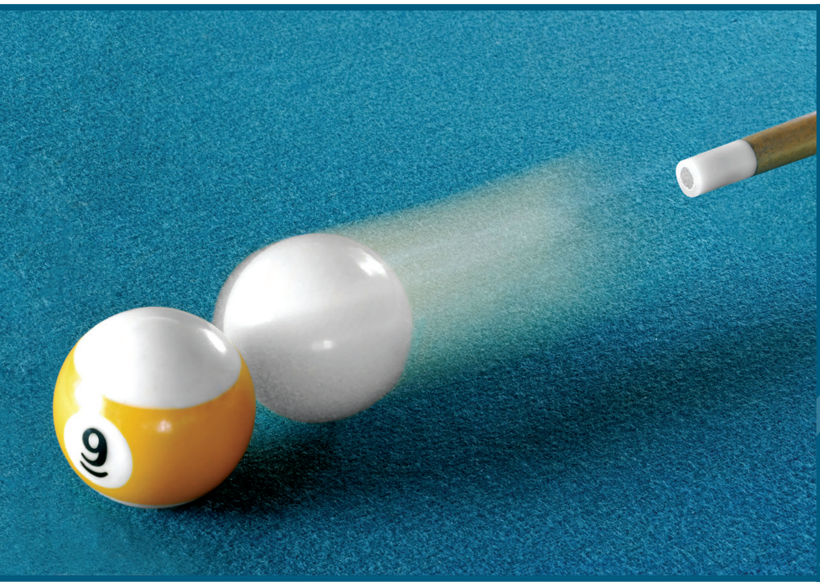
מכניקה ניוטונית

כרך ב



עדי רוזן

מהים הכללי וטיפה משלי...

מכון ויצמן למדע
המחלקה להוראת המדעים

מינהלת מל"מ
המרכז הישראלי לחינוך מדעי טכנולוגי
על-שם עמוס דה-שליט

משרד החינוך
האגף לתכנון ולפיתוח תוכניות לימודים

אגף ספרי לימוד
באישור
משרד החינוך
אישור מס': 4314
אושר בתאריך: 15.2.12

יצא לאור במימון האגף לתכנון ולפיתוח תכניות לימודים במשרד החינוך
ומטה המרכז להוראת המדעים ע"ש עמוס דה שליט

כתיבה ועריכה
עדי רוזן

ראש הפרוייקט
פרופ' בת-שבע אלון

הגהה מדעית
פרופ' אורי גניאל

הגהה דידקטית
קורינה פולינגר

עריכת הלשון
נדין קלברמן

עימוד ועריכה במחשב
אבי טל

גרפיקה ממוחשבת
אסף מסעוד
זיו אריאלי

עיצוב הכריכה
זיו אריאלי

הדפסה חוזרת 2013
מדורה מחודשת 2012
הדפסות חוזרות 2011
מהדורה מחודשת-ניסויית 2010
הדפסה חוזרת 2008
מהדורה מורחבת ומתוקנת 2001
הדפסה חוזרת 1999
מהדורה מתוקנת 1996
מהדורות ניסויית 1995

נדפס בדפוס איילון 2013
מק"ט - 279-2047

דור הולך ודור בא והארץ לעולם עומדת:
וזרח השמש ובא השמש ואל מקומו שואף זורח הוא שם.

קוהלת, פרק א

אם זה לא יהיה פשוט, זה פשוט לא יהיה.

גנרל ג'ורג' סמית' פטון

הקדמה לכרך ב

לתלמידים,

כתבתי את הספר תוך מאמץ לאפשר לכם לרכוש בעזרתו לא רק ידע פורמלי, אלא גם דרכי חשיבה מדעית, הבנה מושגית וראייה היסטורית של התפתחות המכניקה הניוטונית. אני מקווה שתקראו בספר ושתשתמשו בו, מעבר להיותו מאגר תרגילים, כאחד ממקורות המידע המרכזיים שלכם, לצד המידע שתרכשו מהמורה וממקורות נוספים. השתדלתי להציג את הנושאים הנדונים בספר בצורה בהירה ומובנת ככל יכולתי. אני מקווה, שבמהלך לימודיכם, תחוו את היופי, הפשטות והאלגנטיות של הפיזיקה.

למורים,

פרקי הספר

כרך ב נפתח בפרקים ו ו-ז העוסקים בחוקי השימור הגדולים – שימור התנע ושימור האנרגיה המכנית. לאחר לבטים, החלטתי להשאיר את סדר שני פרקים אלה כפי שהופיע במהדורות הקודמות – תחילה הפרק "תנע ושימורו", ולאחר מכן הפרק "אנרגיה ושימורה". הסתייעתי בהחלטה זו בדיעותיהם של מורי פיזיקה רבים.

חשוב שנהיה מודעים לכך שהקושי המרכזי שבו תלמידים נתקלים בלימוד שני פרקים אלה הוא הצורך לשלוט בעושר הרב של המושגים והקשרים ביניהם.

פרק ח עוסק בתנועה הרמונית פשוטה, ומניח בסיס להבנת תנודות וגלים. את הפרק הזה אפשר ללמד בגישה של פתרון משוואה דיפרנציאלית, כפי שמוצג בגוף הפרק, או בעזרת תנועה מעגלית, כפי שמפורט בנספח ד.

פרק ט עוסק בכבידה. הוא כולל בנוסף לתכנים הפיזיקליים גם סקירה היסטורית קצרה של התפתחות האסטרונומיה ותאוריית הכבידה החל מהיוונים (המאה השישית עד המאה השלישית לפני הספירה), דרך תאוריית הכבידה של ניוטון (המאה השבע-עשרה), וכלה בגילויו של כוכב הלכת רהב (נפטון) על בסיס תאוריית הכבידה (המאה התשע-עשרה).

נספח ה עוסק בהתפתחות של שני מודלים של היקום - הגאוצנטרי וההליוצנטרי, ובמתח ביניהם. בתחילת הנספח מוצגות העובדות באסטרונומיה שהיו ידועות בתקופה היוונית. בהמשך מוצגים המודלים, ונסקרות הדרכים שבהן כל אחד משני המודלים מתמודד עם הסבר העובדות הידועות, וכן נדונים ניבויים של שני המודלים. זו הזדמנות מצויינת ללמוד על תאוריה מדעית בהתפתחותה.

התאמת הספר לתכנית הלימודים בפיזיקה של בית הספר התיכון

הספר מכיל את כל נושאי הלימוד על פי תכנית הלימודים.

פה ושם אנו מרחיבים את היריעה, ועוסקים בנושאים שמעבר לתכנית הלימודים הרשמית; נושאים אלה מסומנים בספר ב- ; סימון זה מופיע מימין לכותרת של כל סעיף הרחבה. גם תרגילים שחורגים מתכנית הלימודים מסומנים בסימון זה, המופיע מימין למספר הסידורי של התרגיל.

אוכלוסיית היעד

הספר מיועד בראש ובראשונה לתלמידי בית הספר התיכון הלומדים פיזיקה ברמה של 5 יחידות לימוד, ולתלמידים במכינות הקדם אקדמיות. עם זאת, הוא יכול לשרת גם סטודנטים בסמינרים למורים ובמכללות, וכן סטודנטים באוניברסיטאות הנדרשים ללימודי פיזיקה במסגרת לימודי רפואה, ביולוגיה חקלאות וכיו"ב.

דוגמאות פתורות ותרגילים בסוף כל פרק

בדומה לכרך א, גם במהלכו של כל פרק בכרך ב מופיעות דוגמאות פתורות רבות, המודגשות על ידי רקע סגול, ובסופו של כל פרק מופיע קובץ "שאלות, תרגילים ובעיות" הכולל מספר רב של תרגילים. כל קובץ כזה מחולק לשלושה חלקים: הראשון הוא "תרגילים מותאמים לסעיפי הפרק", ושמיועדים לשמש כשיעורי בית לשם תרגול החומר השוטף מיד לאחר שהוא נלמד בכיתה. החלק השני בקובץ הוא "תרגילי סיכום" המיועדים בחלקם לשיעורי בית, הדורשים ראייה אינטגרטיבית של הפרק, ובחלקם כמאגר תרגילים שישמש את התלמידים לתרגול לקראת בחינה מסכמת של הפרק. החלק השלישי הוא "תרגילי העמקה" – לתלמידים המעוניינים להעמיק את הבנתם ולהעשיר את ידיעותיהם, וכן כהכנה לקראת בחינות כניסה במוסדות להשכלה גבוהה.

הפעלת תלמידים

מומלץ להפעיל את התלמידים לכל אורך ההוראה במשימות של קריאת נושאים מהספר, ושל פתרון תרגילים כשיעורי בית. כמו כן מומלץ לבצע פעילויות מהספר "מכניקה ניוטונית - פעילויות (לכרכים א ו-ב)" ופעילויות מרשת האינטרנט.

השינויים במהדורת 2012

פרק ח – "מערכות מורכבות" ששובץ בשתי המהדורות הקודמות הוצא מהספר; חלקו הועבר לספר "מערכות ייחוס – מגלילאו גליליי עד תאוריית המפץ הגדול" שצפוי לצאת לאור בעתיד הקרוב, וחלקו יועבר בעתיד הקרוב כנספח א בכרך א. פרק י"א – "מעבר למכניקה הניוטונית – כבידה ועקרון השקילות" שהופיע בשתי המהדורות הקודמות הועבר גם הוא לספר "מערכות ייחוס".

הפנייה בספר לקוראים שונתה מלשון יחיד ללשון רבים, וזאת על פי דרישת משרד החינוך, כתנאי לאישור הספר על ידו. המהדורה החדשה מאושרת על ידי משרד החינוך.

תודות

בהכנתו של הספר נעזרתי בכמה אנשים יקרים, ואני מבקש להודות להם:

ל**קורינה פולינגר**, מהמרכז לחינוך מדעי חמד"ע בתל-אביב, על שקראה את הספר ביסודיות אופיינית, ביצעה הגהה דידקטית והגהה כללית, ובכך שדרגה את הספר.

לד"ר **תהלה בן גיא** - מנהלת המרכז לחינוך מדעי חמד"ע בתל-אביב, ולכל צוות מורי הפיזיקה בחמד"ע, על הרשות לשבץ תרגילים ממבחני המתכונת של חמד"ע בספר זה.

ל**זאב קרקובר**, שכתב את שני הפרקים "התנע ושימורו" ו"אנרגיה ושימורה" כפי שהופיעו במהדורת העיצוב של הספר שיצאה לאור בשנת 1995. זאב תרם מבקיאותו ומאופקיו הרחבים בדיונים שהתקיימו לקראת הופעת מהדורת העיצוב.

לד"ר **ויטלי אינדנבאום**, מהמרכז לחינוך מדעי חמד"ע בתל-אביב, שערך את הניסוי שממנו הופקו הגרפים באיור 10 שבפרק ו'.

לד"ר **יבגני ברודסקי** שהסב את תשומת ליבי לתשובות שגויות שניתנו לתרגילים.

ל**אבי טל**, על עיצוב החומר הכתוב במסירות ובמקצועיות רבה.

ל**זיו אריאלי**, על המסירות הרבה בהכנת איורים.

ל**אסף מסעוד**, שאייר את כרך א של הספר ועיצב את כריכתו, ועל בסיס איורים אלה עוצבו רוב האיורים של כרך ב.

ל**תעשיה האווירית**, שהעמידה לרשותנו את תצלום השיגור של הלוויין "אופק 9" ואת תרשים מסלול תנועתו סביב הארץ.

עדי רוזן

המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע, רחובות

ינואר 2013 - טבת תשע"ג

תוכן העניינים

כרך ב

פרק ו

תנע ושימורו

1. מתקף, תנע והקשר ביניהם

בכרך הראשון של המכניקה הניוטונית עסקנו בכוחות ובהשפעתם על תנועתו של גוף נקודתי. ברור שתוצאת פעולתו של כוח תלויה בפרק הזמן שהוא פועל. כוח שפועל על גוף במשך שעה גורם לתוצאה שונה מכוח זהה שפועל במשך שנייה. נגדיר עתה גודל פיזיקלי הלוקח בחשבון גם את פרק הזמן שבו מופעל הכוח. גודל זה יכונה **מתקף**.

1.1 מתקף

א. המתקף של כוח קבוע

נדון תחילה במושג "מתקף" עבור המקרה הפשוט - כוח קבוע (בגודלו ובכיוונו).

הגדרת המושג **"מתקף"** (Impulse) **של כוח קבוע**:

המתקף של כוח קבוע בפרק זמן מסויים מוגדר כמכפלת הכוח בפרק הזמן.

בניסוח מתמטי:

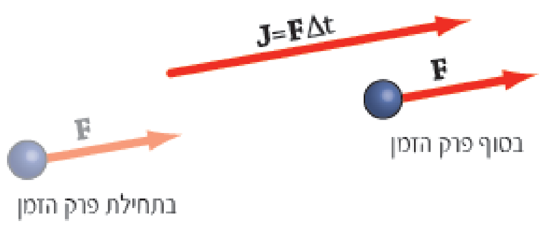
$$\boxed{\mathbf{J} = \mathbf{F}\Delta t} \qquad (1)$$

כאשר: $\mathbf{F}$ - הכוח;

Δt - פרק הזמן;

$\mathbf{J}$ - המתקף. יחידת המתקף היא ניוטון · שנייה - Ns.

המתקף הוא **וקטור**, המתקבל ממכפלה של סקלר חיובי (פרק זמן) בווקטור (כוח). כיוון המתקף הוא ככיוון הכוח (איור 1).



איור 1: המתקף של כוח קבוע בפרק זמן מסוים, Δt, הוא וקטור המתקבל ממכפלת פרק הזמן בכוח

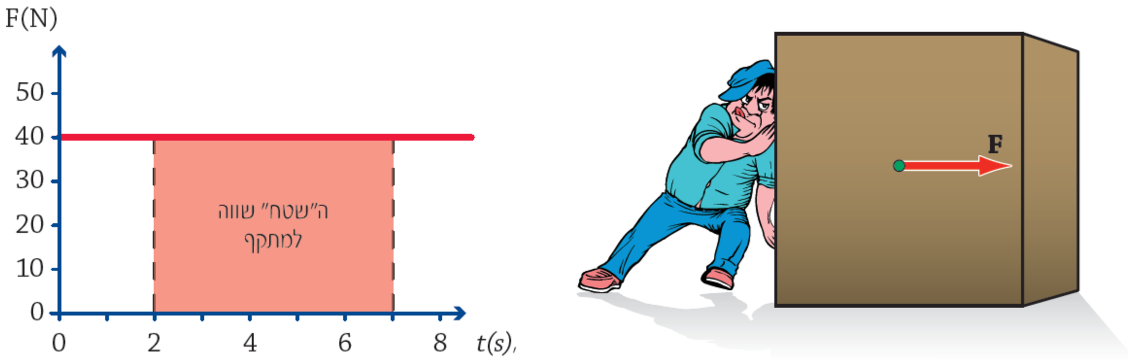
דוגמה: נניח כי אדם דוחף ימינה ארגז באמצעות כוח קבוע **F** שגודלו 40 ניוטון (איור 2א). המתקף של הכוח במשך 5 שניות הוא 200 ניוטון · שנייה, וכיוונו ימינה.

באיור 2ב מתואר גודל הכוח כפונקציה של הזמן. האזור הצבעוני באיור הוא מלבן שאורך בסיסו הוא Δt וגובהו F. "שטחו" של המלבן הוא המכפלה $F\Delta t$, המבטאת את גודל המתקף.

המשמעות הגרפית של מתקף שמפעיל כוח קבוע:

המתקף של כוח קבוע שווה ל"שטח" שבין הקו המתאר את הכוח כפונקציה של הזמן לבין ציר הזמן.

"השטחים" כאן נמדדים ביחידת מתקף שהיא ניוטון · שנייה.



א. על הארגז מופעל כוח F, בפרק זמן Δt.

ב. גודל המתקף של F שווה ל"שטח".

איור 2: מתקף של כוח קבוע

ב. המתקף של כוח משתנה בגודלו וקבוע בכיוונו

הגדרת המתקף

נניח כי שחקן הבועט בכדור (איור 3) מפעיל על הכדור כוח המשתנה בגודלו וקבוע בכיוונו, כמתואר באיור 4א.

כיצד נגדיר את המתקף של כוח זה?

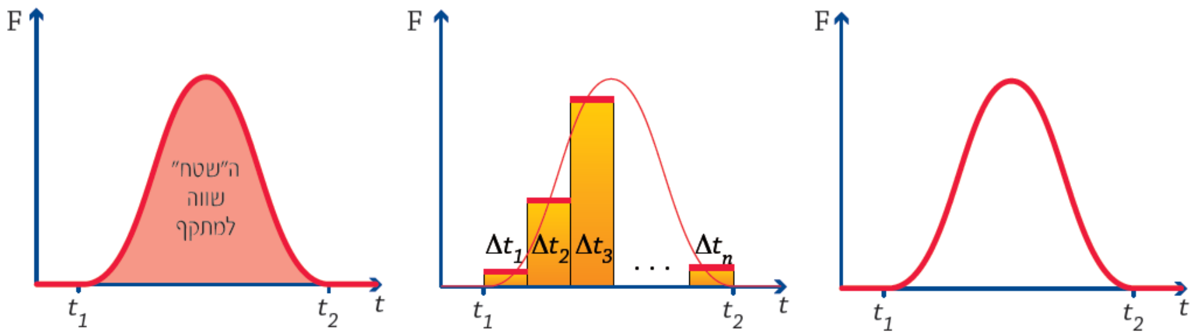
בעיה דומה התעוררה כאשר עסקנו בחישוב העתק מתוך השטח הנתחם על ידי גרף מהירות-זמן. כזכור, פתרנו את הבעיה על ידי חלוקת השטח למלבנים ששטחם שואף לאפס (כרך א עמוד 44). נשתמש באותה שיטה גם כאן.

איור 3: הרגל מפעילה כוח על הכדור

אנו רוצים לחשב את המתקף שמפעיל הכוח מרגע t_1 (תחילת הבעיטה) עד רגע t_2 (סיום הבעיטה). נחלק את פרק הזמן ל-n פרקי זמן קצרים Δt_1, Δt_2, ... , Δt_n (איור 4ב). מ-t_1 עד t_2 הכוח עלול להשתנות במידה ניכרת, אך בכל אחד מפרקי הזמן הקצרים מידת השתנות הכוח היא קטנה. בכל אחד מפרקי הזמן הקצרים נבחר נקודת זמן כלשהי, נמצא את גודל הכוח בנקודה זו, ונייחס ערך זה של הכוח לכל פרק הזמן הקצר (איור 4ב). בסיומו של התהליך מתקבלת עקומה של כוח הקבוע למקוטעין (עקומת "מדרגות").

את המתקף של הכוח הקבוע למקוטעין נמצא על ידי חישוב סכום "שטחי" המלבנים ש"מתחת" לעקומה. זהו השטח של המשטח הצבעוני המסומן באיור 4ב.

הכוח הקבוע למקוטעין אינו זהה לכוח האמיתי. אולם, ככל שנקטין את גודלו של כל פרק זמן קצר Δt (דבר המחייב הגדלת מספר פרקי הזמן הקצרים) - **עקומת הכוח הקבוע למקוטעין תהיה קרובה יותר ויותר לעקומה האמיתית, עד לכל דרגת קירוב שנרצה**. הגבול של "שטחי" המלבנים, כאשר אורכו של כל קטע קטן Δt שואף לאפס, הוא השטח של המשטח הצבעוני באיור 4ג, והוא שווה למתקף של הכוח האמיתי.



א. עקומת כוח-זמן של כוח המשתנה בגודלו

ב. כוח קבוע למקוטעין

ג. המתקף על כוח משתנה שווה ל"שטח" מתחת לעקומה

איור 4: מתקף של כוח המשתנה בגודלו

המשמעות הגרפית של מתקף שמפעיל כוח משתנה בגודלו וקבוע בכיוונו:

המתקף של כוח המשתנה בגודלו, אך קבוע בכיוונו, שווה ל"שטח" הנתחם בין העקומה המתארת את הכוח כפונקציה של הזמן לבין ציר הזמן.

חישוב המתקף של כוח משתנה בגודלו וקבוע בכיוונו - הלכה למעשׂה כאשר נתון הכוח F כפונקציה של הזמן t

נציע כמה דרכים לחישוב המתקף בהתאם לאופי המידע הנתון.

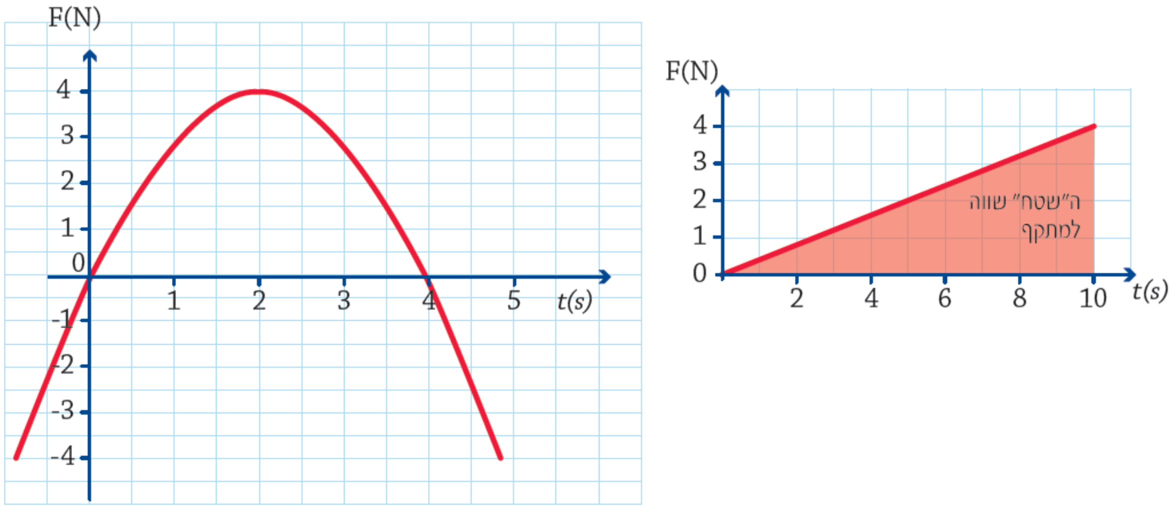
א. אם הפונקציה F(t) נתונה בצורת גרף, אזי:

(1) אם אפשר "לפרק" את הצורה הגאומטרית הנתחמת על ידי העקומה והציר האופקי לצורות גאומטריות שעבורן יש נוסחאות מוכרות לחישוב השטח (למשל משולשים, מלבנים, טרפזים, חצאי מעגלים) - נחשב את ה"שטח" באמצעות הנוסחאות.

דוגמה: המתקף של הכוח המתואר באיור 5א שווה ל- $20\ N \cdot s$.

(2) אם צורת העקומה היא כזאת שאי אפשר ליישם את דרך א(1), נוכל לפרוש על הגרף רשת קווים אופקיים ואנכיים. נחשב את ה"שטח" של משבצת אחת, נמנה את המשבצות הנמצאות בין העקומה לבין ציר הזמן, ונחשב את המתקף. בדרך-כלל חלק מהמשבצות נחתכות על ידי העקומה, ונאלץ להעריך את השטח שלהן שנמצא "מתחת" לעקומה.

דוגמה: נתבונן באיור 5ב. מ- $t_1 = 0$ עד $t_2 = 4\ s$ יש כ-41 משבצות שלמות "מתחת" לעקומה. "שטחה" של כל משבצת הוא $0.25\ N \cdot s$, לכן המתקף שווה בקירוב ל- $10.25\ N \cdot s$ ניוטון · שנייה.



ב. כיסוי משטח במשבצות לשם חישוב המתקף

א. המתקף שווה ל"שטח" המשולש

איור 5: דרכים לחשוב מתקף

ב. אם נתון ביטוי הפונקציה F(t) בצורה מתמטית, אזי:

אפשר לחשב את ה"שטח" הכלוא בין העקומה לציר האופקי באמצעות האינטגרל:

$$\boxed{J = \int_{t_1}^{t_2} F(t)\,dt} \qquad (2)$$

תרגיל לבקיאים באינטגרלים: הראה כי נוסחה (1) היא מקרה פרטי של נוסחה (2).

לבקיאים באינטגרלים מוצע להלן חישוב מתקף באמצעות חשבון אינטגרלי.

הביטוי המתמטי של העקומה המתוארת באיור 5ב הוא $F(t) = -t^2 + 4t$. מתקף הכוח מ- $t_1 = 0$ עד $t_2 = 4\ s$:

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F(t)\,dt = \int_{0}^{4} (-t^2 + 4t)\,dt = \left[-\frac{1}{3}t^3 + 2t^2\right]_0^4 = \left(-\frac{1}{3}\cdot 4^3 + 2\cdot 4^2\right) - \left(-\frac{1}{3}\cdot 0^3 + 2\cdot 0^2\right)$$

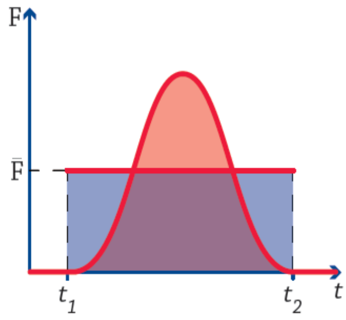
$$J = 10.67\ Ns$$

תוצאה זו שווה בקירוב לתוצאה 10.25 Ns שמצאנו לעיל בעזרת שיטת המשבצות, שהיא מובילה כאמור לתוצאה מקורבת.

ג. כוח ממוצע

מהו הכוח הממוצע של הכוח המתואר באיור 4ב?

הכוח הממוצע, $\bar{\mathbf{F}}$, של כוח משתנה $\mathbf{F}$, מרגע t_1 עד רגע t_2, הוא כוח **קבוע** שהיה צריך לפעול בפרק זמן זה, **כך שהמתקף שלו יהיה שווה למתקף של הכוח האמיתי.** כלומר שטח המלבן הנתחם על ידי עקומת הכוח הממוצע (איור 6) צריך להיות שווה לשטח שתחום על ידי העקומה האמיתית.



איור 6: $\bar{F}$ הוא הכוח הממוצע של הכוח המשתנה בפרק הזמן מ- t_1 ל- t_2

ד. המתקף של כוח המשתנה בגודלו ובכיוונו

כאשר כוח משתנה בגודלו וגם בכיוונו, אפשר להתייחס לרכיבי הכוח במערכת צירים קרטזית ולחשב בנפרד את המתקף של רכיב ה-x ואת המתקף של רכיב ה-y. התוצאות המתקבלות הן רכיבי המתקף המבוקש. על-פי רכיבים אלה מחשבים את גודלו ואת כיוונו של המתקף. לא נעסוק בספר זה בחישוב מתקפים של כוחות שמשתנים בגודלם ובכיוונם.

1.2 תנע

א. המושג "מתקף כולל"

הגדרת המושג **"מתקף כולל"**:

כאשר כמה כוחות פועלים על גוף נקודתי במשך אותו פרק זמן Δt, **המתקף הכולל** הפועל על הגוף בפרק זמן זה מוגדר כסכום המתקפים של כל הכוחות הבודדים.

המתקף הכולל של כוחות קבועים בניסוח מתמטי: $$\mathbf{J}_{\text{כולל}} = \Sigma(\mathbf{F} \cdot \Delta t) \qquad (3)$$

הערה: מקשר (3) אפשר להראות: $$\mathbf{J}_{\text{כולל}} = (\Sigma\mathbf{F}) \cdot \Delta t$$

כלומר המתקף הכולל של כל הכוחות הפועלים על הגוף הוא המתקף שהיה מפעיל הכוח השקול באותו פרק זמן.

ב. השפעתו של המתקף הכולל - שינוי התנע של הגוף

נניח כי על גוף מסוים פועלים כוחות קבועים.

על-פי החוק השני של ניוטון: $$\Sigma\mathbf{F} = m\,\mathbf{a} \qquad (\text{א})$$

הכוחות קבועים, לכן תאוצת הגוף קבועה, ומתקיים: $$\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_i + \mathbf{a}\Delta t \qquad (\text{ב})$$

כאשר:

$\mathbf{v}_i$ - מהירות הגוף בתחילת הקטע הנדון (i - קיצור ל- **i**nitial - התחלתי);

$\mathbf{v}_f$ - מהירות הגוף בסוף הקטע הנדון (f - קיצור ל- **f**inal - סופי).

מ-(א) ו-(ב) נקבל:
$$(\Sigma\mathbf{F})\Delta t = m\mathbf{v}_f - m\mathbf{v}_i \qquad (ג)$$

מכאן: המתקף הכולל שווה לשינוי במכפלה $m\mathbf{v}$ (כלומר לערכה בסוף מינוס ערכה בהתחלה).

