים חשמליים מסדר ראשון

8.3.1 מבוא

בטרם נדון בפירוט בתגובת התדר של מערכות בקרה, נחזור ונזכיר כי הרכיבים של מערכות בקרה יכולים להיות רכיבים מכניים, פנימטיים, חשמליים, מגנטיים, אופטיים ועוד. לעתים קרובות מערכות הבקרה משלבות רכיבים פיסיקליים בעלי תכונות שונות. כזכור, עובדה זו עומדת ביסוד השימוש בתרשימי מלבנים לתיאור מערכות ולמציאת פונקציות התמסורת שלהן.

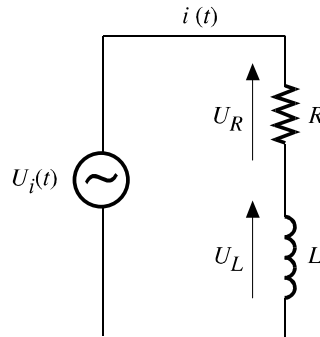
כדי להקל את הבנת החומר ובמיוחד את מושג פונקציית התמסורת התלויה בתדר, נביא בהמשך דוגמאות של מעגלים חשמליים פשוטים ונחשב את תגובת התדר שלהם. לשם כך, נתבסס על חומר שנלמד במקצוע "תורת החשמל", בפרקים הדנים במעגלי זרם חילופין. כמו כן, נשתמש בפעולות מתמטיות כגון גזירה ואינטגרציה, הנלמדות בתכניות הלימודים במתמטיקה.

נצביע גם על הדמיון שבין הגישה של תורת החשמל המחשבת את תגובת התדר של מעגלי זרם חילופין באמצעות פאזורים, לבין הגישה של תורת הבקרה המחשבת את פונקציית התמסורת של מערכת בצורתה המרוכבת.

מעגלים חשמליים הכוללים נגד, קבל ומשרן (מעגלי RLC) הם דוגמה טיפוסית למערכות מסדר שני, שבהן נעסוק בהמשך פרק זה. אך תחילה נחזור ונדון במעגלי RL ו- RC המהווים דוגמאות למערכות מסדר ראשון. נחשב את תגובת התדר של מעגלים אלו, ונראה כיצד ניתן לתאר אותה באופן גרפי.

8.3.2 מעגל RL טורי

באיור 8.5 נתון מעגל חשמלי RL טורי. נתייחס אל המעגל כאל "מערכת" ונחשב את פונקציית התמסורת שלו. נגדיר את מתח ההדקים U_i כאות המבוא למערכת, ואת המתח U_R על הנגד, או המתח U_L על המשרן, כאותות המוצא של המערכת.



איור 8.5 מעגל RL טורי הכולל מקור מתח סינוסי

מתח ההדקים הוא אות סינוסי הנתון על-ידי הפאזור*:

$$\underline{U}_i = U_M \angle 0$$

U_M היא התנופה של האות הסינוסי, ומניחים כי המופע שלו הוא אפס.

עכבת מעגל RL טורי היא:

$$Z = R + jX_L = R + j\omega L = |Z| \angle \theta$$

כאשר:

$$\angle \theta = \arctan \frac{\omega L}{R}; \quad |Z| = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$$

פאזור הזרם במעגל שווה ליחס שבין פאזור המתח \underline{U}_i לבין העכבה Z :

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_i}{Z} = \frac{U_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cdot \angle -\theta$$

או בהצגה הטריגונומטרית:

$$I = \frac{U_M}{R\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \sin(\omega t - \theta)$$

כאשר $\tau = L/R$.

* הקו התחתון מתחת לאות מציין שהגודל הוא פאזור.

המתח על הנגד נתון על-ידי מכפלת הזרם I בהתנגדות R :

$$U_R = IR = \frac{U_M}{R\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} R \cdot \sin(\omega t - \theta)$$

או בהצגה הפאזורית :

$$\underline{U}_R = \frac{U_M}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \angle -\theta$$

נגדיר את פונקציית התמסורת של המעגל כיחס בין פאזור המתח על הנגד לבין פאזור מתח ההדקים :

$$(8-11) \quad G_R = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \angle -\theta$$

פאזור המתח על המשרן נתון על-ידי מכפלת פאזור הזרם בעכבה $X_L = j\omega L$ של המשרן :

$$\underline{U}_L = \underline{I}X_L = \underline{I}j\omega L = \underline{U}_i \frac{j\omega L}{R + j\omega L}$$

כאשר פאזור הזרם מבוטא כאן כיחס בין פאזור מתח ההדקים \underline{U}_i לבין העכבה הכללית של המעגל, $R + j\omega L$.

נגדיר פונקציית תמסורת נוספת של המעגל כיחס בין פאזור המתח על המשרן לבין פאזור מתח ההדקים :

$$(8-12) \quad G_L = \frac{\underline{U}_L}{\underline{U}_i} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} = \frac{j\omega\tau(1 - j\omega\tau)}{(1 + \omega^2\tau^2)} = \\ = \frac{\omega^2\tau^2 + j\omega\tau}{(1 + \omega^2\tau^2)} = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \angle \pi/2 - \theta$$

כאשר את הזווית θ הגדרנו לעיל: $\angle \theta = \arctg \omega\tau$.

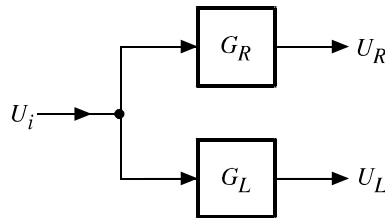
* שוויון זה נובע מהזהות הטריגונומטרית $\arctg \frac{1}{\alpha} = \frac{\pi}{2} - \arctg \alpha$, כאשר α נתונה ברדיאנים.

באיור 8.6 נתון תרשים המלבנים של המערכת. אנו רואים שאפשר לחשב שני אותות מוצא. בהתאם לפונקציות התמסורת שהגדרנו – מתח המוצא יכול להיות המתח על הנגד, או המתח על המשרן.

(8-13) $\underline{U}_R = G_R \underline{U}_i$ אם אות המוצא הוא המתח על הנגד, אזי:

וכאשר אות המוצא הוא המתח על המשרן, אזי:

(8-14) $\underline{U}_L = G_L \underline{U}_i$



איור 8.6 תרשים מלבנים של מעגל RL עם שני אותות מוצא

הערך המוחלט של G_R נתון על-ידי:

(8-15) $|G_R| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}}$

והזווית של פונקציית התמסורת G_R נתונה על-ידי:

$$\angle G_R = \angle -\theta = \angle -\arctg\left(\frac{\omega L}{R}\right) = -\arctg(\omega \tau)$$

ממשוואות אלו נובע כי הן הערך המוחלט $|G_R|$ והן הזווית $\angle G_R$ תלויים בתדר ω של אות המבוא. כאשר התדר ω גדל, הערך המוחלט $|G_R|$ קטן. כאשר ω גדל לאין-סוף, מתקיים:

(8-16) $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |G_R| = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} = \frac{1}{\omega \tau} \rightarrow 0$

הסימן \lim הוא קיצור של \lim , והוא מציין, במקרה זה, שהתדר שואף לאין-סוף, כלומר, גדל עוד ועוד. לפיכך, $|G_R|$ שואף לאפס כאשר התדר שואף לאינסוף. היות שהערך המוחלט $|U_R|$ של אות המתח על הנגד נמצא ביחס ישר לערך המוחלט $|G_R|$ של פונקציית התמסורת (ראו משוואה (8-13)), הרי שגם U_R עצמו תלוי בתדר: ככל שהתדר ω גדל, הערך המוחלט של אות המתח על הנגד קטן. עובדה זו אינה צריכה להתמיה אותנו כמובן. בתורת החשמל למדנו כי ההיגב ההשראותי של מעגל RL נמצא ביחס ישר לתדר של מתח המקור, $X_L = \omega L$, והזרם במשך (ובנגד) נתון על-ידי היחס:

$$I = \frac{U_L}{X_L}$$

לפיכך, ככל שהתדר ω גדול יותר, הזרם במעגל RL קטן יותר, וגם מפל המתח על העומס (הנגד R במעגל RL) קטן יותר. מאידך, בתדרים נמוכים, הערך המוחלט של פונקציית התמסורת G_R שואף לערך קבוע:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |G_R| = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \rightarrow 1$$

כלומר, במקרה זה, הערך המוחלט של אות המוצא שווה לערך המוחלט של אות המבוא (ואמנם במעגל DC , $X_L = 0$). את תגובת התדר של מעגל RL נוכל אפוא לסכם כדלקמן.

פונקציית התמסורת G_R :

- בתדרים גבוהים, הערך המוחלט $|G_R|$ של פונקציית התמסורת G_R שואף לאפס, ואילו הזווית $\angle G_R$ שואפת ל- $90^\circ - 90^\circ = -90^\circ$ (arc tg $\infty = -90^\circ$).
- בתדרים נמוכים, הערך המוחלט $|G_R|$ של פונקציית התמסורת G_R שואף ל-1, והזווית $\angle G_R$ שואפת לאפס ($\arctg 0 = 0^\circ$).

פונקציית התמסורת G_L :

- בתדרים גבוהים, הערך המוחלט $|G_L|$ של פונקציית התמסורת G_L שואף ל-1 (משוואה (8-12)), והזווית $\angle G_L$ שואפת לאפס. ואמנם:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \angle G_L = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \omega \tau \right) = \frac{\pi}{2} - \arctg \infty = 0^\circ$$

- בתדרים נמוכים, הערך המוחלט $|G_L|$ של פונקציית התמסורת G_L שואף לאפס, והזווית $\angle G_L$ שואפת ל- 90° .

על-פי הזווית $\angle G_R$ (או הזווית $\angle G_L$) ניתן לדעת את הפרש המופע בין אות המוצא לבין אות המבוא. הזווית $\angle G_R$ היא שלילית בכל תדר ω (ראו משוואה (8-11)). לפיכך, אות המתח על העומס במעגל (U_R) מפגר אחר אות מתח המבוא (U_i). לעומת זאת, המתח על המשרן (U_L) מקדים את מתח המבוא (U_i), כשם שמופע המתח על המשרן מקדים את מופע הזרם במשרן (הזווית $\angle G_L$ היא חיובית לכל ערך של ω !).

8.2 דוגמה

נתון מעגל RL שבו $L = 10 \text{ mH}$ ו- $R = 10 \Omega$. חשבו:

- את פונקציית התמסורת G_L של המעגל בתדר של 50 Hz (הציגו את G_L בצורה קוטבית).
- את מתח המוצא, אם אות מתח המבוא הוא אות סינוס שתנופתו היא 5 V , וזווית המופע שלו היא אפס.

פתרון

א. ממשוואה (8-12) מקבלים:

$$G_L = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \angle \pi/2 - \theta$$

כאשר:

$$\theta = \text{arctg } \omega\tau$$

נציב:

$$R = 10\Omega, L = 10^{-2}\text{H}, \omega = 2\pi f = 2\pi \times 50 = 100\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

ונקבל:

$$\omega\tau = \omega \frac{L}{R} = 100\pi \times \frac{10^{-2}}{10} = \frac{\pi}{10}$$

$$\theta = \text{arc tg } \omega\tau = \text{arc tg } \frac{\pi}{10} = 0.3 \text{ rad} = 18^\circ$$

$$G_L = \frac{\frac{\pi}{10}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{10}\right)^2}} \angle \pi/2 - 0.3 = 0.3 \angle 72^\circ$$

ב. נרשום את מתח המבוא כפאזור בהצגה הקוטבית:

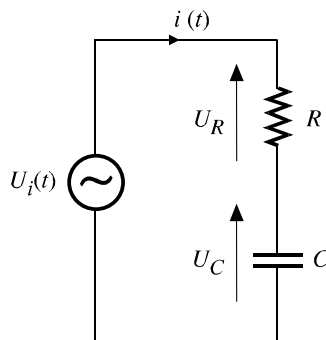
$$U_i = 5 \angle 0$$

מכאן שפאזור מתח המוצא הוא:

$$\underline{U}_L = \underline{G}_L \underline{U}_i = 0.3 \angle 72^\circ \times 5 \angle 0 = 1.65 \angle 72^\circ$$

8.3.3 מעגל RC טורי

באיור 8.7 מתואר מעגל חשמלי RC טורי. גם כאן נתייחס למעגל כאל "מערכת" שאת פונקציית התמסורת שלה אנו מעוניינים לחשב. אות המבוא למערכת הוא מתח ההדקים U_i , ואות המוצא הוא המתח U_R על הנגד או המתח U_C על הקבל.



איור 8.7 מעגל RC טורי הכולל מקור מתח סינוסי

מתח ההדקים הוא האות הסינוסי:

$$U_i = U_M \cdot \sin \omega t$$

ולכן פאזור מתח ההדקים הוא:

$$\underline{U}_i = U_M \cdot \angle 0$$

עכבת מעגל RC טורי היא :

$$Z = R - jX_C = R - j/\omega C = |Z| \cdot \underline{\angle \theta}$$

כאשר :

$$\underline{\angle \theta} = -\arctg\left(\frac{1}{\omega RC}\right) = \arctg(\omega RC) - \frac{\pi}{2} = \arctg(\omega \tau) - \pi/2$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2} = R\sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2 \tau^2}}$$

כאן $\tau = RC$.

פאזור הזרם במעגל הוא היחס בין פאזור מתח ההדקים והעכבה Z :

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_i}{Z} = \frac{U_M}{R\sqrt{1 + 1/\omega^2 \tau^2}} \underline{\angle -\theta}$$

פאזור המתח על הנגד הוא :

$$\underline{U}_R = \underline{U}_i \frac{R}{Z} = \underline{U}_i \frac{R}{R - \frac{j}{\omega C}} = \underline{U}_i \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{j\omega\tau}\right)} = \underline{U}_i \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}$$

נגדיר את פונקציית התמסורת של המעגל כיחס בין פאזור המתח על הנגד \underline{U}_R לבין פאזור מתח

ההדקים \underline{U}_i :

$$(8-17) \quad G_R = \frac{\underline{U}_R}{\underline{U}_i} = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \underline{\angle -\theta}$$

פאזור המתח על הקבל הוא :

$$\underline{U}_C = \underline{U}_i \frac{(-jX_C)}{R - jX_C} = \underline{U}_i \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \underline{U}_i \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

337 תגובת התדר של מערכות בקרה

נגדיר פונקציית תמסורת נוספת של המעגל כיחס בין פאזור המתח על הקבל \underline{U}_C לבין פאזור מתח ההדקים \underline{U}_i :

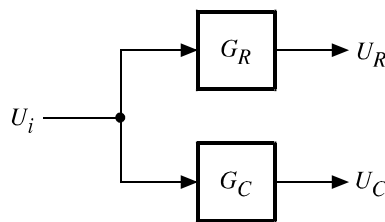
$$(8-18) \quad G_C = \frac{U_C}{U_i} = \frac{1}{1 + j\omega\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \angle \theta'$$

כאשר $\theta' = -\theta - \pi/2 = \text{arctg}(\omega\tau)$.

באיור 8.8 נתון תרשים המלבנים של המערכת. גם במקרה זה ניתן לחשב שני אותות מוצא, המתח על הנגד והמתח על הקבל – בהתאם לפונקציית התמסורת המתאימה.

$$(8-19) \quad \underline{U}_R = G_R \underline{U}_i$$

$$(8-20) \quad \underline{U}_C = G_C \underline{U}_i$$



איור 8.8 תרשים מלבנים של מעגל RC עם שני אותות מוצא

בהמשך נבדוק את תלות הערך המוחלט $|G_R|$ והזווית $\angle G_R$ בתדר ω (משוואה (8-17)), וגם את התלות של $|G_C|$ ו- $\angle G_C$ בתדר ω , כאשר ω משתנה בגבולות שבין אפס לאין-סוף. ממשוואה (8-17) נובע כי:

$$(8-21) \quad |G_R| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

$$(8-22) \quad \angle G_R = -\theta = \frac{\pi}{2} - \text{arctg } \omega RC$$

$$(8-23) \quad |G_C| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

$$(8-24) \quad \angle G_C = -\theta - \frac{\pi}{2} = \text{arctg } \omega RC$$

ממשוואות (8-21)-(8-22) נובע כי :

- בתדרים גבוהים, הערך המוחלט $|G_R|$ של פונקציית התמסורת G_R שואף ל-1, והזווית $\angle G_R$ שואפת לאפס.

- בתדרים נמוכים, הערך המוחלט $|G_R|$ של פונקציית התמסורת G_R שואף לאפס, והזווית $\angle G_R$ שואפת ל- 90° .

ממשוואות (8-23)-(8-24) נובע כי :

- בתדרים גבוהים, הערך המוחלט $|G_C|$ של פונקציית התמסורת G_C שואף לאפס, והזווית $\angle G_C$ שואפת ל- -90° .

- בתדרים נמוכים, הערך המוחלט $|G_C|$ של פונקציית התמסורת G_C שואף ל-1, והזווית $\angle G_C$ שואפת לאפס.

מהעובדה כי ערך הזווית $\angle G_C$ הוא בין אפס ל- -90° בכל תחום התדרים, ניתן להסיק כי אות המוצא U_C מפגר אחר אות המבוא U_i בכל תדר ω . (מה ניתן להסיק על הפרש המופע בין האות U_R לאות U_i במעגל RC ?).

8.4 התיאור הגרפי של תגובת התדר

8.4.1 מבוא

בסעיף הקודם חזרנו על מושגים מתורת החשמל, והראינו כיצד מחשבים את פונקציית התמסורת של מעגלים פשוטים בתלות תדר אות המבוא (תגובת התדר).

את תגובת התדר ניתן להציג באמצעות גרפים, שמהם אפשר ללמוד על התכונות החשובות של פונקציית התמסורת של המערכת בצורתה המרוכבת, בלי להזדקק לפתרון משוואות מתמטיות מסובכות.

קיימות שיטות אחדות לתיאור גרפי של תגובת התדר של רכיבים או של מערכות:

- **תרשים בודה (BODE)** הוא גרף המתאר את תלות הערך המוחלט של פונקציית התמסורת G בתדר, ואת תלות זווית המופע בתדר.
 - גרף המתאר את תלות הערך המוחלט של פונקציית התמסורת G בזווית המופע של G .
 - תיאור גרפי של פונקציית התמסורת G במישור המרוכב: הציר האנכי הוא הציר של גודל הרכיב המדומה של G , והציר האופקי הוא הציר של גודל החלק הממשי של G .
- בספר זה נעסוק רק בשיטה אחת – **תרשים בודה (BODE)**. אך לשם כך נגדיר תחילה את המושג **דציבל**.

8.4.1.1 הדציבל (decibel): יחידה למדידת הגבר

הדציבל (ובקיצור – dB) הוא יחידה מקובלת ושימושית מאוד במערכות בקרה למדידת הערך המוחלט של פונקציות תמסורת. בהמשך נתייחס לערך המוחלט של פונקציית התמסורת של מערכת כאל הגבר של המערכת.

במקורו היה הדציבל יחידה שהשתמשו בה בהנדסת תקשורת למדידת היחס בין הספק המוצא להספק המבוא של מערכת.

ההגדרה המקורית של הדציבל מבוססת אפוא על יחסי הספקים, והיא:

$$(8-25) \quad G(\text{dB}) = 10 \log_{10}(P_{\text{out}}/P_{\text{in}})$$

כאשר P_{out} הוא הספק המוצא ו- P_{in} הספק המבוא למערכת. ההגבר ב-dB שווה לעשר פעמים הלוגריתם (העשרוני) של יחס ההספקים. ל-dB אין ממדים פיסיקליים, היות שהוא יחס בין שני גדלים פיסיקליים בעלי אותם ממדים. לפיכך, ה-dB יכול לשמש יחידת מדידה לא רק ליחסי הספקים אלא גם ליחסי מתחים או גדלים פיסיקליים אחרים. נוכל להתייחס אל הדציבל כאל יחס בין מתחים או בין עוצמות של אותות, אם נשתמש בקשר הקיים בין המתח U לבין ההספק P המושקע ברכיב חשמלי שהתנגדותו האומית R : $P = \frac{U^2}{R}$.

נקבל כי:

$$G(\text{dB}) = 10 \log \frac{\frac{U_o^2}{R_o}}{\frac{U_i^2}{R_i}} = 10 \log \left(\frac{U_o}{U_i} \right)^2 \left(\frac{R_i}{R_o} \right) = 10 \log \left(\frac{U_o}{U_i} \right)^2 + 10 \log \frac{R_i}{R_o}$$

כאשר:

- U_o הוא מתח המוצא מהמערכת,
- R_o היא התנגדות המוצא של המערכת,
- U_i הוא מתח המבוא למערכת,
- R_i היא התנגדות המבוא של המערכת.

אם מניחים שהתנגדות המוצא והתנגדות המבוא שוות, אזי הלוגריתם העשרוני של המנה שלהם הוא אפס:

$$R_o = R_i$$

$$\Rightarrow 10 \log 1 = 0$$

ובמקרה זה, יחידת הדציבל מוגדרת באמצעות יחס התנופות:

$$(8-26) \quad |G|(\text{dB}) = 20 \log \frac{|U_o|}{|U_i|} = 20 \log |G|$$

כלומר, כפול מיחס ההספקים. בהמשך נתייחס ל- $|G|$ כאל יחס בין מתחים, ונשתמש במשוואה (8-26) לחישוב ערכו של $|G|$ בדציבלים.

מהגדרת הדציבל נובעים הכללים הבאים :

א. הערכים ב-dB של הגבר מסוים $|G|$ ושל הערך ההופכי של ההגבר $1/|G|$, שווים בגודלם ומנוגדים בסימנם.

למשל, הערך ב-dB של ההגבר $|G| = 2$ הוא 6 dB, ושל ההגבר $|G| = \frac{1}{2}$ הוא -6 dB.

ב. כאשר מכפילים את ערך ההגבר (מגדילים פי שניים), ערכו בדציבלים גדל ב-6 dB.

למשל, הכפלת ההגבר מ- $|G| = 1$ ל- $|G| = 2$ מגדילה את $|G|$ ב-6 dB.

גם הכפלת ההגבר מ- $|G| = 5000$ ל- $|G| = 10000$ מגדילה את ערכו ב-6 dB.

ג. הגדלת ההגבר פי 10, מגדילה את ערכו בדציבלים ב-20 dB.

למשל, הגדלת ההגבר מ- $|G| = 10$ ל- $|G| = 100$ מגדילה את ערכו בדציבלים ב-20 dB. גם

הגדלת ההגבר מ- $|G| = 53$ ל- $|G| = 530$ גורמת להגדלת ערכו בדציבלים ב-20 dB. הגדלת

ההגבר פי 100, למשל מ-2 ל-200, שקול להגדלה של 40 dB.

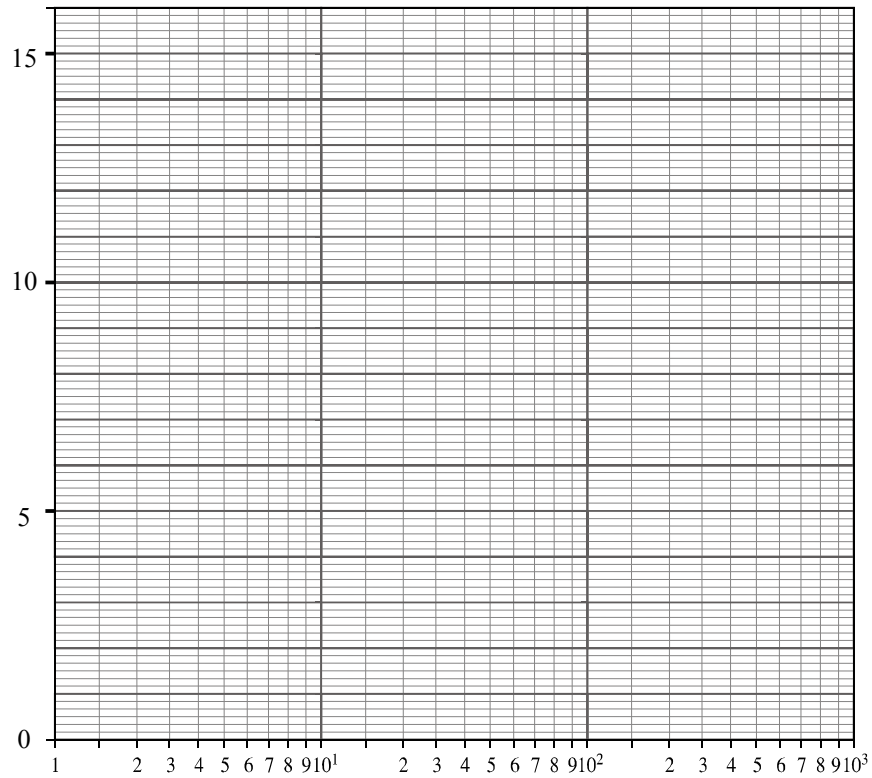
8.4.1.2 מערכת צירים חצי לוגריתמית

אחת הבעיות העלויות להתעורר כאשר מעוניינים לתאר באופן גרפי את תגובת התדר היא הצורך להציג תחום תדרים רחב, החל מתדר נמוך מאוד ועד לתדרים גבוהים ביותר, השואפים לאין-סוף.