הגדרת המושג **"תנע"** (linear momentum):

התנע הקווי (ובקיצור: **התנע**) של גוף נקודתי מוגדר כמכפלה של מסת הגוף במהירותו.

בכתיב מתמטי:
$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \qquad (4)$$

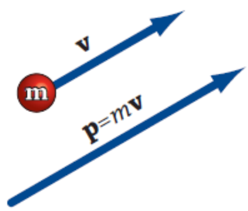
כאשר: m - מסת הגוף;

$\mathbf{v}$ - מהירות הגוף;

$\mathbf{p}$ - התנע של הגוף.

יחידת התנע היא ק"ג· מטר\שנייה - $kg\frac{m}{s}$, והיא שווה ליחידת המתקף $(N \cdot s)$ (הוכח).

התנע הוא **וקטור**, המתקבל ממכפלה של סקלר חיובי (מסה) בווקטור (מהירות). כיוון התנע הוא ככיוון המהירות (איור 7).



איור 7: ייצוג גאומטרי של תנע

נרשום את משוואה (ג) ככלל.

משפט מתקף-תנע (impulse-momentum theorem):

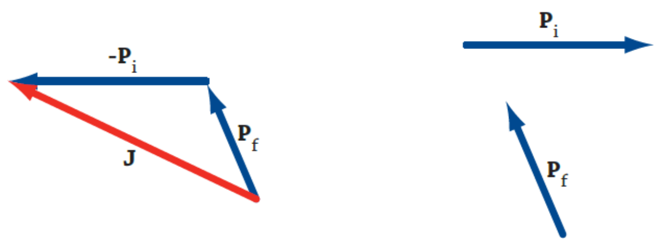
המתקף הכולל הפועל על גוף בפרק זמן מסוים, שווה **לשינוי בתנע** של הגוף במהלך אותו פרק זמן.

בשפה מתמטית:
$$\boxed{(\Sigma\mathbf{F})\Delta t = m\mathbf{v}_f - m\mathbf{v}_i} \qquad (5)$$

או:
$$\mathbf{J}_{כולל} = \Delta\mathbf{p} \qquad (5')$$

הערה: קשר (5) הוכח עבור המקרה הפרטי של כוחות קבועים. קשר (5') נכון גם כאשר הכוח השקול אינו קבוע. הדבר יוכח בהמשך סעיף 1.2.

באיור 8 מתואר קשר (5') באופן גאומטרי.



א. תנע התחלתי ותנע סופי ב. המתקף

איור 8: המתקף הפועל על גוף שווה לשינוי בתנע הגוף

ג. "ריכוך" בהתנגשות

ריפוד עוזר בכל תהליך בלימה. הריפוד אינו משנה את המתקף, אלא **גורם להארכת משך האינטראקציה תוך הקטנת הכוח**.

דוגמה 1: נחיתה על מזרן לעומת נחיתה על רצפה קשה

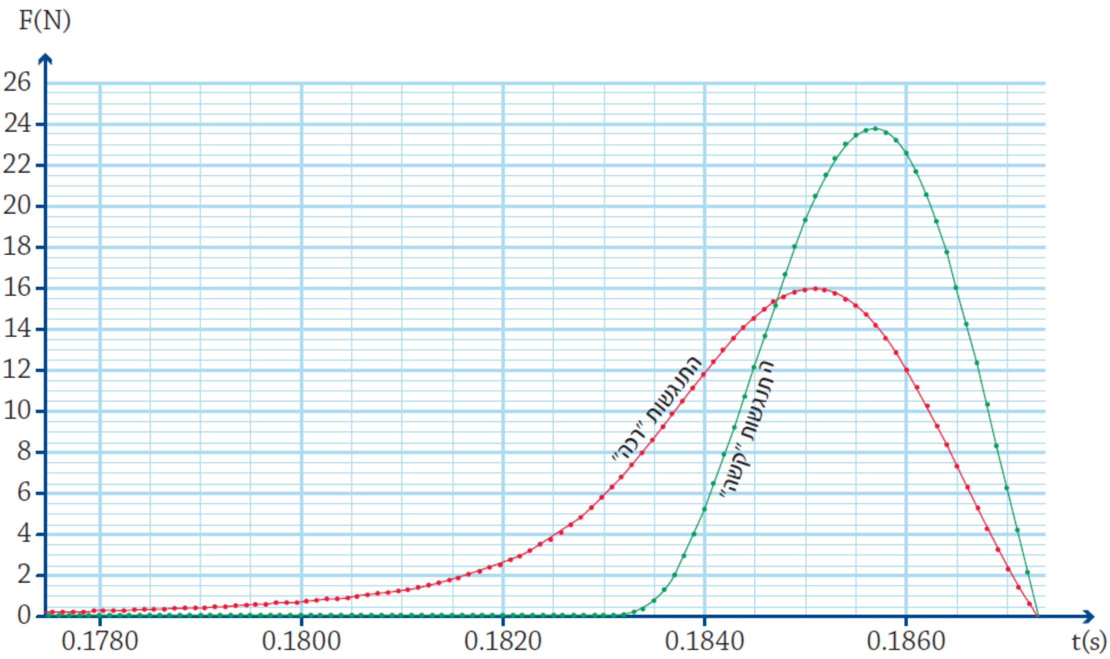
קופץ לגובה נוחת על מזרן (איור 9). אילו הוא היה נוחת על רצפה קשה - התנע שלו היה משתנה באותה מידה כמו בנחיתה על המזרן. מהו, אם כן, היתרון של נחיתה על מזרן? נמק תשובתך בעזרת נוסחת מתקף-תנע.

פתרון:

כיוון שהשינוי בתנע במהלך התנגשות בין הקופץ לבין המשטח הבולם אינו תלוי בטיב המשטח, משמע שהמתקף שמפעיל המשטח הבולם על הקופץ שווה בשני המקרים (עם מזרן או בלעדיו). על-פי משוואת מתקף-תנע, **המכפלה** $\Delta t \cdot \overline{\Sigma F}$ **צריכה להיות שווה בשני המקרים** ($\overline{\Sigma F}$ מסמל את הכוח השקול הממוצע שהמשטח הפעיל על הגוף). בזמן פגיעה ברצפה קשה, הקופץ נבלם **תוך פרק זמן קצר** (Δt קטן), **לכן הכוח השקול הממוצע** $\overline{\Sigma F}$ **הפועל עליו גדול**. כתוצאה מכך הכוח עלול להכאיב לקופץ. כדי למנוע זאת מניחים מזרן. המזרן "מרכך" את הנפילה - משך זמן האינטראקציה Δt ממושך יותר, לכן הכוח הממוצע $\overline{\Sigma F}$ קטן יותר, והפגיעה במזרן מכאיבה פחות.

איור 9: מזרן "מרכך" את פגיעת הקופץ בקרקע בעת נחיתתו

רצינו לבחון את ההתאמה בין ההסבר שבדוגמה האחרונה לבין ממצאי ניסוי. לשם כך ערכנו ניסוי שבו שחררנו פעמיים גוש פלסטלינה מאותו גובה, כך שבנופלו הוא פגע במשטחו האופקי העליון של חיישן כוח המחובר למחשב. בשתי הפעמים גוש הפלסטלינה לא ניתר מהשטח אלא נשאר צמוד אליו. בפעם השנייה ריפדנו את משטח חיישן הכוח בצמר גפן, כדי לרכך את ההתנגשות. גרפי כוח-זמן של שתי ההתנגשויות מוצגים באיור 10.



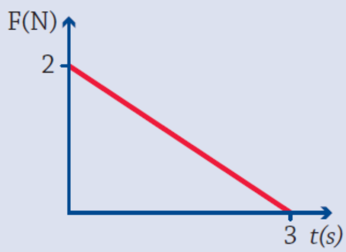
איור 10: גרפי כוח-זמן בהתנגשות גוף עם משטח – התנגשות "קשה" והתנגשות "רכה"

כאשר מודדים את השטחים מתחת לשתי העקומות מוצאים כי הם שווים זה לזה בקירוב מצוין. משמעות הדבר היא שמשטח החיישן הפעיל על גוש הפלסטלינה מתקפים שווים בעת בלימת הגוש בשני המקרים. דבר שני שבולט מאיור 10 הוא שמשך ההתנגשות ה"רכה" היה גדול ממשך ההתנגשות ה"קשה", וכי השימוש בצמר הגפן הקטין את הערך השקול הממוצע ואת הערך השקול המרבי של הכוחות שהופעלו על גוש הפלסטלינה בהתנגשות.

בולמי זעזועים משמשים למטרה דומה - הם מאריכים את משך תהליך שינוי המהירות, תוך הקטנת הכוחות הכרוכים בו.

דוגמה 2: מתקף של כוח משתנה בגודלו

קרונית שמסתה $0.5\ kg$ נעה במהירות שגודלה $2\ m/s$ על משטח אופקי חסר חיכוך. החל מרגע מסוים, שיוגדר כ- $t = 0$, החל לפעול על הקרונית כוח F שכיוונו קבוע. באיור 11 מתואר גודל הכוח כפונקציה של הזמן.



איור 11: איור דוגמה 2

חשבו את מהירות הקרונית ברגע $t = 3\ s$, אם כיוון הכוח הוא -

א. ככיוון מהירות הקרונית ברגע $t = 0$.

ב. מנוגד לכיוון מהירות הקרונית ברגע $t = 0$.

פתרון:

נגדיר תחילה ציר מקום שכיוונו החיובי ככיוון מהירות הקרונית ברגע $t = 0$.

נחשב את מהירות הקרונית ברגע $t = 3\ s$ בעזרת משוואת מתקף-תנע:

$$\mathbf{J}_{\text{כולל}} = m\mathbf{v}_f - m\mathbf{v}_i \qquad (\text{א})$$

גודל המתקף של הכוח השקול שווה ל"שטח" המשולש שבאיור 11, כלומר ל- $3\ Ns$.

א. כיוון המתקף הוא ככיוון הציר.

נציב ערכים מספריים בנוסחה האלגברית המתקבלת מנוסחה (א):

$$3 = 0.5 \cdot v_f - 0.5 \cdot 2$$

מכאן: $v_f = 8\ m/s$

כלומר ברגע $t = 3\ s$ הקרונית נעה בכיוון תנועתה המקורי, במהירות שגודלה $8\ m/s$.

ב. במקרה זה כיוון המתקף מנוגד לכיוון הציר. נציב ערכים מספריים במשוואה (א):

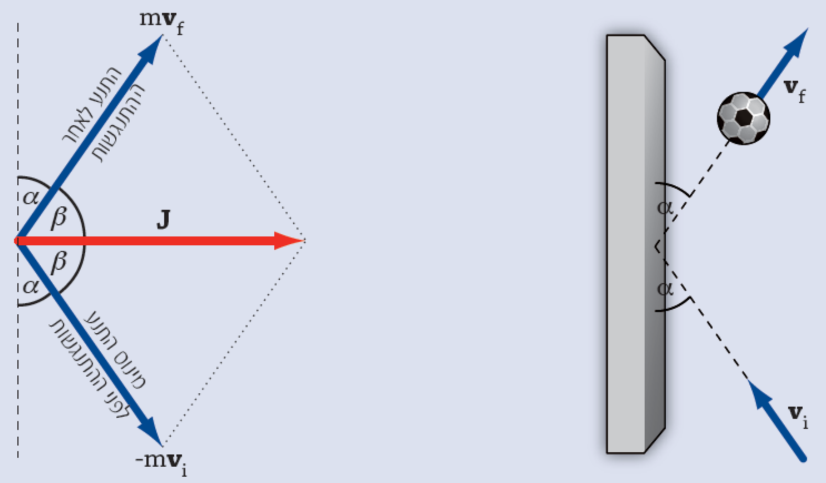
$$-3 = 0.5 \cdot v_f - 0.5 \cdot 2$$

הפתרון: $v_f = -4\ m/s$

כלומר ברגע $t = 3\ s$ הקרונית נעה בכיוון מנוגד לכיוון תנועתה המקורי, במהירות שגודלה $4\ m/s$.

דוגמה 3: התנגשות כדור עם קיר

כדור פוגע בקיר, ומוחזר ממנו. גדלי מהירויות הכדור לפני ההתנגשות ואחריה שווים. הזוויות בין מסלולי התנועה של הכדור לבין הקיר לפני ההתנגשות ואחריה שווים (איור 12א). מהו כיוון הכוח שהקיר מפעיל על הכדור?



ב. המתקף שהקיר הפעיל על הכדור שווה לשינוי בתנע של הכדור   א. התנגשות הכדור עם הקיר

איור 12: תרשימי דוגמה 3

פתרון:

נייצג את השינוי בתנע $m\mathbf{v}_f - m\mathbf{v}_i$ באופן גאומטרי: נסרטט את התנע שלאחר התנגשות $m\mathbf{v}_f$, ונחבר לו (באופן וקטורי) את הווקטור הנגדי לתנע שלפני ההתנגשות, כלומר את $-m\mathbf{v}_i$. באיור 12ב מתואר החיבור בשיטת המקבילית. תוצאת החיבור היא המתקף **J** שהקיר מפעיל על הכדור. כיוון שגדלי התנעים לפני ההתנגשות ואחריה שווים - צלעות המקבילית שוות - לכן מדובר במקבילית מיוחדת - מעוין. בעזרת איור 12ב אפשר להיווכח כי המתקף ניצב לקיר ($\alpha + \beta = 90°$). כיוון הכוח שהקיר מפעיל על הכדור הוא ככיוון המתקף, לכן גם **הכוח ניצב לקיר**.

תרגיל: ענו על השאלה בעזרת חוקי ניוטון בלבד.

ג. הוכחת משפט מתקף-תנע עבור כוח שקול המשתנה בגודלו

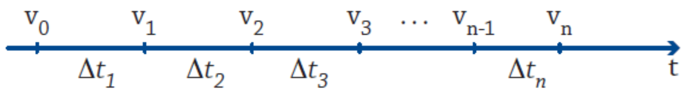
נדון במצב הבא:

גוף נע בהשפעת כמה כוחות, כך שהכוח השקול משתנה בגודלו.

כיצד אפשר להוכיח את משפט מתקף-תנע עבור מצב זה?

הוכחה בדרך א׳ - בעזרת חלוקת פרק הזמן לפרקים קצרים

לא נוכל להשתמש עתה בנוסחה (5) לגבי פרק הזמן הכולל, היות שהיא מתאימה לתנועה בתאוצה קבועה. ננקוט בגישה הבאה: נחלק את פרק הזמן הכולל לפרקי זמן קצרים $\Delta t_1, \Delta t_2, \ldots, \Delta t_n$ (איור 13) שבהם התאוצה משתנה מעט מאוד. בכל אחד מפרקי זמן חלקיים אלה משוואה (5) מתקיימת בקירוב.



איור 13: חלוקת פרק הזמן הכולל לפרקי זמן קצרים

בפרק הזמן החלקי הראשון: $\mathbf{J}_{1\,\text{כולל}} = m\mathbf{v}_1 - m\mathbf{v}_0$

בפרק הזמן החלקי השני: $\mathbf{J}_{2\,\text{כולל}} = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1$

.
.
.

בפרק הזמן החלקי האחרון: $\mathbf{J}_{n\,\text{כולל}} = m\mathbf{v}_n - m\mathbf{v}_{n-1}$

נחבר את n המשוואות. באגף שׂמאל יופיע סכום המתקפים הכוללים בפרקי הזמן השונים, השווה למתקף הכולל בפרק הזמן הכולל. באגף ימין רוב האברים מתקזזים; הביטוי $m\mathbf{v}_1$ למשל מופיע פעמיים בסימנים אלגבריים מנוגדים. לאחר הקיזוזים יישארו רק שני אברים - הראשון והאחרון:

$$\mathbf{J}_{\text{כולל}} = \mathbf{J}_{1\,\text{כולל}} + \mathbf{J}_{2\,\text{כולל}} + \mathbf{J}_{3\,\text{כולל}} + \ldots + \mathbf{J}_{n\,\text{כולל}} = m\mathbf{v}_n - m\mathbf{v}_0$$

כלומר: $\mathbf{J}_{\text{כולל}} = \Delta\mathbf{p}$

ככל שפרקי הזמן קצרים יותר דרגת הקירוב טובה יותר. בגבול שבו פרקי הזמן החלקיים שואפים לאפס (ומספר פרקי הזמן החלקיים שואף לאינסוף) התוצאה הופכת מדוייקת. מכאן שמשוואה (5′) תופסת גם כאשר התאוצה אינה קבועה.

הוכחה בדרך ב׳ - בעזרת אינטגרל

על-פי נוסחה (2): $\mathbf{J}_{\text{כולל}} = \int_{t_1}^{t_2} \Sigma\mathbf{F}dt = \int_{t_1}^{t_2} m\mathbf{a}dt = m\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{a}dt$

נשתמש בקשר: $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$

ונקבל: $\mathbf{J}_{\text{כולל}} = m\int_{t_1}^{t_2} d\mathbf{v} = m\left[\mathbf{v}(t_2) - \mathbf{v}(t_1)\right] = m\mathbf{v}_f - m\mathbf{v}_i$

כלומר: $\mathbf{J}_{\text{כולל}} = \Delta\mathbf{p}$

1.3 החוק השני של ניוטון – ניסוח חלופי

נרשום שוב את משוואה (5):

$$(\Sigma \mathbf{F}) \cdot \Delta t = \Delta \mathbf{p}$$

לכן:

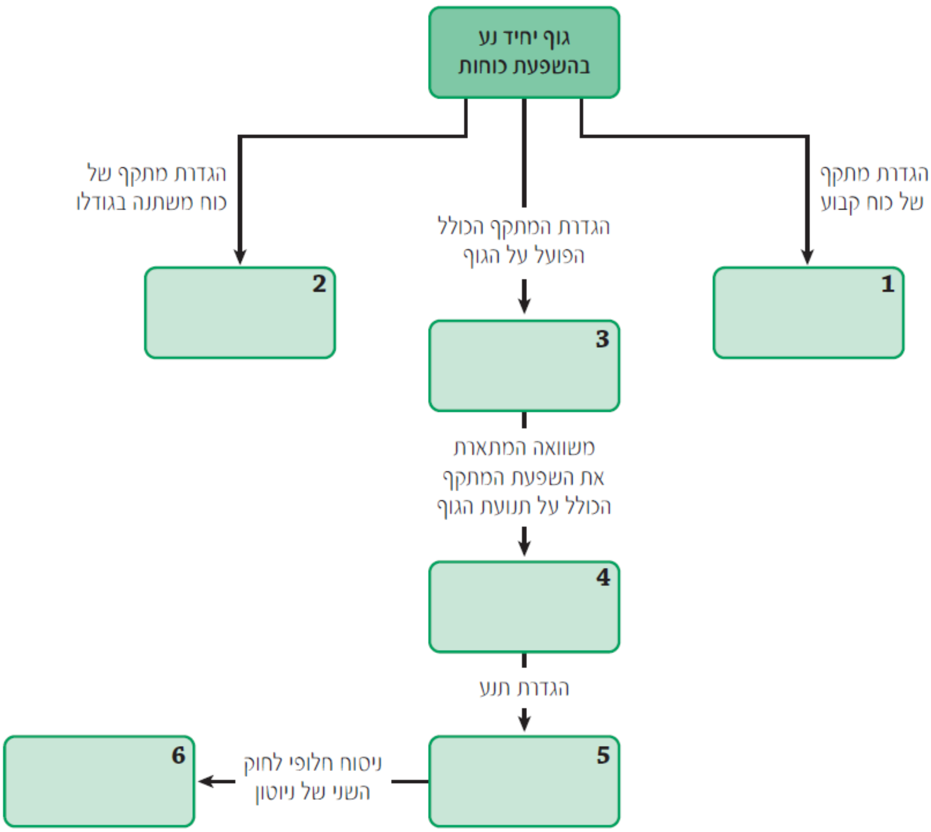
$$\Sigma \mathbf{F} = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t}$$

כאשר פרק הזמן Δt שואף לאפס, מתקבל כי הכוח שווה לנגזרת התנע לפי הזמן, שתסומן $\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt}$ או $\dot{\mathbf{p}}$:

$$\boxed{\Sigma \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = \dot{\mathbf{p}}(t)} \qquad (6)$$

קשר (6) הוא ניסוח חלופי לחוק השני של ניוטון. מצאנו כי הכוח שווה לקצב שינוי התנע (בנוסף להיותו שווה למכפלת המסה בקצב שינוי המהירות). הניסוח המקורי של ניוטון היה במונחים של תנע (משוואה (6)).

תרגיל קריאה 1: לפניכם איור שנועד לתאר את עיקרי מהלכו של סעיף 1 שלעיל. לאחר קריאת סעיף 1, העתיקו את האיור למחברתכם, ורשמו את הנדרש במלבנים הריקים, בסדר הנקבע על ידי המספרים המופיעים במלבנים.



איור 14: עיקרי מהלך סעיף 1 של הפרק

2. חוק שימור התנע

2.1 המושג "מערכת מבודדת"

המושג **"מערכת מבודדת"** (isolated system):

מערכת מבודדת (הנקראת גם מערכת סגורה) היא קבוצה של גופים הנמצאים באינטראקציה אלו עם אלו, אך לאינטראקציות עם הסביבה שמחוץ לקבוצת הגופים אין השפעה על תנועת הגופים.

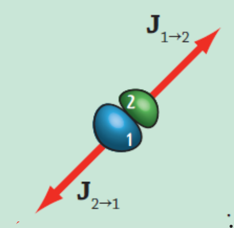
דוגמה למערכת מבודדת: שני כדורים הנעים על שולחן אופקי נטול חיכוך ומתנגשים, מהווים מערכת דו-גופית מבודדת. שני הכדורים נמצאים במהלך ההתנגשות באינטראקציה, ומפעילים כוחות האחד על האחר. על כל כדור פועלים אמנם גם כוחות חיצוניים - משקל וכוח נורמלי, אך כוחות אלה מתקזזים, לכן המערכת מבודדת. כאשר יש חיכוך בין הכדורים לבין השולחן - המערכת כבר אינה מבודדת.

2.2 שימור תנע במערכת מבודדת

א. ניתוח מערכת דו-גופית

נדון במצב הבא:

שני כדורים, 1 ו-2, מהווים מערכת מבודדת. הכדורים נעים ומתנגשים זה בזה (איור 15)



איור 15: מערכת דו-גופית מבודדת

כיצד משפיעה ההתנגשות על תנעי הכדורים?

נסמן את משך ההתנגשות ב- Δt.

נסמן לגבי כדור 1: m_1 - מסתו;

$\mathbf{v}_1$ - מהירותו בתחילת פרק הזמן Δt;

$\mathbf{u}_1$ - מהירותו בסוף פרק הזמן;

$\mathbf{J}_{2\to1}$ - המתקף שכדור 2 מפעיל עליו בפרק הזמן Δt (זהו המתקף היחיד הפועל על כדור 1, לכן הוא גם המתקף הכולל).

נסמן לגבי כדור 2: m_2 - מסתו;

$\mathbf{v}_2$ - מהירותו בתחילת פרק הזמן;

$\mathbf{u}_2$ - מהירותו בסוף פרק הזמן;

$\mathbf{J}_{1\rightarrow 2}$ - המתקף שכדור 1 מפעיל עליו בפרק הזמן Δt (זהו המתקף היחיד הפועל על כדור 2, לכן הוא גם המתקף הכולל).

משוואת מתקף-תנע לגבי כדור 1: $\mathbf{J}_{2\rightarrow 1} = m_1\mathbf{u}_1 - m_1\mathbf{v}_1$ (א)

משוואת מתקף-תנע לגבי כדור 2: $\mathbf{J}_{1\rightarrow 2} = m_2\mathbf{u}_2 - m_2\mathbf{v}_2$ (ב)

על-פי החוק השלישי של ניוטון, הכוחות שהכדורים מפעילים האחד על משנהו בכל רגע ורגע שווי גודל ומנוגדי כיוון (כוחות אינטראקציה).

לכן: $\mathbf{J}_{2\rightarrow 1} = -\mathbf{J}_{1\rightarrow 2}$ (ג)

כלומר המתקפים שהגופים מפעילים זה על זה הם שווי גודל ומנוגדי כיוון.

מקשרים (א), (ב) ו-(ג) נובע:

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m_1\mathbf{u}_1 + m_2\mathbf{u}_2 \tag{7}$$

נפרש את קשר (7): אגף שמאל מייצג את סכום התנעים של כדורי המערכת בתחילת פרק הזמן Δt, זהו התנע הכולל של מערכת שני הכדורים בתחילת פרק הזמן Δt. אגף ימין מייצג את סכום התנעים בתום פרק הזמן. זהו התנע הכולל בסוף פרק הזמן Δt.

הגדרת המושג **"תנע כולל של מערכת":**

התנע הכולל של מערכת דו-גופית מוגדר כסכום (וקטורי) של התנעים של שני גופי המערכת (באותו רגע).

בלשון מתמטית: $\mathbf{p}_{\text{מערכת}} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = m\mathbf{v}_1 + m\mathbf{v}_2$ (8)

כאשר: $\mathbf{p}_1$ - התנע של גוף 1;

$\mathbf{p}_2$ - התנע של גוף 2;

$\mathbf{p}_{\text{מערכת}}$ - התנע הכולל של מערכת הגופים.

קשר (7) מבטא **חוק שימור**.

חוק שימור התנע (law of conservation of momentum) למערכת דו-גופית:

התנע הכולל $\mathbf{p}_{\text{מערכת}} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ של מערכת מבודדת בת שני גופים קבוע כפונקציה של הזמן; כלומר אם $m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2$ הוא התנע הכולל ברגע מסוים במהלך האינטראקציה, ו- $m_1\mathbf{u}_1 + m_2\mathbf{u}_2$ הוא התנע הכולל ברגע מאוחר יותר במהלך ההתנגשות, אזי:

$$\boxed{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m_1\mathbf{u}_1 + m_2\mathbf{u}_2} \tag{7'}$$

במהלך אינטראקציה בין גופי המערכת, התנע של כל אחד מגופי המערכת עשׂוי להשתנות בגודלו ובכיוונו, אולם התנע **הכולל** של המערכת נשמר.

נסכם: כאשר שני גופים נמצאים באינטראקציה זה עם זה, הם מפעילים זה על זה כוחות שווי גודל ומנוגדי כיוון. לכן המתקפים הפועלים על הגופים הם שווי גודל ומנוגדי כיוון. אם המערכת מבודדת, לא פועלים על הגופים מתקפים נוספים, לכן כל אחד מן המתקפים שווה לשינוי בתנע של הגוף שעליו פועל המתקף. מכאן שהשינוי בתנע של הגוף האחד שווה למינוס השינוי בתנע של הגוף האחר. במילים אחרות: המתקפים ששני הגופים מפעילים האחד על האחר גורמים למעבר תנע בין הגופים שבאינטראקציה, אך אינם יוצרים ואינם מחסלים תנע. התנע הכולל נשמר.

ב. הכללת חוק שימור התנע למערכת רב-גופית

ראינו כי אינטראקציה בין שני גופים אינה משנה את התנע הכולל של זוג הגופים. כאשר המערכת כוללת יותר משני גופים, נכנה את הסכום הווקטורי של כל התנעים הבודדים כ"**תנע הכולל של המערכת**":

נבחין בין השפעתם של כוחות "פנימיים" שהגופים בתוך המערכת הרב-גופית מפעילים זה על זה, לבין כוחות "חיצוניים" המופעלים על הגופים שבמערכת כתוצאה מאינטראקציה עם גופים חיצוניים. הכוחות הפנימיים נובעים מאינטראקציות בין זוגות הגופים שבמערכת והם לא משנים את התנע הכולל של זוג הגופים, ולכן אינם משנים גם את התנע הכולל של המערכת. **מכאן שבהעדר כוחות חיצוניים הפועלים על מערכת גופים, התנע הכולל שלה נשמר**.

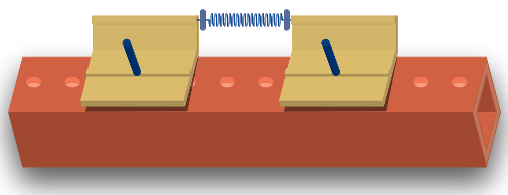
ג. תוקפו של חוק שימור התנע

חוק שימור התנע הוא כללי ביותר, ונחשב על ידי פיזיקאים לאחד מהחוקים הבסיסיים ביותר בטבע. התנע הכולל של מערכת מבודדת קבוע כפונקציה של הזמן, כלומר הוא שווה בכל שני רגעים t_1 ו- t_2. האינטראקציות בין הגופים השונים במערכת עשויות להיות שונות ומשונות; אין זה משנה אם האינטראקציה מתרחשת כאשר הגופים מרוחקים (כבידה, כוח חשמלי), או כאשר הם במגע (חיכוך, התנגשות). כל עוד חוקי התנועה של ניוטון תקפים, תקף גם חוק שימור התנע במערכת מבודדת עם מספר גופים כלשהו.

יתר על כן, מתברר ש**חוק שימור התנע נשאר על כנו גם בתחומים שבהם המכניקה הניוטונית אינה תקפה יותר - תורת היחסות ותורת הקוונטים**.

במסגרת התרגילים בסוף הפרק נרבה ליישם את חוק שימור התנע בהתנגשויות, אך נזכור כי שימור התנע תקף לא רק בהתנגשויות אלא בכל מערכת מבודדת, למרות שבין גופי המערכת יש אינטראקציות.

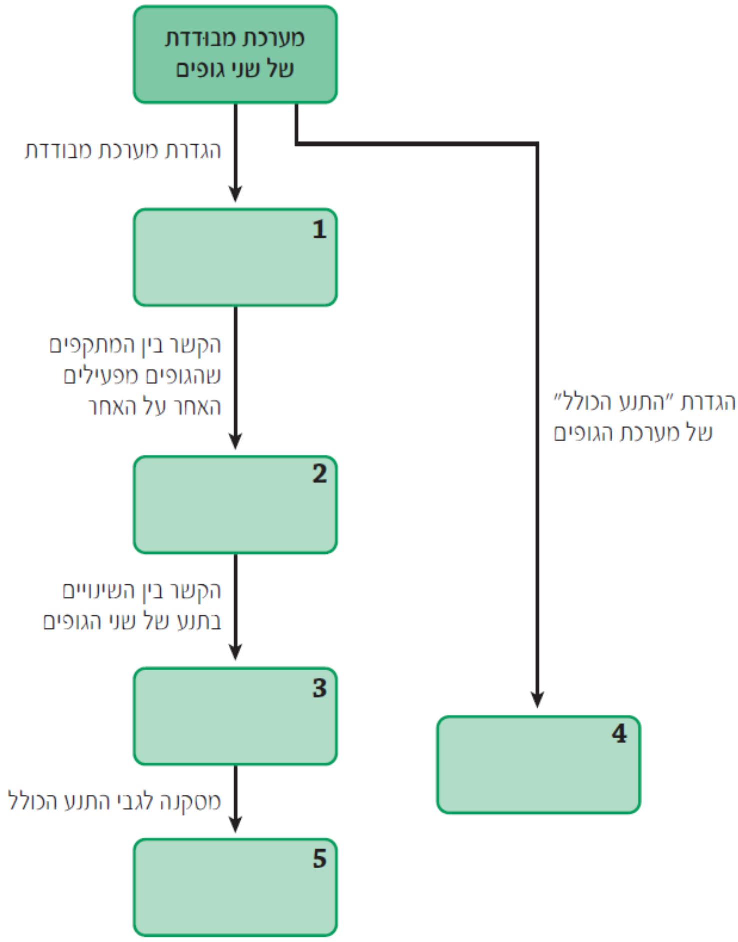
דוגמה: באיור 16 מתוארים שני גלשנים על מסילת אוויר (כך שכוחות החיכוך זניחים), הקשורים באמצעות קפיץ הניתן למתיחה ולכיווץ. מרחיקים את שני הגלשנים זה מזה תוך כדי מתיחת הקפיץ, ומשחררים אותם. שני הגלשנים מתנודדים. גם במערכת כזו התנע הכולל קבוע כפונקציה של הזמן.



איור 16: אם מערכת הגלשנים מבודדת – התנע הכולל שלה קבוע

דוגמה נוספת: נניח ששחררנו גז בחלל (מתוך מכל שהבאנו לשם), במקום המרוחק מאוד מכוכבים, כך שלא פועל מתקף חיצוני על מולקולות הגז. נדמיין לעצמנו כי נוכל לבחון את התנע של כל מולקולה ומולקולה ברגע מסוים, לחבר את התנעים, ולמצוא את התנע הכולל של הגז. זה יהיה וקטור בעל גודל וכיוון מוגדרים. נניח שאנו חוזרים למערכת הגז כעבור רבע שעה, ומודדים מחדש את התנע של כל מולקולה. יתכן כי עתה כל מולקולה נעה בכיוון אחר, ובמהירות שגודלה שונה לחלוטין, אולם כאשר נחשב את התנע הכולל - מובטח לנו כי נקבל בדיוק את אותה תוצאה, גם אם איננו יודעים דבר על טיב האינטראקציה בין המולקולות.

תרגיל קריאה 2: לפניכם איור שנועד לתאר את עיקרי מהלכו של סעיף 2 של הפרק. **לאחר קריאת סעיף 2**, העתיקו את האיור למחברתכם, ורשמו את הנדרש במלבנים הריקים, בסדר הנקבע על-ידי המספרים המופיעים במלבנים.



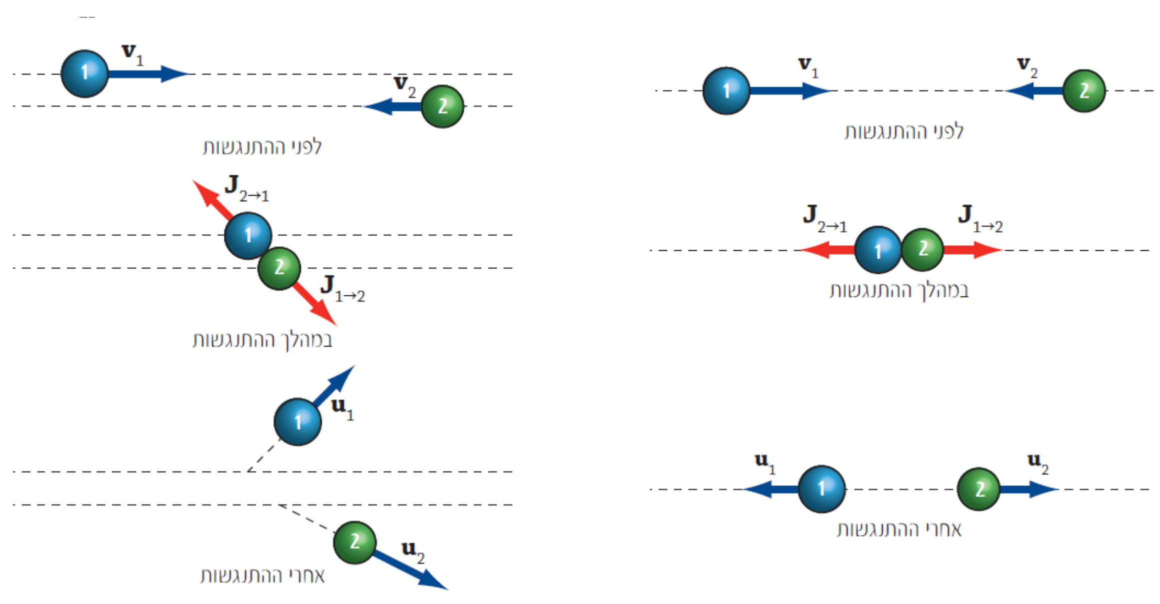
איור 17: עיקרי מהלך סעיף 2 של הפרק

3. יישומים של חוק שימור התנע

3.1 התנגשות

א. התנגשות חד-ממדית והתנגשות דו-ממדית ומשוואות שימור התנע

כאשר שני גופים מתנגשים, יתכן כי מסלולי התנועה לפני ההתנגשות ואחריה יימצאו לאורך קו ישר אחד. במקרה כזה מכנים את ההתנגשות כ**התנגשות חד-ממדית**. התנגשות בין שני גופים תהיה חד-ממדית אם לפני ההתנגשות הגופים נעים לאורך קו ישר, ובמהלך ההתנגשות הם מפעילים זה על זה כוחות לאורך ישר זה. במקרה כזה אומרים שההתנגשות בין הגופים היא **התנגשות מצח** (איור 18א). תנאי מספיק להתנגשות מצח בין **כדורים** הוא שלפני ההתנגשות מרכזי הכדורים ינועו לאורך אותו ישר.



ב. התנגשות דו-ממדית

א. התנגשות חד-ממדית

איור 18: התנגשויות

עבור התנגשות **בממד אחד**, נרשום את משוואת שימור התנע **הווקטורית** (7') כמשוואה **אלגברית**:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2 \qquad (9)$$

הסימנים האלגבריים של המהירויות ייקבעו בהתאם לכיווני התנועה של הגופים ביחס לציר מקום שייבחר.

לאחר שהאינטראקציה נפסקת, התנע (החדש) של כל כדור לחוד שוב נשמר.

אם מסלולי התנועה לפני ההתנגשות ואחריה כלולים במישור אחד, אך לא לאורך קו ישר, ההתנגשות מכונה **התנגשות דו-ממדית** (איור 18ב).

נתאר לעצמנו שני כדורים הנעים במהירויות קבועות ומתנגשים זה בזה. כתוצאה מן ההתנגשות מהירויותיהם משתנות (בגודל ובכיוון). נתבונן בתהליך מנקודת ראות של חוק שימור התנע.

לפני ההתנגשות הכדורים אינם באינטראקציה. אם לא פועלים כוחות חיצוניים (או שהכוחות החיצוניים מקזזים אלה את אלה) הרי שכל אחד מן הכדורים נע בתנועה שוות-מהירות ושומר על התנע שלו, לכן ברור שהתנע הכולל נשמר.

בפרק הזמן הקצר שבו מתחוללת ההתנגשות, כל אחד מן הכדורים מפעיל מתקף על הכדור האחר, לכן התנע של כל אחד מהם משתנה, אך התנע **הכולל** של מערכת שני הכדורים נשמר בכל רגע ורגע במהלך ההתנגשות. בפרט - **התנע בתום ההתנגשות שווה לזה שהיה בתחילתה**. לעתים איננו בקיאים בפרטי תהליך ההתנגשות, אך שימור התנע הכולל מובטח.

נרשום שוב את משוואת שימור התנע של מערכת דו-גופית מבודדת (נוסחה (7')):

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m_1\mathbf{u}_1 + m_2\mathbf{u}_2 \qquad (7')$$

זו משוואה **וקטורית**.

אך כידוע שוויון בין שני וקטורים במישור מחייב שוויון בין רכיביהם הקרטיזיים בכל אחד משני הצירים, לכן במקום לומר שהתנע הכולל לפני ההתנגשות שווה לתנע הכולל שלאחריה, לרוב נוח יותר להשתמש **בשתי משוואות אלגבריות**, עבור הרכיבים הקרטזיים של התנעים.

שימור רכיב התנע הכולל בציר x:

$$\boxed{m_1v_{1,x} + m_2v_{2,x} = m_1u_{1,x} + m_2u_{2,x}} \qquad (10)$$

שימור רכיב התנע הכולל בציר y:

$$\boxed{m_1v_{1,y} + m_2v_{2,y} = m_1u_{1,y} + m_2u_{2,y}} \qquad (11)$$

במשוואות (10) ו- (11) כל אחד ממרכיבי המהירויות יכול להיות חיובי או שלילי. למשל $v_{1,x}$, המסמל את רכיב המהירות של גוף 1 לפני ההתנגשות בכיוון הציר x, יכול להיות חיובי או שלילי, בהתאם לכיוונו ביחס לציר x.

איור 19: את חוק שימור התנע בדוק במעבדה ולא על הכביש!

ב. התנגשות פלסטית

הגדרת המושג **"התנגשות פלסטית"**:
התנגשות פלסטית היא התנגשות (חד-ממדית או דו-ממדית) המסתיימת כשהגופים נעים באותה מהירות.

למשל: אדם רץ וקופץ לתוך עגלה הנמצאת לאורך מסלול תנועתו, ושניהם נעים כגוף אחד.

בהסתמך על משוואה (7') נרשום משוואת שימור תנע להתנגשות פלסטית:

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = (m_1 + m_2)\,\mathbf{u} \qquad (12)$$

כאשר $\mathbf{u}$ - המהירות המשותפת של שני הגופים לאחר ההתנגשות. משוואה (12) היא וקטורית, ואם התנגשות היא דו-ממדית נוכל להמיר אותה בשתי משוואות אלגבריות.

ג. דוגמאות לשימור תנע בהתנגשות

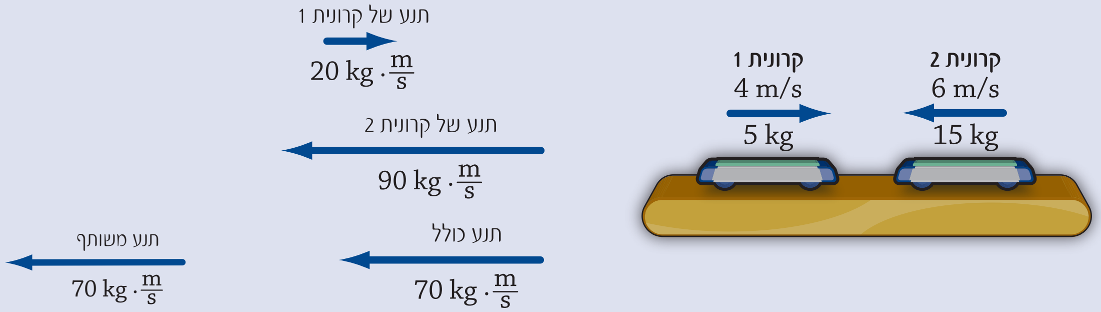
דוגמה 4: התנגשות פלסטית חד-ממדית

קרונית 1 שמסתה $m_1 = 5$ kg נעה ימינה במהירות שגודלה $v_1 = 4$ m/s. קרונית 2, שמסתה $m_2 = 15$ kg, נעה שמאלה לעבר קרונית 1, במהירות שגודלה $v_2 = 6$ m/s (איור 20א). אין חיכוך בין הקרוניות לבין המשטח. ההתנגשות בין הקרוניות היא פלסטית.

א. חשבו את מהירותן המשותפת של הקרוניות לאחר ההתנגשות.

ב. סרטטו חצים המייצגים את וקטורי התנע לפני ההתנגשות - של קרונית 1, של קרונית 2, ושל מערכת שתי הקרוניות.

ג. סרטטו חץ המייצג את התנע הכולל לאחר ההתנגשות.



א. תרשים הבעיה: מערכת הקרוניות לפני ההתנגשות

ב. תשובה לסעיף ב: וקטורי התנע של הקרוניות ווקטור התנע הכולל לפני ההתנגשות

ג. תשובה לסעיף ג: וקטור התנע של זוג הקרוניות לאחר ההתנגשות

איור 20: תרשימי דוגמה 4

פתרון:

א. **ניתוח**: הכוח החיצוני השקול הפועל על כל קרונית שווה לאפס, לכן מערכת שתי הקרוניות **מבודדת**.

מכאן שהתנע הכולל של המערכת נשמר בכל רגע ורגע, בפרט - התנע שלפני ההתנגשות שווה לזה שאחריה. **לאחר ההתנגשות, צמד הקרוניות חייב לנוע על ציר התנועה המקורי**: אילו התנועה היתה במישור (ולא על ציר אחד) אזי לתנע הכולל היו רכיבים בשני הצירים. אולם לפני ההתנגשות התנע הכולל היה בכיוון ציר אחד, לכן יהיה גם לאחריה. **נבחר ציר מקום** שכיוונו החיובי ימינה. ביחס לציר זה $v_1 = 4$ m/s ו-$v_2 = -6$ m/s.

משוואת שימור התנע: $m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)\,u$ (א)

נציב את ערכים מספריים במשוואה (א): $5 \cdot 4 + 15 \cdot (-6) = (5 + 15)\,u$

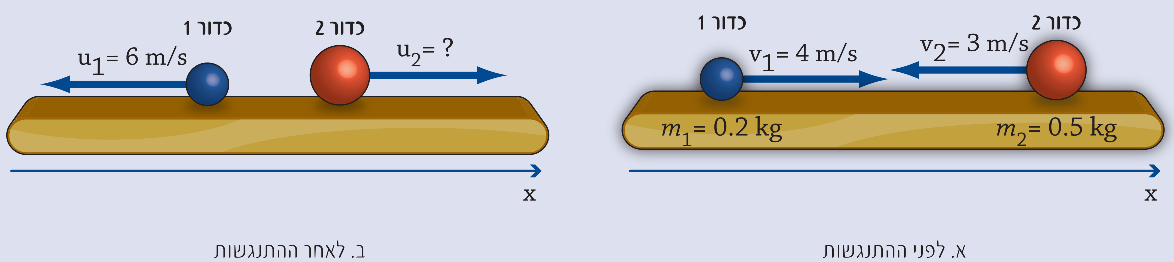
פתרון המשוואה: $u = -3.5$ m/s. כלומר, לאחר ההתנגשות נעות שתי הקרוניות (יחד) שׂמאלה, במהירות שגודלה 3.5 m/s.

ב. התנע של קרונית 1 לפני ההתנגשות מכוון ימינה, וגודלו $5\text{ kg} \cdot 4\text{ m/s} = 20\text{ kg·m/s}$. התנע של קרונית 2 מכוון שׂמאלה, וגודלו $15\text{ kg} \cdot 6\text{ m/s} = 90\text{ kg·m/s}$. התנע הכולל של מערכת הקרוניות שווה לסכום (וקטורי) של תנעי הקרוניות - כיוונו שׂמאלה, וגודלו 70 kg·m/s (איור 20ג).

ג. התנע של מערכת שתי הקרוניות לאחר ההתנגשות שווה לתנע הכולל לפני ההתנגשות, כלומר כיוונו שׂמאלה, וגודלו 70 kg·m/s (איור 20ג).

דוגמה 5: התנגשות חד־ממדית

כדור 1 שמסתו $m_1 = 0.2$ kg נע ימינה במהירות שגודלה $v_1 = 4$ m/s, ומתנגש מצחית בכדור 2, שמסתו $m_2 = 0.5$ kg, הנע שׂמאלה במהירות שגודלה $v_2 = 3$ m/s (איור 21א). אין חיכוך בין הכדורים לבין המשטח. לאחר ההתנגשות כדור 1 נע שׂמאלה במהירות שגודלה $u_1 = 6$ m/s (איור 21ב). חשב את מהירותו של כדור 2 לאחר ההתנגשות.



איור 21: תרשימי דוגמה 5

פתרון:

ניתוח: הכוח החיצוני השקול הפועל על כל כדור שווה לאפס, כלומר מערכת שני הכדורים **מבודדת**, לכן התנע הכולל שלה נשמר.

נבחר ציר מקום שכיוונו החיובי פונה ימינה. ביחס לציר זה:

$v_1 = 4$ m/s ,$v_2 = -3$ m/s ,ו-$u_1 = -6$ m/s.

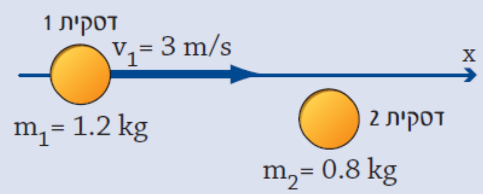
המשוואה העולה משימור התנע ביחס לציר הנבחר: $m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2$ (א)

נציב ערכים מספריים במשוואה (א): $0.2\cdot4 + 0.5\cdot(-3) = 0.2\cdot(-6) + 0.5\cdot u_2$

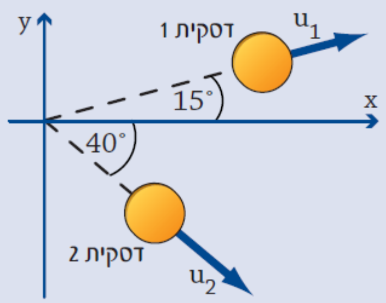
פתרון המשוואה: $u_2 = 1$ m/s. כלומר, לאחר ההתנגשות כדור 2 נע ימינה, במהירות שגודלה 1 m/s.

דוגמה 6: התנגשות דו-ממדית

דסקית 1, שמסתה $m_1 = 1.2$ kg, מחליקה על משטח אופקי חסר חיכוך במהירות שגודלה $v_1 = 3$ m/s, ומתנגשת בדסקית 2 נחה, שמסתה $m_2 = 0.8$ kg. לאחר ההתנגשות נעה דסקית 1 בזווית 15° עם כיוון תנועתה המקורי, ודסקית 2 נעה בזווית 40° עם כיוון תנועתה המקורי של דסקית 1, כמתואר באיור 22. חשבו את גודל המהירות של כל דסקית לאחר ההתנגשות.



א. הדסקיות לפני ההתנגשות



ב. הדסקיות לאחר ההתנגשות

איור 22: תרשימי דוגמה 6

פתרון:

ניתוח: שתי הדסקיות מהוות **מערכת מבודדת**, לכן התנע הכולל שלהן נשמר. **נבחר מערכת צירים** - הציר x בכיוון שבו נעה דסקית 1 לפני ההתנגשות, והציר y ניצב לו.

שימור רכיב ה- x של התנע: $m_1v_{1,x} + m_2v_{2,x} = m_1u_{1,x} + m_2u_{2,x}$ (א)

שימור רכיב ה- y של התנע: $m_1v_{1,y} + m_2v_{2,y} = m_1u_{1,y} + m_2u_{2,y}$ (ב)

נציב ערכים מספריים במשוואה (א):

$$1.2\cdot3 + 0.8\cdot0 = 1.2\cdot u_1\cdot\cos 15^\circ + 0.8\cdot u_2\cdot\cos 40^\circ \quad \text{(ג)}$$

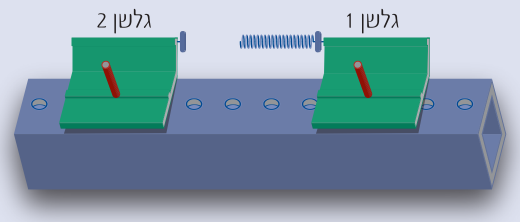
נציב ערכים מספריים במשוואה (ב):

$$0 = 1.2\cdot u_1\cdot\sin 15^\circ - 0.8\cdot u_2\cdot\sin 40^\circ \quad \text{(ד)}$$

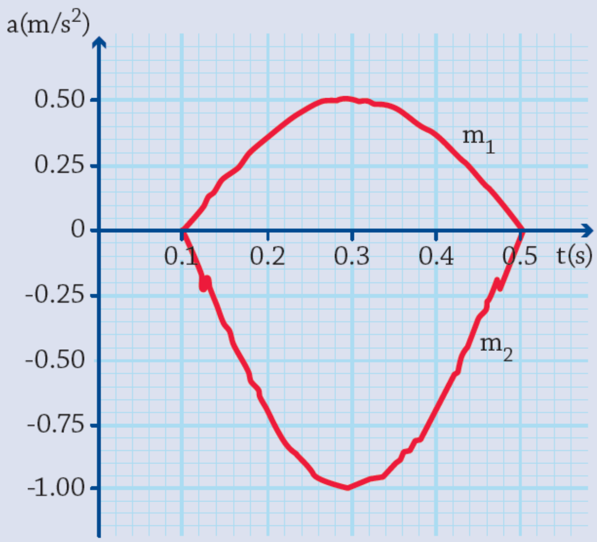
פתרון המשוואות: $u_1 = 2.35$ m/s, ו- $u_2 = 1.42$ m/s. דסקיות 1 ו-2 נעות לאחר ההתנגשות במהירויות שגודלן 2.35 m/s, ו- 1.42 m/s בהתאמה.

דוגמה 7: שימור תנע במהלך התנגשות

שני גלשנים 1 ו- 2 נעים על מסילת אוויר (איור 23א) ומתנגשים.



א. שני גלשנים על מסילת אוויר



ב. תאוצות שני הגלשנים כפונקציה של הזמן, במהלך התנגשות.

איור 23: תרשימי דוגמה 7

תאוצות הגלשנים במהלך ההתנגשות נמדדו בפרקי זמן קצרים באמצעות חיישן, והוזנו למחשב. איור 23ב מציג את תאוצתו של כל גלשן כפונקציה של הזמן.

א. מצאו קשר מספרי בין מסות הגלשנים.

ב. הראו, באמצעות הגרף, כי התנע הכולל נשמר במהלך ההתנגשות.

פתרון:

א. נסמן ב- $\mathbf{F}_1$ את הכוח שגלשן 2 מפעיל על גלשן 1, וב- $\mathbf{F}_2$ את הכוח שגלשן 1 מפעיל על גלשן 2. הכוחות האחרים הפועלים על הגלשנים מתקזזים, לכן $\mathbf{F}_1$ ו-$\mathbf{F}_2$ הם הכוחות השקולים הפועלים על הגלשנים.

לגבי גלשן 1: $\mathbf{F}_1 = m_1\mathbf{a}_1$ (א)

(a_1 היא התאוצה החיובית באיור 23ב).

ולגבי גלשן 2: $\mathbf{F}_2 = m_2\mathbf{a}_2$ (ב)

בתוקף החוק השלישי של ניוטון: $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$ (ג)

מ-(א), (ב) ו-(ג) נקבל: $\frac{m_1}{m_2} = -\frac{a_1}{a_2}$ (ד)

מהגרף אפשר לראות כי יחס תאוצות הגלשנים קבוע, ומקיים: $-\frac{a_1}{a_2} = 2$ (ה)

מ-(ד) ו-(ה) נקבל: $m_1 = 2m_2$ (ו)

כלומר מסתו של גלשן 1 כפולה מזו של גלשן 2.

ב. מהתבוננות בגרף רואים כי ההתנגשות החלה ברגע $t = 0.1\ s$, והסתיימה ב- $t = 0.5\ s$. לכל גלשן יש תנע מסוים לפני ההתנגשות, וסכום התנעים הוא התנע הכולל של מערכת הגלשנים. עתה נחקור מה קרה לתנע הכולל ברגע מסוים במהלך ההתנגשות; נבחר ברגע $t = 0.2\ s$. ה"שטח" שמתחת לגרף תאוצה-זמן שווה לשינוי במהירות של הגוף.

על-פי תוצאות ספירת משבצות נסיק כי מרגע $t = 0.1\ s$ עד רגע $t = 0.2\ s$ ה"שטח" מתחת לעקומה 1 שווה למחצית ה"שטח" שמתחת לעקומה 2, והסימנים האלגבריים של ה"שטחים" שונים. כלומר השינוי במהירות של גלשן 1 שווה למחצית השינוי במהירות של גלשן 2, וסימניהם האלגבריים מנוגדים (אם המהירות של גלשן 1 גדלה אזי המהירות של גלשן 2 פוחתת). מצד שני, הראינו בסעיף א כי המסה של גלשן 1 כפולה מזו של גלשן 2. לכן, השינוי בתנע של גלשן 1 מרגע $t = 0.1\ s$ עד רגע $t = 0.2\ s$ שווה למינוס השינוי בתנע של גלשן 2. לכן התנע הכולל של שני הגלשנים לא השתנה.

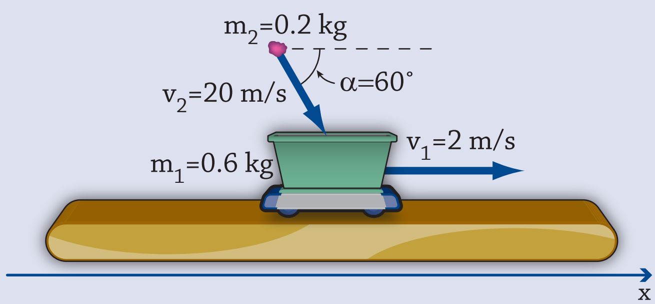
את החישוב שעשינו לגבי פרק הזמן מרגע $t = 0.1\ s$ עד רגע $t = 0.2\ s$ נוכל לעשות לגבי כל פרק זמן אחר.

תוצאות הניסוי עומדות בהתאמה לחוק שימור התנע של מערכת מבודדת.

דוגמה 8: שימור התנע הכולל רק בכיוון מסוים

קרונית שמסתה $m_1 = 0.6\ kg$ נעה על משטח אופקי חסר חיכוך במהירות שגודלה $v_1 = 2\ m/s$ וכיוונה ימינה. גוש פלסטלינה שמסתו $m_2 = 0.2\ kg$ פוגע בקרונית ונדבק אליה. כהרף עין לפני ההתנגשות היה גודל מהירות הפלסטלינה $v_2 = 20\ m/s$, וכיוונה יצר זווית $\alpha = 60°$ עם הכיוון האופקי (איור 24).

חשבו את מהירות הקרונית (עם הפלסטלינה) לאחר ההתנגשות.