כאשר משתמשים במערכת צירים ליניארית קשה מאוד לעשות זאת שכן מערכת כזאת צריכה להיות גדולה ביותר.

הפתרון הוא שימוש בקנה מידה (סקלה) לוגריתמית, המאפשר "לדחוס" תחום גדול של תדרים למערכת צירים בעלת גודל סטנדרטי.

להצגת התלות בתדר של הערך המוחלט של ההגבר ושל זווית המופע שלו, משתמשים אפוא בגרף המסורטט במערכת צירים חצי-לוגריתמית. דוגמה למערכת צירים כזו מובאת באיור 8.9.



איור 8.9 מערכת צירים "חצי לוגריתמית"

8.4.2 תרשימי בודה

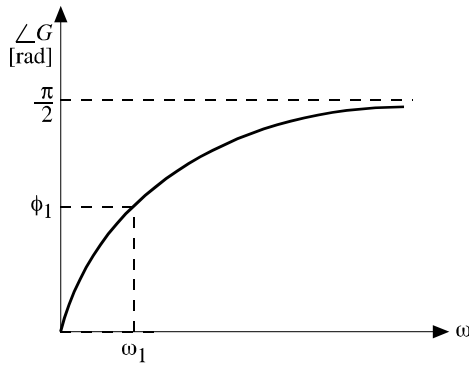
8.4.2.1 ההצגה הגרפית של ההגבר

במקרים רבים צריך לאפיין את התנהגותו של רכיב בודד או של מערכת שלמה על-פי נתונים גרפיים. למשל, יצרני מוצרי אלקטרוניקה מפרסמים חלק מהמידע על הרכיבים בצורת נתונים מספריים וטבלאות, וחלק אחר – בצורת גרפים.

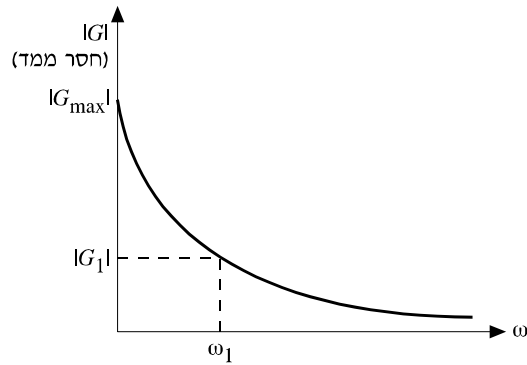
את המידע הגרפי על התלות בתדר של ההגבר (הערך המוחלט) ושל זווית המופע של פונקציית התמסורת של רכיב, אפשר להציג, כאמור, באמצעות **תרשימי בודה**, הכולל שני גרפים כדוגמת הגרפים שבאיור 8.10.

גרף (א) מתאר את תלות ההגבר $|G|$ בתדר ברכיב שפונקציית התמסורת שלו $G(\omega)$.

גרף (ב) מתאר את התלות של זווית המופע $\angle G$ של פונקציית תמסורת זו בתדר.



ב. תלות הזווית של פונקציית התמסורת בתדר אות המבוא למערכת



א. תלות הערך המוחלט של הגבר פונקציית התמסורת של מערכת בתדר אות המבוא למערכת

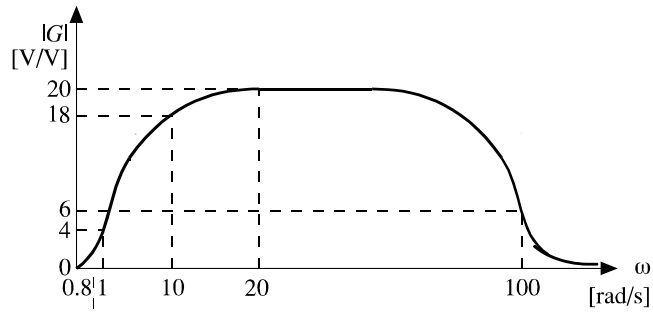
איור 8.10 תרשים בודה

מהתבוננות בשני הגרפים אפשר ללמוד כמה דברים:

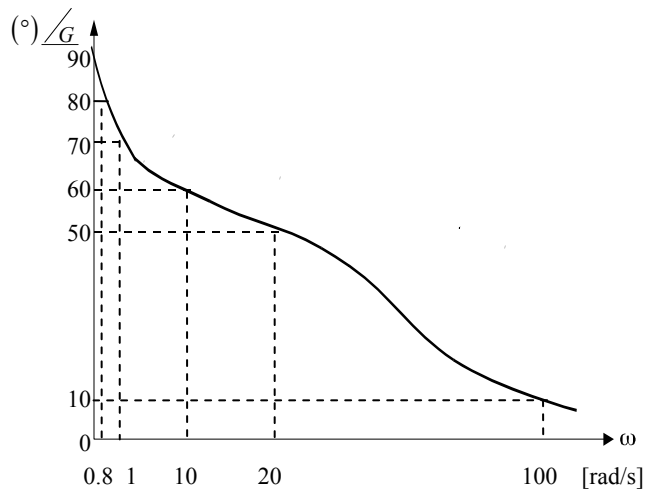
- א. ההגבר המרבי בדוגמה זו מתקבל בתדר אפס (DC), כלומר, כאשר $\omega = 0$. ההגבר קטן בצורה לא-ליניארית ושואף לאפס, כאשר התדר שואף לאין-סוף ($\omega \rightarrow \infty$).
- ב. זווית המופע בדוגמה זו שווה לאפס בתדר אפס, ושואפת לערך $\pi/2$ רדיאנים (או 90°), כאשר התדר שואף לאין-סוף.
- ג. לכל תדר ω של אות המבוא ניתן לחשב את אות המוצא על-פי ההגבר $|G|$ והזווית $\angle G$ המתאימים.
- ד. ניתן לקבל מידע על רוחב הפס של המערכת.

8.3 דוגמה

בבדיקה ניסויית של מגבר אלקטרוני התקבלו התוצאות הנתונות בצורה גרפית בשני הגרפים שבאיור 8.11 (שימו לב למערכת הצירים החצי-לוגריתמית).



א



ב

איור 8.11 איור לדוגמה 8.3

- א. אילו מסקנות אפשר להסיק מן הגרפים על תלות ההגבר וזווית המופע בתדר?
- ב. על-פי גרפים אלה, מצאו את ההגבר ואת זווית המופע של המערכת בתדרים הבאים:
 $\omega = 0.8; 1; 10; 20; 100$ (rad/s).

פתרון

א. על-פי גרף ההגבר אנו רואים כי למגבר יש הגבר כמעט קבוע בתחום מסוים של תדרים זוויתיים.

ההגבר המרבי הוא $20(V/V)$.

כשהתדר הזוויתי גדל מעל לערך של 80 (rad/s) , ההגבר קטן במהירות.

כאשר התדר שואף לאינסוף $(\omega \rightarrow \infty)$, ההגבר שואף לאפס.

זווית המופע קטנה באופן מונוטוני. בתדר אפס, זווית המופע היא $+90^\circ$, כלומר, אות המוצא מקדים את אות המבוא בזווית של 90° .

כאשר התדר שואף לאינסוף, זווית המופע שואפת לאפס.

ב.

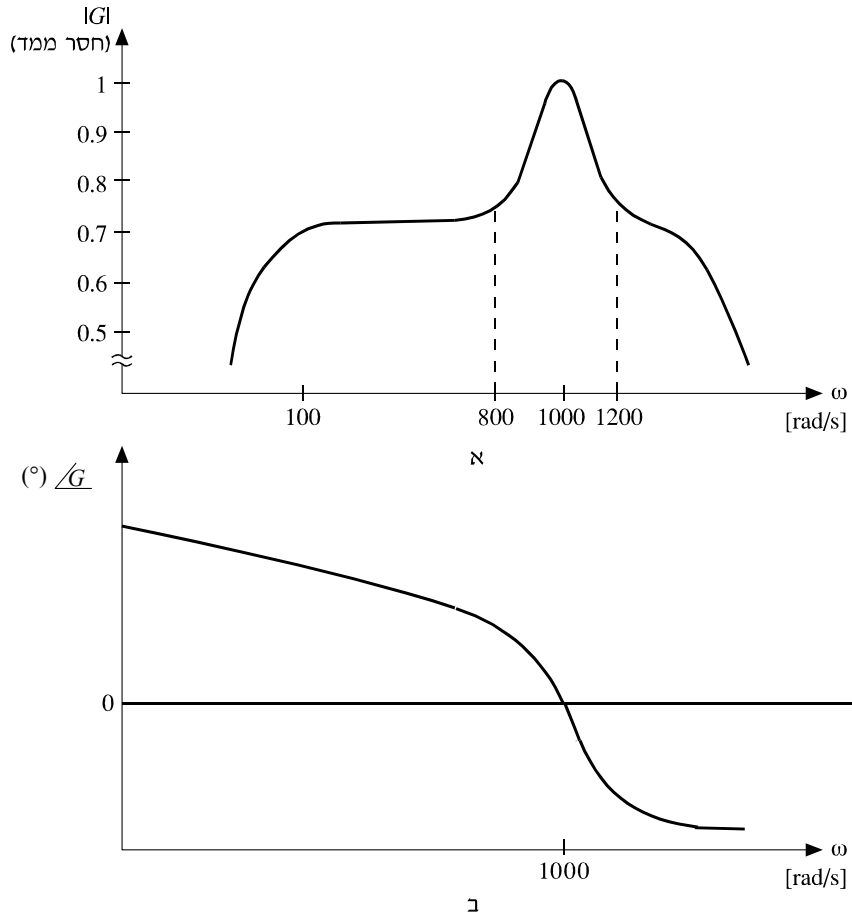
$\omega \text{ (rad/s)}$	$ G $	$\angle G \text{ (מעלות)}$
0.8	1	80
1.0	4	70
10.0	18	60
20.0	20	50
100.0	6	10

דוגמה 8.4

התבוננו בגרפים שבאיור 8.12.

א. האם קיימת תופעה של תהודה במערכת? אם קיימת תופעת תהודה, מהו תדר התהודה ומהי זווית המופע בתדר התהודה?

ב. מהו תדר מחצית ההגבר של המערכת? מהו רוחב הפס?



איור 8.12 איור לדוגמה 8.4

פתרון

- א. מהתבוננות באיור 8.12 אנו למדים כי בתחום תדרים מסוים קיימת קפיצה משמעותית בהגבר, כלומר, קיימת תופעה של **תהודה**.
 תדר התהודה הוא בסביבת 1000 rad/s וערך ההגבר בתדר זה הינו 1. זווית המופע בתדר התהודה היא 0 מעלות.
- ב. בגרף שבאיור 8.12 אפשר לראות כי תדרי מחצית ההגבר, שבהם יורד ההגבר ל-0.707 מהערך המרבי המתקבל בתדר התהודה, הם 800 (rad/s) ו- 1200 (rad/s) . מכאן שרוחב הפס הוא $BW = 400 \text{ (rad/s)}$.

8.4.2.2 תרשים בודה מתוך נתונים ניסיוניים

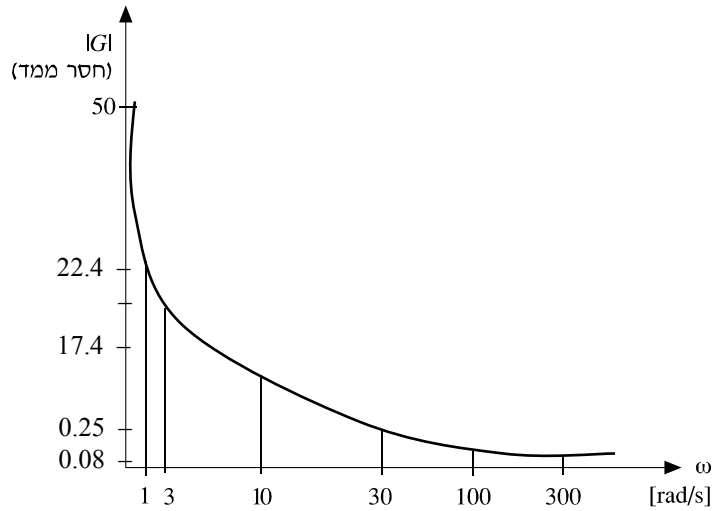
בסעיף הקודם ראינו איזה מידע אפשר לקבל מתוך תרשימי בודה נתונים. לעומת זאת, בסעיף זה, נבנה את הגרפים המתארים את ההגבר והמופע מתוך נתונים ניסויים שרוכזו בטבלה.

היות שפונקציית התמסורת G תלויה בתדר, הרי עבור ערכים שונים של ω נקבל ערכים שונים של $|G|$ ושל זווית המופע $\angle G$.

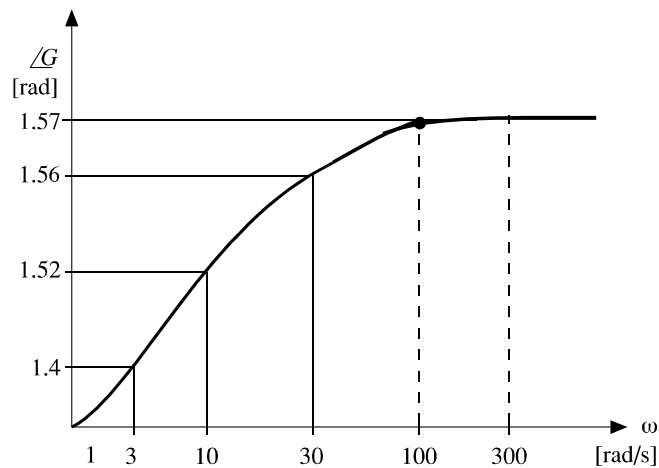
להלן טבלה ובה ערכים מוחלטים וזוויות מופע של G :

ω (rad/s)	$ G $	$\angle G$ (rad)
0	50.0	0
1	22.4	1.10
3	18.2	1.40
10	17.4	1.52
30	5.8	1.56
100	0.25	1.57
300	0.08	1.57
∞	0	1.57 (90°)

על-פי טבלה זו, נסרטט שני תרשימים מקורבים, שאחד מהם מתאר את התלות של $|G|$ בתדר, והאחר את תלות זווית המופע של G בתדר. ראו איור 8.13.



א. תלות של ההגבר $|G|$ של פונקציית התמסורת בתדר אות המבוא



ב. תלות הזווית $\angle G$ של פונקציית התמסורת בתדר אות המבוא

איור 8.13 תרשימי בודה המתקבלים על פי טבלת הנתונים

מהסרטוטים הללו אפשר להסיק כי :

א. כאשר התדר עולה מ-0 ועד אינ-סוף, הערך המוחלט של G יורד מ-50 עד אפס. קצב השינוי של $|G|$ הוא מהיר בתדרים הנמוכים, וקטן ככל שהתדר שואף לאינ-סוף.

ב. זווית המופע היא אפס בתדר אפס וגדלה ל-90 מעלות (1.57 רדיאנים) כאשר התדר שואף לאינ-סוף. כאן רואים עלייה מהירה של φ בתדרים הנמוכים, ועלייה איטית יותר ככל שהתדר שואף לאינ-סוף.

8.5 דוגמה

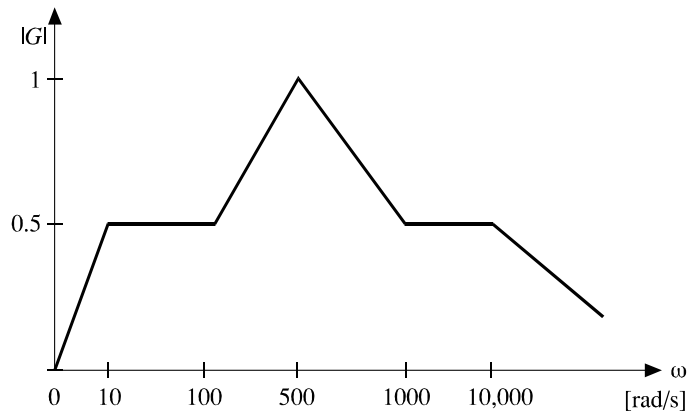
בבדיקה ניסויית של מערכת, התקבלו הנתונים הבאים:

ω (rad/s)	$ G $	$\angle G$ ($^\circ$)
0	0	90
10	0.5	40
100	0.5	40
500	1.0	0
1000	0.5	-40
10000	0.5	-40
∞	0	-90

סרטטו באופן מקורב (על-ידי קווים ישרים) את תרשים בודה של המערכת, כלומר, את הגרפים של $|G|$ ושל $\angle G$ בתלות בתדר.

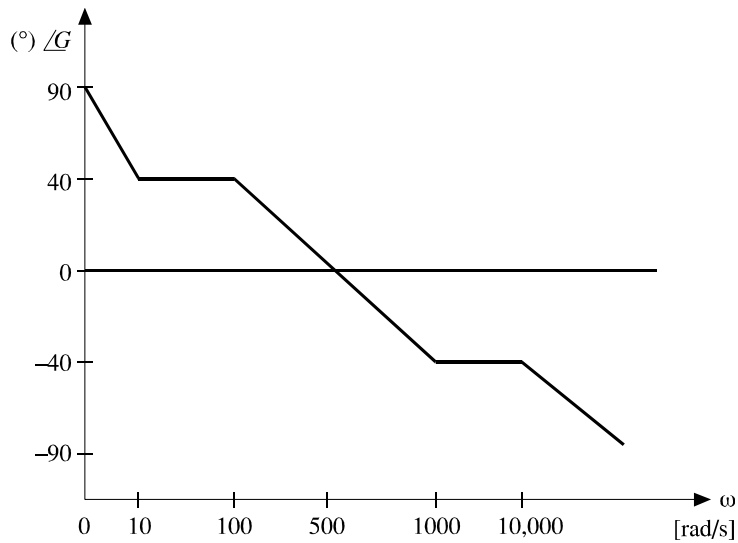
פתרון

הגרפים המבוקשים נתונים באיור 8.14.



א. הגבר פונקציית התמסורת בתלות בתדר

איור 8.14 איור לדוגמה 8.5 (המשך האיור בעמוד הבא)



ב. זווית המופע של פונקציית התמסורת בתלות בתדר

איור 8.14 איור לדוגמה 8.5 (המשך)

8.5 תרשימי בודה של מעגלים חשמליים מסדר ראשון

8.5.1 תיאור לוגריתמי של ההגבר

בסעיף 8.4 למדנו כיצד בונים תרשים בודה של רכיב, שפונקציית התמסורת שלו נתונה בצורת טבלת ערכים.

במקרים רבים אחרים, פונקציית התמסורת של רכיב, או של מערכת, נתונה באמצעות משוואה אלגברית המתארת את התלות של G בתדר ω . למשל, ראינו כי במעגל RL , נתונה על-ידי (משוואה (8-12)):

$$G_L(\omega) = \frac{j\omega L}{R + j\omega L}$$

ועבור מעגל RC קיבלנו כי :

$$(8-27) \quad G_C(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

כדי להציג את תלות ההגבר והזווית בתדר במקרים אלו, יש לרשום תחילה את פונקציות התמסורת $G_L(\omega)$ או $G_C(\omega)$ בצורתן הקוטבית (כפי שהדבר נעשה בסעיף 8.3.2), ואז לבנות טבלה של ערכי $|G_L|$ (או $|G_C|$) ו- $\angle G$ עבור ערכים שונים של ω .

8.6 דוגמה

- א. נתון מעגל RC שקבוע הזמן שלו הוא $\tau = 0.1$ s. בנו טבלה המתארת את התלות של $|G_C|$ בתדר ω בתחום שבין $\omega = 1$ (rad/s) לבין $\omega = 10^3$ (rad/s) (הסתפקו בארבעה ערכים של ω).
- ב. חשבו את ההגבר בדציבלים של המעגל, ותארו אותו במערכת צירים מתאימה.

פתרון

א. נרשום תחילה את הביטוי המפורש עבור $|G_C|$ (משוואה (8-23)):

$$|G_C| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0.01\omega^2}}$$

נחשב את $|G_C|$ עבור ערכי ω הבאים: $\omega = 1$, $\omega = 10$, $\omega = 100$, $\omega = 1000$. מקבלים:

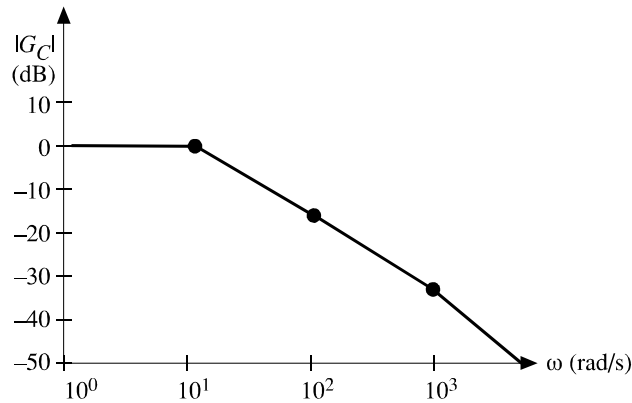
ω (rad/s)	$ G_C $
1	9.950×10^{-1}
10	7.071×10^{-1}
100	9.950×10^{-2}
1000	9.999×10^{-3}

- ב. נעתיק את הטבלה שבחלק א' ונוסיף לה עמודה נוספת של ערכי $|G|$ בדציבלים. החישוב של $|G|$ בדציבלים נעשה על-פי הנוסחה:

$$G_C(\text{dB}) = 20 \log |G_C| = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + 0.01\omega^2}} = -10 \log [1 + 0.01\omega^2]$$

$\omega(\text{rad/s})$	$ G_C $	dB
1	9.95×10^{-1}	-4.32×10^{-2}
10	7.071×10^{-1}	-3.010
100	9.95×10^{-2}	-20.043
1000	9.99×10^{-3}	-40.000

נקבע את הערכים על ציר התדר (הציר האופקי החצי-לוגריתמי) בין $\omega = 10^0$ לבין $\omega = 10^3$, ואת הערכים על הציר האנכי הליניארי נקבע בין 10 (גבול עליון) ו-50 (גבול תחתון). לאחר סימון ארבע הנקודות במערכת הצירים, מקבלים את הגרף שבאיור 8.15.



איור 8.15 איור לדוגמה 8.6

היתרון הגדול של השימוש בסקלה לוגריתמית, או בתיאור ההגבר בדציבלים, טמון בעובדה שפונקציית התמסורת של מערכות מורכבת בדרך כלל ממכפלה (או מנה) של גורמים; למשל, $j\omega L$, $R + j\omega L$, $1 + j\omega RC$, וכו'. כאשר מחשבים את הלוגריתם של מכפלות אלו, פעולת הכפל הופכת לפעולת חיבור, ופעולת החילוק הופכת לפעולת חיסור. למשל, הערך בדציבלים של פונקציית תמסורת הנתונה על-ידי מכפלה של שני גורמים, שווה לסכום הערכים בדציבלים של שני הגורמים. עובדה זו מפשטת במידה רבה את התיאור הגרפי של פונקציית התמסורת המרוכבת.

8.7 דוגמה

הראו כי את ההגבר $|G_L(\omega)|$ (משוואה (8-12)) הנתון בדציבלים, ניתן לרשום כסכום של שני איברים שכל אחד מהם מתאר הגבר בדציבלים.

פתרון

נחשב תחילה את הלוגריתם של $|G_L(\omega)|$:

$$\log|G_L(\omega)| = \log\left|\frac{j\omega L}{R + j\omega L}\right| = \log|(j\omega L)| - \log|(R + j\omega L)|$$

ולכן במקרה זה ההגבר בדציבלים הוא ההפרש:

$$G_L(dB) = 20\log(\omega L) - 20\log\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = 20\log(\omega L) - 10\log(R^2 + \omega^2 L^2)$$

כאשר כל אחד מהאיברים באגף ימין מתאר הגבר בדציבלים.

כאשר מעוניינים בתיאור גרפי של פונקציה, המורכבת ממכפלה של שני גורמים (או יותר), נוח לתאר באופן גרפי את לוגריתם הפונקציה. הגרף של לוגריתם הפונקציה, המורכבת ממכפלה של שני גורמים, מתקבל כסכום של שני הגרפים של לוגריתם הגורמים המרכיבים את הפונקציה.

נדגים כלל זה באמצעות תרשימי בודה של מעגלי RL ו- RC .