איור 24: איור דוגמה 8

פתרון:

ניתוח: לפני ההתנגשות כיוון התנע הכולל של הקרונית והפלסטלינה נמצא בין הכיוון של תנע הקרונית (ימינה) לבין כיוון התנע של גוש הפלסטלינה. לאחר ההתנגשות התנע הכולל פונה ימינה. התנע הכולל אינו נשמר, משמע ש**פועל מתקף חיצוני שמשנה את כיוון התנע** לכיוון האופקי. מתקף זה מבטל את הרכיב האנכי של התנע הכולל לפני ההתנגשות. מכאן נסיק כי הוא פועל כלפי מעלה.

הכוח החיצוני בו מדובר הוא השקול לכוח הנורמלי שהמשטח מפעיל על הקרונית כלפי מעלה, ומשקל הקרונית: לפני ההתנגשות הכוח הנורמלי שמפעיל המשטח האופקי על הקרונית קיזז בדיוק את משקל הקרונית. אולם, במהלך ההתנגשות **הכוח הנורמלי גדל למשך זמן קצר**, והמתקף של הכוח החיצוני השקול (כוח נורמלי יחד עם המשקל) גורם לאיפוס הרכיב האנכי של התנע הכולל. עם זאת, לכוח השקול אין רכיב אופקי, לכן **הרכיב האופקי של התנע הכולל נשמר**.

נבחר ציר x שכיוונו החיובי בכיוון תנועת הקרונית.

המשוואה המבטאת את שימור הרכיב האופקי של התנע הכולל:

$$m_1v_{1,x} + m_2v_{2,x} = (m_1 + m_2)u$$

או:

$$m_1v_1 + m_2v_2\cos\alpha = (m_1 + m_2)u$$

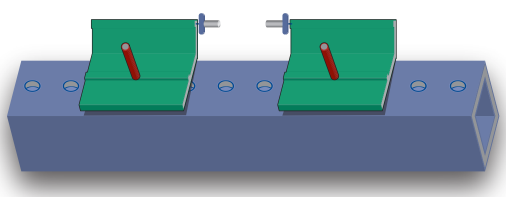
נציב את הנתונים במשוואה:

$$0.6 \cdot 2 + 0.2 \cdot 20 \cdot \cos 60^\circ = (0.6 + 0.2)u$$

פתרון המשוואה: $u = 4$ m/s. כלומר הקרונית עם הפלסטלינה בתוכה נעים ימינה במהירות שגודלה 4 m/s.

התנגשות ללא מגע פיזי

התנגשות אינה חייבת להתרחש תוך מגע פיזי ממש. באיור 25 מתוארים שני גלשנים על מסילת אוויר. לחזיתו של כל גלשן מחובר מגנט, כך שקטבים מנוגדים של המגנטים פונים זה לעבר זה. נניח כי מניחים כל גלשן בקצה אחר של מסילת האוויר ומעניקים להם מהירויות, כך שהם נעים זה לקראת זה. כאשר שני הגלשנים עדיין מרוחקים זה מזה, השפעתם ההדדית קטנה במידה כזאת שאין מבחינים בה כלל, וכל אחד מהם נע במהירות קבועה. כאשר הגלשנים מתקרבים זה לזה מתרחשת אינטראקציה (ללא מגע פיזי אלא רק באמצעות כוחות הדחייה המגנטית ששני המגנטים מפעילים אחד על השני), והתנע של אחד הגלשנים גדל, על חשבון התנע של הגלשן האחר. שני הגלשנים משנים את מהירותם (גודל וכיוון). לאחר מכן, עם התרחקותם זה מזה, הם נעים שוב בתנועה שוות מהירות, כל אחד עם מהירותו החדשה.

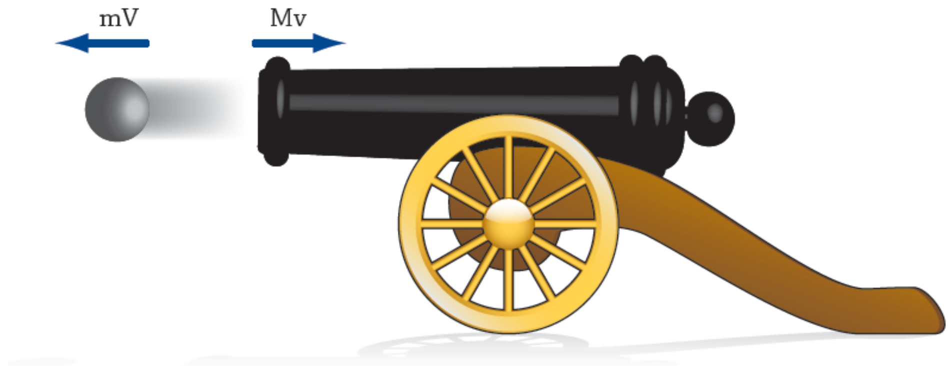


איור 25: בין הגלשנים מתרחשת התנגשות ללא מגע פיסי

3.2 רתע

א. שימור תנע בתופעת הרתע

כאשר אנו משליכים חפץ מידנו אנו מפעילים עליו מתקף ומעניקים לו תנע. החפץ "גומל לנו" ומפעיל עלינו מתקף בעל גודל שווה בכיוון מנוגד. אם נעמוד על רצפה חלקה (משטח קרח) ונזרוק את החפץ קדימה - ננוע לאחור. במערכת זו של שני עצמים, דוחף ונדחף, הגופים נדחפים בכיוונים מנוגדים. אם אין כוחות אחרים הפועלים על הדוחף ומאזנים את השפעת הנדחף, ירתע הדוחף לאחור. זוהי תופעת ה**רתע**, המתרחשת למשל בתותחים (איור 26).



איור 26: כאשר התותח משגר פגז הוא נרתע אחורה, כך שהתנע הכולל נשמר

אם המערכת מבודדת ונמצאת במנוחה לפני הרתע, חוק שימור התנע ירשם בצורה:

$$mV + Mv = 0 \qquad \text{(א)}$$

כאשר mV הוא התנע שקיבל הגוף הנזרק, ו-Mv הוא התנע שרכש הזורק.

מכאן:

$$v = -\frac{m}{M}V$$

מקשר (א) נובע כי היחס בין גודל מהירות הרתע של הזורק לבין גודל המהירות שהוענקה לנזרק הפוך ליחס המסות. כדי להקטין את רתיעת כלי השיגור יש להגדיל את מסתו (על ידי עיגונו בקרקע, למשל).

ב. דוגמאות לשימור תנע בתופעות רתע

דוגמה 9: רתע ממצב מנוחה

נער שמסתו $M = 60\ kg$ נועל גלגילות, עומד במנוחה, ומחזיק בידו כדור שמסתו $m = 0.6\ kg$. הנער זורק את הכדור במהירות שגודלה $v = 20\ m/s$ בכיוון אופקי. מהו גודל מהירות הרתיעה של הנער?

פתרון:

לפני זריקת הכדור, הנער והכדור הם מערכת שהתנע הכולל שלה הוא אפס. לאחר זריקת הכדור, הנער נרתע במהירות שתסומן ב- V. הנער והכדור מהווים מערכת מבודדת, לכן התנע הכולל שלהם נשאר קבוע. נבחר ציר x שכיוונו החיובי ככיוון תנועת הכדור. משוואת שימור התנע הכולל:

$$mv + MV = 0$$

לכן:

$$V = -\frac{m}{M}v = -\frac{0.6}{60}\cdot 20 = -0.2\ m/s$$

כלומר הנער נרתע (הוא נע בכיוון מנוגד לכיוון תנועת הכדור) במהירות שגודלה 20 ס"מ לשנייה.

דוגמה 10: רתע ממצב תנועה (בממד אחד)

רחפת (כלי הנע על כרית אוויר) שמסתה $m_1 = 140\ kg$ ובתוכה כדור שמסתו $m_2 = 10\ kg$ נעה לאורך קו ישר במהירות קבועה שגודלה $V = 3\ m/s$. הכדור נזרק מתוך הרחפת בכיוון תנועתה, במהירות שגודלה $5\ m/s$ **ביחס לרחפת אחרי שהכדור נזרק ממנה**.

חשבו את מהירות הרחפת לאחר זריקת הכדור.

פתרון:

הרחפת והכדור מהווים מערכת מבודדת, לכן התנע הכולל נשמר.

נסמן: u_1 - מהירות הרחפת לאחר זריקת הכדור;

u_2 - מהירות הכדור ביחס לקרקע (לאחר זריקתו).

משוואת שימור התנע: $(m_1 + m_2)V = m_1u_1 + m_2u_2$ (א)

נשתמש במידע שמהירות הכדור ביחס למצב הסופי של הרחפת היא $u_{2,1} = 5\ m/s$:

לפי כלל הטרנספורמציה של גלילאו עבור מהירויות (כרך א, עמוד 79): $u_{2,1} = u_2 - u_1$ (ב)

נציב ערכים מספריים במשוואות (א) ו-(ב):

$$(140 + 10) \cdot 3 = 140 \cdot u_1 + 10 \cdot u_2$$

$$5 = u_2 - u_1$$

מפתרון המשוואות מתקבל: $u_1 \approx 2.67\ m/s$. כלומר, לאחר הזריקה הרחפת נעה בכיוון תנועתה המקורי, במהירות שגודלה $2.67\ m/s$.

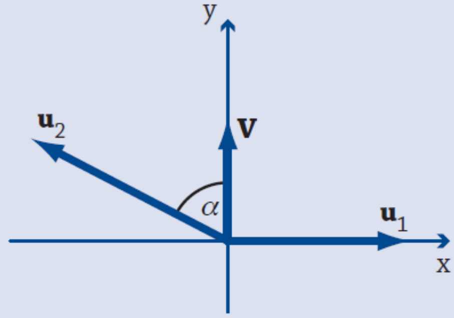
דוגמה 11: מערכת המתנהגת בקירוב כמערכת סגורה

פגז שמסתו $M = 5\ kg$ נורה אנכית כלפי מעלה. ברגע שמהירותו $V = 50\ m/s$ ביחס לציר מקום המצביע כלפי מעלה, הפגז מתפוצץ לשני רסיסים 1 ו-2: רסיס 1, שמסתו $m_1 = 3\ kg$, ניתז בכיוון אופקי, במהירות שגודלה $u_1 = 30\ m/s$. הניחו כי משך ההתפוצצות קצר. מצאו באיזו מהירות (גודל וכיוון) ניתז רסיס 2.

פתרון:

ניתוח: כל הזמן פועל על שני הרסיסים כוח כובד, אבל במהלך ההתפוצצות, עד לרגע שבו רסיס 1 רוכש מהירות שגודלה $u_1 = 30\ m/s$ (כלומר בפרק הזמן הקצר מאוד שבו מתרחש הפיצוץ), **המתקף של הכוח החיצוני (משקל) קטן מאוד ביחס למתקפים שמרכיבי הפגז מפעילים זה על זה**, ואינו משפיע כמעט על תנועות הרסיסים. לכן התנע הכולל של רסיסי הפגז נשמר בקירוב מצויין במהלך ההתפוצצות.

הגדרת מערכת צירים: נגדיר ציר x בכיוון שאליו ניתז רסיס 1, וציר y כלפי מעלה. נסמן את הזווית בין הכיוון שאליו ניתז רסיס 2 לציר ה-y ב- α, ואת גודל מהירותו לאחר ההתפוצצות ב- u_2. (ראה איור 27).



איור 27: לפתרון דוגמה 11

שימור רכיבי התנע בכיוון הציר x: $0 = m_1u_1 - m_2u_2 \sin\alpha$ (א)

שימור רכיבי התנע בכיוון הציר y: $MV = m_1 \cdot 0 + m_2u_2 \cos\alpha$ (ב)

נציב ערכים ב-(א) $0 = 3 \cdot 30 - 2 \cdot u_2 \sin\alpha$ (ג)

נציב ערכים ב-(ב): $5 \cdot 50 = 2 \cdot u_2 \cos\alpha$ (ד)

מ-(ג) ו-(ד) נקבל: $\tan\alpha = \frac{90}{250} \Rightarrow \alpha \approx 19.8°$

נציב את ערך הזווית ב-(ג) (או ב-(ד)) ונקבל: $u_2 \approx 132.8$ m/s.

תשובה: רסיס 2 ניתז בזווית 19.8° במהירות שגודלה כ-132.8 m/s.

ג. רקטה

כדי לשנות את מהירותו של גוף יש צורך שיפעל עליו כוח חיצוני (ראה פרק ד, סעיף 4, תת-סעיף "הנעת גופים"). תנועת גוף מתאפשרת כתוצאה של האינטראקציה בינו לבין גוף אחר - הגוף מפעיל כוח על הגוף האחר והגוף האחר מפעיל כוח על הגוף הראשון. כוח זה הוא חיצוני עבור הגוף הראשון, ועשוי לשנות את מהירותו.

דוגמאות:

א. הליכה מתאפשרת על-ידי אינטראקציה בין האדם לרצפה. האדם דוחף את הרצפה לאחור, והרצפה מפעילה עליו כוח חיכוך בכיוון תנועתו.

ב. שייט בסירת משוטים מתאפשר על ידי כך שהאדם בסירה דוחף את המים אחורה באמצעות המשוט, והמים מפעילים כוח על המשוט בכיוון הנגדי.

ג. מסוק ממריא הודות למדחף, אשר מסתובב ודוחף את האוויר כלפי מטה (כמו בורג המוברג לעץ) והאוויר מפעיל על המדחף כוח כלפי מעלה, המאפשר למסוק להמריא.

חלליות מנווטות בחלל, בו כידוע אין גופים כדוגמת רצפה, מים או אוויר שאותם יכולה החללית לדחוף לאחור ועל ידי כך להתקדם.

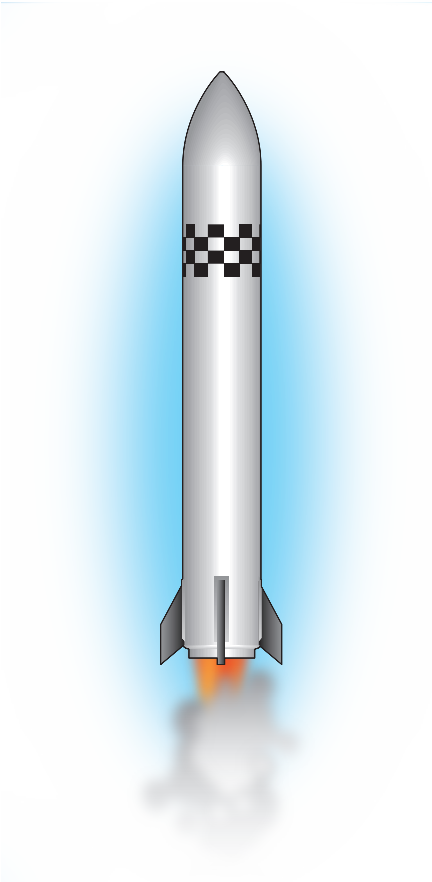
אם כך, איזה כוח חיצוני מאיץ את החללית?

חלליות מצוידות במנוע רקטי שממנו ניפלט גז במהירות רבה, כתוצאה מכוח שהמנוע מפעיל עליו. הגז הנפלט מפעיל כוח על הרקטה. כאשר מסתכלים על מערכת הרקטה והגז הנפלט - זהו כוח פנימי, אולם לגבי הרקטה - זהו כוח שהגז הנפלט מפעיל עליה, לכן זהו כוח חיצוני. כוח חיצוני זה מאיץ את הרקטה. כלומר הפתרון נעוץ באפשרות לפצל את הגוף לשני חלקים. בעת הפיצול פועל כוח דחייה בין שני הגופים, והם יקבלו תוספות מהירויות בכיוונים מנוגדים, ויתרחקו זה מזה. כדי להאיץ את הרקטה משחררים גז בעל מהירות גדולה בכיוון מנוגד לכיוון ההאצה הרצוי.

מנועי רקטה משמשים לא רק בחלל אלא גם בתנועה באטמוספירה, למשל במטוסים ובטילים. חשוב להבין כי לאוויר האטמוספירה אין כל תפקיד בהאצת הטילים. להפך, אוויר האטמוספירה מתנגד להאצה.

ההנעה הרקטית היתה תנאי לכמה מן ההשגים הטכנולוגיים של המאה העשרים והמאה העשרים ואחת - מכלי נשק ארוכי טווח ועד לכיבוש החלל.

ניתוח כמותי של תנועת רקטה מופיע בנספח א.



איור 28: כאשר הגז נדחף אחורה מואצת הרקטה קדימה, כך שהתנע הכולל נשמר

עיקרי הדברים - פרק ו

1. **המתקף $\mathbf{J}$** של **כוח קבוע $\mathbf{F}$** הפועל על גוף במשך פרק זמן Δt מוגדר כך: $\mathbf{J} = \mathbf{F} \cdot \Delta t$.

2. **גודל המתקף**, J, של כוח **המשתנה בגודלו** שווה ל"שטח" התְחום בין העקומה המתארת את הכוח כפונקציה של הזמן לבין ציר הזמן. **כיוונו של המתקף** שווה לכיוון הכוח.

3. **המתקף הכולל** הפועל על גוף בפרק זמן מוגדר כסכום המתקפים של כל הכוחות הפועלים על הגוף בפרק הזמן.

4. **התנע $\mathbf{p}$** של חלקיק שמסתו m, הנע במהירות $\mathbf{v}$, מוגדר כך: $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$.

5. המתקף הכולל הפועל על חלקיק במרווח זמן מסוים שווה לשינוי בתנע של הגוף במהלך אותו פרק זמן:

$$\mathbf{J}_{\text{כולל}} = \Delta \mathbf{p}$$

6. מערכת גופים מכונה **מבודדת** (או **סגורה**) אם הכוח החיצוני השקול הפועל על כל גוף שווה לאפס.

7. **התנע הכולל** של מערכת גופים מוגדר כסכום (הווקטורי) של תנעי כל גופי המערכת.

8. **עקרון שימור התנע (הקווי):** התנע הכולל של מערכת מבודדת הוא קבוע, ואינו משתנה בעקבות אינטראקציה בין גופי המערכת.

בהתנגשות בין שני גופים:
$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m_1\mathbf{u}_1 + m_2\mathbf{u}_2$$

9. **התנגשות פלסטית** בין גופים היא התנגשות שבסיומה לגופים אותה מהירות (הם נעים כגוף אחד). משוואת שימור התנע במקרה זה:

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = (m_1 + m_2)\mathbf{u}$$

10. **התנגשות מצח** היא התנגשות שבה מסלולי התנועה לפני ההתנגשות, ואחריה, נמצאים על ישר אחד.

11. **עקרון הפעולה של רקטה:** הרקטה פולטת גז תוך כדי הפעלת כוח עליו, הגז הנפלט מפעיל כוח "תגובה" על הרקטה; כוח זה מאיץ את הרקטה.

שאלות, תרגילים ובעיות

I. תרגילים מותאמים לסעיפי הפרק

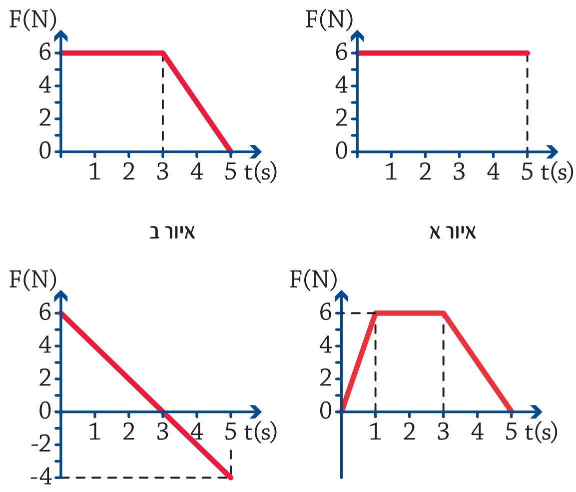
תרגילים 1 - 33 ממויינים על-פי סעיפי הפרק והם נועדו בעיקר לתרגול החומר המופיע באותם סעיפים. תרגילי סיכום אינטגרטיביים מופיעים אחרי תרגילים אלה.

סעיף 1: מתקף, תנע והקשר ביניהם

תת סעיף 1.1: מתקף

1. אדם מפעיל על כסא כח קבוע שגודלו 6 ניוטון וכיוונו ימינה, במשך 3 שניות. מהו המתקף של כוח זה?

2. בכל אחד מאיורים א-ד מוצג גרף כוח-זמן. ברגע $t = 0$ הכוח פועל ימינה.



איור א, איור ב, איור ג, איור ד

מצאו את המתקף (גודל וכיוון) של כל אחד מארבעת הכוחות (מרגע $t = 0$ עד רגע $t = 5$ s).

סעיף 1.2: תנע

3. לאיזה כלי רכב תנע גדול יותר - למכונית שמסתה 1 טון וגודל מהירותה 72 קמ"ש, או למשאית שמסתה 4 טון וגודל מהירותה 40 קמ"ש? נמק.

4. קרונית שמסתה 1.5 ק"ג נעה על מסילה ישרה, אופקית וחסרת חיכוך. מרגע מסוים במהלך תנועתה, שמוגדר $t = 0$, עד רגע $t = 4$ s, הופעל על הקרונית כוח שגודלו 6 ניוטון וכיוונו ימינה. ידוע שברגע $t = 0$ מהירות הקרונית היתה ימינה וגודלה היה 2 מ'\ש'.

א. חשבו את תנע הקרונית ברגע $t = 0$.

ב. חשבו את מתקף הכוח מרגע $t = 0$ עד רגע $t = 4$ s.

ג. חשבו את מהירות הקרונית ברגע $t = 4$ s בשתי דרכים:

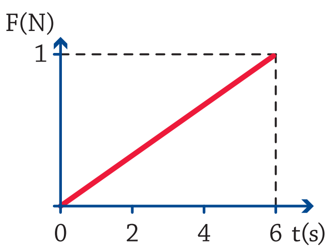
(1) בעזרת חוקי ניוטון ונוסחאות הקינמטיקה.

(2) בעזרת משוואת מתקף-תנע.

ד. הכוח שגודלו 6 ניוטון הפסיק לפעול ברגע $t = 4$ s, ומרגע זה עד רגע $t = 6$ s פעל על הקרונית כוח שגודלו 3 ניוטון וכיוונו שמאלה.

חשבו בעזרת נוסחת מתקף-תנע את מהירות הקרונית ברגע $t = 6$ s.

5. קרונית שמסתה 0.4 ק"ג נעה על מסילה ישרה, אופקית וחסרת חיכוך במהירות שגודלה 6 מ'\ש' וכיוונה שמאלה. מרגע $t = 0$ פעל על הקרונית כוח שגודלו כפונקציה של הזמן מתואר באיור, וכיוונו ימינה.



חשבו את מהירות (גודל וכיוון) הקרונית ברגע $t = 6$ s.

6. כדור שמסתו 0.1 ק"ג נע ימינה ופוגע בקיר בניצב אליו, במהירות שגודלה 10 מ'\ש'. מצא את המתקף שהקיר מפעיל על הכדור בכל אחד מהמקרים שלפניך:

א. הכדור נדבק לקיר.

ב. הכדור מוחזר שמאלה, במהירות שגודלה 2 מ'\ש'.

ג. הכדור מוחזר שמאלה, במהירות שגודלה 5 מ'\ש'.

ד. הכדור מוחזר שמאלה, במהירות שגודלה 10 מ'\ש'.

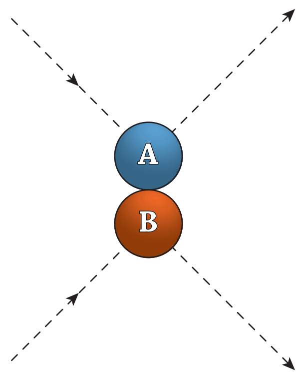
7. אדם מכה בפטיש שמסתו 0.5 ק"ג על מסמר. כהרף עין לפני המכה, גודל מהירות הפטיש היה 5 מ\ש'.
מהו הגודל של הכוח הממוצע שהפטיש מפעיל על המסמר, אם משך המכה הוא 0.02 ש'? הניחו כי הפטיש אינו נרתע לאחור אחרי הפגיעה במסמר.

8. כאשר הינכם קופצים מן השולחן לרצפה, אתם מכופפים בהדרגה את הברכיים מרגע שבו הרגליים נוגעות ברצפה עד שאתם נעצרים. הסבירו מדוע.

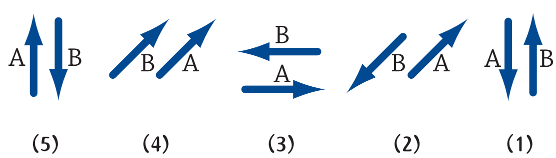
9. כאשר משחררים אבטיח מגובה של כ-1 מטר הוא מתנפץ בפוגעו ברצפה. מדוע אין האבטיח מתנפץ כאשר משחררים אותו מאותו גובה, בהיותו מונח בתוך קופסת קרטון ועטוף בצמר גפן?

10. מדוע מטפסי הרים מעדיפים חבלי ניילון המתארכים בהשפעת מאמץ, על פני חבלים שכמעט ואינם מתארכים? השתמשו בתשובותכם במונחים "מתקף" ו"תנע".

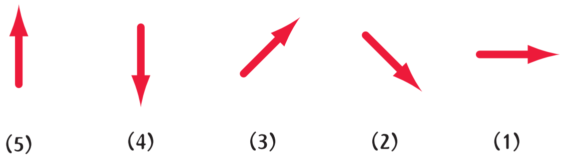
11. באיור מוצגים מסלוליהם של שני כדורים A ו- B המתנגשים.



גודלי המהירויות של כל כדור, לפני התנגשותו ואחריה, שווים.
א. איזה זוג וקטורים מייצג את שינויי התנע של הכדורים? נמק.



ב. איזה וקטור מייצג את כיוון המתקף שכדור B מפעיל על כדור A? נמק.



סעיף 2: חוק שימור התנע

12. במהלך הפרק מוצגת הנוסחה

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m_1\mathbf{u}_1 + m_2\mathbf{u}_2.$$

א. איזה גודל פיזיקלי מייצג כל סמל בנוסחה?
ב. מהי יחידת S.I. של כל אחד מהגדלים שמיוצג בנוסחה?
ג. לאילו תרחישים הנוסחה מתאימה ובאילו תנאים היא תקפה?
ד. נסחו במילים את החוק המנוסח באמצעות הנוסחה.

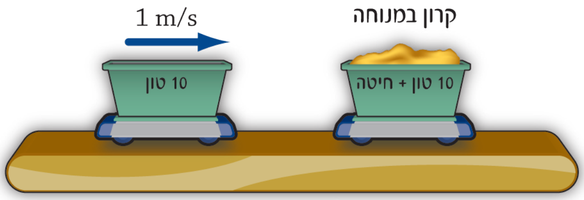
13. גוף המשוחרר ממנוחה נופל חופשית. במהלך נפילתו מהירותו הולכת וגדלה, לכן גם התנע שלו הולך וגדל. האם יש בעובדה זו סתירה לחוק שימור התנע? נמקו.

סעיף 3: יישומים של חוק שימור התנע

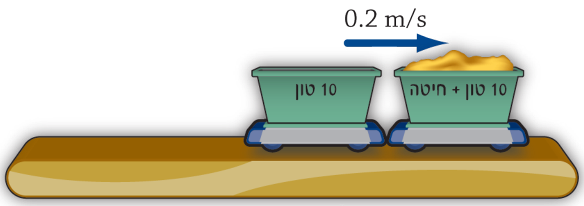
סעיף 3.1: התנגשות

14. גוף שמסתו 0.9 ק"ג נע על משטח אופקי חסר חיכוך, במהירות שגודלה 2 מ\ש'. הגוף מתנגש בגוף שני נח, ונצמד אליו. מסת הגוף השני 0.3 ק"ג. חשבו את המהירות המשותפת של שני הגופים.

15. קרון רכבת שמסתו 10 טון (10^4 kg) נע ימינה במהירות שגודלה 1 m/s, ומתנגש בקרון נח, העמוס בחיטה. שני הקרונות (כשהם ריקים) שווים במסותיהם. במהלך ההתנגשות, שני הקרונות מתחברים, וממשיכים לנוע יחד לאורך המסילה במהירות שגודלה 0.2 m/s. המצבים לפני ההתנגשות ואחריה מתוארים באיור שלפניך:



לפני ההתנגשות



לאחר ההתנגשות

חשבו את מסת החיטה, בהנחה שכוחות חיכוך ניתנים להזנחה.

16. קרונית שמסתה 40 ק"ג נעה ימינה על מסילה אופקית במהירות שגודלה 5 מ\ש'. אדם שמסתו 60 ק"ג רץ לאורך המסילה במהירות שגודלה 6 מ\ש', קופץ על הקרונית ומתיישב בה.

מצאו את מהירות הקרונית לאחר הקפיצה, אם:

א. האדם רץ בכיוון תנועת הקרונית;

ב. האדם רץ לקראת הקרונית.

17. קרונית שמסתה 0.6 ק"ג נעה שׂמאלה על מסילה במהירות שגודלה 1.2 מ\ש'. קרונית שנייה, שמסתה 0.9 ק"ג, נעה על המסילה לקראת הקרונית הראשונה במהירות 0.8 מ\ש' ימינה. שתי הקרוניות נצמדות זו לזו. חשבו את מהירותן המשותפת לאחר ההתנגשות.

18. לפניך תיאור של חמישה זוגות של כדורים הנעים על משטח אופקי חסר חיכוך. לאחר שמתרחשת התנגשות - הכדורים נצמדים.

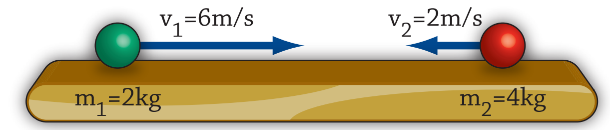
קבעו, לכל זוג כדורים:

א. את **כיוון** התנע **הכולל** לפני ההתנגשות.

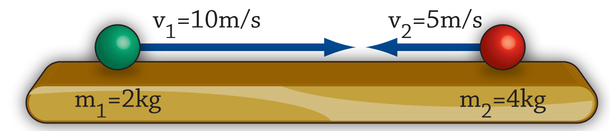
ב. את כיוון התנועה המשותף לאחר ההתנגשות.

(1)

(2)



(3)



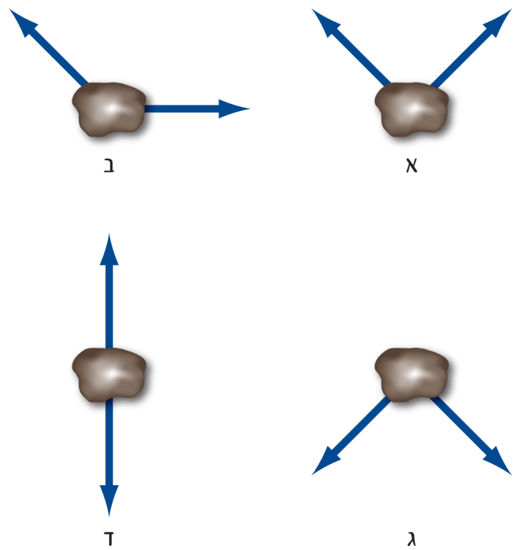
(4)

(5)

19. גוף שמסתו $m_1 = 0.8$ kg נע על משטח אופקי חסר חיכוך במהירות שגודלה $v_1 = 1.5$ m/s. בעקבותיו נע גוף שני, שמסתו $m_2 = 0.1$ kg וגודל מהירותו $v_2 = 10$ m/s. לאחר התנגשות חד-ממדית בין הגופים, נע הגוף הראשון במהירות שגודלה $u_1 = 2.8$ m/s.
מצאו את מהירותו של הגוף השני לאחר ההתנגשות.

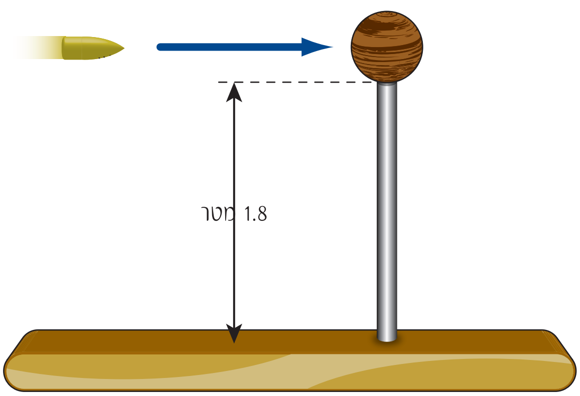
20. כדור שגודל התנע שלו 10 ק"ג · מ\ש' וכיוונו ימינה מתנגש בכדור נח. מהו התנע של מערכת שני הכדורים לאחר ההתנגשות? נמקו.

21. בעת תנועתו של גוף כלפי מעלה, הוא מתפוצץ לשני רסיסים. איזה מבין האיורים שלפניך מתאר **כיוונים** בהם הרסיסים **אינם** יכולים לנוע?



שימו לב: החצים מתארים **כיוונים** בלבד, ואין משמעות לאורכיהם.

22. כדור עץ, שמסתו 975 גרם, ניצב על עמוד צר המאונך לקרקע. גובה העמוד 1.8 מ'. החיכוך בין הכדור לקצה העליון של העמוד ניתן להזנחה. קליע שמסתו 25 גרם נע אופקית לעבר מרכז הכדור וננעץ בו. כדור העץ (והקליע בתוכו) פוגעים בקרקע במרחק 1.5 מ' מרגלי העמוד.



חשבו את מהירות הקליע לפני פגיעתו בכדור העץ.

23. גוף שמסתו 20 ק"ג נע מזרחה במהירות שגודלה 60 קמ\שעה, מתנגש בגוף שמסתו 40 ק"ג הנע דרומה במהירות שגודלה 40 קמ\שעה. שני הגופים נצמדים כתוצאה מההתנגשות. מהי מהירותם המשותפת מיד לאחר ההתנגשות?

24. דסקית א נעה על משטח קרח במהירות שגודלה 15 מ'\ש' ופוגעת בדסקית ב שמסתה זהה, ואשר נמצאת במנוחה. לאחר ההתנגשות, נעה דסקית א בזווית 30° עם הכיוון המקורי של תנועתה, ודסקית ב נעה בזווית 45° עם הכיוון המקורי של תנועתה של דסקית א.

א. האם יתכן ששתי הדסקיות פנו לאחר ההתנגשות לאותו צד של המסלול המקורי של תנועת דסקית א? נמקו.

ב. חשבו את גודל מהירותה של כל דסקית לאחר ההתנגשות.

25. קליע שמסתו 5 גרם פוגע אופקית בגוף עץ שמסתו 2 ק"ג המונח על משטח אופקי, ונתקע בו. הגוף (עם הקליע בתוכו) מחליק לאורך 20 ס"מ על המשטח עד עצירתו. מקדם החיכוך בין הגוף לבין המשטח הוא 0.3. הניחו כי גוש העץ החל לנוע רק לאחר שהקליע נעצר בתוכו. חשבו את גודל מהירות הקליע לפני הפגיעה.

26. קליע שמסתו 5 גרם פוגע אופקית במהירות שגודלה 600 מ'\ש' בגוש עץ שמסתו 2 ק"ג, המונח על משטח אופקי. הקליע יוצא מצידו השני של גוש העץ במהירות שגודלה 200 מ'\ש', וגוש העץ מחליק על המשטח מרחק של 15 ס"מ עד עצירתו. הניחו כי העץ החל לנוע רק לאחר שהקליע יצא ממנו. חשבו את מקדם החיכוך בין גוש העץ לבין המשטח.

תת סעיף 3.2: רתע

27. שתי קרוניות נמצאות במנוחה על מסילת אוויר. בין הקרוניות נמצא קפיץ מכווץ, ושתי הקרוניות קשורות בחוט המונע את התפשטות הקפיץ. כאשר חותכים את החוט, נעה קרונית אחת, שמסתה 400 גרם, במהירות שגודלה 0.32 מ'\ש', והקרונית השנייה נעה בכיוון נגדי במהירות שגודלה 0.5 מ'\ש'
מהי מסתה של הקרונית השנייה?

28. רקדן שמסתו 70 ק"ג ורקדנית שמסתה 50 ק"ג אוחזים ידיים ומחליקים במהירות שגודלה 3 מטר לשנייה לאורך מסלול ישר על משטח קרח חלק. ברגע מסוים הודף הרקדן את הרקדנית, וזו נעה בכיוון המקורי של תנועתם, במהירות שגודלה 7.2 מטר לשנייה.

א. חשבו את מהירות הרקדן לאחר ההדיפה.

ב. חשבו את המתקף שהפעיל הרקדן על הרקדנית במהלך הדיפתה.

ג. האם הרקדנית הפעילה כוח על הרקדן? אם לא - הסבירו. אם כן - מהו המתקף שהרקדנית הפעילה על הרקדן?

29. פגז נורה בזווית גובה 60° ובמהירות לוע שגודלה 200 מ'\ש'. בשיא מסלולו מתפוצץ הפגז לשני רסיסים שמסותיהם שוות. מהירותו של רסיס אחד מתאפסת לאחר ההתפוצצות, והוא נופל חופשית.

א. חשבו את המרחק בין נקודות הפגיעה של שני הרסיסים בקרקע (הנח כי הקרקע אופקית).

ב. מהו כיוון הכוח הממוצע שפעל על הרסיס הראשון במהלך הפיצוץ?

30. התרצו לירות ברובה שמסת הקליע שלו גדולה פי עשרה ממסת הרובה? הסבירו.

31. פצצה שמסתה m, המונחת על משטח אופקי, מתפוצצת לשלושה רסיסים שמסותיהם 0.3m, 0.3m ו- 0.4m. בוחרים מערכת צירים x, y במישור המשטח האופקי. שני הרסיסים הראשונים נהדפים, האחד במהירות 70 מ'\ש' בזווית 30° עם הציר x ברביע הראשון, והשני במהירות 50 מ'\ש' בזווית 40° עם הציר x, ברביע הרביעי. כל הרסיסים נעים במישור אופקי.

א. באיזה תנאי, התנע של הפצצה לפני ההתפוצצות שווה לתנע הכולל של הרסיסים מיד בתום ההתפוצצות?

ב. באיזו מהירות נהדף הרסיס השלישי?

תת-סעיף ג: רקטה

32. כאשר אתם מנפחים בלון גומי באוויר, ומשחררים את הבלון כך שהאוויר נפלט מפיית הבלון, הבלון נע לאורך החדר. הסבירו.

33. א. האם הנעה רקטית יכולה להאיץ רקטה גם בחלל הריק או רק באטמוספרה? הסבירו.

ב. בהנחה שהנעה רקטית יכולה להאיץ רקטה גם בחלל הריק - כיצד אפשר לנווט בחלל חללית באמצעות הנעה רקטית? כיצד אפשר לבלום אותה?

II. תרגילי סיכום

תרגילים 34 - 45 מיועדים לתרגול אינטגרטיבי, וכהכנה לבחינה מסכמת של הפרק.

34. קשה יותר לעצור מכונית נוסעת שמנועה אינו פועל מאשר עגלת קניות, כשהם נעים באותה מהירות. מה עליכם לעשות כדי לעצור את המכונית הנוסעת בעזרת כוח קטן מזה שתפעיל על עגלת הקניות?

35. גרעין ליתיום-5 (^5Li) (מסתו היא בקירוב 5 יחידות מסה אטומיות) הנע במהירות שגודלה $1.6 \cdot 10^6$ מ'\ש' מתפרק לפרוטון (^1H) (מסתו היא בקרוב יחידת מסה אטומית אחת) ולחלקיק α (^4He) (מסתו היא בקירוב 4 יחידות מסה אטומיות). חלקיק ה-α נפלט במהירות $1.4 \cdot 10^6$ מ'\ש' בזווית 33° עם הכיוון המקורי של תנועת גרעין הליתיום. מצאו את מהירותו של הפרוטון הנוצר בתהליך זה.

36. בתוך קרונית הנעה במהירות שגודלה 3 מ'\ש' על מסילה אופקית ונטולת חיכוך, נמצאים נער וכדור ברזל. מסת הקרונית יחד עם הנער (וללא הכדור) היא 120 ק"ג, ומסת כדור הברזל היא 5 ק"ג.

א. מצאו את מהירות הקרונית לאחר כל אחת מפעולות אלה:

(1) הנער זורק את הכדור לאחור במהירות שגודלה 5 מ'\ש' **ביחס למהירות הסופית של הקרונית**.

(2) הנער זורק את הכדור קדימה במהירות שגודלה 7.5 מ'\ש' **ביחס למהירות הסופית של הקרונית**.

(3) הנער משחרר את הכדור דרך נקב שבקרקעית הקרונית.

ב. תארו את תנועת הכדור המתוארת בסעיף א(3) -

(1) מנקודת ראות של צופה על הקרקע.

(2) מנקודת ראות של הנער.

ג. הנער זורק את הכדור בכיוון אנכי כלפי מעלה במהירות שגודלה 1 מ'\ש' (יחסית לקרונית). הכדור נחת ברדתו על הקרונית.

(1) מהו המרחק **על הקרונית** בין הנקודה שממנה הכדור נזרק לבין הנקודה בה נחת?

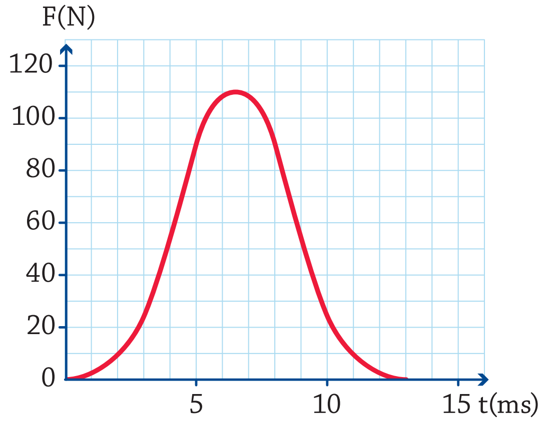
(2) מהי מהירות הקרונית לאחר שהכדור נזרק, אך לפני שהוא נחת? הסבירו.

(3) מהי מהירות הקרונית לאחר שהכדור נחת עליה (ונצמד לקרונית)? הסבירו.

(4) תארו את תנועת הכדור מנקודת ראות של הנער ומנקודת ראות של צופה על הקרקע.

37. גוש פלסטלינה נופל, פוגע ברצפה ונדבק אליה. מצד אחד, במהלך ההתנגשות עם הרצפה, התנע של גוש הפלסטלינה משתנה (מערך שונה מאפס לפני הפגיעה בקרקע, לאפס, לאחר ההתנגשות). מצד שני, הכוח השקול הפועל על הפלסטלינה בהיותה מונחת על הקרקע שווה לאפס. כיצד הדבר מתיישב עם הטענה שנחוץ מתקף כדי לשנות תנע של גוף?

38. שחקן בועט בכדור. הגרף מתאר את גודל הכוח שמפעילה הרגל על הכדור במהלך הבעיטה, כפונקציה של הזמן.

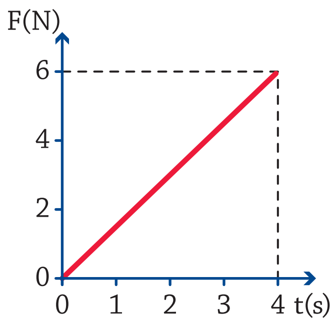


א. העריכו את גודל המתקף שפעל על הכדור.

ב. מהו גודלו של הכוח הממוצע ?

ג. העתיקו את האיור, והוסיפו קו המתאר את הכוח הממוצע.

39. גוף שמסתו 2 ק"ג נע במהירות קבועה שגודלה $v_0 = 3\ m/s$ על פני משטח אופקי חסר חיכוך. ברגע מסוים $(t = 0)$ מתחיל לפעול על הגוף כוח **F**, שגודלו כפונקציה של הזמן מתואר באיור.



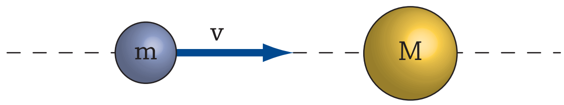
חשבו את תאוצת הגוף (גודל וכיוון) ואת מהירותו (גודל וכיוון) ברגע $t = 4\ s$, אם הכוח **F** פועל:

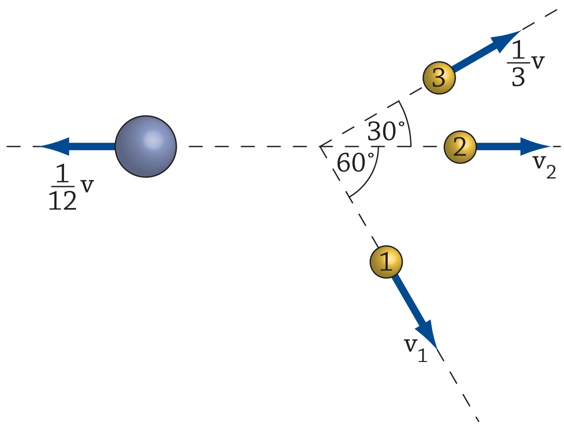
א. בכיוון המהירות v_0.

ב. בכיוון נגדי לכיוון המהירות v_0.

ג. בכיוון אופקי קבוע, המאונך לכיוון המהירות v_0.

40. כדור שמסתו m נע במהירות קבועה שגודלה v על משטח אופקי חסר חיכוך, ומתנגש בכדור נח שמסתו $M = 3m$. כתוצאה מן ההתנגשות נע הכדור הפוגע במהירות שגודלה $v/12$ בכיוון מנוגד לכיוון תנועתו המקורי, והכדור הנפגע מתפרק לשלושה רסיסים 1, 2 ו-3 בעלי מסה m כל אחד, הנעים בכיוונים המתוארים באיור. גודל מהירותו של רסיס 3 היא $v/3$ (ראו איור) וגדלי המהירויות של רסיסים 1 ו-2 אינם ידועים.

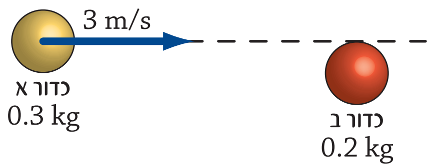




א. מהם גדלי המהירויות של הרסיסים 1 ו-2? בטאו תשובותיכם באמצעות v.

ב. מהו כיוון התנע הכולל של המערכת לאחר ההתנגשות? נמקו.

41. באיור מוצגים במבט מלמעלה שני כדורים בעלי רדיוסים שווים, הנמצאים על משטח אופקי חסר חיכוך. כדור א, שמסתו 0.3 kg, נע במהירות 3 m/s. כדור ב שמסתו 0.2 kg נח. לפני ההתנגשות, היה המרחק בין מרכז כדור ב לבין מסלול התנועה של כדור א (מרחק זה מכונה **פרמטר ההתנגשות**) שווה לרדיוס של כל כדור (ראו איור). לאחר ההתנגשות כדור ב נע במהירות שגודלה 1.2 m/s. הניחו כי הכדורים אינם מפעילים כוחות חיכוך זה על זה.

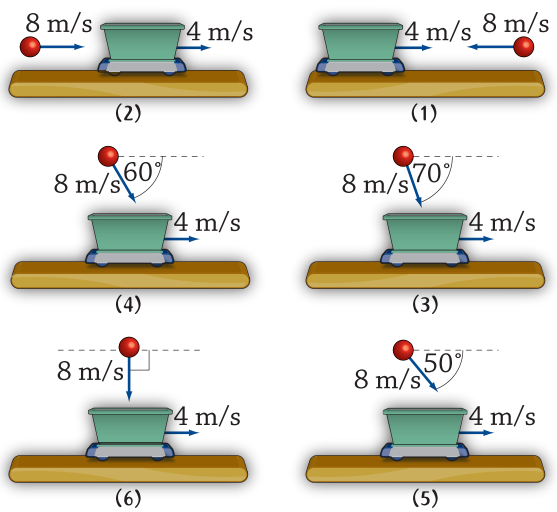


א. מהו כיוון הכוח שמפעיל כדור א על כדור ב?

ב. מהי מהירותו של כדור א לאחר ההתנגשות?

ג. האם הכוח שמפעיל כדור ב על כדור א פועל בכיוון תנועתו של כדור א לאחר ההתנגשות? אם כן - הסבירו מדוע. אם לא - קבעו את כיוון הכוח.

42. קרונית שמסתה 20 kg, נעה ימינה על משטח אופקי נטול חיכוך. מטילים כדור ברזל שמסתו 4 kg שש פעמים לתוך הקרונית - בכל פעם מכיוון אחר.



לפני כל הטלה, הקרונית נעה במהירות שגודלה 4 m/s והכדור פוגע בקרונית במהירות שגודלה 8 m/s (ביחס לקרקע), ונצמד לקרונית. כיווני פגיעת הכדור בקרונית שונים בשש ההטלות, והם מוצגים בתרשימים.

לאחר כל הטלה:

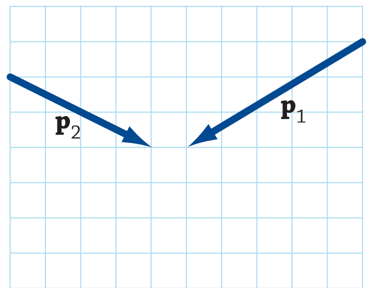
א. האם גודל מהירות הקרונית יקטן, לא ישתנה או יגדל? הסתמכו בתשובתכם על **חוקי ניוטון** (ולא על שיקולי תנע).

ב. חשבו בעזרת חוק שימור התנע את המהירות הסופית של הקרונית, והשוו את תוצאת החישוב עם תשובתכם לסעיף א.

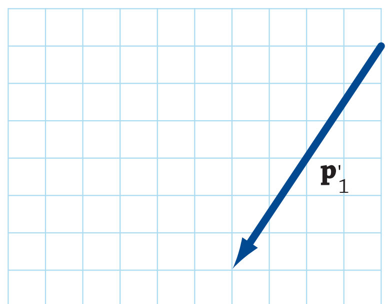
43. הסבירו מדוע כריות אוויר במכוניות מקטינות את הסכנה שנהג המעורב בתאונה ייפגע.

-

44. שני גופים 1 ו-2 מהווים מערכת סגורה. באיור א מוצגים וקטורי התנע $\mathbf{p}_1$ ו-$\mathbf{p}_2$ של הגופים ברגע מסוים. באיור ב מתואר התנע $\mathbf{p'}_1$ של גוף 1, לאחר האינטראקציה בינו לבין גוף 2.



איור א



איור ב

העתיקו את האיורים, ומצאו את וקטור התנע $\mathbf{p'}_2$ של גוף 2 לאחר ההתנגשות, בשלוש דרכים גאומטריות:

א. על ידי מציאת וקטור המתקף;

ב. על ידי שימוש בשימור התנע הכולל;

ג. על ידי שימוש בשימור רכיבי התנע הכולל.

45. סבא, שמסתו $M = 80\ \text{kg}$ מחליק על קרח במהירות שגודלה $6\ \text{m/s}$. לפתע הוא מתנגש בנכדו, שמסתו $m = 40\ \text{kg}$ המתקדם בכיוון מאונך לכיוון ההחלקה שלו, במהירות שגודלה $5\ \text{m/s}$. במקום לפגוע בו, הסב תופס את נכדו בשתי ידיו, והם נעים חבוקים יחדיו לאחר המפגש (בלי לבלום).

א. מהי מהירותם (גודל וכיוון) הסופית?

ב. מהו המתקף (גודל וכיוון) שפעל על הסב?

ג. מהו הכוח הממוצע שהסב הפעיל על הנכד במהלך תפיסתו, אם ההתנגשות ארכה 0.4 שניות?

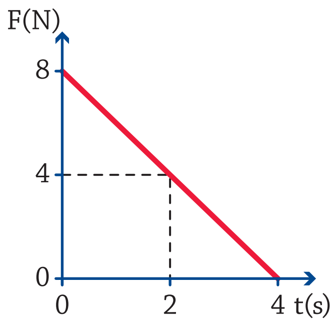
III. תרגילי העמקה

תרגילים 46 - 47 מיועדים להעמקה.

46. א. סרטטו גרף כוח-זמן כך שהכוח אינו אפס בכל רגע ורגע (אם, כי ברגע או ברגעים מסויימים הוא יכול להיות שווה לאפס), אבל, בכל זאת, המתקף של הכוח יהיה שווה לאפס.

ב. חברו תרחיש מציאותי שמתאים לגרף שסרטטתם.

47✶. חלקיק בעל תנע $9\ \text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}}$ נע ימינה, בכיוון החיובי של ציר x. ברגע $t = 0$ החל לפעול עליו כוח שכיוונו קבוע. גודל הכוח משתנה כפונקציה של הזמן, כמתואר באיור.



ברגע $t = 2\ \text{s}$ יש לחלקיק תנע שגודלו $15\ \text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}}$, וכיוונו יוצר זווית מסוימת מתחת לכיוון החיובי של הציר x.

א. מצאו את גודלו ואת כיוונו של המתקף שפעל על החלקיק מרגע $t = 0$ עד רגע $t = 2\ \text{s}$.

ב. מצאו את התנע של החלקיק (גודל וכיוון) ברגע $t = 4\ \text{s}$.

תשובות

1. $18\ N{\cdot}s$ ימינה

2. א. $30\ N{\cdot}s$ ימינה

ב. $24\ N{\cdot}s$ ימינה.

ג. $21\ N{\cdot}s$ ימינה.

ד. $5\ N{\cdot}s$ ימינה.

3. למשאית, כי ...

4. א. $3\ kg \cdot \frac{m}{s}$ ימינה

ב. $24\ N{\cdot}s$ ימינה

ג. $18\ m/s$ ימינה

ד. $14\ m/s$ ימינה

5. $1.5\ m/s$ ימינה

6. א. $1\ N{\cdot}s$ שמאלה.

ב. $1.2\ N{\cdot}s$ שמאלה.

ג. $1.5\ N{\cdot}s$ שמאלה.

ד. $2\ N{\cdot}s$ שמאלה.

7. $125\ N$

8. כדי להגדיל את משך ההתנגשות עם הרצפה, על מנת...

9. כאשר האבטיח עטוף בצמר גפן, משך ההתנגשות עם הרצפה ארוך יותר, לכן ...

10. לאחר כל צעד שהמטפס צועד כלפי מעלה הוא "שוקע" מעט. במהלך השקיעה התנע שלו משתנה מערך כלשהו השונה מאפס לאפס. החבלים הם אלה שמפעילים על המטפס מתקף כלפי מעלה, המאפס את התנע. ככל שהחבלים מתארכים יותר בהשפעת מאמץ, כך משך השינוי בתנע ארוך יותר, לכן ...

11. א. אפשרות (5)

ב. אפשרות (5)

12. ג. הנוסחה מתאימה לאינטראקציה בין שני גופים, והיא תקפה בתנאי שמערכת שני הגופים היא מבודדת.

13. לא, כי הגוף הנופל חופשית אינו מערכת מבודדת כיוון ש ...

14. $1.5\ m/s$

15. 30 טון.

16. א. 5.6 מ'\ש' בכיוון התנועה המשותף.

ב. 1.6 מ'\ש' בכיוון ריצת האדם.

17. הקרוניות נעצרות לאחר ההתנגשות.

18. ב. (1) ימינה

(2) שמאלה.

(3) ימינה

(4) התנע שווה לאפס

(5) הכדורים אינם מתנגשים!

19. 0.4 מ'\ש' בכיוון מנוגד לכיוון תנועתו המקורי.

20. $10\ kg\frac{m}{s}$ ימינה.

21. איור (ג)

22. 100 מ'\ש'.

23. כ- 33.3 קמ"\שעה בזווית 53.1° דרומה מהמזרח.

24. א. לא, כי ...

ב. דסקית א: כ- 11 מ'\ש'.

דסקית ב: כ- 7.8 מ'\ש'.

25. $\approx 439\ m/s$

26. ≈ 0.33

27. 256 גרם.

28. א. הרקדן נעצר.

ב. $210\ N{\cdot}s$ בכיוון תנועתה.

ג. $210\ N{\cdot}s$ בכיוון מנוגד לכיוון תנועתו המקורית.

29. א. כ- 3464 מ'.

ב. בכיוון אופקי ומנוגד לכיוון מהירות הפגז לפני התפוצצותו.

30. לא, כי...

31. א. בתנאי שבמהלך ההתפוצצות המתקפים שכוחות חיצוניים (כוחות חיכוך) הפעילו על הרסיסים היו זניחים לעומת המתקפים שהרסיסים הפעילו זה על זה.

ב. במהירות 74.2 מ'\ש' בזווית 1.66° עם הציר x ברביע השלישי.

32. יש אינטראקציית דחייה בין האוויר שנפלט מפיית הבלון לבין האוויר שבתוך הבלון.

33. א. גם בחלל הריק, כי ...

34. כדי לעצור את המכונית יש להפעיל עלייה מתקף מסוים, לכן ...

35. $4.5 \cdot 10^6$ מ'\ש' בזווית $42.7°$ עם הכיוון המקורי של תנועת גרעין הליתיום.

36. א. (1) 3.2 מ'\ש';

(2) 2.7 מ'\ש';

(3) 3 מ'\ש'.

ב. (1) מנקודת ראות של צופה על הקרקע הכדור נע לאורך מסלול פרבולי.

(2) מנקודת ראות של הנער הכדור נע לאורך מסלול ישר אנכית מטה.

ג. (1) אפס;

(2) 3 מ'\ש';

(3) 3 מ'\ש'.