8.5.2 תרשימי בודה של מעגל RL טורי ומעגל RC טורי

ראינו כי את פונקציית התמסורת של מעגל RL ניתן לרשום באמצעות קבוע הזמן τ של מעגל RL :

$$(8-28) \quad G_L(\omega) = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}$$

כאשר $\tau = \frac{L}{R}$.

הפונקציה מורכבת ממכפלה של שני גורמים:

1. הגורם $G_1 \equiv j\omega\tau$, שמסיבות שלא נרחיב בהן כאן מייצג פעולה של **גזירה**, ולכן נקרא **גורם גוזר אידיאלי**.

2. הגורם $G_2 = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$, שמייצג פעולה של סכימה (אינטגרציה), ולכן נקרא **גורם סוכם מסדר ראשון**, (או גם **פיגור מסדר ראשון**).

כאמור, אפשר לתאר את ההגבר והמופע (כלומר את תרשים בודה) של פונקציית התמסורת $G_L(\omega)$, באמצעות הסכום של תרשימי בודה של שני הגורמים G_1 ו- G_2 . נסרטט אפוא תחילה בנפרד את תרשימי בודה של גורם גוזר ושל גורם סוכם מסדר ראשון.

(I) תרשים בודה של גורם גוזר אידיאלי

הערך המוחלט של הגורם הגוזר $G_1 = j\omega\tau$ הוא:

$$|G_1| = \omega\tau$$

ולכן ערך ההגבר ב-dB הוא:

$$G_1(\text{dB}) = 20 \log \omega\tau$$

זווית המופע היא:

$$\varphi = \text{arc tg}(\omega\tau/0) = \text{arc tg}(\infty) = 90^\circ$$

נכין טבלה של ערכי ההגבר וזווית מופע עבור כמה ערכים של המכפלה $\omega\tau$:

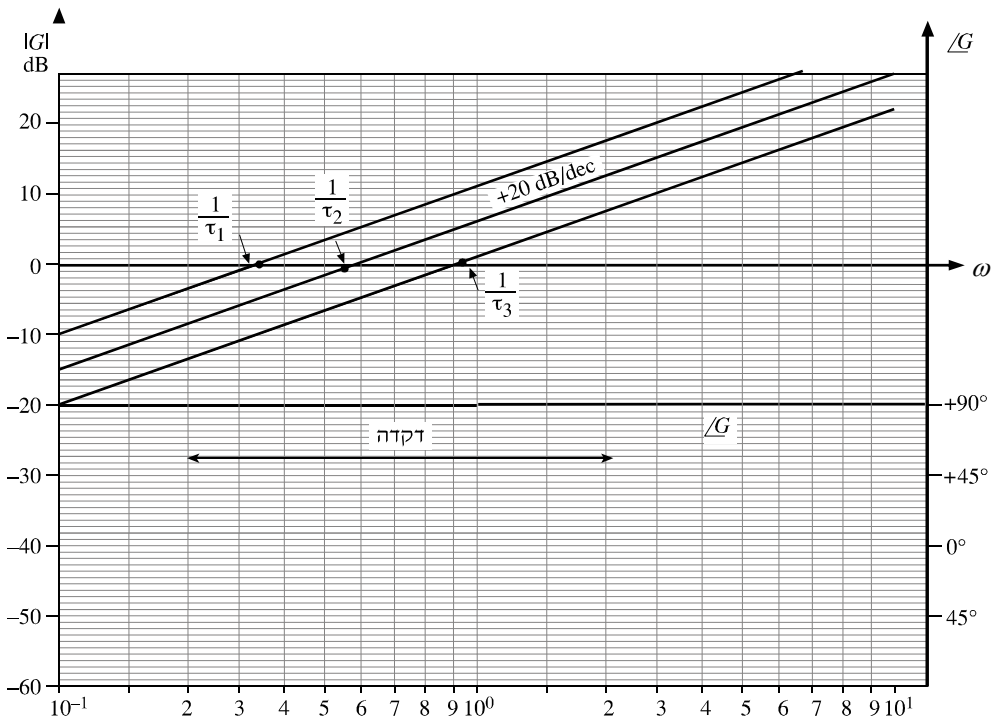
$\omega\tau$	$G_1(\text{dB})$	$\angle G_1$ ($^\circ$)
0	$-\infty$	90
1	0	90
10	20	90
100	40	90
$+\infty$	$+\infty$	90

בתיאור הגרפי של ההגבר במערכת צירים לוגריתמית שבה הציר האופקי הוא ציר התדר (ω) , מקבלים משפחה של קווים מקבילים, כל קו וקבוע הזמן שלו (קו אחד עבור קבוע הזמן τ_1 , קו שני עבור קבוע הזמן τ_2 , וכו'). למשל, הקו שקבוע הזמן שלו τ_1 חותך את קו האפס דציבלים (0 dB) בתדר $\omega_1 = 1/\tau_1$. קו אחר חותך את קו ה-0 dB בתדר $\omega_2 = 1/\tau_2$, וכו'. הקווים חותכים אפוא את קו האפס דציבלים (0 dB) בתדרים המתאימים לקבועי הזמן השונים.

מסקנות:

- א. ההגבר G_1 של גורם גוזר אידיאלי מתואר על-ידי קו ישר בעל שיפוע קבוע של 20 dB/dec.
- ב. גרף ההגבר חותך את קו האפס דציבלים בתדר $1/\tau$.
- ג. זווית המופע $\angle G_1$ קבועה ($+90^\circ$) ואינה משתנה בכל תחום התדרים.

תרשים בודה של גורם גוזר אידיאלי נתון באיור 8.16.



איור 8.16 תרשים בודה של גוזר אידיאלי (הגבר $|G|$, וזווית $\angle G$)

(II) תרשים בודה של גורם סוכם מסדר ראשון

את הערך המוחלט של פונקציית התמסורת :

$$G_2(\omega) = 1/(1 + j\omega\tau)$$

נרשום בצורה :

$$|G_2| = 1/\sqrt{[1 + (\omega\tau)^2]}$$

הערך ב-dB הוא :

$$\begin{aligned} G_2(\text{dB}) &= 20 - \log \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} = 20 \log 1 - 20 \log \sqrt{1 + (\omega\tau)^2} = \\ &= -10 \log[1 + (\omega\tau)^2] \end{aligned}$$

זווית המופע היא :

$$\angle G_2 = -\text{arc tg } \omega\tau$$

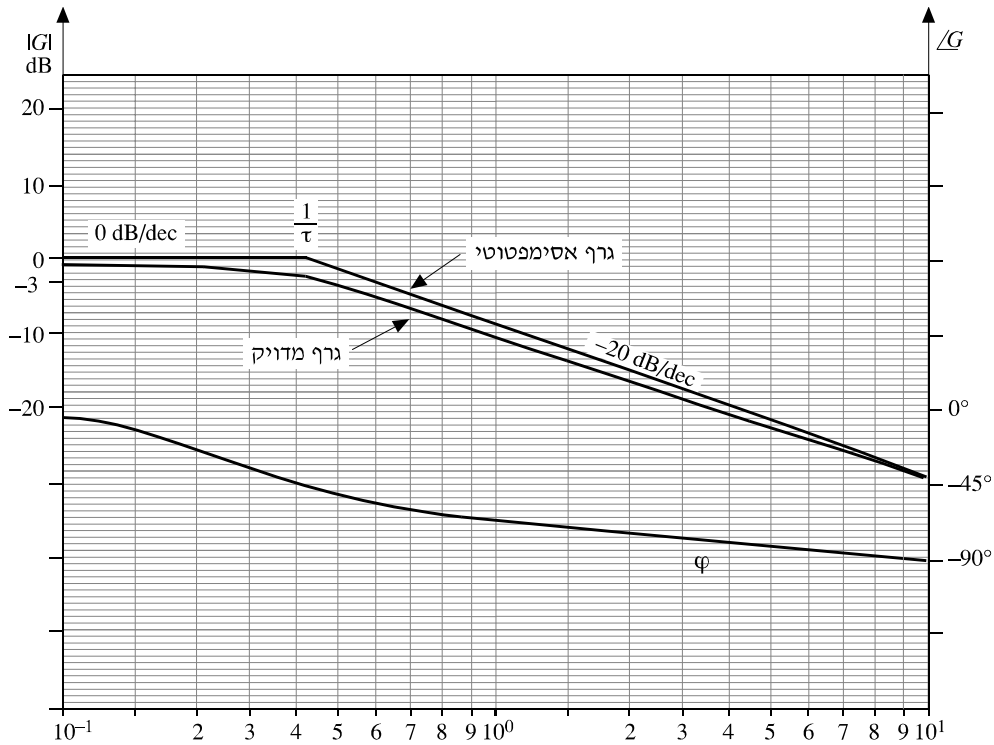
כאן גם ההגבר וגם זווית המופע תלויים בתדר ω . נכין את טבלת הערכים הבאה :

$\omega\tau$	$G_2(\text{dB})$	$\angle G_2(^{\circ})$
0	0	0
1	-3.01	-45
10	-20.04	-84.3
100	-40.00	-89.4
$+\infty$	$-\infty$	-90

תרשים בודה של הביטוי $\frac{1}{1 + j\omega\tau}$ מתואר באיור 8.17.

אנו רואים כי במקרה זה, ניתן לתאר את גרף ההגבר באופן **מקורב** על-ידי שני קווים ישרים, שנקראים קווים אסימפטוטיים: קו ישר ששיפועו $-20 \frac{\text{dB}}{\text{dec}}$ וקו ישר נוסף המתלכד עם ציר האפס דציבל. שני הקווים הישרים נחתכים בתדר $1/\tau$ (הנקרא משום כך "תדר נקודת הברך").

במערכות מסובכות יותר, נוח לחשב ולתאר את גרף ההגבר באמצעות קווים אסימפטוטיים, ודבר זה מקל מאוד את הבנת ההתנהגות הכללית של ההגבר בתלות בתדר. במקרים אלו תרשימי בודה נתונים באמצעות קווים אסימפטוטיים בלבד, ולא באמצעות הגרף המדויק של תלות ההגבר בתדר.

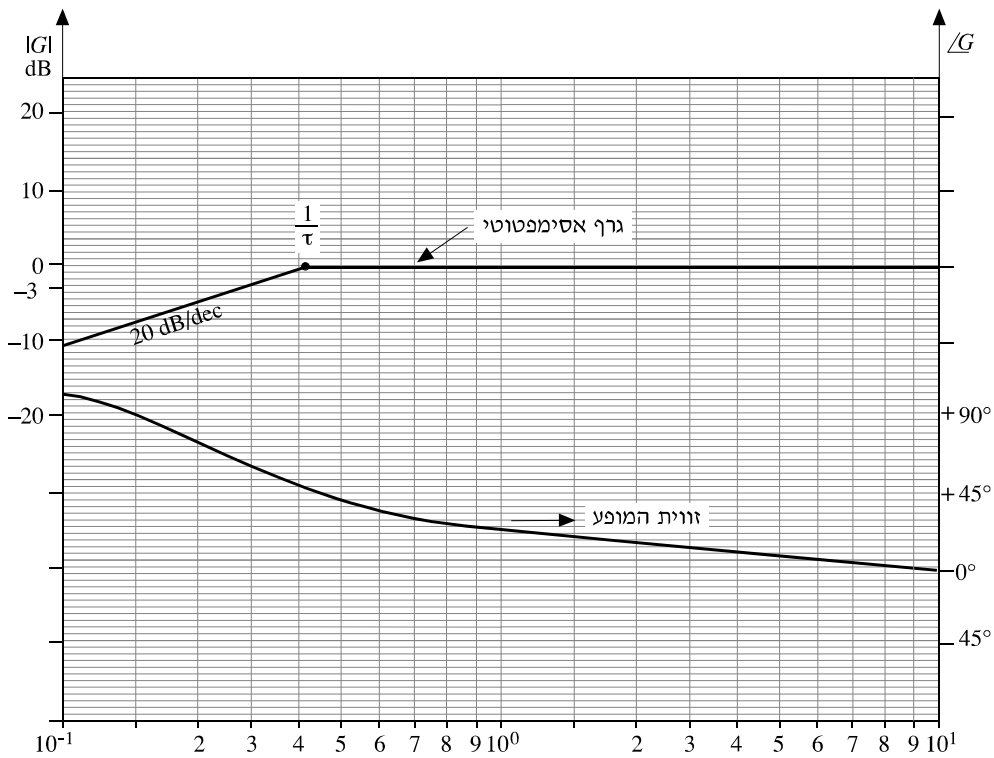


איור 8.17 תרשים בודה של גורם סוכם מסדר ראשון (לא-אידיאלי)

זווית המופע של גורם סוכם מתוארת על-ידי פונקציית הטנגנס ההופכית (בסימן מינוס). כאשר התדר משתנה בין אפס לאין-סוף, פונקציה זו משתנה בין 0° לבין -90° . (זכרו כי פונקציית הטנגנס היא מחזורית בעלת מחזור יסודי בתחום שבין הזוויות -90° ו- $+90^\circ$. בתחום זה פונקציית הטנגנס משתנה בין $-\infty$ לבין $+\infty$).

לבסוף, כדי לקבל את תרשים בודה של הפונקציה $G_L(\omega)$, מסרטטים את גרף הסכום של הגרפים הנפרדים שהתקבלו עבור ההגבר והמופע (איורים 8.16 ו-8.17); כלומר, מסרטטים גרף שבו הערך בכל נקודה הוא סכום הערכים של הגרפים הנפרדים. במיוחד קל לתאר את גרף סכום המופעים, שכן זווית המופע היא הסכום של הזווית המתוארת באיור 8.17 וזווית קבועה של $+90^\circ$. לכן, כל שנדרש הוא לרשום מחדש את הערכים על ציר זווית המופע (ציר $\angle G$ באיור 8.17) כך שהנקודה של -90° תהפוך להיות הנקודה 0° . בצורה זו מקבלים את זווית המופע של הפונקציה $G_L(\omega)$ (איור 8.18).

כדי לקבל את גרף ההגבר יש לסכם את גרף הסוכם שבאיור 8.17 עם קו ישר ששיפועו $+20 \frac{dB}{dec}$ והוא חותך את קו ה-0 dB בתדר $1/\tau$. קל לעשות זאת עבור הקווים האסימפטוטיים המתוארים באיור 8.17. הסכום של הקווים האסימפטוטיים עם הקו ששיפועו $+20 \frac{dB}{dec}$ יוצר גרף שהוא קו ישר ששיפועו $+20 \frac{dB}{dec}$ עד לנקודה $\omega = 1/\tau$ ("תדר הברך"), וקו ישר אופקי (ששיפועו אפס) בתדרים גבוהים יותר (איור 8.18).



איור 8.18 תרשים בודה של מעגל RL עם גרף אסימפטוטי של הגבר וזווית המופע של פונקציית התמסורת

מהתבוננות בגרפים שבאיור 8.18 נוכל להגיע לאותן מסקנות שהגענו אליהן על סמך חקירת התנהגות הפונקציה $G_L(\omega)$ (ראו סעיף 8.3.2).

- בתדרים גבוהים, המתח על המשרן במעגל RL שואף ל-1, וזווית המופע של המתח על המשרן (יחסית למתח העירור) שואפת לאפס.
- בתדרים נמוכים, המתח על המשרן במעגל RL שואף לאפס (ההגבר בדציבלים שואף ל- $-\infty$!) וזווית המופע שואפת ל- 90° .

את תרשים בודה של מעגל RC נוכל לקבל בדרך דומה לזו שבה קיבלנו את תרשים בודה של מעגל RL . בסעיף 8.3.3 הגדרנו את פונקציית התמסורת של מעגל RC טורי כיחס שבין פאזור המתח על הקבל לבין פאזור מתח המבוא:

$$G_C(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

(משוואה (8-18)). לפיכך, תרשים בודה של מעגל זה זהה לחלוטין לתרשים בודה שבאיור 8.17. וגם כאן, את המסקנות שהסקנו לגבי התנהגות ההגבר $|G_C|$ והזווית $\angle G_C$ של מעגל RC (ראו סעיף 8.3.3), נוכל להסיק מתוך התבוננות בגרף כדוגמת הגרף שבאיור 8.17. למשל, בתדרים גבוהים, ההגבר $|G_C|$ שואף לאפס, ואילו בתדרים נמוכים, ההגבר $|G_C|$ שואף ל-1. בתדרים נמוכים, הזווית $\angle G_C$ שואפת לאפס, ובתדרים גבוהים היא שואפת ל- -90° .

8.6 תגובת התדר של מערכות מסדר ראשון

8.6.1 מבוא

בפרק 6 למדנו כי **תגובת המעבר** של מעגלי RL ו- RC טורים היא תגובת מעבר אופיינית של מערכת בחוג פתוח, עם פיגור בזמן מסדר ראשון (מערכת מסדר ראשון). עוד הראינו, כי תגובת המעבר של מערכת בקרת המפלט הפועלת בחוג סגור לאות מדרגה, היא תגובה אופיינית למערכת מסדר ראשון: התלות בזמן נתונה על-ידי **פונקציה מעריכית**, שקבוע הזמן שלה τ שונה מקבוע הזמן של המערכת בחוג הפתוח (ראו משוואה (6-15)). האם קיים קשר בין העובדה שמעגלי RL ו- RC הם בעלי תגובה מעריכית לאות מדרגה, לבין העובדה שתגובת התדר של מעגלים אלו כוללת גורם סוכם מסדר ראשון? התשובה היא כן. אפשר להראות כי לכל מערכת מסדר ראשון (בחוג פתוח או בחוג סגור) שיש לה תגובה מעריכית לאות מדרגה, יש

תגובת תדר הכוללת גורם **סוכם** יחיד. הצורה הכללית ביותר של תגובת התדר של מערכת מסדר ראשון בחוג סגור נתונה על-ידי:

$$(8-29) \quad G(\omega) = K \cdot G_1(\omega) \cdot G_2(\omega)$$

כאשר K הוא קבוע המייצג את **ההגבר הסטטי** של המערכת (הגבר DC), $G_1(\omega)$ הוא הגורם **הסוכם** מסדר ראשון שצורתו הכללית נתונה על-ידי:

$$(8-30) \quad G_1 = \frac{1}{1 + j\omega\tau_1}$$

ו- G_2 הוא גורם המורכב ממכפלה של גורמים **גוזרים**. הצורה הכללית של גורם גוזר יחיד היא:

$$(8-31) \quad G_2 = 1 + j\omega\tau_2$$

כאשר τ_2 הוא קבוע הזמן של הגזירה.

(הערה: בסעיף 8.5.2 הגדרנו גורם גוזר על-ידי הביטוי $j\omega\tau$ אולם שם היה זה גורם **גוזר אידיאלי**. במקרה הכללי, הגורם הגוזר אינו חייב להיות אידיאלי, ומכאן התוספת של אברי היחידה).

שימו לב כי קבועי הזמן של הגורם הגוזר ושל הסוכם (τ_1 ו- τ_2) שונים זה מזה. בהמשך נחשב את תגובת התדר של מערכת מסדר ראשון באמצעות שימוש בפאזורים (בצורה דומה לחישוב תגובת התדר של מעגלי RL ו- RC), אולם נגביל את הדיון למקרה שבו הגורם $G_2(\omega)$ מורכב מגורם גוזר יחיד.

8.6.2 חישוב תגובת התדר

נציב את הביטויים עבור הסוכם והגורם הגוזר הנתונים במשוואות (8-30) ו-(8-31), בהתאמה, במשוואה של פונקציית התמסורת $G(\omega)$ (משוואה (8-29)), ונחשב את הערך המוחלט שלה:

$$(8-33) \quad |G| = |K| \cdot \left| \frac{1 + j\omega\tau_2}{1 + j\omega\tau_1} \right| = |K| \cdot \sqrt{\frac{1 + \omega^2\tau_2^2}{1 + \omega^2\tau_1^2}}$$

כדי לחשב את הזווית $\angle G$, נזכיר כי הזווית של מכפלת שני מספרים מרוכבים שווה לסכום הזוויות שלהם, והזווית של המנה של שני מספרים מרוכבים שווה להפרש הזוויות שלהם. מכאן נובע כי:

$$\angle G = \angle K + \angle 1 + j\omega\tau_1 - \angle 1 + j\omega\tau_1$$

אנו מניחים כי ההגבר K הוא מספר ממשי חיובי, ולכן $\angle K = 0$. כמו כן ראינו כי:

$$\angle G_2 = \angle 1 + j\omega\tau_2 = \text{arc tg}(\omega\tau_2)$$

ובצורה דומה:

$$\angle G_1 = \text{arc tg}(\omega\tau_1)$$

לפיכך הזווית $\angle G$ היא ההפרש בין שתי פונקציות הטנגנס ההופכיות:

$$(8-34) \quad \angle G = \text{arctg}(\omega\tau_2) - \text{arctg}(\omega\tau_1)$$

ממשוואות (8-33) ו-(8-34) נובע כי התנהגות פונקציית התמסורת $G(\omega)$ נקבעת במידה רבה על-ידי היחס בין קבועי הזמן τ_1 ו- τ_2 :

- כאשר τ_2 קטן מאוד, הן באופן מוחלט והן יחסית ל- τ_1 , תגובת המערכת דומה לתגובת מעגל RC בעל הגבר DC שונה מ-1. תוספת ההגבר K גורמת לכך שבתדרים נמוכים, הערך המוחלט $|G|$ שואף להגבר K (ולא לאפס, כמו במעגל RC), ואילו בתדרים גבוהים, התנהגות המערכת דומה להתנהגות מעגל RC ($|G|$ שואף לאפס). לעומת זאת, להגבר K אין השפעה על התנהגות הזווית בהשוואה למעגל RC (מדוע?)
- כאשר τ_1 קטן מאוד, הן באופן מוחלט והן יחסית ל- τ_2 , תגובת המערכת נקבעת על-ידי ההתנהגות של הגורם הגוזר הלא-אידיאלי ועל-ידי תרומת ההגבר DC. בתדרים נמוכים ($\omega \rightarrow 0$), ההגבר $|G|$ של המערכת שואף להגבר הקבוע K , והזווית $\angle G$ שואפת לאפס. לעומת זאת, בתדרים גבוהים ($\omega \rightarrow \infty$), ההגבר $|G|$ שואף לאיין-סוף והזווית $\angle G$ שואפת ל- 90° . גם במקרה זה, להגבר הקבוע אין השפעה על התנהגות הזווית של $G(\omega)$.
- במקרה הכללי, כאשר τ_1 ו- τ_2 הם בעלי אותו סדר גודל, נתאר את התנהגות פונקציית התמסורת רק בתדרים גבוהים מאוד או בתדרים נמוכים מאוד.

בתדרים נמוכים מאוד, מתקיים $\omega\tau_1 \ll 1$ וגם $\omega\tau_2 \ll 1$, ולכן, ההגבר $|G|$ שואף לערך קבוע השווה להגבר הסטטי $|K|$. הזווית $\angle G$ שואפת לאפס היות שהיא שווה להפרש בין שני ביטויים השואפים לאפס. בתדרים גבוהים מאוד מתקיים $\omega\tau_1 \gg 1$ וגם $\omega\tau_2 \gg 1$, ולכן ההגבר $|G|$ שואף לערך קבוע, אולם במקרה זה ניתן להראות כי ערך קבוע זה מקיים את המשוואה:

$$(8-35) \quad |G|_{\omega \rightarrow \infty} = |K| \left(\frac{\tau_2}{\tau_1} \right)$$

כלומר הוא קטן (או גדול) מההגבר הסטטי פי היחס בין קבועי הזמן (τ_2/τ_1) .

שאלה 8.1

הוכיחו את משוואה (8-35).

בתדרים הגבוהים הזווית $\angle G$ מתנהגת כמו בתדרים הנמוכים, כלומר:

$$(8-36) \quad \angle G_{\omega \rightarrow \infty} = 0$$

שאלה 8.2

הוכיחו את משוואה (8-36).

ההתנהגות של $G(\omega)$ בתדרים אחרים (שאינם שואפים לאפס או לאין-סוף) היא מסובכת יותר. במקרים אלו יש לחשב במדויק את התלות של ההגבר $|G|$ ושל הזווית $\angle G$ בתדר ω , כדוגמת החישובים שבדוגמאות 8.3 עד 8.6. עם זאת, התיאור הגרפי המקורב של $G(\omega)$ מקל מאוד את חקירת התנהגותה, כפי שנראה בסעיף הבא.