37. הנחיה: במהלך ההתנגשות עם הרצפה הכוח השקול שפעל על גוש הפלסטלינה אינו אפס ...

38. א. $\approx 0.58\ N{\cdot}s$

ב. $\approx 45\ N$

39. א. התאוצה: $3\ m/s^2$ בכיוון v_0;

המהירות: $9\ m/s$ בכיוון v_0.

ב. התאוצה: $3\ m/s^2$ בכיוון מנוגד ל- v_0;

המהירות: $3\ m/s$ בכיוון מנוגד ל- v_0.

ג. התאוצה: $3\ m/s^2$ בכיוון מאונך ל- v_0;

המהירות: $\approx 6.7\ m/s$ בזווית $63.4°$ ביחס ל-v_0.

40. א. $v_2 \approx 0.699v \ ; \ v_1 \approx 0.192v$

ב. ימינה ...

41. א. $30°$ מתחת כיוון תנועתו המקורי של כדור א.

הנחיה: סרטטו איור המתאים לרגע שבו שני הכדורים **נוגעים** זה בזה. הכדורים מפעילים זה על זה כוחות נורמליים,לאורך הקטע המחבר בין מרכזיהם. חשבו בעזרת האיור את הזווית בין כוח זה לבין הכיוון המקורי של תנועת כדור א.

ב. כ- 2.34 מ'\ש' בכיוון $9.8°$ מעל כיוון תנועתו המקורי.

ג. $150°$ עם כיוון תנועתו המקורי של כדור א.

42. ב. (1) 2 מ'\ש' בכיוון המקורי של תנועתה.

(2) בערך 4.7 מ'\ש' בכיוון המקורי של תנועתה.

(3) בערך 3.8 מ'\ש' בכיוון המקורי של תנועתה.

(4) 4 מ'\ש' בכיוון המקורי של תנועתה.

(5) בערך 4.2 מ'\ש' בכיוון המקורי של תנועתה.

(6) בערך 3.3 מ'\ש' בכיוון המקורי של תנועתה.

45. א. $4.33\ m/s$ בכיוון $22.62°$ עם כיוון תנועתו המקורי של הסב.

ב. $208.4\ N \cdot s$ בכיוון $50.2°$ עם כיוון תנועתו המקורי של הנכד.

ג. $520.7\ N$

47. א. $12\ N \cdot s$ בזווית $90°$ עם ציר x.

הנחיה: נוח לפתור בדרך גאומטרית.

ב. $\approx 18.4\ N \cdot s$ בזווית $60.6°$ עם ציר x.

פרק ז
אנרגיה מכנית ושימורה

1. אנרגיה קינטית, עבודה והקשר ביניהן

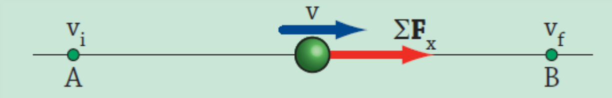
בפרק "התנע ושימורו" בחנו את תוצאת פעולתו של כוח לאורך זמן. בפרק זה נבחן את תוצאת פעולתו של כוח לאורך דרך.

1.1 העבודה הנעשׂית על ידי כוחות קבועים על גוף נקודתי הנע לאורך קו ישר

א. פעולת כוח לאורך דרך

נדון במצב הבא:

גוף נקודתי נע לאורך **קו ישר** (איור 1) בהשפעת **כוחות קבועים**. הכוחות אינם פועלים בהכרח לאורך הקו הישר.



איור 1: גוף נקודתי נע ימינה לאורך קו ישר

מהי תוצאת פעולתו של הכוח השקול כשהגוף עובר דרך?

נגדיר ציר x בכיוון המסלול וציר y מאונך לו. נסמן ב- v_i את מהירות הגוף בנקודה כלשהי A (i - קיצור ל- **i**nitial - התחלתי), וב- v_f את המהירות בנקודה B, בה הוא חלף מאוחר יותר (f - קיצור ל- **f**inal - סופי).

בתוקף החוק השני של ניוטוֹן: $\Sigma F_x = ma$ (א)

כיוון שהתנועה מתנהלת לאורך הציר x: $\Sigma F_y = 0$

הכוח השקול קבוע, לכן התאוצה קבועה, ומתקיים הקשר: $v_f^2 = v_i^2 + 2a\Delta x$ (ב)

כאשר: Δx - העתק הגוף = **העתק נקודת האחיזה של הכוחות**, כי מדובר בגוף נקודתי.

נחלץ את a ממשוואה (ב), נציב את הביטוי המתקבל במקום a במשוואה (א), ולאחר פעולות אלגבריות ספורות נקבל:

$$\boxed{\Sigma F_x \Delta x = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2} \qquad (1)$$

כדי להדגיש את הגדלים הווקטוריים בקשר (1) נרשום את קשר (1) בצורה הבאה:

$$\boxed{\Sigma \mathbf{F}_x \Delta \mathbf{x} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2} \qquad (1')$$

וקטור ההעתק $\Delta \mathbf{x}$, הוא השינוי בווקטור המקום $\mathbf{x}$. כזכור, מפרק ב (תרשים 23 בעמוד 127 בכרך א), לווקטור מקום ברגע מסוים יש נקודת ראשית בראשית מערכת הצירים ונקודת סוף בנקודה שבה נמצא הגוף באותו רגע. למשל, וקטור המקום המתאים לנקודה על ציר ה- x ששיעורה הוא 2, זהו וקטור שראשיתו ב- 0 וראשו ב- 2.

קשרים (1) ו- (1') מבטאים את תוצאת פעולתו של כוח לאורך דרך. מכאן, עד סוף הסעיף, נדון במשמעות של קשר זה.

ב. אנרגיה קינטית

אגף ימין של קשר (1) מבטא את השינוי בגודל $\frac{1}{2}mv^2$ (ערכו הסופי מינוס ערכו ההתחלתי).

הגדרת המושג **"אנרגיה קינטית"** (kinetic energy):

האנרגיה הקינטית (או אנרגיית התנועה), E_k, של גוף נקודתי מוגדרת כמחצית המכפלה בין מסת הגוף, m, בריבוע מהירותו, v (ריבוע המהירות שווה לריבוע גודל המהירות).

בנוסחה:

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2}mv^2} \qquad (2)$$

יחידת האנרגיה הקינטית הנגזרת מיחידות SI היא $kg \cdot \left(\frac{m}{s}\right)^2$ (ראה נוסחה (2)) וגם $N{\cdot}m$ השקולה לה (ראה קשר (1)).
יחידה זו נקראת **ג'אול** לזכרו של הפיזיקאי האנגלי **ג'יימס ג'אול** (James Joule, 1818 - 1889).

הגדרת היחידה **ג'אול** (Joule) (באמצעות המושג "אנרגיה קינטית"):

1 ג'אול (1 J) היא האנרגיה הקינטית של גוף שמסתו 2 ק"ג הנע במהירות שגודלה 1 מ'\ש'.

הג'אול היא היחידה התיקנית של האנרגיה (כלומר זו יחידה השייכת למערכת SI). בטבלה 1 רשומות יחידות אנרגיה שאינן נגזרות מ-SI, אך נהוגות בשימוש. אנו לא נשתמש בהן בספר זה.

יחידות אנרגיה	ערכן ב- J
אֶרְג - erg	10^{-7}
קלוריה - cal	≈ 4.2
אלקטרון-וולט - eV	$1.6 \cdot 10^{-19}$

טבלה 1: יחידות אנרגיה שאינן נגזרות מיחידות SI

דוגמה 1: חישוב אנרגיה קינטית על-פי הגדרתה

גוף שמסתו 2 ק"ג הואץ ממנוחה מרגע $t_0 = 0$ בתאוצה שגודלה 3 מ'\ש'^{2}. חשבו את האנרגיה הקינטית של הגוף ברגעים $t_0 = 0$ ו- $t = 5\ s$.

פתרון:

ברגע $t = 0$:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0^2 = 0$$

האנרגיה הקינטית של גוף נח שווה לאפס.

ברגע $t = 5\ s$:

המהירות:

$$v = v_0 + at = 0 + 3 \cdot 5 = 15\ m/s$$

האנרגיה הקינטית:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 15^2 = 225\ J$$

דוגמה 2: תלות האנרגיה הקינטית במהירות

מכונית שמסתה m נעה במהירות שגודלה v. פי כמה גדֵלה האנרגיה הקינטית של המכונית אם היא מכפילה את גודל מהירותה?

פתרון:

הביטויים לאנרגיות הקינטיות של המכונית לפני הכפלת המהירות ($E_{k,1}$) ואחריה ($E_{k,2}$) הם:

$$E_{k,1} = \frac{mv^2}{2} \qquad (\text{א})$$

$$E_{k,2} = \frac{m(2v)^2}{2} \qquad (\text{ב})$$

ממשוואות (א) ו-(ב) נובע כי $E_{k,2} = 4E_{k,1}$. כלומר מכונית המכפילה את מהירותה - מגדילה את האנרגיה הקינטית שלה פי ארבעה.

האנרגיה הקינטית של גוף תלויה בגודל מהירותו בקשר ריבועי, כלומר אם מהירות גוף גדֵלה פי k - האנרגיה הקינטית שלו גדֵלה פי k^2.

ג. עבודה

נרשום שוב את קשר (1), אלא שבמקום הסימון המקוצר ΣF_x, נרשום במפורש את רכיבי ה-x של הכוחות:

$$(F_{1,x} + F_{2,x} + \dots + F_{n,x})\Delta x = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \qquad (\text{ג})$$

או:

$$F_{1,x}\Delta x + F_{2,x}\Delta x + \dots + F_{n,x}\Delta x = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \qquad (\text{ד})$$

כל אחד מן המחוברים באגף שׂמאל של קשר (ד) שווה למכפלת רכיב כוח לאורך מסלול התנועה, בהעתק של הגוף (שהוא גם העתק של נקודת האחיזה של הכוח, כי הגוף נקודתי). כל מחובר מבטא גודל פיזיקלי המכונה **עבודה**. לדוגמה, $F_{1,x}\Delta x$ מבטא את **העבודה שהכוח F_1 מבצע על הגוף, בשעה שהוא פועל עליו לאורך העתק Δx**.

הגדרת המושג "**עבודה**" (Work):

כאשר גוף נקודתי נע לאורך ציר x, **העבודה** הנעשׂית על-ידי כוח קבוע **F** הפועל עליו היא:

$$W = \mathbf{F}_x \boldsymbol{\Delta x} \qquad (3)$$

כאשר: $\mathbf{F}_x$ - רכיב הכוח לאורך מסלול התנועה (הרכיב $\mathbf{F}_x$ יכול להיות חיובי, שלילי או אפס;

$\boldsymbol{\Delta x}$ - העתק נקודת האחיזה של הכוח (ההעתק $\boldsymbol{\Delta x}$ יכול להיות חיובי, שלילי או אפס;

W - העבודה.

הגדרה חלופית ליחידה **ג'אול** (באמצעות המושׂג "עבודה"):

1 ג'אול היא העבודה הנעשׂית על-ידי כוח שגודלו 1 ניוטון הפועל לאורך דרך של 1 מטר, כאשר כיוון הכוח ככיוון התנועה.

הגדרה חלופית למושג **"עבודה"**:

כאשר גוף נקודתי נע לאורך ציר x, **העבודה** הנעשׂית על ידי כוח קבוע **F** הפועל עליו היא:

$$W = |\mathbf{F}|\ \cos\theta\ |\Delta \mathbf{x}| \qquad (4)$$

כאשר: $|\mathbf{F}|$ - גודל הכוח (תמיד חיובי);

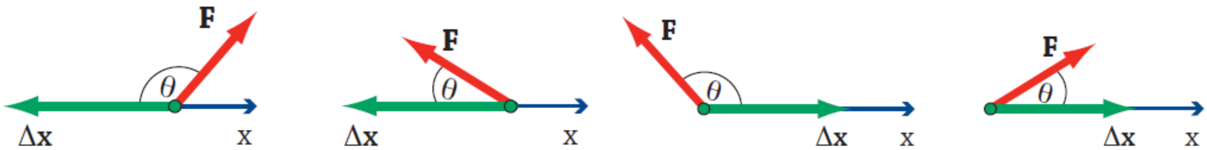
$|\Delta \mathbf{x}|$ - גודל העתק נקודת האחיזה של הכוח (תמיד חיובי);

θ - הזווית בין **F** לבין כיוון התנועה ($0 \le \theta \le 180°$).

נוכיח כי ביטוי (4) זהה לביטוי (3). לשם כך נבחן שתי אפשרויות.

אפשרות א: $\Delta \mathbf{x}$ בכיוון של ציר ה- x (איור 2א). במקרה זה $\Delta x = |\Delta \mathbf{x}|$ וגם $F_x = |\mathbf{F}|\ \cos\theta$ (בין אם θ חדה ובין אם היא קהה) לכן $F_x\ \Delta x = |\mathbf{F}|\ \cos\theta\ |\Delta \mathbf{x}|$.

אפשרות ב: $\Delta \mathbf{x}$ מנוגד לכיוון של ציר ה-x (איור 2ב). Δx שלילי, לכן $\Delta x = -|\Delta \mathbf{x}|$. מאידך גיסא $F_x = -|\mathbf{F}|\ \cos\theta$ (בין אם θ חדה ובין אם היא קהה). לכן גם במקרה זה $F_x \Delta x = |\mathbf{F}|\ \cos\theta\ |\Delta \mathbf{x}|$.



א. $\Delta \mathbf{x}$ מכוון בכיוון ציר ה- x

ב. $\Delta \mathbf{x}$ מנוגד לכיוון של ציר ה- x

איור 2: מצבים הדדיים שונים בין ההעתק, $\Delta \mathbf{x}$, ציר ה- x והכוח **F**

מכאן שהגדרות (3) ו-(4) שקולות זו לזו בכל המצבים.

הערה: נזכיר כי את הגודל של וקטור כגון **F** אנו רושמים לעתים על ידי $|\mathbf{F}|$ ולעתים על ידי F.

משמעות המונח "עבודה" בפיזיקה לעומת משמעותו בחיי היום-יום:

המילה "עבודה" משמשת בחיי היום-יום לתיאור פעילות המצריכה מאמץ גופני או שׂכלי. המילה "עבודה" נבחרה על ידי פיזיקאים כדי לכנות את הביטוי המתמטי $|\mathbf{F}|\ \cos\theta\ |\Delta \mathbf{x}|$. אבל חשוב להבין **שלמרות השימוש באותה מילה, משמעות הביטוי המתמטי שונה מהמשמעויות היום-יומיות של המונח "עבודה"**.

ד. סקלריות האנרגיה הקינטית והעבודה

בפרק ב (בעמוד 108) איפיינו את המושג גודל סקלרי. עתה נגדיר אותו.

הגדרת המושג **"גודל סקלרי"**:

גודל סקלרי הוא גודל שערכו אינו משתנה כאשר עוברים ממערכת צירים אחת למערכת צירים אחרת, אשר היא מסובבת ביחס למערכת הצירים הראשונה.

דוגמה: אורכו של וקטור הוא גודל סקלרי, כי אם נסובב את מערכת הצירים. אורך הווקטור, כפי שימדד במערכת הצירים החדשה לא ישתנה. לעומת זאת רכיב של וקטור **אינו** גודל סקלרי, כי אם נסובב את מערכת הצירים הרכיב לאורך ציר ה- x הישן יהיה שונה מהרכיב לאורך ציר ה- x החדש.

סקלריות האנרגיה הקינטית

אנרגיה קינטית היא **גודל סקלרי**, כי מסה, m, היא גודל סקלרי, וגם ריבוע מהירות, v^2, שהוא מכפלת גודל הווקטור v בעצמו, הוא גודל סקלרי.

סקלריות העבודה

ראינו כי אגף ימין של קשר (1), המבטא שינוי באנרגיה הקינטית, הוא גודל סקלרי. מכאן, שגם אגף שׂמאל של קשר (1), המבטא עבודה, הוא גודל סקלרי. כלומר הערך של עבודת כוח אינו משתנה כאשר מסובבים את מערכת הצירים. אי תלות העבודה בכיוון הציר בולטת בהגדרה (4), שבה לא נדרש להתייחס לציר.

הגדרת המושג **"מכפלה סקלרית"** (dot product) בין שני וקטורים:

המכפלה הסקלרית של שני וקטורים **A** ו- **B** מוגדרת כך:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A\,B\cos\theta \qquad (5)$$

כאשר: A - גודלו של הווקטור **A**.

B - גודלו של הווקטור **B**.

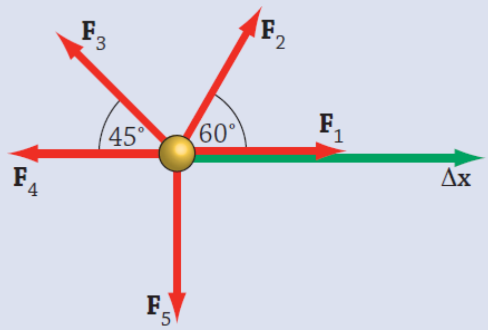
θ - הזווית בין שני הווקטורים.

$\cdot$ - סימן כפל של מכפלה סקלרית (את אגף שמאל של קשר (5) קרא, משמאל לימין **A** dot **B**).

אפשר להגדיר את העבודה של כוח קבוע **F** הפועל לאורך העתק $\Delta\mathbf{x}$ כמכפלה הסקלרית $\mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{x} = |\mathbf{F}| \cdot |\Delta\mathbf{x}| \cdot \cos\theta$.

דוגמה 3: חישוב עבודה של כוחות היוצרים זוויות שונות עם ההעתק

באיור 3 מוצגים חמישה מבין הכוחות הפועלים על גוף נקודתי. גודלו של כל אחד מחמשת הכוחות הוא 5 N. חשבו את עבודתו של כל אחד מחמשת הכוחות במהלך תנועתו של הגוף ימינה לאורך העתק $\Delta\mathbf{x}$ שגודלו 2 m.



איור 3: איור דוגמה 3

פתרון:

לגבי כל אחד מחמשת הכוחות נסמן את הזווית בין כיוון הכוח לבין כיוון תנועת הגוף ב- θ, עם האינדקס המתאים.

$\mathbf{F}_1$: הזווית בין הכוח לבין כיוון תנועת הגוף היא $\theta_1 = 0$ (ראו איור) לכן עבודת הכוח:

$$W_1 = |\mathbf{F_1}| \cos\theta_1 |\Delta\mathbf{x}| = 5 \cdot \cos 0 \cdot 2 = 10 \text{ J}$$

$\mathbf{F}_2$: הזווית בין הכוח לבין כיוון תנועת הגוף היא 60°, לכן עבודת הכוח:

$$W_2 = |\mathbf{F_2}| \cos\theta_2 |\Delta\mathbf{x}| = 5 \cdot \cos 60^\circ \cdot 2 = 5 \text{ J}$$

$\mathbf{F}_3$: הזווית בין הכוח לבין כיוון תנועת הגוף היא 135°, לכן עבודת הכוח:

$$W_3 = |\mathbf{F_3}| \cos\theta_3 |\Delta\mathbf{x}| = 5 \cdot \cos 135^\circ \cdot 2 = -7.1 \text{ J}$$

$\mathbf{F}_4$: הזווית בין הכוח לבין כיוון תנועת הגוף היא 180°, לכן עבודת הכוח:

$$W_4 = |\mathbf{F_4}| \cos\theta_4 |\Delta\mathbf{x}| = 5 \cdot \cos 180^\circ \cdot 2 = -10 \text{ J}$$

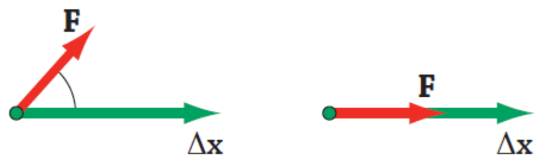
$\mathbf{F_5}$: הזווית בין הכוח לבין כיוון תנועת הגוף היא 90°, לכן עבודת הכוח:

$$W_5 = |\mathbf{F_5}| \cos\theta_5 |\Delta\mathbf{x}| = 5 \cdot \cos 90^\circ \cdot 2 = 0$$

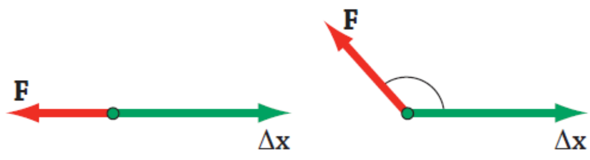
הסימן האלגברי של העבודה:

כפי שראינו בדוגמה האחרונה, עבודתו של כוח עשׂויה להיות חיובית, שלילית או אפס.

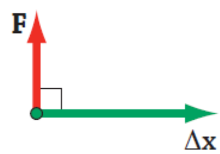
עבודה היא חיובית כאשר הזווית θ בין הכוח לבין ההעתק היא חדה, כי אז $\cos\theta > 0$, ועל-פי נוסחה (4) $W > 0$ (איור 4א).



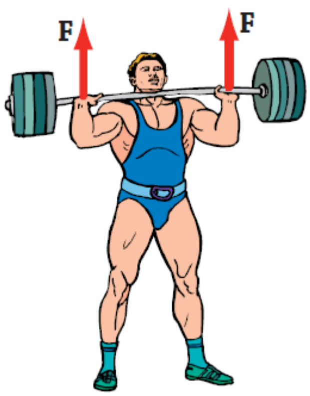
א. מצבים שבהם הסימן האלגברי של העבודה הוא חיובי



ב. מצבים שבהם הסימן האלגברי של העבודה הוא שלילי



ג. עבודתו של כוח הניצב למסלול התנועה שווה לאפס



ד. עבודתו של כוח שנקודת האחיזה אינה נעה היא אפס

איור 4: הסימנים האלגבריים של העבודה במקרים שונים

עבודה היא שלילית כאשר הזווית θ בין הכוח לבין כיוון התנועה היא קהה, כי אז $\cos\theta < 0$, לכן על-פי נוסחה (4) $W < 0$ (איור 4ב).

עבודתו של כוח שווה לאפס בשני מקרים:

1. כאשר הכוח ניצב למסלול התנועה (איור 4ג), כי אז $\cos\theta = 0$.

דוגמה: הכוח הנורמלי שמשטח מפעיל על גוף הנע עליו.

2. כאשר נקודת האחיזה של הכוח אינה זזה.

דוגמה: אם נחזיק מעל ראשנו גוף כבד במשך שעה, הכוח שנפעיל על הגוף לא יבצע עבודה כלשהי, למרות המאמץ (איור 4ד).

עבודה וגרף כוח-מקום: נניח כי גוף נקודתי נע לאורך קו ישר בהשפעת כמה כוחות קבועים. העקומה באיור 5 מתארת את הרכיב F_x של אחד הכוחות, כפונקציה של מקום הגוף, x.

עבודת הכוח הוגדרה על ידי $F_x\Delta x$. מכפלה זו שווה ל"שטח" המלבן הצבעוני שבאיור 5, כאשר גובהו F_x ובסיסו Δx נלקחים **עם סימנם האלגברי**. באיור 5 למשל, הסימן האלגברי של רכיב הכוח הוא חיובי; סימן ההעתק לעומת זאת, עשוי להיות חיובי או שלילי, בהתאם לכיוון תנועת הגוף ביחס לציר: אם הגוף נע מ-x_1 ל-x_2 - סימן ההעתק חיובי, ואם כיוון תנועתו מ-x_2 ל-x_1 - סימנו שלילי. אי אפשר לקבוע זאת על-פי הגרף, ללא מידע נוסף.

"שטח" המלבן $(F_x \cdot \Delta x)$ נמדד ביחידת העבודה (ניוטון · מטר = ג'אול).

איור 5: העבודה הנעשית על-ידי הכוח שווה ל"שטח" הכלוא בין העקומה לבין ציר המקום

ה. משפט עבודה - אנרגיה

אגף שמאל של קשר (ד) שבתת סעיף ג לעיל מבטא את **סכום העבודות של כל הכוחות הפועלים על הגוף**. סכום זה מכונה **העבודה הכוללת**. נסמן אותה ב- $W_{\text{כוללת}}$. נרשום את קשר (ד) כך:

$$W_{\text{כוללת}} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = E_{k,f} - E_{k,i} = \Delta E_k$$

עתה, לאחר שאיפיינו את הגדלים המופיעים בשני האגפים של קשר (1), נרשום אותו ככלל.

משפט עבודה - אנרגיה (work-energy theorem):

העבודה הכוללת הנעשית על גוף נקודתי שווה לשינוי באנרגיה הקינטית של הגוף.

בנוסחה:

$$W_{\text{כוללת}} = \Delta E_k \qquad (6)$$

כאשר: $W_{\text{כוללת}}$ - העבודה כוללת, שהיא סכום העבודות של כל הכוחות הפועלים על גוף;

ΔE_k - השינוי באנרגיה הקינטית של הגוף.

את משפט עבודה-אנרגיה הוכחנו, בשלב זה, רק עבור תנועה לאורך קו ישר, אך הוא נכון עבור תנועה במסלול כלשהו.

הערה: מתוך השוואת האגפים השמאליים שבקשרים (ג) ו- (ד) נובע שסכום העבודות של כל הכוחות הפועלים על גוף נקודתי (העבודה הכוללת) שווה לעבודת הכוח השקול.

עבודה כוללת חיובית מגדילה את האנרגיה הקינטית, כי:

$$W_{\text{כוללת}} > 0 \Rightarrow \Delta E_k > 0 \Rightarrow E_{k,f} - E_{k,i} > 0 \Rightarrow E_{k,f} > E_{k,i}$$

דוגמה: כאשר גוף משוחרר ממנוחה ונופל חופשית, עבודתו של כוח הכובד חיובית, והיא מגדילה את האנרגיה הקינטית של הגוף הנופל.

עבודה כוללת שלילית מקטינה את האנרגיה הקינטית.

בפרקים קודמים עסקנו במשוואות תנועה ובמשוואות מתקף-תנע, שהן משוואות וקטוריות. הסקלריות של משוואת עבודה-אנרגיה מקלה על חישובים, אך היא אינה מאפשרת לדעת את כיוון המהירות, אלא רק את גודלה.

דוגמה 4: יישׂום משפט עבודה–אנרגיה עבור גוף שנזרק כלפי מעלה

גוף שמסתו 2 kg נזרק מנקודה A כלפי מעלה במהירות שגודלה 30 m/s. הנקודה B נמצאת לאורך מסלול התנועה בגובה 25 m מעל A.

א. הסבירו, בעזרת משפט עבודה-אנרגיה ובאופן איכותי, מדוע מהירות הגוף בנקודה B קטנה מן המהירות ההתחלתית.

ב. חשבו את האנרגיה הקינטית ואת מהירות הגוף בנקודה B.

פתרון:

א. נבחר ציר מקום שכיוונו החיובי כלפי מעלה. העתק הגוף בתנועתו מ-A עד B הוא חיובי. הכוח השקול (כוח הכובד) הוא שלילי. העבודה הנעשית על הגוף היא שלילית (על-פי הגדרתה). על פי משפט עבודה-אנרגיה, עבודה שלילית מקטינה את האנרגיה הקינטית, ולכן מהירות הגוף ב-B קטנה מן המהירות ההתחלתית ב-A.

ב. נוסחת עבודה-אנרגיה:

$$W = E_{k,B} - E_{k,A}$$

$$-mg\Delta x = E_{k,B} - \frac{1}{2}mv_A^2 \Rightarrow -2\cdot 10\cdot 25 = E_{k,B} - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 30^2$$

פתרון המשוואה: $E_{k,B} = 400\text{ J}$. הגוף נזרק עם אנרגיה קינטית בת 900 J. נעשית עליו עבודה שלילית, ובהיותו ב-B נותרת לו אנרגיה קינטית בת 400 J.

נחשב את מהירות הגוף ב-B:

$$E_{k,B} = \frac{1}{2}mv_B^2 \Rightarrow 400 = \frac{1}{2}\cdot 2v_B^2$$

$$v_B = \pm 20\text{ m/s}$$

המהירות החיובית מתאימה לתנועה כלפי מעלה, והשלילית - לירידה משׂיא הגובה. חשוב להבין כי בעליית הגוף מ-B עד שׂיא הגובה העבודה שלילית ובירידה חזרה מהשׂיא עד B העבודה חיובית. העבודה הכוללת מ-B עד שׂיא הגובה וחזרה ל-B שווה לאפס.

דוגמה 5: חישוב עבודה כוללת

גוף שמשקלו 3 N נע במעלה משטח משופע חסר חיכוך, שזווית שיפועו $\alpha = 30^\circ$. על הגוף פועל כוח **T** שגודלו 5 N וכיוונו מקביל למשטח המשופע בכיוון מעלה. לגבי תנועת הגוף לאורך העתק $\mathbf{\Delta x}$ שגודלו 2 m חשבו -

א. את עבודתו של כל אחד מן הכוחות הפועלים על הגוף.