8.6.3 תרשימי בודה של מערכת מסדר ראשון

בדומה לתיאור תרשים בודה של מעגלי RL ו- RC טוריים (סעיף 8.5.2), גם את תרשים בודה של ההגבר של מערכת מסדר ראשון (משוואה (8-29)), אפשר לקבל על-ידי חישוב ההגבר $|G|$ בדציבלים:

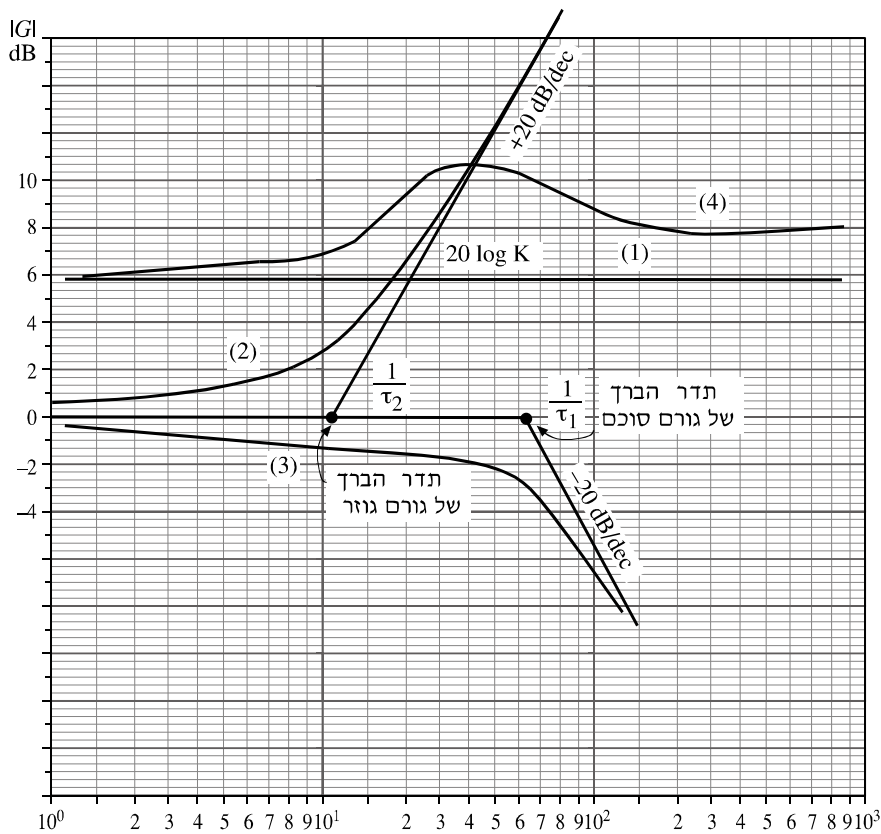
$$G(\omega)(\text{dB}) = 20 \log |G(\omega)| = 20 \log |K| + 20 \log [1 + \omega^2 \tau_2^2] - 20 \log [1 + \omega^2 \tau_1^2]$$

זווית המופע של $G(\omega)$ נתונה על-ידי משוואה (8-34). אנו רואים כי גרף ההגבר הוא סכום של שלושה גרפים (ראו איור 8.19):

א. קו ישר אופקי בגובה $20 \log K$ (קו (1)) המייצג את ההגבר הסטטי;

ב. קו המייצג את הגורם הגוזר (קו (2)). קו זה משיק לשני קווים אסימפטוטיים: הקו האופקי של אפס דציבל, וקו ישר העולה בשיפוע של $+20 \frac{dB}{dec}$. שני הקווים האסימפטוטיים הללו נחתכים בתדר $\frac{1}{\tau_2}$ שהוא "תדר הברך" של הגורם הגוזר. שימו לב שבתדר הברך, ההגבר של הגורם הגוזר ערכו $+3.0 \text{ dB}$.

(מהיכן נובע הערך 3.01 דציבל?)



איור 8.19 תרשים בודה של מערכת מסדר ראשון הכוללת הגבר, גורם גוזר (לא אידיאלי), גורם סכום (לא אידיאלי)

ג. קו המייצג את הגורם הסוכם (קו (3)). קו זה משיק גם הוא לשני קווים אסימפטוטיים: קו האפס דציבל וקו ישר יורד ששיפועו $-20 \frac{dB}{dec}$. שני קווים ישרים אלו נחתכים בתדר הברך המתאים לקבוע הזמן τ_1 של הגורם הסוכם. באיור 8.19 הנחנו כי $\tau_2 > \tau_1$, ולכן תדר הברך של הגורם הגוזר ($1/\tau_2$) קטן מתדר הברך של הגורם הסוכם ($1/\tau_1$).

קו הסכום של שלושת הקווים (1), (2) ו-(3) הוא עקום בודה של הגבר המערכת. ברור כי הצורה המדויקת של עקום זה תלויה בערכים המספריים של K , τ_1 ו- τ_2 . למשל, באיור 8.19 הקו (4) מייצג את קו הסכום במקרה שבו $\tau_2 > \tau_1$. במקרה זה, להגבר יש מקסימום בתדר מסוים שערכו נקבע על-ידי היחס בין ההגבר K וקבועי הזמן τ_1 ו- τ_2 . כצפוי, בתדרים נמוכים מאוד ($\omega \rightarrow 0$), קו ההגבר הכללי שואף להגבר הסטטי (K) של המערכת. לעומת זאת, בתדרים גבוהים מאוד, קו ההגבר הכללי שואף לערך קבוע, שבדוגמה זו הוא גבוה מההגבר הסטטי.

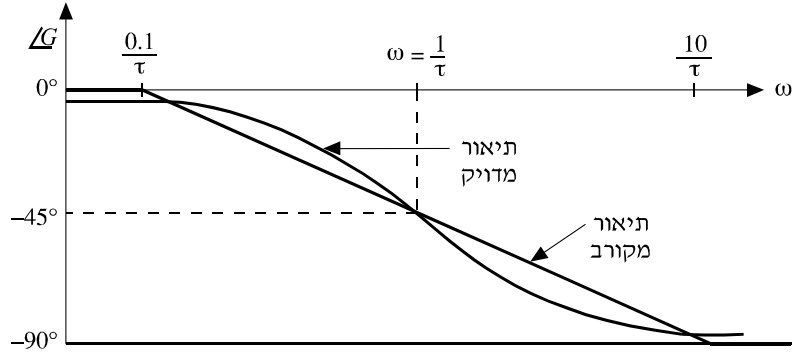
כאמור, את התנהגות הזווית $\angle G$ של המערכת כפונקציה של התדר, ניתן לקבל רק על-ידי חישוב מדויק של הפרש פונקציות הטנגנס ההופכיות (משוואה (8-34)). עם זאת, ניתן לתאר באופן מקורב את פונקציות הטנגנס ההופכיות $\arctg(\omega\tau)$ על-ידי קווים ישרים. ולשם כך נשתמש בעובדה כי לתדר הברך ($\omega = 1/\tau$), מתאימה הזווית φ המקיימת:

$$\varphi = -\arctg(1) = -45^\circ$$

כלומר, ניתן לתאר במקורב את הפונקציה הזאת על-ידי קו ישר המחבר את הנקודה $\omega = 0.1/\tau$, $G = 0$ עם הנקודה $\omega = \frac{10}{\tau}$, $\angle G = -90^\circ$.

באיור 8.20, קו ישר זה עובר דרך הנקודה $\angle G = -45^\circ$, $\omega = 1/\tau$.

בתדרים נמוכים מהתדר $\frac{0.1}{\tau}$, הקו מתלכד עם ציר התדר ($\angle G = 0$), ובתדרים גבוהים מ- $\frac{10}{\tau}$, הקו הופך לקו האופקי $\angle G = -90^\circ$.

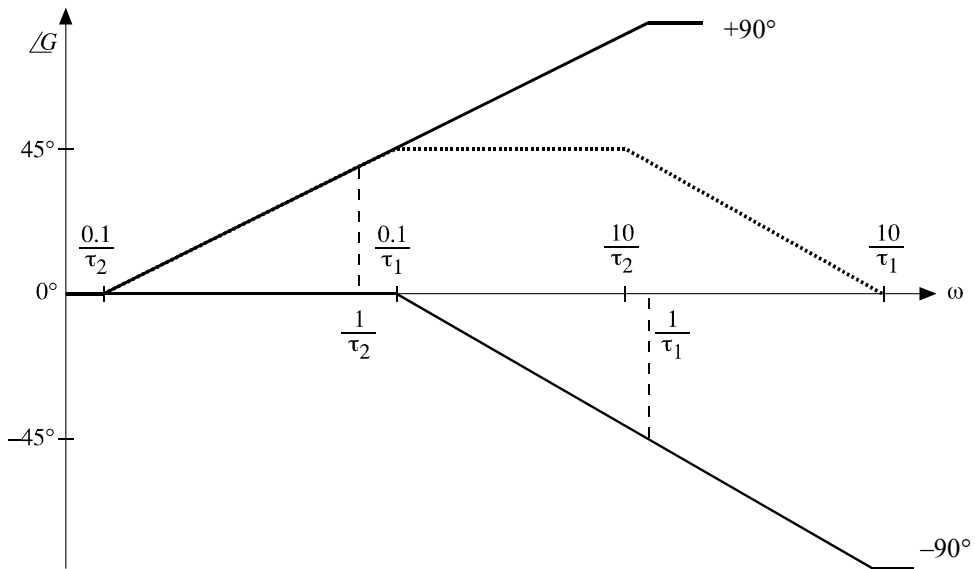


איור 8.20 תיאור מדויק ותיאור מקורב של פונקציית הטנגנס ההופכית (בסימן הפוך)

מכאן, שאת התיאור המקורב של הזווית $\angle G$ (משוואה (8-34)) ניתן לקבל על-ידי סכום של שני קווים ישרים "שבורים" (איור 8.21):

א. קו ישר המתחיל לעלות (שיפוע חיובי) בנקודה $\omega = 0.1/\tau_2, \angle G = 0$, עובר דרך הנקודה $\omega = 1/\tau_2, \angle G = +45^\circ$, ולאחר מכן "מתיישר" בנקודה $\omega = 10/\tau_2$, על הערך הקבוע $\angle G = +90^\circ$.

ב. קו ישר המתחיל לרדת (שיפוע שלילי) בנקודה $\omega = 0.1/\tau_1, \angle G = 0$, ועובר דרך הנקודה $\omega = 1/\tau_1, \angle G = -45^\circ$, קו זה "מתיישר" בנקודה $\omega = 10/\tau_1$ על הערך -90° .



איור 8.21 תרשים בודה מקורב של זווית ההגבר במערכת מסדר ראשון עם גורם גוזר וגורם סוכם

הקו המקווקו באיור 8.21 הוא הסכום של שני הקווים הללו, ולכן הוא מייצג בקירוב את הזווית של תגובת התדר של $G(\omega)$ (משוואה (8-34)). הדוגמה הבאה ממחישה את האמור לעיל באמצעות חישוב מפורט.

8.8 דוגמה

נתונה מערכת מסדר ראשון בחוג סגור שפונקציית התמסורת שלה היא:

$$G(\omega) = \frac{5(j\omega + 2)}{(j\omega + 3)}$$

תארו את תגובת המערכת באמצעות הקווים האסימפטוטיים בתרשים בודה.

פתרון

תחילה נרשום את $G(\omega)$ בצורה שונה מעט:

$$G(\omega) = \frac{5(j\omega + 2)}{(j\omega + 3)} = \frac{10}{3} \frac{(1 + 0.5j\omega)}{(1 + 0.333j\omega)}$$

ומכאן רואים כי ההגבר הסטטי הוא $K = \frac{10}{3}$, וקבועי הזמן של המערכת הם $\tau_1 = 0.333$ ו- $\tau_2 = 0.5$.

ההגבר ב-dB של מערכת זו הוא:

$$\begin{aligned} |G(\omega)|(\text{dB}) &= 20 \log |G| = 20 \log \left(\frac{10}{3} \right) + 20 \log |1 + 0.5j\omega| - 20 \log |1 + 0.333j\omega| \\ &= 20 \log \left(\frac{10}{3} \right) + 20 \log \sqrt{1 + 0.25\omega^2} - 20 \log \sqrt{1 + 0.11\omega^2} \end{aligned}$$

והזווית $\angle G$ מקיימת:

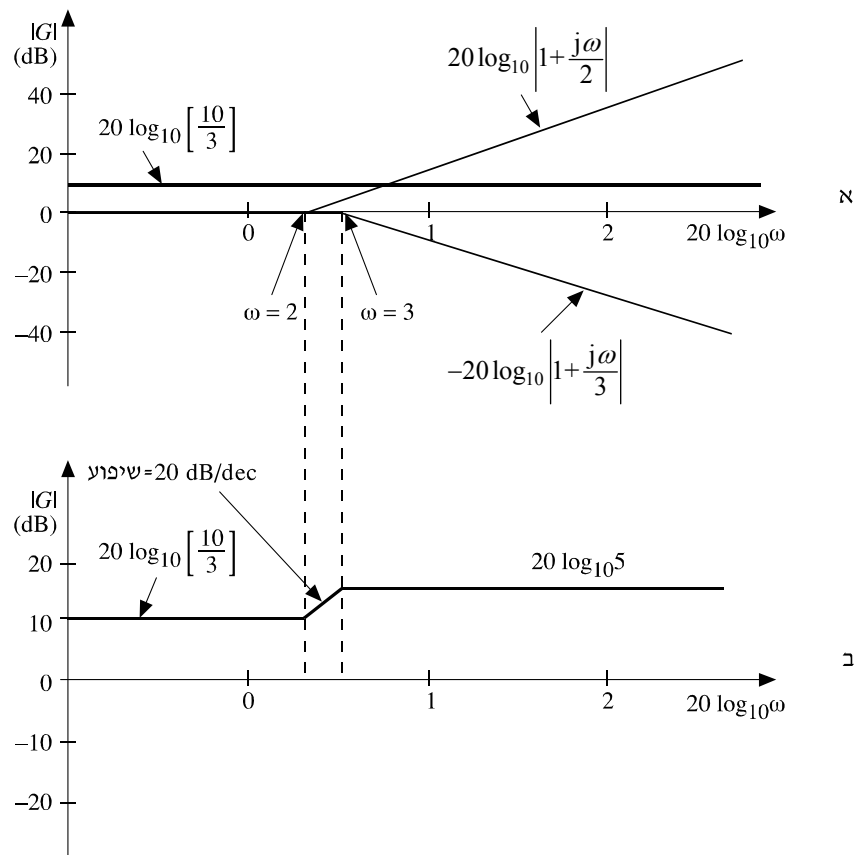
$$\begin{aligned} \angle G &= \angle 10/3 + \angle 1 + 0.5j\omega - \angle 1 + 0.333j\omega \\ &= \text{arctg}(0.5\omega) - \text{arctg}(0.333\omega) \end{aligned}$$

כאשר התדר ω שואף לאפס או לאין-סוף, מקבלים את הקווים האסימפטוטיים בדיאגרמת בודה של ההגבר. כאשר $\omega \rightarrow 0$:

$$|G(\omega)|_{(\omega \rightarrow 0)} (\text{dB}) = 20 \log_{10} \left(\frac{10}{3} \right) = 10.457$$

$$\angle G_{(\omega \rightarrow 0)} = 0$$

כאשר $\omega \rightarrow \infty$, תרומת ההגבר הסטטי אינה משתנה, ואילו הגורם הגוזר והגורם הסוכם מתוארים על-ידי שני קווים אסימפטוטיים ששיפועיהם $+20 \frac{\text{dB}}{\text{dec}}$ ו- $-20 \frac{\text{dB}}{\text{dec}}$, בהתאמה (איור 8.22).

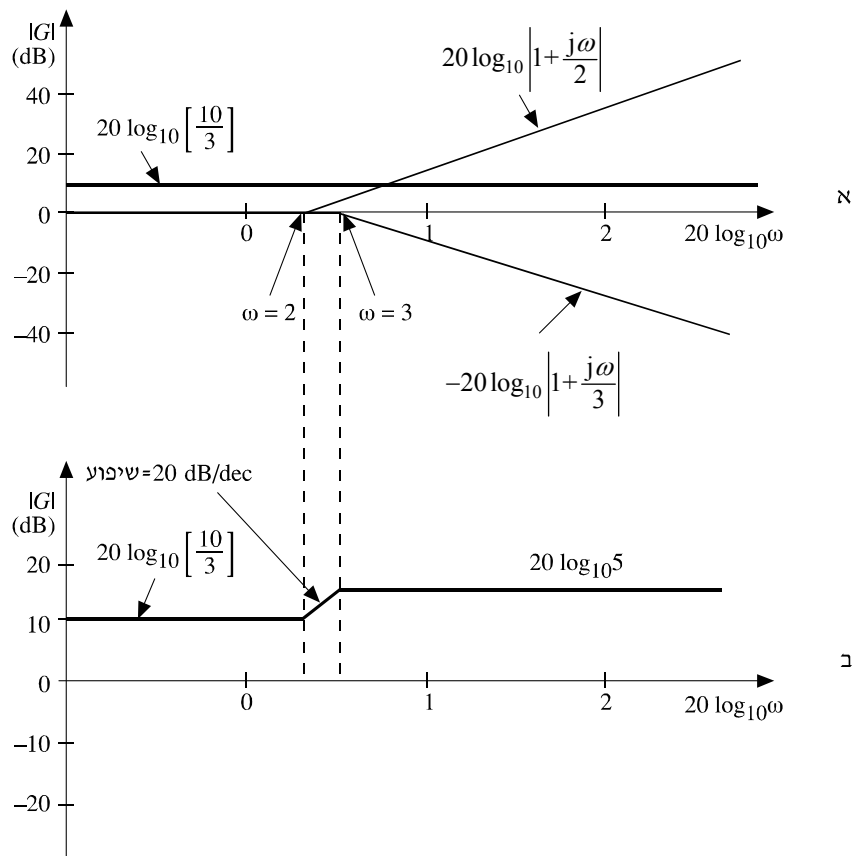


איור 8.22 איור לדוגמה 8.8 – ההגבר
 א. תרומות האיברים השונים
 ב. סכום האיברים

סכום שלושת הקווים הללו הוא :

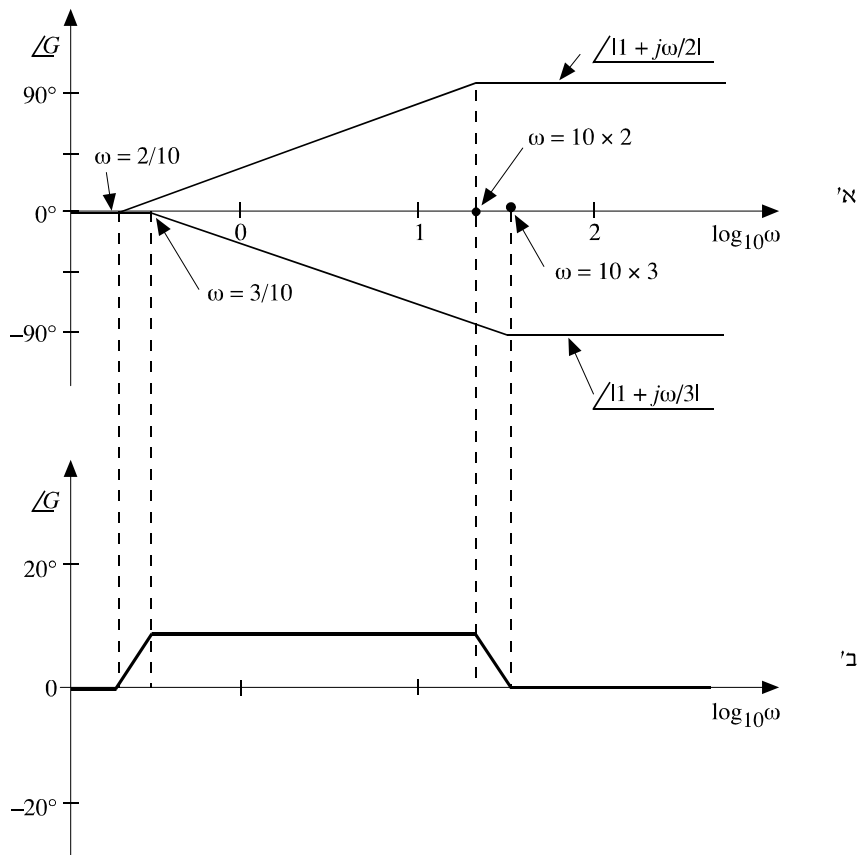
$$\begin{aligned}
 |G(\omega)|(\text{dB})_{(\omega \rightarrow 0)} &= 20 \log\left(\frac{10}{3}\right) + 20 \log\left(\frac{\omega}{2}\right) - 20 \log\left(\frac{\omega}{3}\right) = \\
 &= 20 \log\left(\frac{10 \cdot \omega}{3 \cdot \frac{\omega}{2}}\right) = 20 \log 5 = 13.97
 \end{aligned}$$

כלומר, קו אופקי שערכו 13.97 דציבל (איור 8.22). שימו לב לנקודות החיתוך של הקווים האסימפטוטיים עם ציר התדר, $|G|(\text{dB}) = 0$: תדר הברך של הגורם הגזור הוא $\omega = 2$, ותדר הברך של הגורם המסכם הוא $\omega = 3$.



איור 8.22 איור לדוגמה 8.8 – ההגבר
 א. תרומות האיברים השונים
 ב. סכום האיברים

הקווים הישרים בדיאגרמת בודה של הזווית $\angle G$ מתוארים באיור 8.23. באיור 8.23 מתוארים שני הקווים שהם הקירוב של פונקציות הטנגנס ההופכיות $\arctg\left(\frac{\omega}{3}\right) - 1 - \arctg\left(\frac{\omega}{2}\right)$. הפונקציה הראשונה מתארת את הזווית של הגורם $(1 + j\omega/2)$, והפונקציה השנייה מתארת את הזווית של הגורם הסוכם $1/(1 + j\omega/3)$. שימו לב לתדרים שבהם משתנה השיפוע של הקווים. הקו הוא סכום של שני הקווים הללו נתון באיור 8.23. כצפוי, הזווית $\angle G$ שואפת לאפס הן בתדירויות נמוכות מאוד והן בתדירויות גבוהות מאוד.



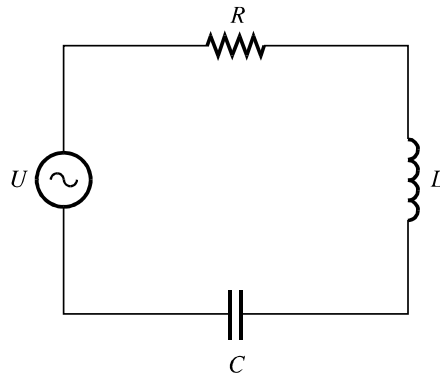
איור 8.23 איור לדוגמה 8.9 – הזווית $\angle G$
 א. תרומות האיברים השונים
 ב. סכום האיברים

8.7* תגובת התדר של מערכות מסדר שני

8.7.1 מערכת מסדר שני: מעגל RLC

ב"תורת החשמל" למדנו כי התגובה של מעגל RLC טורי (למשל, הזרם במעגל) לאות מתח סינוסי במבוא, היא אות סינוסי שעוצמתו תלויה בתדר אות המבוא. עוד למדנו כי במעגל RLC קיימת תופעת התהודה: בתדר מסוים של מתח המבוא, הזרם במעגל גדל בצורה ניכרת. **תדר התהודה** במעגל RLC טורי (איור 8.24) נקבע על-ידי ערכי הקבל והמשרן במעגל:

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad \text{או} \quad f_n = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \text{ Hz}$$



איור 8.24 מעגל RLC טורי עם מקור זרם סינוסי

תדר התהודה נקרא גם **התדר הטבעי** של המערכת וערכו תלוי אך ורק ברכיבי המערכת (ולא בתדר אות המבוא). בפרק 6 חקרנו את התגובה של מעגל RLC לאות מדרגה במבוא, וראינו כי הפרמטר המאפיין את המעגל הוא מקדם הריסון שלו, המסומן על-ידי ζ ונתון על-ידי משוואה (6-14):

$$\zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

371 תגובת התדר של מערכות בקרה

את הזרם במעגל RLC טורי כתוצאה מאות מדרגה במבואו (למשל, כתוצאה מהתפרקות הקבל) אפיינו בהתאם לערכו של ζ :

- אם $\zeta = 0$, המעגל הוא בלתי מרוסן והתנודות של הזרם נמשכות עד אין-סוף
- אם $0 < \zeta < 1$, המעגל נמצא במצב של תת-ריסון, והתנודות של הזרם מתרסנות עד שהזרם קטן לאפס. קצב ההתרסנות תלוי במקדם הריסון.
- אם $\zeta = 1$, המעגל נמצא במצב של ריסון קריטי. במצב זה הזרם אינו מתנודד כלל אלא קטן באופן מונוטוני לאפס.
- אם $\zeta > 1$, המעגל נמצא במצב של ריסון-יתר. במצב זה לא נוצרות תנודות במעגל והזרם קטן באופן מונוטוני לאפס אולם במהירות קטנה יותר מאשר במעגל עם ריסון קריטי.

במעגל RLC הניזון ממתח AC סינוסי, מקדם הריסון ζ הוא למעשה הערך ההופכי של גורם האיכות Q , המבטא את שיעור עליית הזרם במצב תהודה. ככל ש- Q קטן יותר (כלומר, מקדם הריסון גדול יותר), שיעור עליית זרם התהודה קטן יותר.

כדי לחשב במדויק את תגובת מעגל RLC לאות מבוא סינוסי, נמצא תחילה את העכבה הכללית Z של המעגל. במעגל RLC טורי, העכבה Z היא סכום העכבות של הנגד, המשרן והקבל, כלומר:

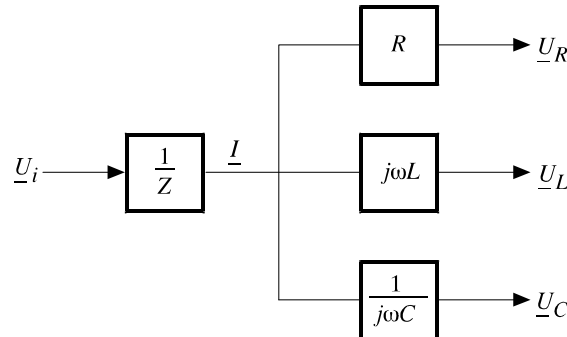
$$(8-37) \quad Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

ופאזור הזרם I הוא היחס שבין פאזור המתח \underline{U}_i לעכבה Z :

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_i}{Z}$$

ניתן להגדיר פונקציית תמסורת של מעגל RLC בצורות שונות, בהתאם לאות המוצא שבו אנו מעוניינים: המתח על הנגד (U_R), או המתח על המשרן (U_L), או המתח על הקבל (U_C).

בתרשים המלבנים שבאיור 8.25 מופיעים כל אותות המוצא האפשריים:



איור 8.25 תרשים מלבנים של מעגל RLC טורי עם שלושה אותות מוצא אפשריים

הביטויים המתמטיים של פונקציות התמסורת המתאימות לאותות המוצא U_R, U_L, U_C הם:

$$G_1 = \frac{U_R}{U_i} = R \cdot 1/Z = R/Z$$

$$G_2 = \frac{U_L}{U_i} = j\omega L \cdot 1/Z = j\omega L/Z$$

$$G_3 = \frac{U_C}{U_i} = -(j/\omega C) \cdot 1/Z = 1/j\omega CZ$$

בכל פונקציות התמסורת האלה מופיע הערך ההופכי של העכבה השקולה Z :

$$\begin{aligned} 1/Z &= 1/(R + j\omega L + 1/j\omega C) = j\omega C / (1 + j\omega RC - \omega^2 LC) \\ &= j\omega C / [1 + j2\zeta\omega/\omega_n - (\omega/\omega_n)^2] \end{aligned}$$

השתמשנו כאן בביטויים עבור תדר התהודה:

$$\frac{1}{\omega_n} = \sqrt{LC}$$

ועבור מקדם הריסון ζ :

$$\zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

אם מניחים כי מתח המבוא הוא אות סינוסי שתנופתו היא U_i וזווית המופע שלו אפס, אזי תנופת אות הזרם במעגל נתונה על-ידי היחס $I = \frac{U_i}{|Z|}$. בסעיף הבא נראה כיצד התיאור הגרפי של העכבה ושל פונקציות התמסורת מסייע לחקירת תגובת התדר של המערכת.

8.7.2 תרשים בודה של מערכת מסדר שני

כדי לתאר באופן גרפי את פונקציות התמסורת G_3, G_2, G_1 של המעגל RLC שהגדרנו לעיל, יש צורך לרשום את התלות המפורשת של הערך ההופכי של העכבה, $1/Z$, בתדר ω . למשל, פונקציית התמסורת $G_3(\omega)$ המתארת את היחס שבין המתח על הקבל למתח המבוא נתונה על-ידי:

$$(8-38) \quad G_3(\omega) = 1/[1 + j2\zeta\omega/\omega_n + (j\omega/\omega_n)^2]$$

כאשר ζ ו- ω_n הם גדלים ממשיים ידועים. (שימו לב להיפוך הסימן בגלל הופעת האיבר $(!j^2)$).

הערך המוחלט של $G_3(\omega)$ הוא:

$$|G_3| = 1/\sqrt{(1 - (\omega/\omega_n)^2)^2 + (2\zeta\omega/\omega_n)^2}$$

והערך בדציבלים הוא:

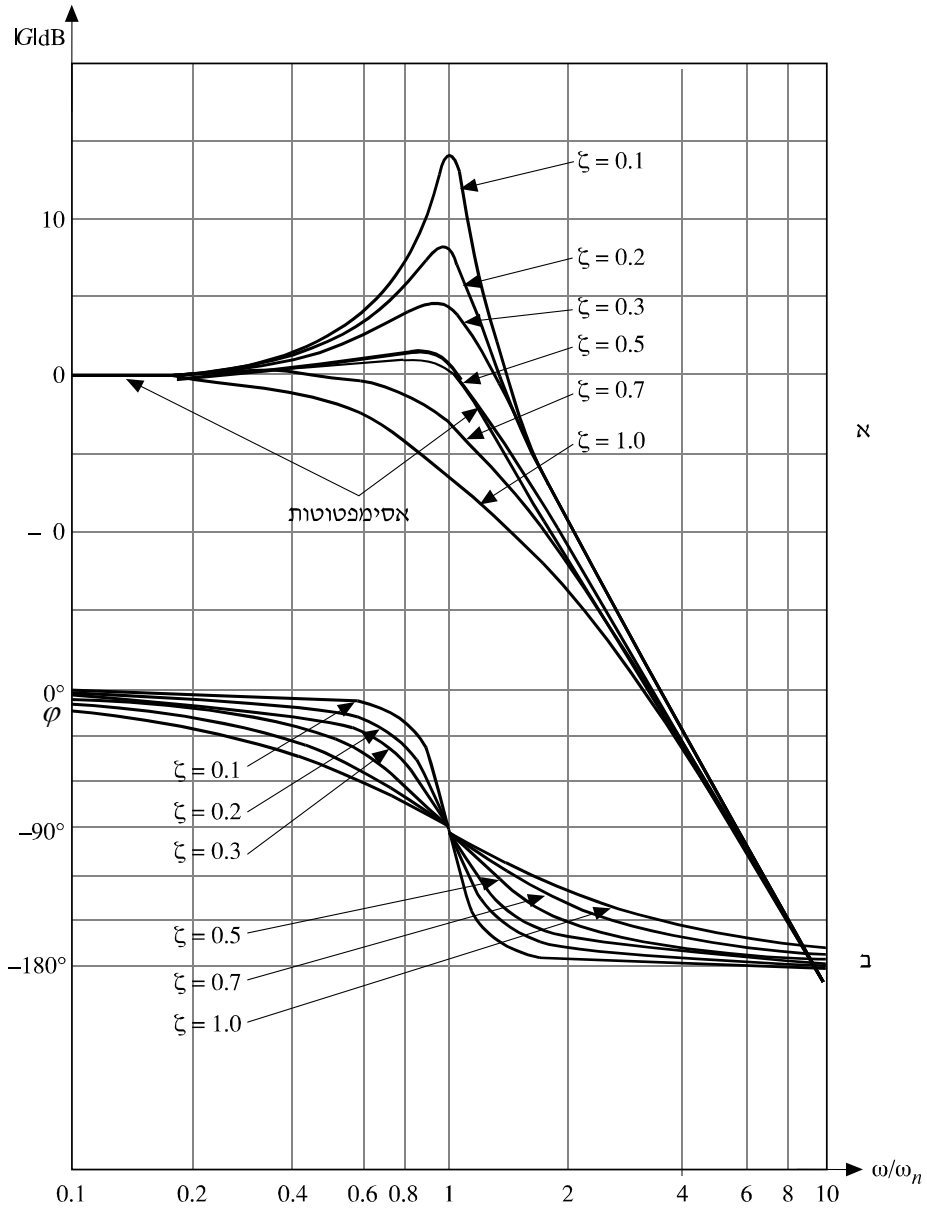
$$(8-39) \quad |G_3| \text{ (dB)} = -10 \log[(1 - \omega^2/\omega_n^2)^2 + (2\zeta\omega/\omega_n)^2]$$

זווית המופע של פונקציית התמסורת $G_3(\omega)$ היא:

$$(8-40) \quad \angle G_3 = \varphi = -\text{arc tg} [2\zeta(\omega/\omega_n)/(1 - (\omega/\omega_n)^2)]$$

תרשים בודה של המערכת תלוי אפוא בערכו של מקדם הריסון ζ . לכל ערך של ζ , מתקבל גרף שונה של התלות של $|G_3|$ הנתון ב-dB ושל φ בתדר ω (או בגודל ω/ω_n).

באיור 8.26 מופיעים גרפים המתארים את התלות של $|G_3|$, בגודל ω/ω_n עבור כמה ערכים של ζ .



איור 8.26 תרשים בודה של מערכות מסדר שני עם מקדמי ריסון ζ שונים

את הקווים האסימפטוטיים המתארים את ההגבר $|G_3|$ ב-dB נוכל לחשב אם נציב במשוואה (8-39) $\omega \rightarrow 0$ או $\omega \rightarrow \infty$.

כאשר $\omega \rightarrow 0$, מקבלים:

$$|G_3|(\text{dB})_{(\omega \rightarrow 0)} = -10 \log 1 = 0$$

וכאשר $\omega \rightarrow \infty$, מקבלים:

$$|G_3|(\text{dB})_{(\omega \rightarrow \infty)} = -10 \log \left[\left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^4 \right] = -40 \log \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)$$

כלומר, האסימפטוטות הן שני קווים ישרים הנחתכים ב"תדר הברך" $\omega = \omega_n$: קו ישר אופקי המתלכד עם קו האפס dB, וקו ישר בעל שיפוע שלילי (קבוע) של $-40 \frac{\text{dB}}{\text{dec}}$ (איור 8-26). את ההגבר בתדר $\omega = \omega_n$ ניתן לחשב במדויק על-ידי כך שמציבים $\omega / \omega_n = 1$ במשוואה (8-39):

$$|G_3|(\text{dB})_{(\omega = \omega_n)} = -10 \log \left[(2\xi)^2 \right] = -20 \log(2\xi)$$

כלומר, ככל שמקדם הריסון ξ קטן יותר, ההגבר בתדר התהודה הטבעי גדול יותר. הערך המדויק שבו מתקיימת תופעת התהודה (ובו ההגבר הוא מקסימלי) תלוי בערך מקדם הריסון ξ והוא שונה מתדר התהודה הטבעי ω_n . אם נסמן תדר זה על-ידי ω_R , נוכל לראות כי הקשר בין שני התדרים נתון על-ידי:

$$\omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

כלומר, ככל שמקדם הריסון קטן יותר, תדר התהודה מתקרב לתדר הטבעי. מאיור 8.26 ניתן ללמוד גם שככל שמקדם הריסון קטן יותר, גם ההגבר בתדר התהודה גדול יותר. לעומת זאת, ככל שמקדם הריסון מתקרב ל-1, עקום ההגבר נעשה "חלק" יותר.

התנהגות זווית המופע מושפעת גם היא מערכו של מקדם הריסון, כמתואר באיור 8.26. אנו רואים שבתדר הברך, זווית המופע היא -90° לכל ערך של ξ . בתדר הברך עצמו נוצר פיתול בעקום. ככל שמקדם הריסון קטן יותר, הפיתול חזק יותר. בסביבות הריסון הקריטי ($\xi = 1$), התנהגות הזווית בנקודת הפיתול נעשית חלקה יותר. לעומת זאת, בתדרים נמוכים מאוד ובתדרים גבוהים מאוד, הזווית אינה מושפעת ממקדם הריסון:

כאשר $\omega \rightarrow 0$, $\varphi = 0$,

וכאשר $\omega \rightarrow \infty$, $\varphi = 180^\circ$.

8.8 ניתוח תגובת התדר של מערכות

8.8.1 מה ניתן ללמוד מתגובת התדר של מערכת?

מדידת תגובת התדר של מערכות ורכיבים אלקטרוניים בכלל, ומערכות בקרה בפרט, היא כלי חשוב ביותר לאפיון המערכות ולהערכת ביצועיהן. במערכות בקרה במיוחד, תגובת התדר יכולה ללמד על **יציבות** המערכת, הן בעבודה בחוג פתוח והן בעבודה בחוג סגור. לנושא היציבות נקדיש בהמשך סעיף מיוחד. כאן נמנה כמה מאפיינים חשובים נוספים שניתן להסיק אותם מתגובת התדר של המערכת.

א. הגברה או ניחות

בדרך כלל, פונקציית התמסורת של מערכת כוללת גורם המציין את **ההגבר הסטטי** (המכונה גם "מקדם ההגברה") והמסומן על-ידי K . לערכו של גורם ההגברה יש חשיבות רבה משני טעמים:

- ההגברה דרושה להפעלת הרכיבים המבצעים את פעולת הבקרה. ללא הגברה מספקת לא תהיה די אנרגיה לביצוע פעולת הבקרה.
- שיעור ההגברה הוא אחד הגורמים המשפיעים על **יציבותה** של המערכת. הגברה גדולה מדי עלולה להביא את המערכת למצב של תנודות, כלומר, אי-יציבות. על כך נחזור עוד בהמשך.

ב. רוחב הפס (BANDWIDTH-BW)

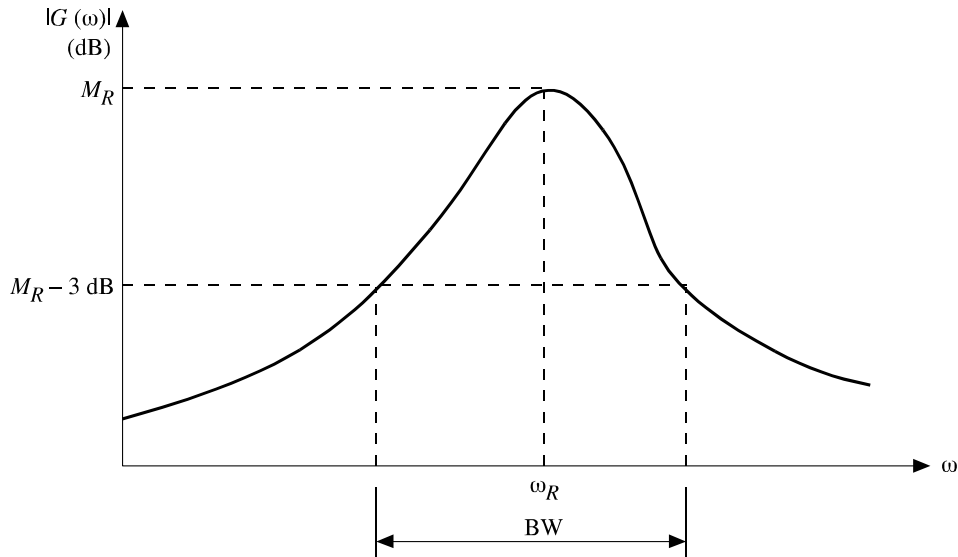
רוחב הפס (BW) מוגדר כתחום התדרים, שבו ההגבר של פונקציית התמסורת $|G(\omega)|$ של מערכת, הוא לפחות 70.7% מהערך המרבי של ההגבר, או קטן ב-3 dB מההגבר המקסימלי. ראו איור 8.27.

ג. הגבר השיא (M_R) ותדר הגבר השיא (ω_R)

באיור 8.27 מוגדרים שני גדלים נוספים:

M_R – הערך המרבי של ההגבר ביחידות דציבל;

ω_R – התדר שבו מתקבל ההגבר המרבי.



איור 8.27 תלות ההגבר בתדר במערכת עם תהודה (רוונס)

8.8.2 הקשר בין תגובת התדר לבין התנהגות המערכת בתלות בזמן

בדיקת ההתנהגות של מערכות בקרה ב"מישור הזמן" כלומר, בתלות בזמן, או ב"מישור התדר", כלומר, בתלות בתדר אות המבוא, מטרתה לאפיין את תכונותיהן ולבדוק את התאמתן למשימות מוגדרות. קיים קשר בין תגובת התדר של מערכת, לבין תגובתה במישור הזמן. מתגובת התדר של מערכת מסדר ראשון הפועלת בחוג סגור ניתן ללמוד על ההגבר של המערכת ועל קבוע הזמן שלה. ההגבר וקבוע הזמן של מערכת מסדר ראשון מאפיינים גם את תגובת המעבר של המערכת לאות מדרגה במישור הזמן. בצורה דומה, מתגובת התדר של מערכת מסדר שני הפועלת בחוג סגור ניתן להסיק, בנוסף להגבר, גם על התדירות הטבעית ומקדם הריסון של המערכת. באמצעות גדלים אלו ניתן לחזות מראש את צורת תגובת המעבר של מערכת מסדר שני לאות מדרגה, למשל. לעתים קרובות ניתן למדוד ישירות גדלים המאפיינים מערכת (במישור התדר או במישור הזמן) ולהסיק מהם על גדלים אחרים במישור התדר או במישור הזמן.

לדוגמה, להלן המשוואות המבטאות את הקשר בין התדירות הטבעית ומקדם הריסון של מערכת מסדר שני בחוג סגור, לבין הגבר השיא והתדר בהגבר השיא:

$$M_R = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\omega_R = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$$

כאשר ω_n ו- ζ הם התדירות הטבעית ומקדם הריסון של המערכת בחוג הסגור (לא נביא כאן את הוכחת המשוואות הללו). אנו רואים שאם ידועים לנו שני גדלים כלשהם מתוך הארבעה המופיעים במשוואה, ניתן לדעת גם את השניים האחרים.

בנספח מוגדרים גדלים נוספים המאפיינים מערכות מסדר שני עם ריסון תת-קריטי: זמן העלייה לשיא הראשון, t_p , ותגובת היתר M_0 לאות מדרגה. שני גדלים אלו מאפיינים את התגובה של המערכת במישור הזמן, וקיים קשר ביניהם לבין גדלים המאפיינים את המערכת במישור התדר. למשל, M_R גדול מתאים לתגובת יתר M_0 גדולה לאות מדרגה.

כמו כן, ככל שרוחב הפס (BW) גדול יותר, זמן העלייה t_p מהיר יותר. מאידך, רוחב פס צר גורם לכך שזמן התגובה של המערכת איטי ומתמשך.

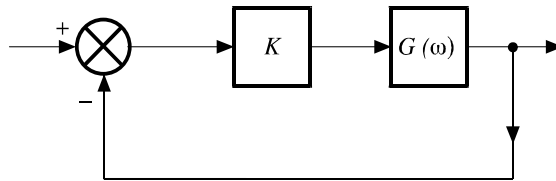
נסכם את הקשר בין התגובה במישור הזמן לבין תגובת התדר במערכת מסדר שני:

- תגובת היתר M_0 לאות מדרגה, תלויה אך ורק במקדם הריסון ζ .
- הגבר השיא M_R בתהודה תלוי גם הוא ב- ζ בלבד.
- זמן העלייה של התגובה, t_p , גדל עם מקדם הריסון. רוחב הפס (BW) קטן עם עליית מקדם הריסון. מכאן ש- t_p ו-BW נמצאים ביחס הפוך זה לזה.
- רוחב הפס BW נמצא ביחס ישר לתדר הטבעי ω_n של המערכת.
- ככל שרוחב הפס גדול יותר, הגבר השיא M_R קטן יותר.

8.8.3 התלות של יציבות המערכת בתגובת התדר

אחד היתרונות הבולטים של השימוש בתגובת התדר טמון בכך שבעזרתה אפשר לנתח ולאפיין מערכת בקרה בחוג סגור אם יודעים את פונקציית התמסורת של המערכת בחוג הפתוח. בדרך כלל, פונקציית התמסורת של מערכת בחוג פתוח היא פשוטה יותר מבחינה מתמטית, וקל יחסית למדוד את תגובת התדר של המערכת במצב זה. הדבר חשוב במיוחד לחקירת התנאים שבהם מערכת הבקרה יציבה. בסעיף 6.3 למדנו כי במערכת בקרה לא יציבה, אות המוצא שיוצר אות מדרגה במבוא עלול להתנוודד בצורה בלתי מרוסנת. באופן כללי, מגדירים מערכת בקרה (בחוג פתוח או בחוג סגור) כמערכת בקרה יציבה אם כל אות מבוא **חסום** יוצר אות מוצא שגם הוא חסום. כזכור, אות חסום הוא אות שהתנופה שלו אינה גדלה לאין-סוף עם הזמן (אף כי היא יכולה להתנוודד בתנופה קבועה). לכן במערכת בקרה יציבה, אות מדרגה במבוא או אות מבוא סינוסי בעל תנופה קבועה, יוצרים אות מוצא שגם הוא אות חסום (למשל, אות סינוס בעל תנופה קבועה). מאידך, די שאות חסום מסוים (מתוך אין-סוף אותות המבוא האפשריים) ייצור אות מוצא בלתי חסום, כדי לומר שהמערכת אינה יציבה. ניתן להראות (אף כי לא נעשה זאת כאן) כי יציבות המערכת נקבעת על-ידי צורת פונקציית התמסורת שלה. היות שחישוב פונקציית

התמסורת של מערכת שקול לחישוב תגובת התדר שלה, הרי שאם יודעים את תגובת התדר ניתן לדעת אם המערכת יציבה או לא. במיוחד, מתגובת התדר של מערכת בקרה הפועלת בחוג פתוח, ניתן ללמוד על תנאי היציבות של אותה המערכת כאשר היא פועלת בחוג סגור. נסמן ב- $G(\omega)$ את תגובת התדר של מערכת הפועלת בחוג פתוח, וב- K את ההגבר הסטטי שלה. נניח כי המשוב של המערכת הפועלת בחוג סגור הוא משוב יחידה (איור 8.28).



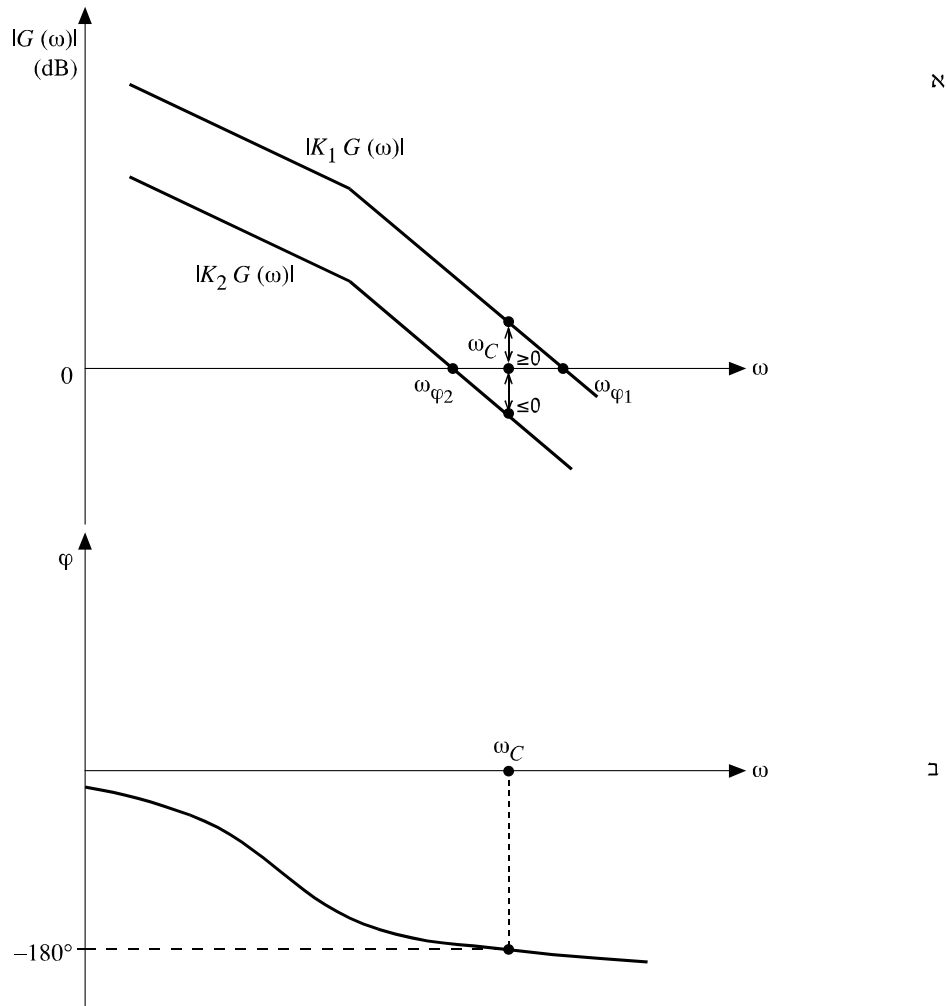
איור 8.28 תרשים מלבנים של מערכת בקרה בחוג סגור עם משוב יחידה ותמסורת $KG(\omega)$ בחוג הקדומני

קל לראות כי פונקציית התמסורת (ולכן גם תגובת התדר) של המערכת בחוג הסגור נתונה על ידי הפונקציה $\frac{KG(\omega)}{1 + KG(\omega)}$. אם $G(\omega)$ היא פונקציה מרוכבת אזי גם תגובת התדר של המערכת בחוג הסגור היא פונקציה מרוכבת. אפשר אפוא לסרטט את תרשים בודה של המערכת בחוג הסגור וללמוד ממנה על תלות ההגבר והזווית בתדר. ניתן להראות כי לחקירת היציבות של המערכת הפועלת בחוג סגור, די לסרטט את תרשים בודה של הפונקציה $KG(\omega)$, כלומר, את תרשים בודה של המערכת הפועלת בחוג פתוח. כיצד אפשר ללמוד מתרשים בודה של $KG(\omega)$, שאותו קל יחסית לחשב, על יציבות המערכת בחוג סגור? נסביר את השיטה באופן טכני ללא הוכחה.