ב. את העבודה הכוללת.

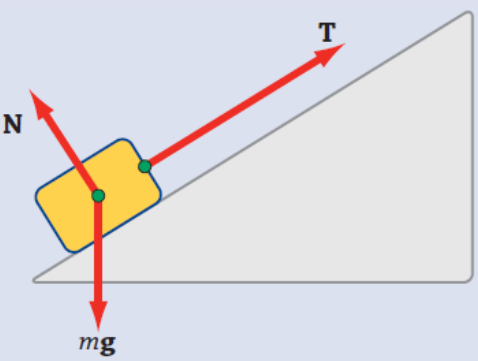
פתרון:

באיור 6א מוצגים כל הכוחות הפועלים על הגוף.

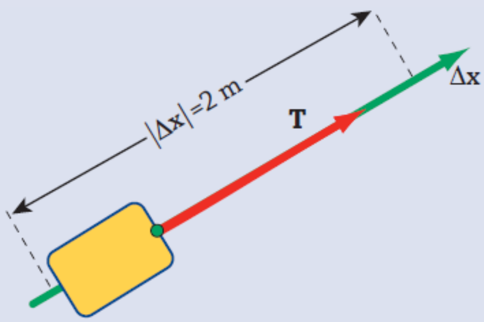
א. **עבודת הכוח T**: **T** פועל בכיוון התנועה (איור 6ב). לכן עבודתו:

$$W_T = |\mathbf{T}| \cdot |\mathbf{\Delta x}| \cos\theta_T = 5 \cdot 2 \cdot \cos 0 = 10 \text{ J}$$

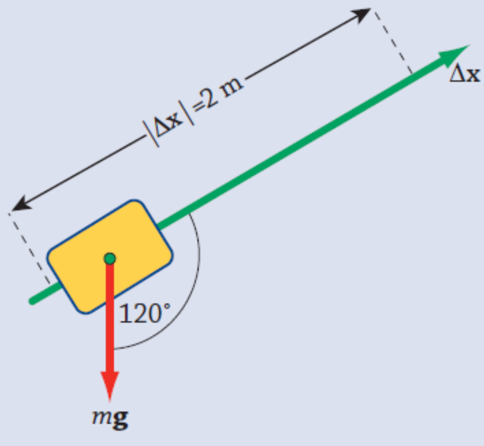
העבודה חיובית, מפני שהכוח **T** פועל בכיוון התנועה.



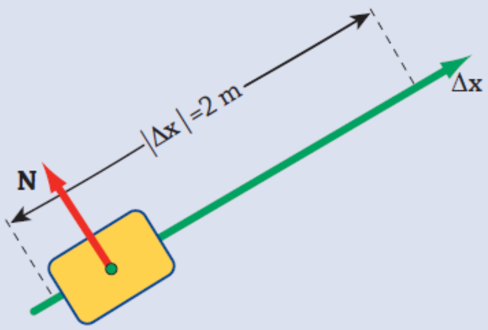
א. תרשים הכוחות הפועלים על גוף שנע במעלה משטח חסר חיכוך



ב. הכוח P פועל בזווית של 0° ביחס לכיוון התנועה



ג. כוח הכובד פועל בזווית של 120° ביחס לכיוון התנועה



ד. הכוח הנורמלי פועל בזווית של 90° ביחס לכיוון התנועה

איור 6: תרשימי דוגמה 5

עבודת כוח הכובד mg: חישוב גאומטרי פשוט מראה כי כוח זה יוצר זווית בת 120° עם כיוון התנועה (איור 6ג). לכן עבודתו:

$$W_{mg} = mg\,|\Delta x|\,\cos\theta_{mg} = 3 \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ = 3 \cdot 2 \cdot (-0.5) = -3\text{ J}$$

העבודה שלילית, מפני שרכיב כוח הכובד שלאורך מסלול התנועה מנוגד לכיוון התנועה.

עבודת הכוח הנורמלי N: **N** פועל בזווית 90° עם כיוון התנועה (איור 6ד), לכן עבודתו היא:

$$W_N = N\,|\Delta x|\,\cos\theta_N = N \cdot 2 \cdot \cos 90^\circ = N \cdot 2 \cdot 0 = 0$$

העבודה שווה לאפס, כי אין לכוח הנורמלי רכיב בכיוון התנועה.

ב. **העבודה הכוללת** היא סכום העבודות של כל הכוחות:

$$W_{\text{כוללת}} = W_T + W_{mg} + W_N = 10 + (-3) + 0 = 7\text{ J}$$

דרך חלופית לחישוב העבודה הכוללת היא לחשב תחילה את הכוח השקול ולמצוא את עבודתו על פי ההגדרה (נוסחה 4). גודל הכוח השקול:

$$\Sigma F = T - mg\sin\alpha = 5 - 3 \cdot \sin 30^\circ = 3.5\text{ N}$$

העבודה של כוח זה (הפועל בכיוון התנועה) היא: $W = |\Sigma \mathbf{F}| \cdot |\Delta \mathbf{x}| = 3.5 \cdot 2 = 7\text{ J}$

התוצאה זהה לזו שהתקבלה בשיטת החישוב הראשונה, כנדרש.

1.2 העבודה הנעשׂית על גוף נקודתי הנע לאורך קו ישר, כאשר רכיבי הכוחות שלאורך הקו הישר משתנים

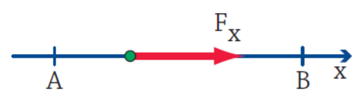
עד כה עסקנו בעבודה הנעשׂית על **גוף נקודתי** הנע לאורך **קו ישר**, כאשר הכוחות הפועלים עליו היו **קבועים** (ראה תחילת סעיף 1.1).

נדון עתה במצב הבא:

על **גוף נקודתי** הנע לאורך **קו ישר** (ציר x) פועלים כוחות **שרכיביהם לאורך הציר משתנים**.

דוגמה: כוח שקפיץ מתוח מפעיל על גוף הקשור אליו, לאחר שמשחררים את הגוף.

באיור 7 מתואר גוף נקודתי וציר x שלאורכו הוא נע. F_x הוא רכיב לאורך ציר x של אחד הכוחות הפועלים על הגוף. נניח כי העקומה באיור 8א מייצגת את רכיב הכוח F_x הפועל על הגוף, כפונקציה של המקום.



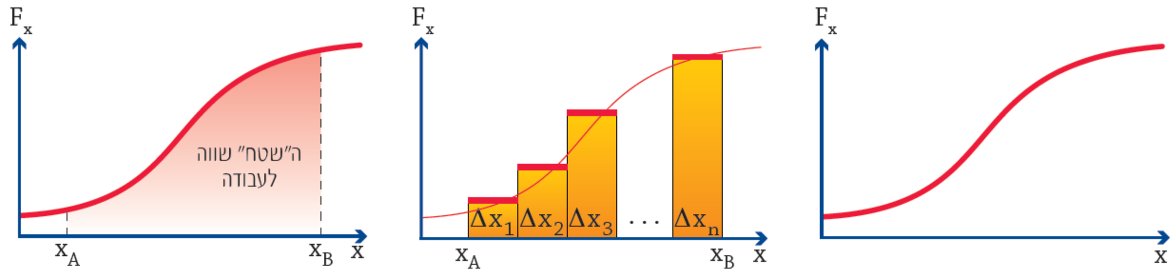
איור 7: מסלול תנועתו של גוף נקודתי

הגדרנו את העבודה של כוח קבוע ע"י $W = F_x \Delta x$; כיצד נחשב את העבודה כאשר F_x משתנה בגודלו?

בעיה דומה התעוררה כאשר רצינו לחשב את העתקו של גוף הנע במהירות משתנה (פרק א סעיף 5.4ג), או את המתקף של כוח משתנה (פרק ו סעיף 1.1ב). נשתמש באותו רעיון גם כאן: כדי למצוא את עבודת הכוח מ- A ל- B נחלק את ההעתק מ- A ל- B לקטעים קצרים Δx_1 , Δx_2 ,..., Δx_n (איור 8ג). לאורך AB הכוח יכול להשתנות במידה

רבה, אך לאורך כל קטע קצר מידת השתנות הכוח קטנה. בכל אחד מקטעים אלה, נבחר נקודה **כלשהי** בקטע, נבדוק את ערכו של הכוח בנקודה, ונייחס ערך זה **לכל** הנקודות שבקטע (איור 8ב). בסיומו של ההליך, מתקבלת עקומה של כוח קבוע למקוטעין, כמתואר באיור 8ב.

את עבודת הכוח שרכיביו קבוע למקוטעין נמצא על ידי חישוב סכום "שטחי" כל המלבנים ש"מתחת" לעקומה. זה השטח של המשטח הצבעוני המסומן באיור 8ג.



א. העקומה המתארת את הכוח השקול הפועל על גוף כפונקציה של המקום

ב. עקומת מדרגות, המייחסת לכל קטע כוח קבוע, אשר שווה לכוח בנקודה כלשהי בקטע

ג. השטח הנתחם על ידי העקומה שווה לעבודה הנעשית על-ידי הכוח

איור 8: עבודת כוח משתנה

הכוח הקבוע למקוטעין אינו זהה לכוח האמיתי. אולם, ככל שנקטין את גודלו של כל קטע Δx (דבר המחייב הגדלת מספר הקטעים) - עקומת המדרגות תהיה דומה יותר ויותר לעקומה האמיתית, עד לכל דרגת קירוב שנרצה. הגבול של סכום "שטחי" המלבנים, כאשר אורכו של כל קטע קטן שואף לאפס, היא עבודת הכוח האמיתי. כלומר:

הייצוג הגרפי של עבודת כוח משתנה:

העבודה הנעשׂית על-ידי כוח משתנה, שווה ל"שטח" הנתחם בין עקומת רכיב הכוח לאורך ציר התנועה כפונקציה של המקום, לבין ציר המקום.

F_x ו- $\Delta \mathbf{x}$ יילקחו עם סימניהם האלגבריים.

חישוב העבודה של כוח משתנה - הלכה למעשׂה כאשר נתון רכיב הכוח, $\mathbf{F_x}$, כפונקציה של המקום $\mathbf{x}$

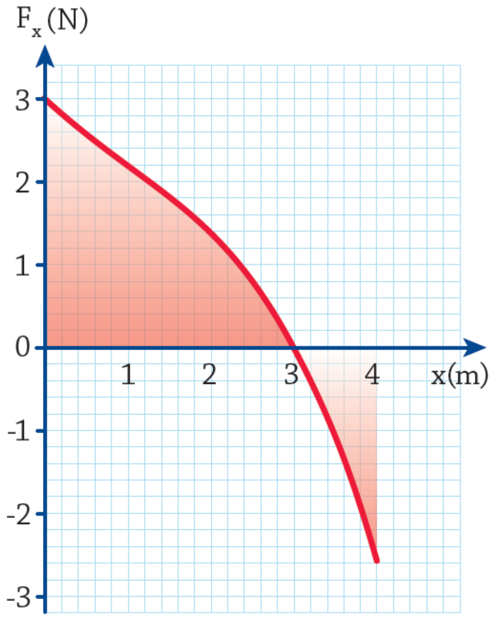
נציע כמה דרכים לחישוב העבודה, בהתאם לאופי המידע הנתון.

א. אם הפונקציה $F_x(x)$ נתונה בצורה גרפית אזי:

(1) אם אפשר "לפרק" את הצורה הגאומטרית הנתחמת על ידי העקומה והציר האופקי לצורות גאומטריות שעבורן יש נוסחאות מוכרות לחישוב השטח (למשל משולשים, מלבנים, טרפזים וחצאי מעגלים) נחשב את ה"שטח" באמצעות הנוסחאות.

(2) אם צורת העקומה היא כזאת שאי אפשר ליישם את הדרך א(1) לעיל, נפרושׂ על הגרף רשת קווים אופקיים ואנכיים כמתואר באיור 9. נחשב את ה"שטח" של משבצת אחת, נספור כמה משבצות שלמות נמצאות בין העקומה לבין ציר המקום ונחשב את העבודה. חלק מהמשבצות לא תהיינה שלמות, כי הן תחתכנה על ידי העקומה, ונצטרך להעריך את שטחן.

דוגמה: על גוף נקודתי הנע מ-$x = 0$ ל-$x = 4\ m$ פועל כוח שרכיבו על ציר התנועה משתנה כפונקציה של המקום כמתואר באיור 9. נחשב את עבודת הכוח במהלך תנועה זו. מ-$x = 0$ עד $x = 3\ m$ אפשר לספור כ-128 משבצות שלמות "מתחת" לעקומה. "שטחה" של כל משבצת מייצג עבודה בת 0.04 ג'אול, לכן העבודה הנעשית על-ידי הכוח בין שתי נקודות אלה היא כ-5.1 ג'אול. מ-$x = 3\ m$ עד $x = 4\ m$ יש כ-30 משבצות שלמות בין העקומה לציר ה-x, ו"שטחה" של כל משבצת הוא (-0.04) ג'אול, לכן העבודה הנעשית על-ידי הכוח בגבולות אלה היא כ-(-1.2) ג'אול. סך העבודה מ-$x = 0$ עד $x = 4\ m$ היא: $W \approx 5.1 + (-1.2) = 3.9\ J$.



איור 9: חישוב עבודה על ידי כיסוי המשטח במשבצות

ב. אם נתון ביטוי הפונקציה $F_x(x)$, אפשר לחשב את ה"שטח" הכלוא בין העקומה לבין הציר האופקי באמצעות האינטגרל:

$$\boxed{W = \int_{x_1}^{x_2} F_x(x)\, dx} \qquad (7)$$

כאשר $F_x(x)$ הוא רכיב הכוח לאורך ציר התנועה x.

תרגיל לבקיאים באינטגרלים: הוכח שקשר (3) הוא מקרה פרטי של קשר (7).

לבקיאים באינטגרלים מוצע חישוב עבודה באמצעות אינטגרל

הביטוי המתמטי של העקומה המתוארת באיור 9 הוא $F_x = -0.1x^3 + 0.3x^2 - x + 3$, כאשר x נמדד במטרים ו-$F_x$ בניוטונים. עבודת הכוח מ-$x_1 = 0$ עד $x_2 = 4\ m$:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x\, dx = \int_0^4 (-0.1x^3 + 0.3x^2 - x + 3)dx = \left[-\frac{1}{40}x^4 + 0.1x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x\right]_0^4 =$$

$$= \left(-\frac{1}{40}\cdot 4^4 + 0.1\cdot 4^3 - \frac{1}{2}\cdot 4^2 + 3\cdot 4\right) - \left(-\frac{1}{40}\cdot 0^4 + 0.1\cdot 0^3 - \frac{1}{2}\cdot 0^2 + 3\cdot 0\right)$$

$$W = 4\ J$$

הוכחת משפט עבודה-אנרגיה עבור כוח שרכיבו משתנה בגודלו

נתבונן בגוף נקודתי הנע לאורך קו ישר, בהשפעת כוח שקול שרכיבו בכיוון התנועה **משתנה**. כדי לחשב את עבודת הכוח בין שתי נקודות x_0 ו-x_n, נחלק את ההעתק הכולל ל-n העתקים קצרים (איור 10) שבהם התאוצה משתנה מעט מאוד.

איור 10: חלוקת ההעתק הכולל ל-n העתקים קצרים

כיוון שבכל העתק קצר התאוצה בקירוב קבועה, משוואת עבודה-אנרגיה נכונה בקירוב לגבי כל אחד מהקטעים:

בהעתק הראשון: $$W^{\text{כוללת}}_{x_0 \to x_1} \approx \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

בהעתק השני: $$W^{\text{כוללת}}_{x_1 \to x_2} \approx \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

.
.
.

בהעתק האחרון: $$W^{\text{כוללת}}_{x_{n-1} \to x_n} \approx \frac{1}{2}mv_n^2 - \frac{1}{2}mv_{n-1}^2$$

נחבר את n המשוואות; באגף שׂמאל יופיע סכום העבודות הכוללות בקטעים השונים, השווה לעבודה הכוללת לאורך כל המסלול. באגף ימין רוב האברים מתקזזים; הביטוי $\frac{1}{2}mv_1^2$ למשל, מופיע פעמיים בסימנים אלגבריים מנוגדים. לאחר הקיזוזים יישארו רק שני אברים:

$$W^{\text{כוללת}} = \frac{1}{2}mv_n^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

לכאורה הביטוי אינו מדויק מפני שבכל קטע התאוצה קבועה רק בקירוב, אך ככל שמרווחי הזמן קצרים יותר, דרגת הקירוב טובה יותר. בגבול שבו ההעתקים החלקיים שואפים לאפס (ומספרם שואף לאינסוף) התוצאה הופכת מדוייקת. **מכאן שמשפט עבודה-אנרגיה תקף לגבי גוף נקודתי הנע לאורך קו ישר, גם כאשר רכיב הכוח משתנה.**

1.3 עבודה הנעשׂית על גוף נקודתי לאורך מסלול כלשהו

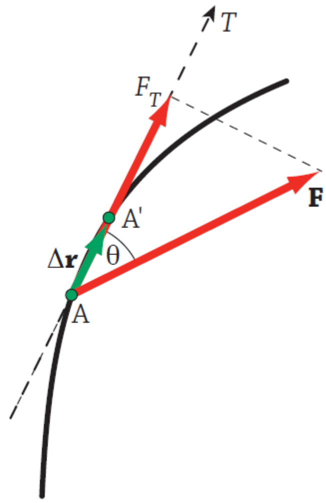
בסעיף הקודם הסרנו את המגבלה של כוחות קבועים. נסיר עתה גם את המגבלה של תנועה לאורך קו ישר, ונדון בתנועת **גוף נקודתי**, לאורך **מסלול כלשהו** (לאו דווקא ישר), **והכוח עשׂוי להשתנות** (הן בגודלו והן בכיוונו). העיקרון לחישוב העבודה במקרה זה דומה לעיקרון שבו השתמשנו לשם חישוב העבודה של כוח שרכיבו משתנה, הפועל על גוף לאורך קו ישר. בגלל המורכבות המתמטית של טיפול במסלולים עקומים, נמעיט בחישובי עבודה לאורך מסלולים כאלה, ונסתפק בהצגת העיקרון:

נחלק את מסלול התנועה לקטעים קצרים, ונתבונן באחד הקטעים: העתק הגוף בקטע הקצר הוא $\Delta \boldsymbol{r}$ (איור 11א).

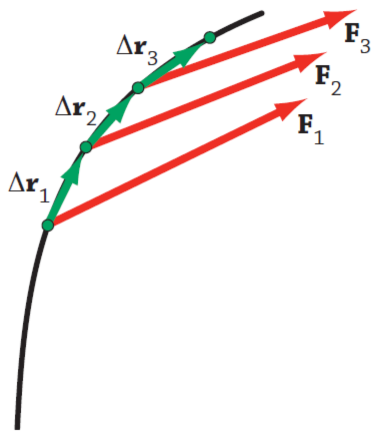
נסרטט ציר T המשיק לקטע הקטן (באחת מנקודותיו). נסמן ב-θ את הזווית בין הכוח לבין ההעתק, ב- $|\Delta \boldsymbol{r}|$ את גודל ההעתק, וב-F_T את הרכיב המשיקי של הכוח. ככל שהקטע קטן - השינויים בכוח הולכים וקטנים, ו- F_T נעשׂה בקירוב קבוע. עבודת הכוח לאורך הקטע היא: $\Delta W = |\boldsymbol{F}| \cos\theta \, |\Delta \boldsymbol{r}|$

באופן כזה, נחשב את העבודות לאורך כל אחד מהקטעים הקטנים (איור 11ב), ולבסוף נחבר את כל העבודות החלקיות האלה, ונקבל את העבודה לאורך כל המסלול.

כיוון **שמשפט עבודה-אנרגיה** מתקיים בכל קטע קטן, הוא **מתקיים לגבי התנועה לכל אורך המסלול העקום**.



א. לאורך קטע קצר של המסלול, העבודה היא מכפלת הרכיב המשיקי של הכוח בהעתק נקודת האחיזה של הכוח



ב. לאורך כל המסלול העבודה היא סכום העבודות לאורך קטעים קצרים

איור 11: עבודה לאורך מסלול עקום

דוגמה 6: עבודה ואנרגיה בתנועה מעגלית

בפרק ה ראינו כי כאשר גוף נע בתנועה מעגלית אזי:

א. אם הכוח השקול מכוון בכל נקודה לעבר מרכז המעגל - התנועה קצובה.

ב. אם הרכיב המשיקי של הכוח פועל בכיוון התנועה - מהירות הגוף הולכת וגדֵלה.

ג. אם הרכיב המשיקי של הכוח פועל בכיוון מנוגד לתנועה - מהירות הגוף הולכת וקטֵנה.

הסבירו כללים אלה באמצעות שיקולי עבודה ואנרגיה.

פתרון:

נחלק את המעגל שלאורכו הגוף נע לקטעים קצרים.

א. הכוח ניצב בכל נקודה לכיוון התנועה, לכן עבודתו שווה לאפס. על-פי משפט עבודה-אנרגיה, האנרגיה הקינטית של הגוף אינה משתנה, לכן מהירות הגוף קבועה בגודלה.

ב. בכל קטע קטן עבודת הכוח חיובית, ועל-פי משפט עבודה-אנרגיה האנרגיה הקינטית גדֵלה, לכן מהירות הגוף הולכת וגדֵלה.

ג. בכל קטע קטן עבודת הכוח שלילית, לכן האנרגיה הקינטית הולכת וקטֵנה, לכן מהירות הגוף הולכת וקטֵנה.

בפרק ה ראינו שרכיב הכוח המשיק למסלול התנועה גורם לשינוי בגודל המהירות, והרכיב הניצב משנה את כיוון המהירות. **הגדרת העבודה** ($|\mathbf{F}|\cos\theta\,|\Delta\mathbf{r}|$) **לוקחת בחשבון רק את הרכיב המשיקי של הכוח - זה הרכיב המשנה את גודל המהירות, ועל ידי כך משנה את האנרגיה הקינטית.**

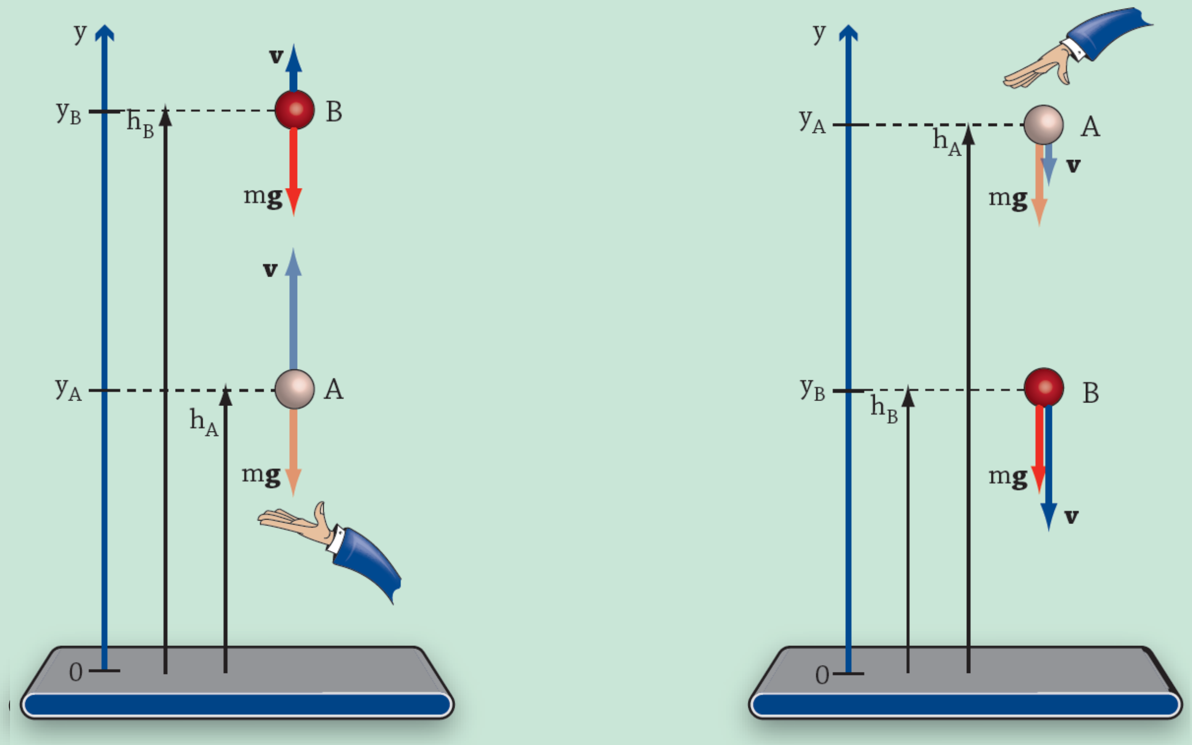
2. אנרגיה פוטנציאלית ושימור אנרגיה מכנית

2.1 עבודת כוח הכובד הפועל על גוף הנע במסלול אנכי

ראינו בסעיף 1.1ה של פרק זה שהעבודה הכוללת הנעשית על גוף (כלומר סכום העבודות של כל הכוחות הפועלים על הגוף) שווה לשינוי באנרגיה הקינטית של הגוף (משפט העבודה - אנרגיה). אחד הכוחות שפועלים על גוף הנמצא בקרבת הארץ הוא כוח הכובד. נמצא ביטוי לעבודת כוח הכובד, עבור גופים הנעים במסלול אנכי – מעלה או מטה.

נתאר לעצמנו את המצב הבא:

גוף נזרק כלפי מטה וחולף ברגע מסוים בנקודה A הנמצאת בגובה h_A מעל נקודה שרירותית שגובהה נקבע כאפס. במהלך נפילתו הגוף חולף בנקודה B הנמצאת בגובה h_B מעל נקודת האפס (איור 12א).



א. הגוף נזרק מטה

ב. גוף נזרק מעלה

איור 12: נפילה חופשית של גוף לאורך קו אנכי ישר

מהי עבודת כוח הכובד, $W_{A\to B\ \text{כוח כובד}}$ הנעשית על הגוף במהלך תנועתו מ- A ל- B?

הוספנו לאיורים 12א,ב גם ציר y שכיוונו החיובי כלפי מעלה, וראשיתו בנקודה שממנה נמדדים הגבהים. בהמשך נחליף לעתים את האות h באות y בביטויים המתמטיים שיתקבלו.

כוח הכובד הפועל על הגוף הוא קבוע; הביטוי המתמטי לעבודתו של כוח קבוע הוא $W = |\mathbf{F}| \cdot \cos\theta \cdot |\Delta \mathbf{y}|$.

כדי לחשב את עבודת כוח הכובד עבור התנועה מטה (איור 12א) נציב בביטוי האחרון $|\mathbf{F}| = mg$, $|\Delta \mathbf{y}| = h_A - h_B$ ו- $\theta = 0°$ ונקבל:

$$W_{A \to B}^{\text{כוח כובד}} = mg \cdot \cos 0° \cdot (h_A - h_B)$$

כלומר:

$$\boxed{W_{A \to B}^{\text{כוח כובד}} = mgh_A - mgh_B} \qquad (11)$$

עבודת הכוח **mg** היא חיובית, כי כיוון כוח הכובד זהה לכיוון התנועה. נוכל להיווכח שנוסחה (11) תקפה גם עבור גוף שעולה מגובה h_A לגובה h_B, כמתואר באיור 12ב (הוכח זאת!) למרות שבמקרה זה עבודת כוח הכובד היא שלילית.

2.2 אנרגיה פוטנציאלית כובדית ושימור אנרגיה מכנית כוללת (בנפילה חופשית לאורך מסלול אנכי)

א. אנרגיה פוטנציאלית כובדית

מנוסחה (11) רואים כי אפשר לבטא את עבודת כוח הכובד בעזרת ערכי הביטוי mgh המתאימים לתחילת ההעתק ולסופו.

המונח **"אנרגיה פוטנציאלית כובדית"** (gravitational potential energy):

הגודל mgh המתאים לגוף מסוים, שהוא מכפלת משקל הגוף mg בגובה, h, של הגוף מעל לנקודה שממנה נמדדים הגבהים, נקרא ה**"אנרגיה פוטנציאלית כובדית"** או בקיצור **"אנרגיית כובד"**. נסמן אותה ב- U_G (G - מהמילה **g**ravitation - כבידה).

$$U_G = mgh \qquad (12)$$

הערך בתחילת ההעתק (בגובה h_A) של האנרגיה הפוטנציאלית הכובדית באיור 12א הוא $U_{G,A} = mgh_A$, וערכה בסוף ההעתק הוא $U_{G,B} = mgh_B$. **עבודת כוח הכובד שווה לפחת באנרגיה הפוטנציאלית הכובדית.**

הגדרת המושג **"רמת-האפס"**:

המשטח שעבורו גודלה של אנרגיית הכובד הוא אפס נקרא רמת-האפס.