באיור 8.29 מתוארת תגובת תדר אופיינית של מערכת. בגרף ההגבר מופיעים שני קווים: האחד מתאים להגבר סטטי $K = K_1$, והאחר להגבר סטטי $K = K_2$. גרף זווית המופע φ מתאר את הזווית של הפונקציה $K_1G(\omega)$ (או $K_2G(\omega)$, מדוע מסרטטים את הגרפים עבור שני ערכי K במערכת צירים אחת?) נסמן ב- ω_c את התדר שבו ערכו של עקום זווית המופע הוא -180° . נבדוק את ערכי ההגבר בתדר ω_c .

אנו רואים כי בתדר ω_c , ההגבר $|K_1G(\omega)|$ גדול מאפס, ואילו ההגבר $|K_2G(\omega)|$ קטן מאפס. אנו טוענים כי המערכת בעלת ההגבר הסטטי K_1 אינה יציבה, ואילו המערכת בעלת ההגבר הסטטי K_2 יציבה. אם נסמן ב- ω_ϕ את התדר שבו עקום ההגבר חותך את ציר ה-0 dB (איור 8.29), אזי תנאי הכרחי (ומספיק) ליציבות המערכת בחוג הסגור הוא $\omega_c > \omega_\phi$. ואכן במערכת בעלת ההגבר הסטטי K_1 , התדר ω_{ϕ_1} גדול מ- ω_c , ולפיכך המערכת אינה יציבה.

לעומת זאת, באותה מערכת, כאשר ההגבר הסטטי קטן יותר, K_2 , מתקיים $\omega_c > \omega_{\phi_2}$, כלומר, המערכת יציבה!



איור 8.29 תרשים בודה של מערכת עם שני ערכים של הגבר סטטי K .
 K_2 - המערכת יציבה, K_1 - המערכת אינה יציבה

מסקנה: שינוי ההגבר הסטטי של מערכת בקרה הפועלת בחוג סגור עלול לשנות את יציבותה של המערכת. מתרשים בודה של אותה מערכת כאשר היא פועלת בחוג פתוח, ניתן ללמוד על ההגבר הסטטי הגבולי שבו המערכת עוברת ממצב יציב למצב שאינו יציב.

8.9 סיכום

- במערכת בקרה לינארית או ברכיב בקרה לינארי, אות מבוא סינוסי יוצר אות מוצא סינוסי. תדר אות המוצא זהה לתדר אות המבוא. ערך השיא וזווית המופע של אות המוצא עשויים להיות שונים מערכי אות המבוא המתאימים. היחס בין ערך השיא של אות המוצא לערך השיא של אות המבוא, והפרש המופע בין שני האותות תלויים בנתוני המערכת (או הרכיב) ואינם תלויים בנתוני אות המבוא.
- פונקציית התמסורת של מערכת (רכיב) במישור התדר, $G(\omega)$, מוגדרת כיחס בין אות המוצא הסינוסי לבין אות המבוא הסינוסי במערכת. ערך הפונקציה G משתנה עם תדר אות המבוא, ω . בתדר נתון, ניתן להציג את G כמספר מרוכב, שיש לו רכיב ממשי ורכיב מדומה.
- הערך המוחלט של פונקציית התמסורת, $|G|$ בהצגתה הפאזורית, שווה ליחס בין ערך השיא של אות המוצא הסינוסי לבין ערך השיא של אות המבוא הסינוסי, כלומר, **להגבר** המערכת (הרכיב).
- הזווית (הארגומנט) של פונקציית התמסורת, $\angle G$, בהצגתה הפאזורית, שווה ל**הפרש המופע** בין אות המוצא ואות המבוא של המערכת (הרכיב).
- המושג **תגובת התדר** של מערכת מתייחס לתיאור האנליטי, או הגרפי, של תלות פונקציית התמסורת G בתדר ω .
- רכיב שפונקציית התמסורת שלו בחוג פתוח נתונה על-ידי:

$$G(\omega) = j\omega$$

נקרא **רכיב גוזר אידיאלי**. אות המוצא מרכיב גוזר אידיאלי שווה לנגזרת לפי הזמן של אות המבוא.

- רכיב שפונקציית התמסורת שלו בחוג פתוח נתונה על-ידי:

$$G(\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

נקרא **רכיב סוכם אידיאלי**. אות המוצא מרכיב סוכם אידיאלי שווה לאינטגרל לפי הזמן של אות המבוא.

- רכיב שפונקציית התמסורת שלו בחוג פתוח נתונה על-ידי:

$$G(\omega) = 1 + j\omega\tau$$

נקרא רכיב גוזר לא-אידיאלי בעל קבוע זמן τ .

- רכיב שפונקציית התמסורת שלו בחוג פתוח נתונה על-ידי:

$$G(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

נקרא רכיב סוכם לא-אידיאלי (או רכיב עם פיגור מסדר ראשון) בעל קבוע זמן τ .

- **תרשים בודה** הוא אחת השיטות המקובלות לתיאור גרפי של תגובת התדר. התרשים מורכב משני גרפים:

א. גרף המתאר את התלות של $|G|$ בתדר ω .

ב. גרף המתאר את התלות של $\angle G$ בתדר ω .

את שני הגרפים נוהגים לסרטט זה מתחת לזה עם ציר תדר משותף.

- **הדציבל (dB)** הוא יחידה למדידת הערך המוחלט של פונקציית התמסורת:

$$G(\text{dB}) = 20 \log |G|$$

כאשר \log הוא הלוגריתם העשרוני ו- $|G|$ באגף ימין הוא בדרך כלל גודל חסר יחידות.

- את גרף ההגבר נהוג לסרטט במערכת צירים לוגריתמית. הציר הלוגריתמי האופקי הוא ציר התדרים, והציר האנכי הוא ציר הדציבלים.

- **תרשים בודה אסימפטוטי** הוא תרשים בודה מקורב שבו מתואר ההגבר באמצעות קווים ישרים המשיקים באופן אסימפטוטי לקו ההגבר המדויק.

- הצורה הכללית של פונקציית תמסורת של מערכת מסדר ראשון בחוג סגור היא :

$$G(\omega) = \frac{K \cdot G_1(\omega)}{1 + j\omega\tau}$$

כאשר :

τ הוא גודל ממשי המציין את קבוע הזמן של הגורם הסוכם הלא-אידיאלי ;
 $G_1(\omega)$ היא פונקצייה שערכה המוחלט יחידה או היא מכפלה של גורמים גוזרים.

- הצורה הכללית של פונקציית תמסורת של רכיב מסדר שני היא :

$$G(\omega) = \frac{K \cdot G_1(\omega)}{[1 + 2j\zeta\omega\tau_0 + (j\omega\tau_0)^2]}$$

כאשר :

K הוא גודל ממשי המציין את ההגבר הסטטי הקבוע של המערכת ;
 ζ הוא גודל ממשי המציין את מקדם הריסון של המערכת ;
 $\tau_0 = 1/\omega_n$ הוא גודל ממשי המציין את זמן המחזור הטבעי של המערכת, או הערך ההופכי של התדר הטבעי של המערכת ;
 $G_1(\omega)$ הוא פונקצייה שערכה המוחלט יחידה או היא מכפלה של גורמים גוזרים.

- גרף ההגבר בתרשים בודה אסימפטוטי של מערכת מסדר ראשון בחוג סגור שבה $G_1 \equiv 1$, הוא סכום של שני קווים ישרים :

א. קו אופקי ישר בגובה $20 \log K$;

ב. קו ישר ששיפועו -20 dB/decade , החותך את הקו 0 dB בתדר הברך $\omega = 1/\tau$. בתדרים קטנים מתדר הברך, הקו הישר מתלכד עם הציר 0 dB .

הקו הישר בעל השיפוע השלילי מתאר בקירוב את הפונקציה ההפוכה $-20 \log |1 + j\omega\tau|$.

- מתרשים בודה של מערכת מסדר שני ניתן ללמוד על :

א. ההגבר וזווית המופע של אות המוצא של המערכת ;

ב. רוחב הפס של תגובת התדר של מערכת ;

ג. הגבר השיא ותדר הגבר השיא של המערכת ;

ד. יציבות המערכת בעת פעולה בחוג סגור.

- קיים קשר בין התנהגות המערכת במישור הזמן לבין התנהגותה במישור התדר. במערכות מסדר שני קיים קשר חד-ערכי בין מקדם הריסון (ζ), התדר הטבעי (ω_n), הגבר השיא בתהודה (M_R), והתדר בהגבר התהודה (ω_R):

$$M_R = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\omega_R = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$$

- הגבר השיא בתהודה קיים כאשר מקדם הריסון $\zeta < 1$. ככל שמקדם הריסון קטן יותר, ההגבר בתדר התהודה גדול יותר.

*פעילות מחשב מס' 6

1. הפעילו את היישום "מערכות בקרה". בחרו במערכת "בקרת מצב אנטנה סיבובית".
 2. טענו את תרשים המערכת ששמרתם בפעילות מס' 5.
 3. כאות מבוא למערכת בחרו באות סינוסי עם עוצמה של 3 ותדר של 0.01 מחזורים לדקה. קבעו את קבוע הזמן של המנוע לדקה אחת, $\tau_m = 1 \text{ min}$, וגם את קבוע זמן האינטגרציה של האנטנה (האינטגרטור) לדקה אחת $\tau_a = 1 \text{ min}$. השאירו את ההגברים האחרים של רכיבי המערכת כפי שנקבעו בפעילות מס' 5.
 4. חשבו את תגובת המערכת לאות הסינוסי. האם גם אות המוצא הוא אות סינוסי? חשבו את היחס בין תנופת אות המוצא לתנופת אות המבוא (ההגבר G של המערכת). מהו הפרש המופע $\Delta\varphi$ בין שני האותות?
- הערה:** את ההגבר והפרש המופע שבין האותות רצוי לחשב באמצעות יישום אחר ("אקסל", למשל). לשם כך שמרו את הטבלה המתקבלת באמצעות הסמלון "שמור" (שימו לב שפעולת השמירה של טבלה היא אוטומטית כאשר הטבלה מוצגת על מסך המחשב). הטבלה נשמרת כקובץ טקסט בעל 3 עמודות (זמן, אות המבוא ואות המוצא). מהעמודות הללו ניתן לקרוא אל היישום החיצוני (אקסל) או להציג בצורה גרפית.
5. חזרו על סעיף 4 לעיל עבור הערכים הבאים של תדר אות המבוא $f = 0.05, 0.1, 0.5, 1, 5, 10$. קבעו ורשמו את ההגבר G של המערכת ואת הפרש המופע $\Delta\varphi$ בכל אחד מתדרים אלו.
 6. סרטטו גרף של G ושל $\Delta\varphi$ כפונקציה של תדר אות המבוא f . מהו תחום ההשתנות של הפרש המופע (בתחום התדרים שבדקתם)? האם קיימת תופעת תהודה (כלומר, הגבר מקסימלי) בתחום התדרים שבדקתם?
 7. בהנחה שהמערכת מתנהגת כמערכת מסדר שני, והערך המוחלט של תגובת התדר של המערכת נמצא ביחס ישר לגורם $\frac{1}{2\zeta}$ (כאשר ζ הוא מקדם הריסון של המערכת), מה תוכלו להסיק על ערכו של ζ ?
 8. חזרו על סעיף 4 לעיל עם אות מבוא מדרגה שגודלו 3 יחידות. כיצד נראית תגובת המערכת? האם במצב זה פועלת המערכת כמערכת בעלת "ריסון יתר", או כמערכת "תת-מרוסנת"? האם תשובתכם לסעיף 7 לעיל מתאימה לתגובת המערכת בפועל?

9. נבדוק את השפעת משוב המהירות על ביצועי המערכת. לשם כך נחזור על סעיף 8 לעיל עבור ההגבר הסטטי המינימלי (שהתוכנה מאפשרת) של הטכוגנרטור. מהי צורת התגובה של המערכת במצב זה? (שימו לב שגם במקרה זה, אות המוצא ממשיך לגדול מעל לערך האחרון בטבלה. ואולם החישוב מופסק בשלב זה מסיבות חישוביות).

10. ניתן להגדיל את מקדם הריסון האפקטיבי של המערכת על-ידי שימוש בבקרה "יחסית-נגזרת" (PD - ראו סעיף 7.4.3). חזרו על סעיף 9 לעיל עבור בקרה "יחסית-נגזרת", כאשר קבוע הזמן של הבקר הוא $\tau_D = 10$. מהי תגובת מערכת זו לאות המדרגה? מהי השגיאה במצב המתמיד?

ניתוח תגובת המעבר של מעגל RLC

בנספח זה נחשב בצורה מפורטת את הזרם והמתח במעגל RLC מעורב (איור נ-1) לאחר סגירת המפסק S. כמו בסעיף 6.3, נבחין בין שלושה מקרים.

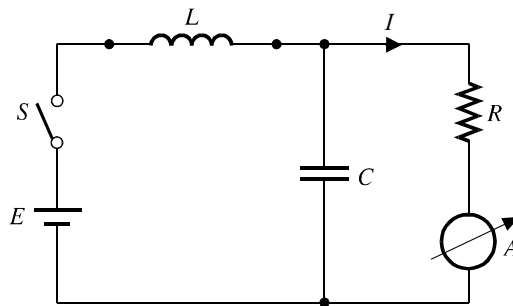
I. מעגל RLC מעורב בעל תגובה תת-מרוסנת

מעגל RLC הוא מעגל בעל תגובה תת-מרוסנת אם מקדם הריסון ζ (משוואה (6-27)) קטן מ-1: $\zeta < 1$.

ניתן להראות כי כאשר סוגרים את המפסק S במעגל, הזרם I בגודל R (איור נ-1) משתנה בזמן על פי המשוואה:

$$(נ-1) \quad I(t) = \frac{E}{R} \left[1 - \frac{e^{-t/\tau_A}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \varphi) \right]$$

$$\varphi = \arcsin(\zeta)$$

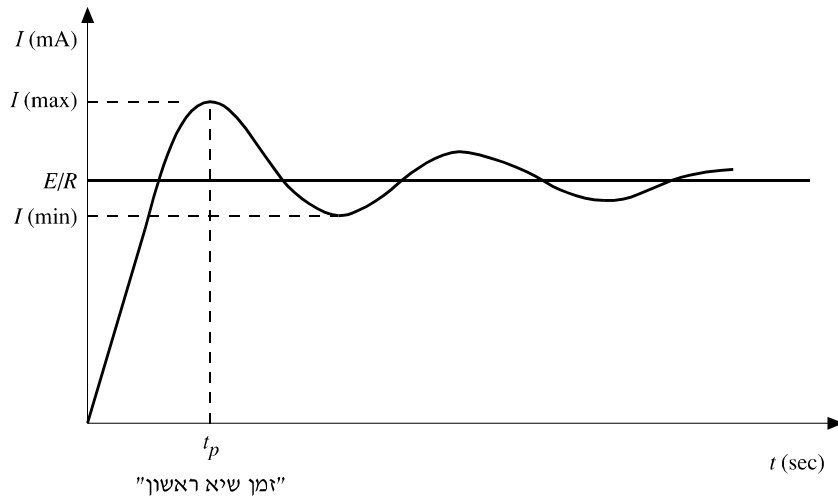


איור נ-1 מעגל RLC מעורב הכולל מקור זרם ישר

הקבועים τ_A , ζ , ω_d , תלויים ברכיבי המעגל כמתואר במשוואות (6-25), (6-27), ו-(6-22), בהתאמה. על-פי משוואה (נ-1) אפשר לראות כי בזמן $t = 0$ לעומת זאת, כאשר $t \rightarrow \infty$, $i(t) \rightarrow E/R$. בזמן המעבר, הזרם I משתנה בצורה התלויה במידה רבה במקדם הריסון ζ (ראו איור נ-2).

שאלה נ-1

הוכיחו כי בזמן $t = 0$, הזרם $I = 0$.



איור נ-2 תגובה תת-מרוסנת של מעגל RLC (הזרם הנמדד)

ואמנם, ממשוואה (נ-1) נובע כי כאשר מקדם הריסון ζ קטן מ-1, הזרם I מתנדד סביב ערך קבוע (איור נ-2) E/R , כאשר הערך המקסימלי הוא:

$$(2-נ) \quad I_{\max} = \frac{E}{R} \left[1 + \frac{e^{-t_p/\tau_A}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right]$$

כאשר t_p הוא רגע השיא הראשון של התנדודות (איור נ-2), והוא מתקבל מהמשוואה:

$$(3-נ) \quad t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

הערך המוחלט של ההפרש $(I_{\max} - (E/R))$ נקרא **תגובת היתר** של המעגל. זוהי "הקפיצה" של הזרם מעל לערך הסופי שלו (E/R) . נהוג להציג את תגובת היתר יחסית לערך הסופי של התגובה.

ממשוואה (נ-2) נובע כי תגובת היתר של המעגל היא:

$$(4-נ) \quad M_0 = \left| \frac{I_{\max} - E/R}{E/R} \right| = \frac{e^{-t_p/\tau_A}}{\sqrt{1-\zeta^2}} = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

שאלה נ-2

הוכיחו כי הזמנים שבהם הזרם $I(t)$ (במשוואה (נ-1)) מגיע לערכו המקסימלי נתונים על-ידי:

$$t_k = \frac{k\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad k = 1, 3, 5, 7$$

(כאשר k שלם אי-זוגי).

מכאן תוכלו להסיק כי משוואה (נ-3) מתקבלת כאשר $k = 1$.

שאלה נ-3

השתמשו בהגדרה של זמני השיא של התנודות, t_k , הנתונים בשאלה נ-2, והוכיחו כי ההפרש בין זמן השיא של התנודה השנייה לזמן השיא של התנודה הראשונה הוא $\left(\frac{2\pi}{\omega_d}\right)$, כאשר ω_d הוא תדר הריסון (משוואה (6-22)).

אם ההתנגדות R במעגל RLC (איור נ-1) גדולה מאוד, מקדם הריסון ζ של המעגל שואף לאפס (משוואה (6-27)). במצב הגבולי שבו $\zeta = 0$, משוואה (נ-1) אינה מתארת את הזרם במעגל. למעשה המעגל מתנהג אז כמעגל תהודה אידיאלי (מעגל LC), שבו המתח על הקבל משתנה כמו אות קוסינוס בעל תדר תהודה ω_n :

$$U_c(t) = E[1 - \cos(\omega_n t)] \quad (\text{נ-5})$$

המתח על הקבל מתנודד באופן מחזורי בין הערך המינימלי 0 לבין הערך המקסימלי $2E$.

דוגמה נ-1

סוגרים את המפסק S ברגע $t = 0$ (איור נ-1). הניחו כי מקור המתח קבוע, $E = 1 \text{ V}$, וכי ערכי הנגד, המשרן והקבל, הם $R = 50 \Omega$, $L = 0.1 \text{ mH}$ ו- $C = 1 \mu\text{F}$, בהתאמה.

- הראו כי המעגל מתנהג כמערכת תת-מרוסנת.
- תארו באופן גרפי את המתח $U_R(t)$ על הנגד במשך אלפית השנייה הראשונה.
- כיצד ייראה גרף המתח על הקבל אם מנתקים את הנגד מן המעגל (כלומר $R = \infty$)?

פתרון

א. נחשב תחילה את התדירות הטבעית ω_n , תדירות התנודות המרוסנות ω_d , ומקדם הריסון ζ של המעגל. ממשוואות (6-21), (6-22) ו- (6-27) מקבלים:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-4} \cdot 10^{-6}}} = 10^5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\zeta = \frac{1}{2RC\omega_n} = \frac{1}{2 \cdot 50 \cdot 10^{-6} \cdot 10^5} = 0.1$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 10^5 \sqrt{1 - 0.1^2} = 99498.7 \text{ rad/s}$$

כלומר, $\zeta < 1$, ולכן המעגל מתנהג כמערכת תת-מרוסנת. המתח $U_R(t)$ על הגנר R מתקבל על-ידי מכפלת הזרם הנתון במשוואה (1-ג) בהתנגדות R . מציבים את ערכי ω_n ו- ζ ומקבלים:

$$U_R(t) = 1 - \frac{e^{-0.1 \cdot 10^5 t}}{\sqrt{1 - (0.1)^2}} \sin(99498.7t + \theta)$$

את הזווית θ נחשב לפי הגדרתה:

$$\cos \theta = \zeta = 0.1$$

ולכן:

$$\theta = 1.47 \text{ rad}$$

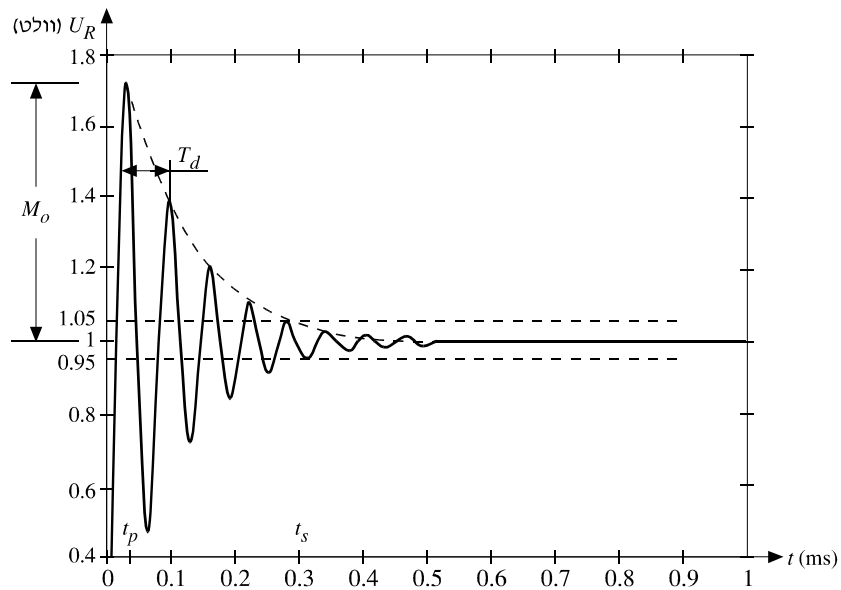
מכאן נובע כי:

$$U_R(t) = 1 - \frac{e^{-10^4 t}}{0.995} \sin(99498.7t + 1.47)$$

ב. כדי לתאר באופן גרפי את המתח $U_R(t)$, נחשב תחילה את ערכו עבור כמה ערכי זמן (הזמנים נתונים במיקרושניות). תוצאות החישוב נתונות בטבלה הבאה:

זמן (μs)	מתח	זמן (μs)	מתח	זמן (μs)	מתח	זמן (μs)	מתח
0	0	100	1.337	250	0.923	540	1.004
20	1.258	120	0.774	320	0.961	700	0.999
40	1.498	140	0.925	410	1.016	900	1.0000
50	0.901	150	1.202	440	0.988		
60	0.495	160	0.916	470	1.008		
70	0.583	200	0.921	500	0.997		
80	1.003	220	1.109				

הקו המלא באיור נ-3 מתאר את המתח על הנגד במשך המילישנייה הראשונה. הקו המקווקו באיור זה, המשיק בכמה נקודות לגרף של אות המוצא, מתאר את הפונקציה המעריכית $\frac{e^{-10^4 t}}{0.995}$. גרף זה הוא אפוא גרף המעטפת (envelope) של אות המוצא.

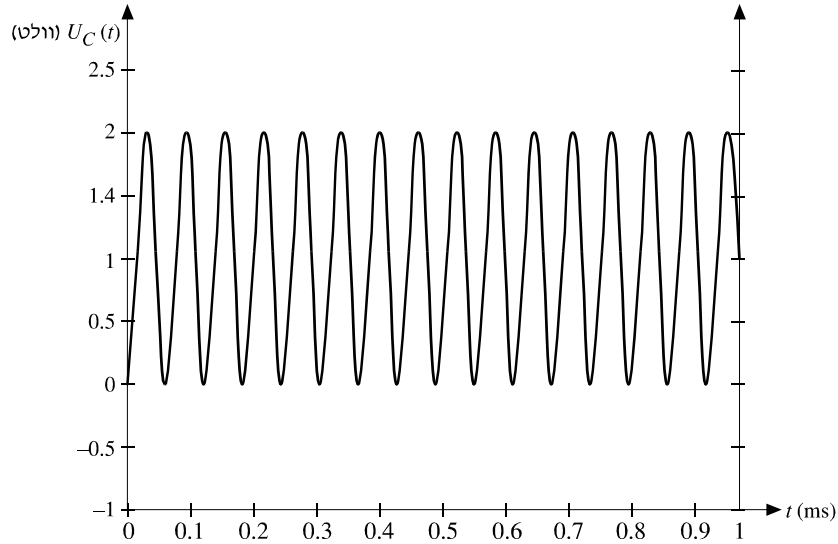


איור נ-3 המתח על הנגד במעגל RLC (איור נ-1) שבו מקדם הריסון הוא $\zeta = 0.1$ ומתח המקור קבוע (אות מדרגה)

ג. כאשר הנגד מנותק, $R = \infty$, ולכן $\zeta = 0$. במקרה זה המתח בין לוחות הקבל (איור נ-1) משתנה בזמן על פי משוואה (נ-5).

$$U_C(t) = 1 - \cos(10^5 t)$$

זהו אות מחזורי המתנדנד בתנודות בעלות תנופה קבועה סביב אות המבוא, כמתואר באיור נ-4.



איור נ-4 המתח על הקבל במעגל RLC (איור 5.28) שבו מקדם הריסון הוא $\zeta = 0$ ומתח המקור קבוע (אות מדרגה)

לסיכום נוכל להסיק כי את התגובה של מעגל RLC תת-מרוסן אפשר לאפיין בעזרת ארבעה גדלים עיקריים:

א. תגובת היתר (over-shoot) של המעגל. כזכור, תגובת היתר מוגדרת כהפרש בין הערך המרבי של אות המוצא (שאותו סימנו על-ידי M_O באיור נ-3) לבין הערך הקבוע של אות המוצא במצב המתמיד (הערך 1 באיור נ-3).

ב. זמן השיא הראשון (t_p first peak) זהו הרגע שבו אות המוצא מגיע לערכו המרבי M_O (איור נ-2).

ג. זמן המחזור (period) של התנודה, T_d . זהו ההפרש בין זמן השיא הראשון לבין זמן השיא השני (איור נ-3).

ד. זמן ההתייצבות (או זמן ההירגעות, settling time) של התנודה, t_s . זהו הזמן הדרוש לאות המוצא של המערכת לחזור ולהישאר בתחום קבוע סביב הערך הסופי. מקובל להגדיר את t_s באחוזים: $\pm 5\%$ סביב המצב המתמיד. כלומר, זהו הזמן שבו אות המוצא מגיע ונשאר בתחום שבין 0.95 מערכו הסופי לבין 1.05 מערכו הסופי (איור נ-3).

לא נרשום נוסחה מדויקת לזמן ההתייצבות (t_s), אולם ניתן להעריך אותו בעזרת פונקציית המעטפת:

$$\frac{e^{-t/\tau_A}}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

אם מניחים כי בזמן $t = t_s$ מתקיים:

$$\frac{e^{-\zeta\omega_n t_s}}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.05$$

אז על-ידי חישוב הלוגריתם הטבעי של שני האגפים נקבל כי:

$$(6-ג) \quad t_s \approx \frac{\ln(0.05\sqrt{1-\zeta^2})}{\zeta\omega_n} \approx \frac{3 - \ln\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta\omega_n}$$

כלומר, אם מקדם הריסון הוא קטן מאוד, $\zeta \ll 1$, אז $t_s \sim 3\tau_A$.

שאלה נ-4

קבל שקיבולו $100 \mu\text{F}$ מחובר בטור לנגד $R = 3 \text{ k}\Omega$ ולסליל שהשראותו אינה ידועה ויוצר מעגל RLC טורי. נמצא כי כאשר מחברים למעגל מקור מתח קבוע, מופיעות תנודות מתח מתרסנות על הנגד. לאחר 2 עשיריות שנייה, תנופת המעטפת העריכית קטנה מ-30% מערכה בזמן $t = 0$. על פי נתונים אלו, חשבו את השראות הסליל, את מקדם הריסון ζ , ואת תגובת היתר של המעגל.

II מעגל RLC מעורב בעל ריסון יתר

במעגל כזה, מקדם הריסון ζ גדול מ-1, כלומר, ערכי R, L, C מקיימים:

$$\zeta \equiv \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{L}{C}} > 1$$

התגובה של המערכת היא תגובה בעלת ריסון יתר, היות שהזרם עולה לערכו המרבי ללא תנודות. ניתן להראות כי עליית הזרם מתוארת על-ידי המשוואה:

$$(7-ג) \quad I(t) = \frac{E}{R} \left\{ 1 + \frac{1}{2\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} \left[\omega_n \left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) e^{\omega_n t (-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})} - \omega_n \left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) e^{\omega_n t (-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})} \right] \right\}$$

באגף ימין של משוואה (7-ג) מופיעים שלושה מחוברים: איבר קבוע שאינו תלוי בזמן, ושני איברים נוספים הדועכים עם הזמן בצורה מעריכית. כאשר $t = 0$, סכום שני האיברים האחרונים והאיבר הקבוע הוא אפס; כאשר $t \rightarrow \infty$, סכום שני האיברים האחרונים שואף לאפס.

שאלה נ-5

הוכיחו את הטענה לעיל.

ניתן להראות כי המקדמים בפונקציות המעריכיות שבמשוואה (7-נ) מתקבלים מפתרון המשוואה הריבועית:

$$(8-נ) \quad x^2 + 2\zeta\omega_n x + \omega_n^2 = 0$$

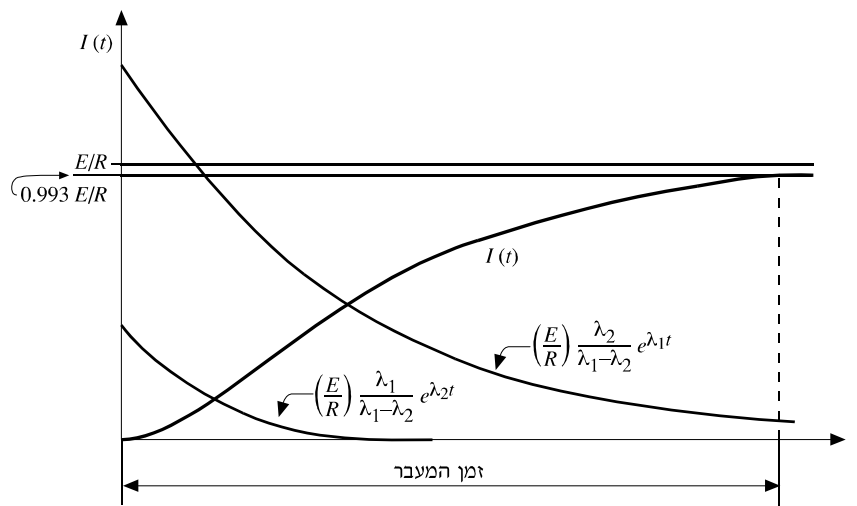
כלומר, אם λ_1 ו- λ_2 הם שני השורשים הממשיים של משוואה (8-נ):

$$\lambda_{1,2} = \omega_n \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} \right)$$

אזי את משוואה (7-נ) ניתן לרשום בצורה:

$$(9-נ) \quad I(t) = \frac{E}{R} \left[1 + \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)} (\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}) \right]$$

איור נ-5 מתאר את אופן המוצא במעגל כזה וכן את תרומת שלושת האיברים המופיעים במשוואה (9-נ). שימו לב כי התרומה של האיבר המעריכי הראשון נמשכת זמן ארוך יותר מהתרומה של האיבר המעריכי השני.



איור נ-5 תרומת האיברים השונים המופיעים במשוואה (9-נ) לתגובה של מערכת מסדר שני בעלת ריסון יתר $I(t)$ (הוא סכום האיברים)

בדוגמה הבאה נראה כי הטענה שלמשוואה (8-נ) יש שני שורשים ממשיים, שקולה לטענה כי המערכת מתנהגת כמערכת בעלת ריסון יתר.

דוגמה נ-2

ערכי הרכיבים במעגל RLC מעורב (איור נ-1) הם: $L = 10 \text{ mH}$, $R = 2.5 \Omega$, $C = 100 \mu\text{F}$.

- חשבו את התדירות הטבעית ואת מקדם הריסון של המעגל.
- הוכיחו כי המעגל מגיב כמערכת בעלת ריסון יתר באמצעות חישוב השורשים של המשוואה הריבועית.
- סוגרים את המפסק S ברגע $t = 0$. חשבו את המתח $U_R(t)$ על הנגד R שיוצר אות מדרגה במבוא שתנופתו 1 V . תארו את $U_R(t)$ באופן גרפי בפרק הזמן של 10 המילישניות הראשונות.

פתרון

- את התדירות הטבעית ω_n ואת מקדם הריסון ζ נחשב על פי הגדרתם (משוואות (6-21) ו-(6-27)). נתון כי $L = 10^{-2} \text{ H}$ ו- $C = 10^{-4} \text{ F}$, ולכן נקבל כי התדירות הטבעית היא:

$$\omega_n^2 = \frac{1}{10^{-2} \cdot 10^{-4}} = 10^6$$

או:

$$\omega_n = 10^3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

נציב $R = 2.5 \Omega$, ונקבל כי מקדם הריסון הוא:

$$\zeta = \frac{1}{2RC\omega_n} = \frac{1}{2 \cdot 2.5 \cdot 10^{-4} \cdot 10^3} = 2$$

כלומר, מקדם הריסון גדול מ-1.

- כדי להוכיח כי המערכת מגיבה כמערכת בעלת ריסון יתר, נראה כי למשוואה הריבועית (8-נ) יש שני שורשים ממשיים. ואמנם, אם מציבים את ω_n , ו- ζ , מקבלים כי הדיסקרימיננטה של המשוואה הריבועית היא:

$$\Delta = 4 \cdot 10^6 (2^2 - 1) = 12 \cdot 10^6 > 0$$

כלומר, שני השורשים של משוואה (8-נ) הם ממשיים.

ג. נחשב את השורשים λ_1 ו- λ_2 של המשוואה הריבועית (8-נ). נציב בה את הערכים של ω_n ו- ζ ונקבל את המשוואה:

$$x^2 + 4000x + 10^6 = 0$$

שפתרונותיה הם:

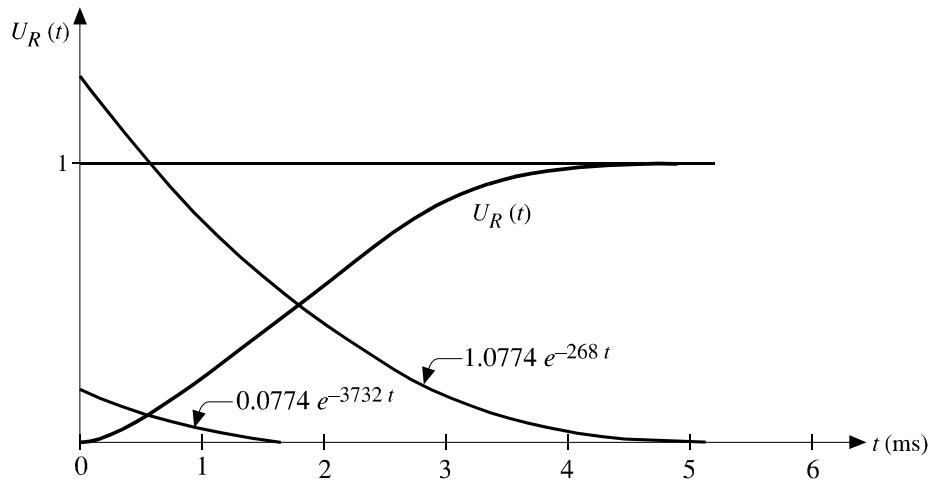
$$\lambda_1 = -2000 + \sqrt{2000^2 - 10^6} = -268$$

$$\lambda_2 = -2000 - \sqrt{2000^2 - 10^6} = -3732$$

אם נציב את λ_1 ו- λ_2 במשוואה (9-נ), נקבל את תלות המתח בזמן לאחר הכפלת הזרם בהתנגדות $R (E = 1)$:

$$U_R(t) = 1 - \frac{3732}{(-268 + 3732)} e^{-268t} + \frac{268}{(-268 + 3732)} e^{-3732t}$$

באיור נ-6 מתוארת הפונקציה $U_R(t)$ במשך 5 המילישניות הראשונות, וכן התרומה של שני האיברים המעריכיים. שימו לב שתרומת האיבר המעריכי השני זניחה כבר אחרי המילישנייה הראשונה.



איור נ-6 תגובת מעגל בעל ריסון יתר ותרומת שלושת האיברים

III מעגל RLC מעורב בעל ריסון קריטי

במעגל זה, מקדם הריסון ζ שווה ל-1, כלומר, ערכי R, L ו- C מקיימים:

$$\frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} = 1$$

זהו אפוא מקרה גבולי, שבו הדיסקרימיננטה של המשוואה הריבועית (8-נ) מתאפסת. שני השורשים של המשוואה הריבועית זהים:

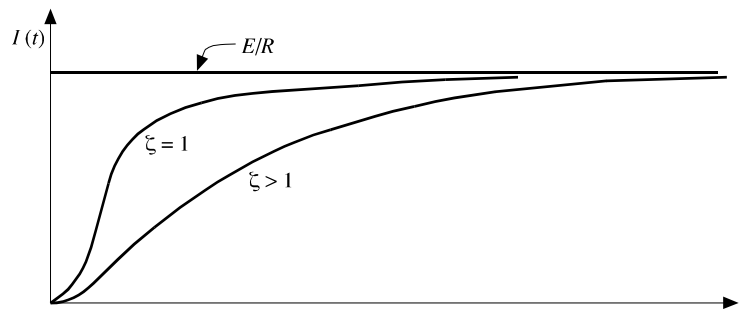
$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\omega_n$$

והפתרון עבור הזרם (משוואה (7-נ)) אינו תקף כאן.

ניתן להראות כי במקרה זה הזרם בנגד הוא:

$$(10-נ) \quad I(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\lambda_1 t} + \lambda_1 t e^{-\lambda_1 t} \right) = \frac{E}{R} \left[1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t) \right]$$

כלומר, במקרה זה, הזרם גדל גם הוא באופן מעריכי. יתירה מזו, עליית הזרם במעגל דומה להתנהגות המתח על הקבל במעגל RC (ראו משוואה (6-2) המתארת את התגובה של מערכת מסדר ראשון), אולם עליית המתח (והזרם) מהירה יותר (איור 7-נ).



איור 7-נ תגובת מעגל RLC בעל ריסון קריטי

ואמנם, קבוע הזמן של המעגל, $1/\omega_n$, קטן מקבוע הזמן של כל מעגל RLC אחר בעל ריסון יתר. לפיכך, זמן התגובה של המעגל קטן מזמן התגובה של מעגלים שבהם $\zeta > 1$ (מכאן גם שם המעגל: מעגל בעל ריסון גבולי, או מעגל בעל ריסון קריטי). משתמשים במערכות מסדר שני בעלות ריסון קריטי כאשר נדרשת תגובה מהירה מאוד, ללא תנודות של אות המוצא.

תשובות לשאלות נבחרות

פרק 2

תשובה 2.1 : א. 7.5 ב. 2 ג. 0.4

תשובה 2.4 : $Q=4$, $P=4000$, $G_1=0.012$

תשובה 2.6 : ב. 0.009

תשובה 2.7 : ב. 0.102

תשובה 2.10 : $T_{OUT}=44.9$

תשובה 2.11 : אם $H = G_1$, אזי $G_1G_2 = 39.6$

פרק 3

תשובה 3.2 : א. מוחלטת = -0.028, אחוזים = -0.33, FSE = -0.135

תשובה 3.4 : $R_p = 392$

תשובה 3.5 : 0.001

תשובה 3.6 : 0.09

תשובה 3.7 : א. 0.01 ב. 0.02

תשובה 3.8 : א. 0.30 לא ב. 0.32 ג. 0.2

פרק 4

תשובה 4.1 : א. 30 mV ב. 50 mV

תשובה 4.2 : 960 mV

תשובה 4.5 : 122.8

תשובה 4.6 : א. 51.9 ב. 0.38 V ג. 16 mA

תשובה 4.8 : 90 μ A

תשובה 4.12 : $R = 0.01 \alpha$

תשובה 4.13 : א. 717.5 rpm ב. 1150 ג. 4.17

תשובה 4.14 : א. 32 ב. 32 ג. 375 rpm

תשובה 4.15 : 270°

תשובה 4.17 : א. 62800 ב. 16

תשובה 4.22 : א. 2 ($K=2$) ב. 0.01

תשובה 4.23 : א. 9.8 ב. 0.98 N ג. 0.5 V

פרק 5

תשובה 5.2 : א. $I^{ave} = 31.36$ ב. $\eta = 98\%$ ג. $I^{ave} = 7.84$ ד. $\eta = 98\%$

תשובה 5.3 : א. 100.8 V ב. 62.4 V

תשובה 5.4 : א. 1280 W ב. 139.8 NM ג. 762 rpm

פרק 6

תשובה 6.5 : $h = 3.6$ m

תשובה 6.6 : א. $5\tau_H$ ב. $5\tau_H$

תשובה 6.7 : $t_{0.007} = 14.2$, $\tau_1 = 2.86$, $t_{1/2} = 1.98$

תשובה 6.13 : א. $\omega_d = 2.09$ ב. $T = 3$ ג. $\xi \approx 0.5$ ד. $\omega_n = 2.4$ ה. $\tau_d \approx 0.83$

תשובה 6.17 : א. $\Delta c_\infty = 19.96$ ב. $e = 0.04$ ג. $\xi^* = 0.049$ ד. $\omega_d^* = 2.235$ ה. $M_0 = 85.7\%$

ו. $t_p = 1.4$ ז. $\tau_1 = 27.35$

פרק 7

תשובה 7.3 : $PB = 40\%$

תשובה 7.4 : א. $e = 2.5\%$ ב. $m = 62.5\%$

תשובה 7.7 : $0 \leq t < 2$, $m = 40\%$, $2 \leq t < 10$, $m = 52.5\%$, $10 \leq t < 18$, $m = 15\%$, $18 \leq t$, $m = 27.5\%$

תשובה 7.8 : $0 \leq t < 1$, $m = 20\%$, $1 \leq t < 3$, $m = 50\%$, $3 \leq t < 5$, $m = 30\%$, $5 \leq t < 7$, $m = 40\%$, $7 \leq t$, $m = 40\%$

$m = 40\%$, $7 \leq t$

נספח

תשובה נ-4 : $M_0 = 72.2\%$, $\xi = 0.95$, $L = 249.2$ H

ניתוח תגובת המעבר של מעגל RLC

בנספח זה נחשב בצורה מפורטת את הזרם והמתח במעגל RLC מעורב (איור נ-1) לאחר סגירת המפסק S. כמו בסעיף 6.3, נבחין בין שלושה מקרים.

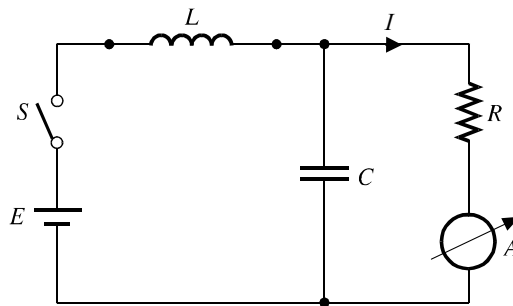
I. מעגל RLC מעורב בעל תגובה תת-מרוסנת

מעגל RLC הוא מעגל בעל תגובה תת-מרוסנת אם מקדם הריסון ζ (משוואה (6-27)) קטן מ-1: $\zeta < 1$.

ניתן להראות כי כאשר סוגרים את המפסק S במעגל, הזרם I בגודל R (איור נ-1) משתנה בזמן על פי המשוואה:

$$(נ-1) \quad I(t) = \frac{E}{R} \left[1 - \frac{e^{-t/\tau_A}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \varphi) \right]$$

$$\varphi = \arcsin(\zeta)$$

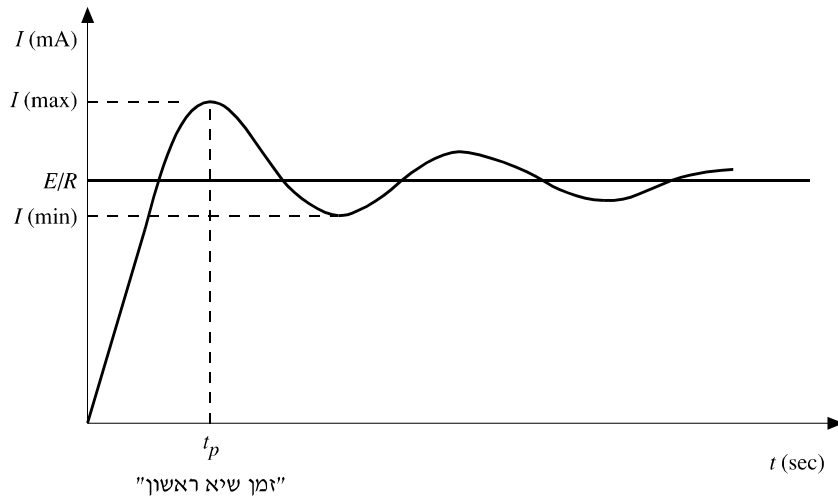


איור נ-1 מעגל RLC מעורב הכולל מקור זרם ישר

הקבועים τ_A , ζ , ω_d , תלויים ברכיבי המעגל כמתואר במשוואות (6-25), (6-27), ו-(6-22), בהתאמה. על-פי משוואה (נ-1) אפשר לראות כי בזמן $t = 0$ לעומת זאת, כאשר $t \rightarrow \infty$, $i(t) \rightarrow E/R$. בזמן המעבר, הזרם I משתנה בצורה התלויה במידה רבה במקדם הריסון ζ (ראו איור נ-2).

שאלה נ-1

הוכיחו כי בזמן $t = 0$, הזרם $I = 0$.



איור נ-2 תגובה תת-מרוסנת של מעגל RLC (הזרם הנמדד)

ואמנם, ממשוואה (נ-1) נובע כי כאשר מקדם הריסון ζ קטן מ-1, הזרם I מתנדד סביב ערך קבוע (איור נ-2) E/R , כאשר הערך המקסימלי הוא:

$$(2-נ) \quad I_{\max} = \frac{E}{R} \left[1 + \frac{e^{-t_p/\tau_A}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right]$$

כאשר t_p הוא רגע השיא הראשון של התנדודות (איור נ-2), והוא מתקבל מהמשוואה:

$$(3-נ) \quad t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

הערך המוחלט של ההפרש $(I_{\max} - (E/R))$ נקרא **תגובת היתר** של המעגל. זוהי "הקפיצה" של הזרם מעל לערך הסופי שלו (E/R) . נהוג להציג את תגובת היתר יחסית לערך הסופי של התגובה.

ממשוואה (נ-2) נובע כי תגובת היתר של המעגל היא:

$$(4-נ) \quad M_0 = \left| \frac{I_{\max} - E/R}{E/R} \right| = \frac{e^{-t_p/\tau_A}}{\sqrt{1-\zeta^2}} = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

שאלה נ-2

הוכיחו כי הזמנים שבהם הזרם $I(t)$ (במשוואה (נ-1)) מגיע לערכו המקסימלי נתונים על-ידי:

$$t_k = \frac{k\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad k = 1, 3, 5, 7$$

(כאשר k שלם אי-זוגי).

מכאן תוכלו להסיק כי משוואה (נ-3) מתקבלת כאשר $k = 1$.

שאלה נ-3

השתמשו בהגדרה של זמני השיא של התנודות, t_k , הנתונים בשאלה נ-2, והוכיחו כי ההפרש בין זמן השיא של התנודה השנייה לזמן השיא של התנודה הראשונה הוא $\left(\frac{2\pi}{\omega_d}\right)$, כאשר ω_d הוא תדר הריסון (משוואה (6-22)).

אם ההתנגדות R במעגל RLC (איור נ-1) גדולה מאוד, מקדם הריסון ζ של המעגל שואף לאפס (משוואה (6-27)). במצב הגבולי שבו $\zeta = 0$, משוואה (נ-1) אינה מתארת את הזרם במעגל. למעשה המעגל מתנהג אז כמעגל תהודה אידיאלי (מעגל LC), שבו המתח על הקבל משתנה כמו אות קוסינוס בעל תדר תהודה ω_n :

$$(נ-5) \quad U_c(t) = E[1 - \cos(\omega_n t)]$$

המתח על הקבל מתנודד באופן מחזורי בין הערך המינימלי 0 לבין הערך המקסימלי $2E$.

דוגמה נ-1

סוגרים את המפסק S ברגע $t = 0$ (איור נ-1). הניחו כי מקור המתח קבוע, $E = 1 \text{ V}$, וכי ערכי הנגד, המשרן והקבל, הם $R = 50 \Omega$, $L = 0.1 \text{ mH}$ ו- $C = 1 \mu\text{F}$, בהתאמה.

- הראו כי המעגל מתנהג כמערכת תת-מרוסנת.
- תארו באופן גרפי את המתח $U_R(t)$ על הנגד במשך אלפית השנייה הראשונה.
- כיצד ייראה גרף המתח על הקבל אם מנתקים את הנגד מן המעגל (כלומר $R = \infty$)?

פתרון

א. נחשב תחילה את התדירות הטבעית ω_n , תדירות התנודות המרוסנות ω_d , ומקדם הריסון ζ של המעגל. ממשוואות (6-21), (6-22) ו- (6-27) מקבלים:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-4} \cdot 10^{-6}}} = 10^5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\zeta = \frac{1}{2RC\omega_n} = \frac{1}{2 \cdot 50 \cdot 10^{-6} \cdot 10^5} = 0.1$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 10^5 \sqrt{1 - 0.1^2} = 99498.7 \text{ rad/s}$$

כלומר, $\zeta < 1$, ולכן המעגל מתנהג כמערכת תת-מרוסנת. המתח $U_R(t)$ על הנגד R מתקבל על-ידי מכפלת הזרם הנתון במשוואה (1-ג) בהתנגדות R . מציבים את ערכי ω_n ו- ζ ומקבלים:

$$U_R(t) = 1 - \frac{e^{-0.1 \cdot 10^5 t}}{\sqrt{1 - (0.1)^2}} \sin(99498.7t + \theta)$$

את הזווית θ נחשב לפי הגדרתה:

$$\cos \theta = \zeta = 0.1$$

ולכן:

$$\theta = 1.47 \text{ rad}$$

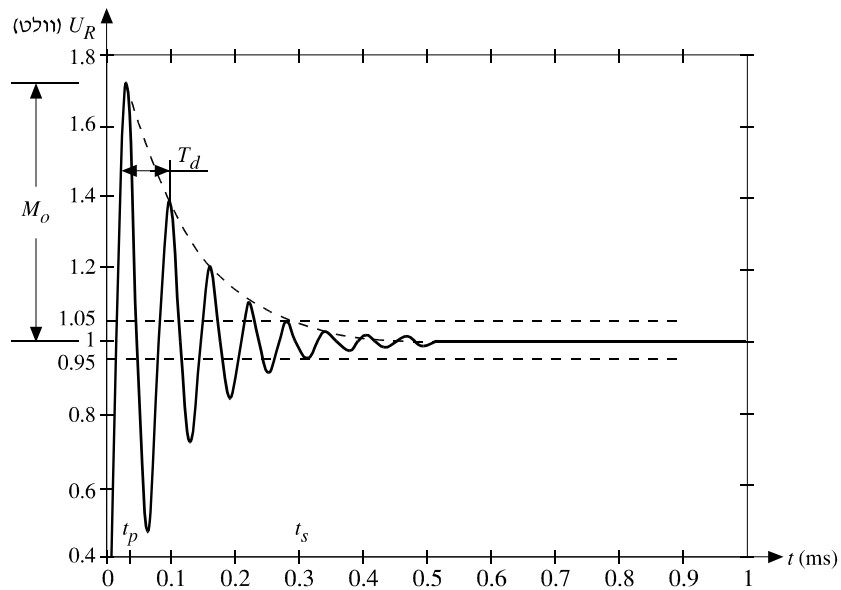
מכאן נובע כי:

$$U_R(t) = 1 - \frac{e^{-10^4 t}}{0.995} \sin(99498.7t + 1.47)$$

ב. כדי לתאר באופן גרפי את המתח $U_R(t)$, נחשב תחילה את ערכו עבור כמה ערכי זמן (הזמנים נתונים במיקרושניות). תוצאות החישוב נתונות בטבלה הבאה:

זמן (μs)	מתח	זמן (μs)	מתח	זמן (μs)	מתח	זמן (μs)	מתח
0	0	100	1.337	250	0.923	540	1.004
20	1.258	120	0.774	320	0.961	700	0.999
40	1.498	140	0.925	410	1.016	900	1.0000
50	0.901	150	1.202	440	0.988		
60	0.495	160	0.916	470	1.008		
70	0.583	200	0.921	500	0.997		
80	1.003	220	1.109				

הקו המלא באיור נ-3 מתאר את המתח על הנגד במשך המילישנייה הראשונה. הקו המקווקו באיור זה, המשיק בכמה נקודות לגרף של אות המוצא, מתאר את הפונקציה המעריכית $\frac{e^{-10^4 t}}{0.995}$. גרף זה הוא אפוא גרף המעטפת (envelope) של אות המוצא.

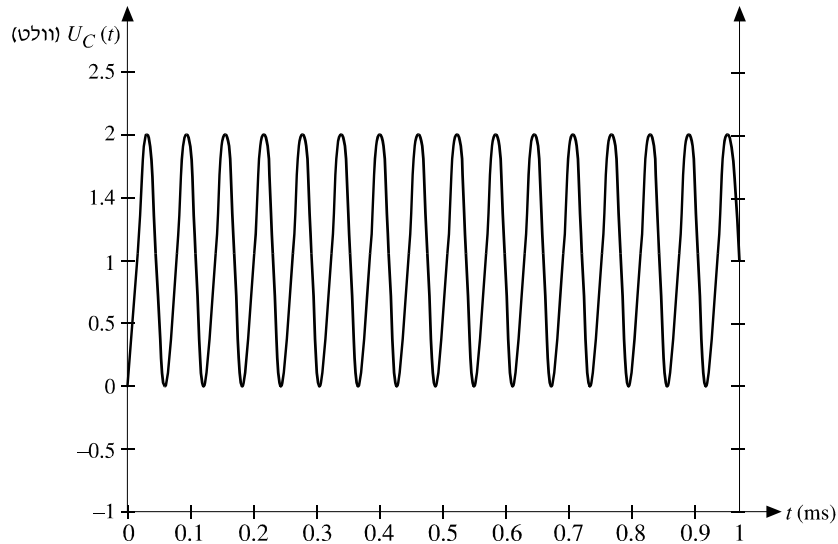


איור נ-3 המתח על הנגד במעגל RLC (איור נ-1) שבו מקדם הריסון הוא $\zeta = 0.1$ ומתח המקור קבוע (אות מדרגה)

ג. כאשר הנגד מנותק, $R = \infty$, ולכן $\zeta = 0$. במקרה זה המתח בין לוחות הקבל (איור נ-1) משתנה בזמן על פי משוואה (נ-5).

$$U_C(t) = 1 - \cos(10^5 t)$$

זהו אות מחזורי המתנדנד בתנודות בעלות תנופה קבועה סביב אות המבוא, כמתואר באיור נ-4.



איור נ-4 המתח על הקבל במעגל RLC (איור 5.28) שבו מקדם הריסון הוא $\zeta = 0$ ומתח המקור קבוע (אות מדרגה)

לסיכום נוכל להסיק כי את התגובה של מעגל RLC תת-מרוסן אפשר לאפיין בעזרת ארבעה גדלים עיקריים:

א. תגובת היתר (over-shoot) של המעגל. כזכור, תגובת היתר מוגדרת כהפרש בין הערך המרבי של אות המוצא (שאותו סימנו על-ידי M_O באיור נ-3) לבין הערך הקבוע של אות המוצא במצב המתמיד (הערך 1 באיור נ-3).

ב. זמן השיא הראשון (t_p first peak) זהו הרגע שבו אות המוצא מגיע לערכו המרבי M_O (איור נ-2).

ג. זמן המחזור (period) של התנודה, T_d . זהו ההפרש בין זמן השיא הראשון לבין זמן השיא השני (איור נ-3).

ד. זמן ההתייצבות (או זמן ההירגעות, settling time) של התנודה, t_s . זהו הזמן הדרוש לאות המוצא של המערכת לחזור ולהישאר בתחום קבוע סביב הערך הסופי. מקובל להגדיר את t_s באחוזים: $\pm 5\%$ סביב המצב המתמיד. כלומר, זהו הזמן שבו אות המוצא מגיע ונשאר בתחום שבין 0.95 מערכו הסופי לבין 1.05 מערכו הסופי (איור נ-3).

לא נרשום נוסחה מדויקת לזמן ההתייצבות (t_s), אולם ניתן להעריך אותו בעזרת פונקציית המעטפת:

$$\frac{e^{-t/\tau_A}}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

אם מניחים כי בזמן $t = t_s$ מתקיים:

$$\frac{e^{-\zeta\omega_n t_s}}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.05$$

אז על-ידי חישוב הלוגריתם הטבעי של שני האגפים נקבל כי:

$$(6-ג) \quad t_s \approx \frac{\ln(0.05\sqrt{1-\zeta^2})}{\zeta\omega_n} \approx \frac{3 - \ln\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta\omega_n}$$

כלומר, אם מקדם הריסון הוא קטן מאוד, $\zeta \ll 1$, אז $t_s \sim 3\tau_A$.

שאלה נ-4

קבל שקיבולו $100 \mu\text{F}$ מחובר בטור לנגד $R = 3 \text{ k}\Omega$ ולסליל שהשראותו אינה ידועה ויוצר מעגל RLC טורי. נמצא כי כאשר מחברים למעגל מקור מתח קבוע, מופיעות תנודות מתח מתרסנות על הנגד. לאחר 2 עשיריות שנייה, תנופת המעטפת העריכית קטנה מ-30% מערכה בזמן $t = 0$. על פי נתונים אלו, חשבו את השראות הסליל, את מקדם הריסון ζ , ואת תגובת היתר של המעגל.

II מעגל RLC מעורב בעל ריסון יתר

במעגל כזה, מקדם הריסון ζ גדול מ-1, כלומר, ערכי R, L, C מקיימים:

$$\zeta \equiv \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{L}{C}} > 1$$

התגובה של המערכת היא תגובה בעלת ריסון יתר, היות שהזרם עולה לערכו המרבי ללא תנודות. ניתן להראות כי עליית הזרם מתוארת על-ידי המשוואה:

$$(7-ג) \quad I(t) = \frac{E}{R} \left\{ 1 + \frac{1}{2\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} \left[\omega_n \left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) e^{\omega_n t (-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})} - \omega_n \left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) e^{\omega_n t (-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})} \right] \right\}$$

באגף ימין של משוואה (7-ג) מופיעים שלושה מחוברים: איבר קבוע שאינו תלוי בזמן, ושני איברים נוספים הדועכים עם הזמן בצורה מעריכית. כאשר $t = 0$, סכום שני האיברים האחרונים והאיבר הקבוע הוא אפס; כאשר $t \rightarrow \infty$, סכום שני האיברים האחרונים שואף לאפס.

שאלה נ-5

הוכיחו את הטענה לעיל.

ניתן להראות כי המקדמים בפונקציות המעריכיות שבמשוואה (7-נ) מתקבלים מפתרון המשוואה הריבועית:

$$(8-נ) \quad x^2 + 2\zeta\omega_n x + \omega_n^2 = 0$$

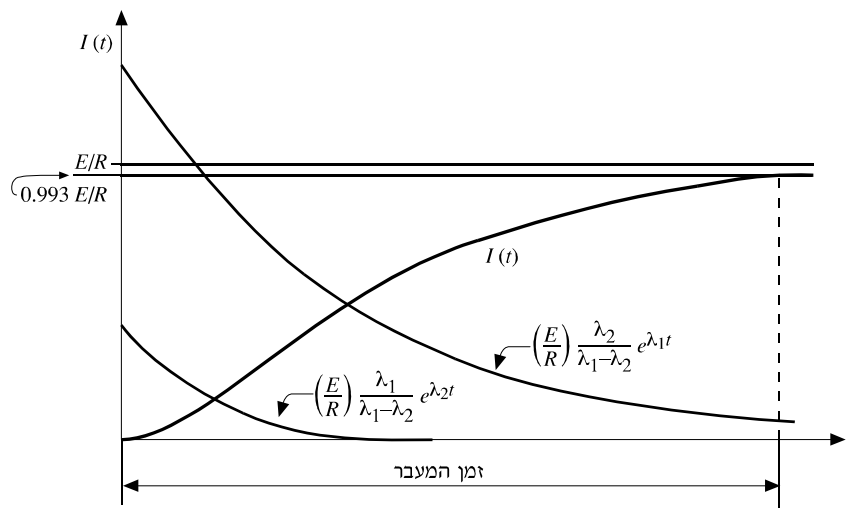
כלומר, אם λ_1 ו- λ_2 הם שני השורשים הממשיים של משוואה (8-נ):

$$\lambda_{1,2} = \omega_n \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} \right)$$

אזי את משוואה (7-נ) ניתן לרשום בצורה:

$$(9-נ) \quad I(t) = \frac{E}{R} \left[1 + \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)} (\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}) \right]$$

איור נ-5 מתאר את אופן המוצא במעגל כזה וכן את תרומת שלושת האיברים המופיעים במשוואה (9-נ). שימו לב כי התרומה של האיבר המעריכי הראשון נמשכת זמן ארוך יותר מהתרומה של האיבר המעריכי השני.



איור נ-5 תרומת האיברים השונים המופיעים במשוואה (9-נ) לתגובה של מערכת מסדר שני בעלת ריסון יתר $I(t)$ (הוא סכום האיברים)

בדוגמה הבאה נראה כי הטענה שלמשוואה (8-נ) יש שני שורשים ממשיים, שקולה לטענה כי המערכת מתנהגת כמערכת בעלת ריסון יתר.

דוגמה נ-2

ערכי הרכיבים במעגל RLC מעורב (איור נ-1) הם: $L = 10 \text{ mH}$, $R = 2.5 \Omega$, $C = 100 \mu\text{F}$.

- חשבו את התדירות הטבעית ואת מקדם הריסון של המעגל.
- הוכיחו כי המעגל מגיב כמערכת בעלת ריסון יתר באמצעות חישוב השורשים של המשוואה הריבועית.
- סוגרים את המפסק S ברגע $t = 0$. חשבו את המתח $U_R(t)$ על הנגד R שיוצר אות מדרגה במבוא שתנופתו 1 V . תארו את $U_R(t)$ באופן גרפי בפרק הזמן של 10 המילישניות הראשונות.

פתרון

- את התדירות הטבעית ω_n ואת מקדם הריסון ζ נחשב על פי הגדרתם (משוואות (6-21) ו-(6-27)). נתון כי $L = 10^{-2} \text{ H}$ ו- $C = 10^{-4} \text{ F}$, ולכן נקבל כי התדירות הטבעית היא:

$$\omega_n^2 = \frac{1}{10^{-2} \cdot 10^{-4}} = 10^6$$

או:

$$\omega_n = 10^3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

נציב $R = 2.5 \Omega$, ונקבל כי מקדם הריסון הוא:

$$\zeta = \frac{1}{2RC\omega_n} = \frac{1}{2 \cdot 2.5 \cdot 10^{-4} \cdot 10^3} = 2$$

כלומר, מקדם הריסון גדול מ-1.

- כדי להוכיח כי המערכת מגיבה כמערכת בעלת ריסון יתר, נראה כי למשוואה הריבועית (8-נ) יש שני שורשים ממשיים. ואמנם, אם מציבים את ω_n ו- ζ , מקבלים כי הדיסקרימיננטה של המשוואה הריבועית היא:

$$\Delta = 4 \cdot 10^6 (2^2 - 1) = 12 \cdot 10^6 > 0$$

כלומר, שני השורשים של משוואה (8-נ) הם ממשיים.

ג. נחשב את השורשים λ_1 ו- λ_2 של המשוואה הריבועית (8-נ). נציב בה את הערכים של ω_n ו- ζ ונקבל את המשוואה:

$$x^2 + 4000x + 10^6 = 0$$

שפתרונותיה הם:

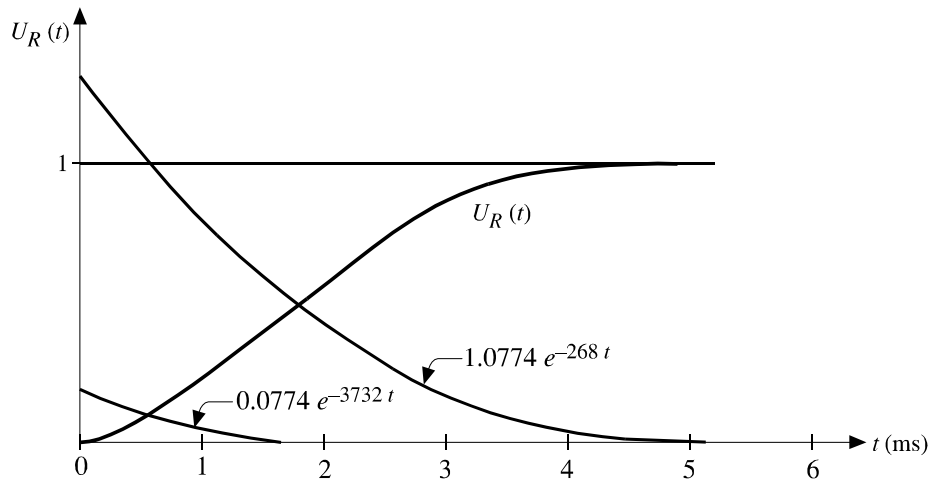
$$\lambda_1 = -2000 + \sqrt{2000^2 - 10^6} = -268$$

$$\lambda_2 = -2000 - \sqrt{2000^2 - 10^6} = -3732$$

אם נציב את λ_1 ו- λ_2 במשוואה (9-נ), נקבל את תלות המתח בזמן לאחר הכפלת הזרם בהתנגדות $R (E = 1)$:

$$U_R(t) = 1 - \frac{3732}{(-268 + 3732)} e^{-268t} + \frac{268}{(-268 + 3732)} e^{-3732t}$$

באיור נ-6 מתוארת הפונקציה $U_R(t)$ במשך 5 המילישניות הראשונות, וכן התרומה של שני האיברים המעריכיים. שימו לב שתרומת האיבר המעריכי השני זניחה כבר אחרי המילישנייה הראשונה.



איור נ-6 תגובת מעגל בעל ריסון יתר ותרומת שלושת האיברים

III מעגל RLC מעורב בעל ריסון קריטי

במעגל זה, מקדם הריסון ζ שווה ל-1, כלומר, ערכי R, L ו- C מקיימים:

$$\frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} = 1$$

זהו אפוא מקרה גבולי, שבו הדיסקרימיננטה של המשוואה הריבועית (8-נ) מתאפסת. שני השורשים של המשוואה הריבועית זהים:

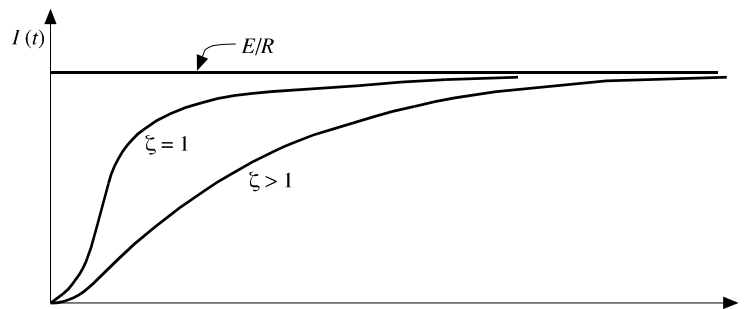
$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\omega_n$$

והפתרון עבור הזרם (משוואה (7-נ)) אינו תקף כאן.

ניתן להראות כי במקרה זה הזרם בנגד הוא:

$$(10-נ) \quad I(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\lambda_1 t} + \lambda_1 t e^{-\lambda_1 t} \right) = \frac{E}{R} \left[1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t) \right]$$

כלומר, במקרה זה, הזרם גדל גם הוא באופן מעריכי. יתירה מזו, עליית הזרם במעגל דומה להתנהגות המתח על הקבל במעגל RC (ראו משוואה (6-2) המתארת את התגובה של מערכת מסדר ראשון), אולם עליית המתח (והזרם) מהירה יותר (איור 7-נ).



איור 7-נ תגובת מעגל RLC בעל ריסון קריטי

ואמנם, קבוע הזמן של המעגל, $1/\omega_n$, קטן מקבוע הזמן של כל מעגל RLC אחר בעל ריסון יתר. לפיכך, זמן התגובה של המעגל קטן מזמן התגובה של מעגלים שבהם $\zeta > 1$ (מכאן גם שם המעגל: מעגל בעל ריסון גבולי, או מעגל בעל ריסון קריטי). משתמשים במערכות מסדר שני בעלות ריסון קריטי כאשר נדרשת תגובה מהירה מאוד, ללא תנודות של אות המוצא.

תשובות לשאלות נבחרות

פרק 2

תשובה 2.1 : א. 7.5 ב. 2 ג. 0.4

תשובה 2.4 : $Q=4$, $P=4000$, $G_1=0.012$

תשובה 2.6 : ב. 0.009

תשובה 2.7 : ב. 0.102

תשובה 2.10 : $T_{OUT}=44.9$

תשובה 2.11 : אם $H = G_1$, אזי $G_1G_2 = 39.6$

פרק 3

תשובה 3.2 : א. מוחלטת = -0.028, אחוזים = -0.33, FSE = -0.135

תשובה 3.4 : $R_p = 392$

תשובה 3.5 : 0.001

תשובה 3.6 : 0.09

תשובה 3.7 : א. 0.01 ב. 0.02

תשובה 3.8 : א. 0.30 לא ב. 0.32 ג. 0.2

פרק 4

תשובה 4.1 : א. 30 mV ב. 50 mV

תשובה 4.2 : 960 mV

תשובה 4.5 : 122.8

תשובה 4.6 : א. 51.9 ב. 0.38 V ג. 16 mA

תשובה 4.8 : 90 μ A

תשובה 4.12 : $R = 0.01 \alpha$

תשובה 4.13 : א. 717.5 rpm ב. 1150 ג. 4.17

תשובה 4.14 : א. 32 ב. 32 ג. 375 rpm

תשובה 4.15 : 270°

תשובה 4.17 : א. 62800 ב. 16

תשובה 4.22 : א. 2 ($K=2$) ב. 0.01

תשובה 4.23 : א. 9.8 ב. 0.98 N ג. 0.5 V

פרק 5

תשובה 5.2 : א. $I^{ave} = 31.36$ ב. $\eta = 98\%$ ג. $I^{ave} = 7.84$ ד. $\eta = 98\%$

תשובה 5.3 : א. 100.8 V ב. 62.4 V

תשובה 5.4 : א. 1280 W ב. 139.8 NM ג. 762 rpm

פרק 6

תשובה 6.5 : $h = 3.6$ m

תשובה 6.6 : א. $5\tau_H$ ב. $5\tau_H$

תשובה 6.7 : $t_{0.007} = 14.2$, $\tau_1 = 2.86$, $t_{1/2} = 1.98$

תשובה 6.13 : א. $\omega_d = 2.09$ ב. $T = 3$ ג. $\xi \approx 0.5$ ד. $\omega_n = 2.4$ ה. $\tau_d \approx 0.83$

תשובה 6.17 : א. $\Delta c_\infty = 19.96$ ב. $e = 0.04$ ג. $\xi^* = 0.049$ ד. $\omega_d^* = 2.235$ ה. $M_0 = 85.7\%$

ו. $t_p = 1.4$ ז. $\tau_1 = 27.35$

פרק 7

תשובה 7.3 : $PB = 40\%$

תשובה 7.4 : א. $e = 2.5\%$ ב. $m = 62.5\%$

תשובה 7.7 : $0 \leq t < 2$, $m = 40\%$, $2 \leq t < 10$, $m = 52.5\%$, $10 \leq t < 18$, $m = 15\%$, $18 \leq t$, $m = 27.5\%$

תשובה 7.8 : $0 \leq t < 1$, $m = 20\%$, $1 \leq t < 3$, $m = 50\%$, $3 \leq t < 5$, $m = 30\%$, $5 \leq t < 7$, $m = 40\%$

$7 \leq t$, $m = 40\%$

נספח

תשובה נ-4 : $L = 249.2$ H , $\xi = 0.95$, $M_0 = 72.2\%$