נניח שיש נקודה שבה אנרגיית הכובד שווה לאפס. מהו המשטח שעובר דרך הנקודה ויכול לשמש "רמת-אפס" עבור אנרגיית הכובד? בהמשך נראה שנקודות המשטח אינן יכולות לחרוג מהמישור האופקי העובר בנקודה, לכן המשטח הוא מישור הנקרא **"מישור-הייחוס"**. את מיקום מישור הייחוס עבור אנרגיה פוטנציאלית כובדית אפשר לבחור כרצוננו. הסיבה לכך תתברר בהמשך, כשנבין שתמיד נתייחס **לפחת** באנרגיה הפוטנציאלית, ופחת זה אינו תלוי במיקום מישור הייחוס.

ב. חוק שימור האנרגיה המכנית

נרשום את נוסחה (11) בצורה:

$$W_{A \to B}^{\text{כוח כובד}} = U_{G,A} - U_{G,B} \qquad (13)$$

אם כוח הכובד הוא הכוח היחיד הפועל על הגוף, עבודת כוח זה היא העבודה הכוללת הנעשית על הגוף. ממשפט העבודה-אנרגיה נובע כי במצב זה:

$$W_{A\to B}^{\text{כוח כובד}} = E_{k,B} - E_{k,A} \qquad (14)$$

מנוסחאות (13) ו- (14) נקבל כי:

$$\boxed{U_{G,A} - U_{G,B} = E_{k,B} - E_{k,A}} \qquad (15)$$

נרשום את קשר (15) במילים: **הפחת באנרגיה הפוטנציאלית שווה לתוספת באנרגיה הקינטית**.

נשנה את סדר האברים במשוואה (15), כך שאברים המתאימים לנקודה A יהיו באגף אחד, וכאלה המתאימים לנקודה B באגף האחר:

$$E_{k,A} + U_{G,A} = E_{k,B} + U_{G,B} \qquad (15')$$

הגדרת המושג **"אנרגיה מכנית כוללת"** (עבור מקרה פרטי - נפילה חופשית לאורך קו ישר):

האנרגיה הקינטית של גוף והאנרגיה הכובדית שלו הם שני סוגי אנרגיה מבין קבוצת סוגי אנרגיה שכל סוג נקרא אנרגיה מכנית.

כאשר גוף נע בהשפעת כוח הכובד, האנרגיה המכנית הכוללת בנקודה A, שתסומן E_A, מוגדרת כסכום של האנרגיה הקינטית ב-A והאנרגיה הפוטנציאלית הכובדית ב-A.

בלשון מתמטית:

$$E_A = E_{k,A} + U_{G,A} \qquad (16)$$

מהי המשמעות של קשר (15')?

אגף שמאל מייצג את האנרגיה המכנית הכוללת בנקודה A, ואגף ימין את האנרגיה המכנית הכוללת בנקודה B. השוויון אומר כי כאשר גוף נופל חופשית לאורך מסלול אנכי, גובהו מעל נקודת האפס, ומהירותו אמנם משתנים ללא הרף, **אולם האנרגיה המכנית הכוללת נשארת קבועה במהלך התנועה**. גודל פיזיקלי שנשאר קבוע בכל התהפוכות שמערכת עוברת, עשוי לשמש מאפיין של המערכת, ואפשר להיעזר בו לשם ניתוח ארועים פיזיקליים.

אנו עומדים בפני **חוק שימור חדש**. בשלב זה מדובר בגירסה צנועה שלו, המתייחסת לנפילה חופשית לאורך קו ישר בלבד. בעתיד נראה כי זהו מקרה פרטי של חוק טבע מקיף יותר. ננסח את החוק.

חוק שימור האנרגיה המכנית (לעת עתה זה מנוסח עבור מקרה פרטי - נפילה חופשית לאורך קו ישר):

כאשר גוף נופל חופשית ונע לאורך קו ישר, האנרגיה המכנית הכוללת שווה בכל הנקודות לאורך מסלול התנועה.

בכתיב מתמטי:

$$E_A = E_B \qquad (17)$$

כאשר A ו- B הן שתי נקודות כלשהן לאורך מסלול התנועה.

נסמן את גודל מהירות הגוף בגובה h_A ב- v_A, ואת גודל מהירותו בגובה h_B ב- v_B.

נרשום את (17) במונחים אלה:

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B \qquad (17')$$

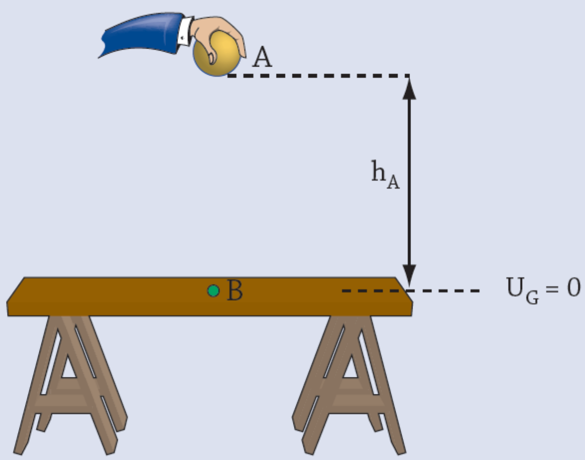
כאשר אנו זורקים כדור כלפי מעלה, אנרגיה קינטית שלו מומרת בהדרגה לאנרגיה פוטנציאלית כובדית, ומהירות הכדור הולכת וקטנה. בהגיעו לשיא הגובה – כל האנרגיה הקינטית הומרה לאנרגיית כובד, ומהירותו מתאפסת רגעית. ברדתו, מומרת אנרגיית כובד חזרה לאנרגיה קינטית, ומהירות הכדור הולכת וגדלה. בהזנחת התנגדות האוויר, האנרגיה המכנית הכוללת נשארת קבועה לכל אורך התנועה.

דוגמה 7: אנרגיית כובד ואנרגיה קינטית בנפילה חופשית

כדור משוחרר ממנוחה מנקודה A הנמצאת בגובה $h_A = 1.25\ m$ מעל פני שולחן. חשבו, בשתי דרכים, את גודל המהירות שבה יפגע הכדור בפני השולחן (נקודה B) -

א. באמצעות שיקולים קינמטיים.

ב. באמצעות שיקולי אנרגיה.



איור 13: תרשים דוגמה 7

פתרון:

א. נגדיר ציר y שכיוונו החיובי כלפי מטה.

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta y \quad \Rightarrow \quad v_B^2 = 0^2 + 2 \cdot 10 \cdot 1.25$$

לכן: $v_B = 5\ m/s$.

ב. על-פי חוק שימור האנרגיה המכנית (נוסחה (17)) ובבחירת פני השולחן כמישור ייחוס:

$$E_A = E_B \quad \Rightarrow \quad mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2 \quad \Rightarrow \quad v_B = \sqrt{2gh_A} \quad \Rightarrow \quad v_B = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 1.25}$$

לכן: $v_B = 5\ m/s$.

ג. גלגל כפות (טורבינת מים)

מטרתם של התקנים מכניים רבים היא הנעה. אחת הדוגמאות למתקן כזה הוא גלגל כפות המסובב על ידי מים הזורמים במורד (איור 14).

איור 14: מים היורדים במורד מסובבים גלגל כפות

המים הפוגעים בכפות מסובבים את הגלגל. באמצעות הגלגל המסתובב אפשר להפעיל למשל גנרטור (מחולל) המייצר חשמל. כך אפשר לבנות מתקן לייצור חשמל באמצעות אנרגיה פוטנציאלית כובדית של מים, והוא מכונה **תחנת כוח הידרו-אלקטרית**.

האנרגיה הקינטית ב-A: $E_{k,A}=\frac{1}{2}mv_A^2=\frac{1}{2}\cdot 0.4\cdot 5^2=5\ J$

אנרגיית הכובד ב-A: $U_{G,A}=mgh_A=0.4\cdot 10\cdot 3.75=15\ J$

האנרגיה הכוללת ב-A: $E_A=E_{k,A}+U_{G,A}=5\ J+15\ J=20\ J$

ב. האנרגיה המכנית הכוללת נשמרת לכן: $E_B=E_A=20\ J$

האנרגיה הפוטנציאלית הכובדית בנקודה B:

$$U_{G,B}=mgh_B=0.4\cdot 10\cdot 2=8\ J$$

האנרגיה המכנית הכוללת מוגדרת כסכום האנרגיות הקינטית והפוטנציאלית של הכובד, לכן האנרגיה הקינטית בנקודה B:

$$E_{k,B}=E_B-U_{G,B}=20-8=12\ J$$

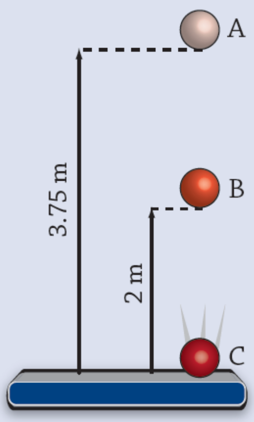
ג. על-פי חוק שימור האנרגיה המכנית הכוללת, אנרגיה זו בנקודה C שווה אף היא ל-20 ג'אול. אנרגיית הכובד שווה לאפס בנקודה זו, לכן האנרגיה הקינטית שווה ל-20 ג'אול.

$$E_{k,C}=\frac{1}{2}mv_C^2 \;\Rightarrow\; 20=\frac{1}{2}\cdot 0.4\cdot v_C^2$$

פתרון המשוואה: $v_C=10\ m/s$.

ד. ברגע הזריקה יש לגוף אנרגיה קינטית ואנרגיה פוטנציאלית כובדית. כוח הכובד מבצע עבודה על הגוף, והוא ממיר באופן רציף אנרגיית כובד לאנרגיה קינטית. כלומר, בעת ירידתו, אנרגיית הכובד הולכת ופוחתת תוך הגדלה של האנרגיה הקינטית. כהרף עין לפני פגיעתו ברצפה כל אנרגיית הכובד מומרת לאנרגיה קינטית (בהתחשב במישור הייחוס שהוגדר בראשית הפתרון).

איור 15 מסכם את ערכי האנרגיה שחושבו בדוגמה זו.



אנרגיה קינטית (J)	אנרגיית כובד (J)	אנרגיה כוללת (J)
5	15	20
12	8	20
20	0	20

איור 15: ערכי האנרגיה בדוגמה 8

ד. על מה משפיעה הבחירה של מישור הייחוס?

בפתרון דוגמה 7 בחרנו את מישור הייחוס, כלומר את רמת-האפס של אנרגיית הכובד, בגובה פני השולחן.

האם נוכל לבחור את רמת-האפס של אנרגיית הכובד בגובה אחר, למשל בגובה הרצפה (למרות שהכדור נופל רק עד פני השולחן)?

נסמן ב-H את גובה פני השולחן מעל הרצפה, ונבחר את רמת-האפס של אנרגיית הכובד בגובה הרצפה. בבחירה זו, אנרגיית הכובד בנקודה A (נקודת שחרור הכדור) תהיה $mg(h_A+H)$. אנרגיית הכובד בגובה פני השולחן תהיה mgH.
השיעור שבו אנרגיית הכובד בנקודה A גדולה מזו שבנקודה C (פני השולחן) הוא: $mg(h_A+H) - mgH = mgh_A$

הפרש זה באנרגיית הכובד שווה בדיוק לאנרגיית הכובד של הכדור בנקודה A ביחס למישור ייחוס שנבחר בגובה פני השולחן.

כלומר, נוכל לבחור את רמת האפס של אנרגיית הכובד באופן שרירותי, בכל מקום שנרצה, כי **רק להפרש באנרגיית הכובד, ולא לאנרגיית הכובד עצמה, יש משמעות**.

הדבר דומה למושג אחר - הגובה של מקום על פני הארץ, כפי שמצויין למשל במפות טופוגרפיות. מקובל להגדיר את גובה פני הים כאפס, ואז גובהה של כל נקודה על פני הארץ נקבע ביחס לפני הים: כך למשל, ירושלים נמצאת בגובה 800 מטר מעל פני הים, הר מירון - 1200 מטר, וים המלח - (390-) מטר (כלומר 390 מטר מתחת לפני הים). קביעת "פני הים" כגובה אפס היא שרירותית, ונובעת רק מטעמי נוחיות; אפשר היה לקבוע את ירושלים, שיקגו או פיסגת הר האוורסט כגובה אפס. כאשר אדם מטפס על הר - אין זה משנה לו, מבחינת המאמץ שעליו להשקיע, אם מרגלות ההר נקבעו כגובה 100 מטר ופסגתו כגובה 500 מטר, או שמרגלות ההר נקבעו כגובה 1000 מטר ופסגתו כגובה 1400 מטר. הגודל המשמעותי הוא **הפרש הגבהים**, ואין כל משמעות לגבהים עצמם.

כך גם לגבי אנרגיית הכובד: גודלה אינו נקבע בצורה חד-ערכית - הוא תלוי בבחירה של רמת-האפס. אולם ההפרש באנרגיה הפוטנציאלית הכובדית אינו תלוי בבחירת רמת האפס.

האם נוכל לבחור את רמת האפס של אנרגיית הכובד בנקודה A שממנה הכדור שוחרר (בדוגמה 7)?

ללא קשר למקום בחירת רמת-האפס, נוסחה (14) נשארת תקפה. כלומר, עבודת כוח הכובד צריכה להיות שווה לתוספת באנרגיה הקינטית $E_{k,B} - E_{k,A}$. לכן, האנרגיה הפוטנציאלית צריכה לקטון בשיעור mgh. מכאן שאם $U_{G,A} = 0$, בנקודה B הנמצאת בגובה 1.25 m מתחת ל-A אנרגיית הכובד צריכה להיות $-mg \cdot 1.25$.

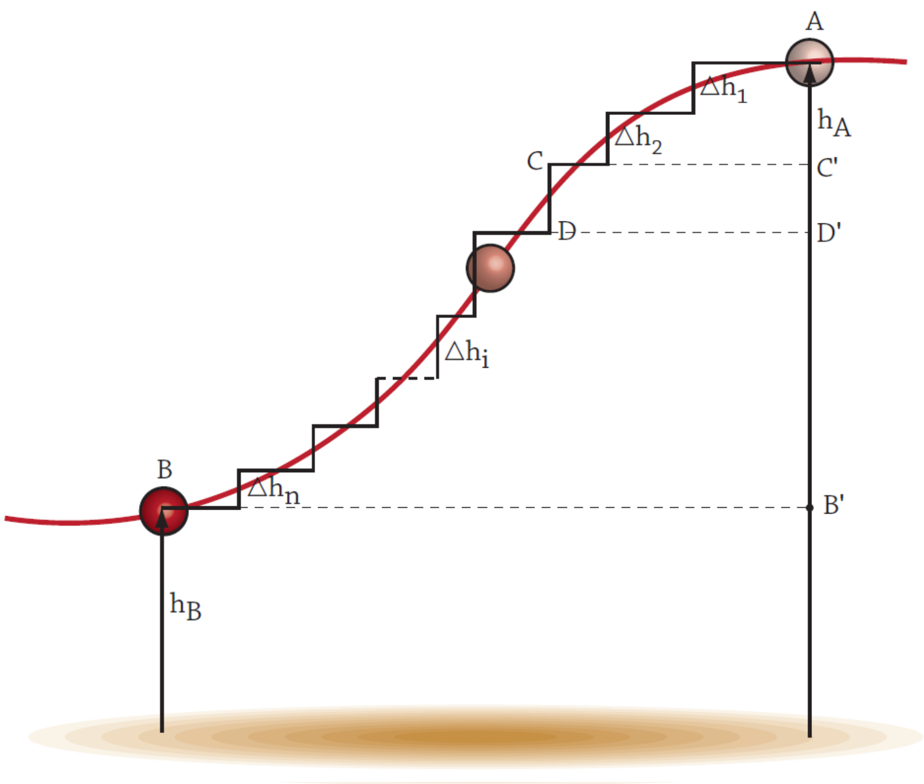
כלומר: את אנרגיית הכובד ביחס לרמת האפס יש לבטא תמיד כ- $U_G = mgh$. הערך המספרי של h הוא חיובי בנקודות הנמצאות מעל מישור הייחוס שנבחר, ושלילי בנקודות הנמצאות מתחת למישור הייחוס.

לשליליות של אנרגיית הכובד אין משמעות מיוחדת. אפשר לראות את האנרגיה הפוטנציאלית כמאגר שחלק ממנו אפשר להמיר לאנרגיה קינטית. מה קורה כאשר המאגר הוא שלילי? האם אנו נמצאים במשיכת יתר בבנק האנרגיה ולא נוכל למשוך עוד אנרגיה למטרות שימושיות? כאמור, אין משמעות מיוחדת לסימן האלגברי השלילי. עקרונית, אפשר להגדיל את משיכת היתר, כלומר למשוך עוד אנרגיה קינטית ולהפוך את האנרגיה הפוטנציאלית לשלילית יותר. מנקודת ראותו של מי שיבחר במישור ייחוס אחר לאנרגיה הפוטנציאלית כל התהליך עשוי להתרחש בין שני ערכים חיוביים של אנרגיה פוטנציאלית.

ה. כוח הכובד ככוח משמר

נתאר לעצמנו את המצב הבא:
גוף נע מנקודה A לנקודה B (איור 16) בהשפעת כמה כוחות. אחד מבין הכוחות הוא כוח הכובד.

האם עבודת כוח הכובד הנעשית על הגוף תלויה במסלול התנועה מ- A ל- B?
לשאלה זו יש חשיבות מכרעת לגבי השאלה אם נוכל להמשיך לייחס לכוח הכובד אנרגיה פוטנציאלית כובדית. הגדרנו את הפחת באנרגיה הפוטנציאלית הכובדית בעוברנו מ- A ל-B כתוספת באנרגיה הקינטית בין שתי נקודות אלה (ראה קשר 15); מצד אחר התוספת באנרגיה הקינטית שווה לעבודת כוח הכובד. אם יתברר שעבודת כוח הכובד הנעשית על הגוף בתנועתו מ- A ל-B תלויה במסלול התנועה, אזי הפחת באנרגיית הכובד לא יהיה חד-ערכי, ולכן לא תהיה לו משמעות. הסיבה לכך היא שאנשים שונים יחַשְבו את העבודה לאורך מסלולים שונים, וכל אחד יקבל ערך מספרי אחר עבור העבודה; לפיכך כל אחד ימצא ערך אחר לפחת באנרגיית הכובד.
המסלול שלאורכו הגוף נע מ- A ל-B מסומן בקו האדום באיור 16. כדי לחשב את עבודת כוח הכובד לאורך המסלול, נבנה מסלול חלופי למסלול אמיתי, המורכב מזוגות של קטעים: ראשיתו של הקטע הראשון הוא בנקודה A, וכיוונו אופקית שמאלה. הקטע השני של המסלול פונה אנכית כלפי מטה, וחותך את המסלול האמיתי. את שאר הקטעים נבנה באופן דומה, עד שנגיע לבסוף לנקודה B. המסלול החלופי והמסלול האמיתי נחתכים בכמה נקודות.



איור 16: כוח הכובד לאורך כל מסלול מחבר את A ו- B לעבודת הכוח לאורך המסלול הישר מ- A ל- B’

ככל שנגדיל את מספר נקודות החיתוך - צורת המסלול החלופי תהיה קרובה יותר למסלול האמיתי, עד לכל דרגת קירוב שנרצה. נבחן את עבודת כוח הכובד על הגוף המונע לאורך המסלול החלופי: לאורך כל קטע אופקי עבודת כוח הכובד שווה לאפס, כי הכוח ניצב למסלול. לאורך כל קטע אנכי היא שווה לעבודת כוח הכובד שהיתה נעשית על הקטע האנכי המתאים, הנמצא על הקו הישר המחבר את A עם B'; עבודת כוח הכובד לאורך הקטע CD למשל, שווה לעבודת כוח הכובד לאורך הקטע C'D'. לכן העבודה לאורך כל המסלול החלופי מ-A ל-B שווה לעבודה שהיתה נעשית על-ידי כוח הכובד, אילו הגוף היה מועבר מ-A ל-B' לאורך קו אנכי ישר.

כיוון שהתייחסנו למסלול **כללי** המחבר את A עם B, הרי עבודת כוח הכובד לאורך **כל** מסלול המחבר את A עם B שווה לעבודה מ-A ל-B' במסלול האנכי. מכאן שהעבודות של כוח הכובד לאורך כל המסלולים האפשריים המחברים את A עם B שווֹת ביניהן. על סמך שוויון (11) נוכל לרשום:

$$W_{A\to B}^{\text{כוח כובד}} = mgh_A - mgh_{B'} = mgh_A - mgh_B$$

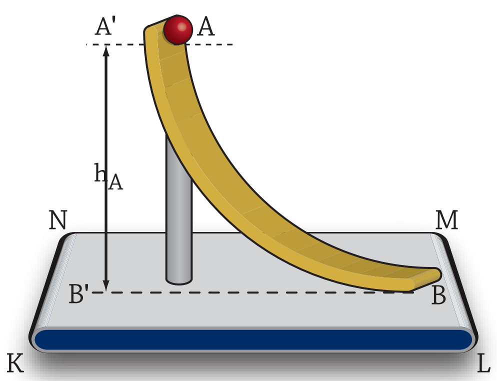
עבודת כוח הכובד מ-A ל-B אינה תלויה אפוא במסלול המחבר את A עם B. נכליל:

> הגדרת המושג "**כוח משמר**":
>
> כוח, שעבודתו על גוף המועבר מנקודה אחת לנקודה שנייה אינו תלוי במסלול התנועה המחבר בין שתי הנקודות, מכונה **כוח משמר**.

כוח הכובד הוא משמר, לכן אפשר להתאים לו אנרגיה פוטנציאלית.

ו. תנועה על משטחים נטולי חיכוך

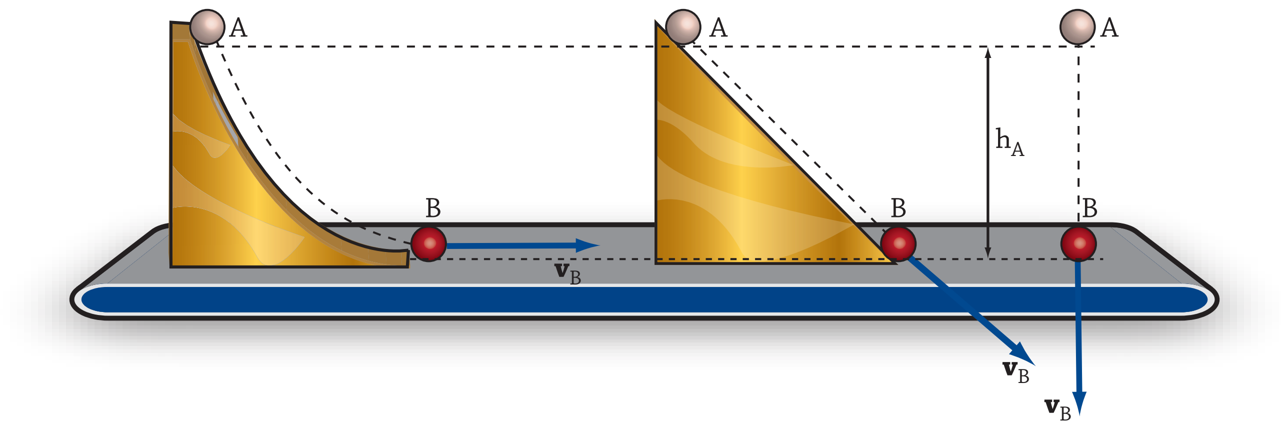
באיור 17 מתואר גוף המשוחרר מנקודה A הנמצאת בגובה h_A מעל המישור האופקי KLMN. הגוף מחליק על גבי מסילה AB והחיכוך בין הגוף למסילה ניתן להזנחה. בכל נקודות המסלול AB הכוח הנורמלי שהמסילה מפעילה על הגוף ניצב לכיוון התנועה, ולכן אינו עושה עבודה על הגוף, ואינו משנה את האנרגיה הקינטית. הכוח היחיד הגורם לשינויים באנרגיה הקינטית הוא כוח הכובד. עבודתו של כוח הכובד לאורך המסילה מ- A ל- B שווה לעבודת כוח הכובד בתנועה מ-A' ל-B', כלומר היא שווה ל- mgh_A.



איור 17: עבודת כוח הכובד מ- A ל- B שווה לעבודת כוח הכובד מ- A ל- B'

שימור אנרגיה מכנית כוללת: כאשר גופים נעים על מסלולים חלקים האנרגיה המכנית הכוללת נשמרת. השינוי באנרגיה הקינטית במהלך התנועה נקבע על-פי הפרש הגבהים בלבד, ולצורת המסלול אין שום השפעה.

דוגמה: באיור 18 מתוארים שלושה כדורים הנמצאים תחילה במנוחה בגובה h_A מעל הקרקע. כל אחד מגיע לקרקע לאחר שחרורו במסלול שונה: כדור א נופל חופשית, כדור ב מחליק על מישור משופע נטול חיכוך, וכדור ג מחליק על משטח עקום נטול חיכוך.



איור 18: הכדורים בכל שלושת המסלולים מגיעים לקרקע עם מהירויות שוות-גודל

נשווה בין גדלי מהירויות הכדורים כהרף עין לפני פגיעתם בקרקע: נבחר בקרקע כמישור הייחוס. בנקודת שחרורם, יש לכדורים רק אנרגיה פוטנציאלית כובדית. האנרגיה המכנית הכוללת של כל כדור בנקודת שחרורו:

$$E_A = mgh_A \qquad \text{(א)}$$

כהרף עין לפני פגיעתם בקרקע, אנרגיית הכובד של כל כדור שווה לאפס (כי הקרקע נבחרה כמישור הייחוס). לכן, בהגיעם לקרקע, האנרגיה הכוללת של כל כדור היא רק קינטית:

$$E_B = \frac{1}{2}mv_B^2 \qquad \text{(ב)}$$

שימור האנרגיה המכנית מתקיים לגבי כל שלושת הכדורים:

$$E_A = E_B \qquad \text{(ג)}$$

נציב את (א) ו-(ב) ב-(ג):

$$mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2 \quad \Rightarrow \quad v_B = \sqrt{2gh_A}$$

הדוגמה שלמעלה מראה כיצד שיקולי אנרגיה עשויים להקל בחישוב גדלי מהירויות: במקרים שבהם התאוצה קבועה יש בידנו אמנם נוסחאות קינמטיות לתיאור התנועה. אולם, כאשר המסלול עקום, כמו למשל מסלול ג, התאוצה אינה קבועה, דבר המקשה על חישובי מהירות. במקרים כאלה שיקולי אנרגיה מסייעים לנו בכך. לעומת זאת את כיוון המהירות לא יכולים למצוא משיקולי אנרגיה, שהיא גודל סקלרי, אלא מתוך היותו מוכתב על ידי המסילה.

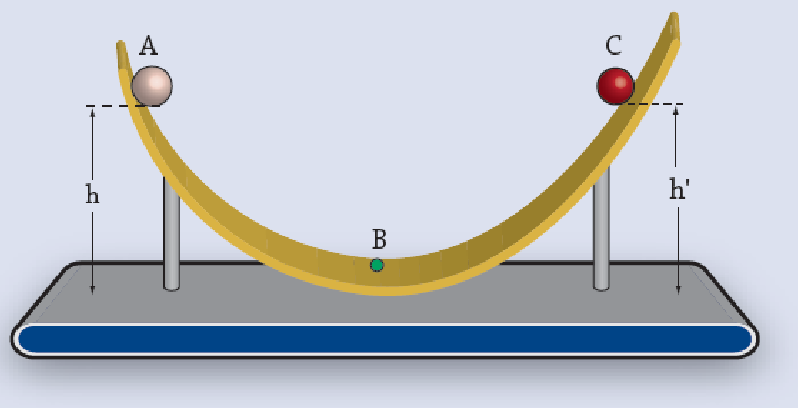
ראוי לשים לב כי שיקולי אנרגיה מאפשרים לחשב את גודל המהירות בכל **גובה** והוא אינו תלוי בצורת המסילה (ישרה משופעת, מעגלית, פרבולית או אחרת). אולם שיקולי אנרגיה אינם מאפשרים לחשב את המהירות בכל **רגע**, כי זה שונה ממסילה למסילה. זוהי מגבלה עקרונית. חוק שימור אינו יכול לתת ישירות מענה לשאלה "מתי?".

דוגמה 9: כדור מחליק על מסילה נטולת חיכוך

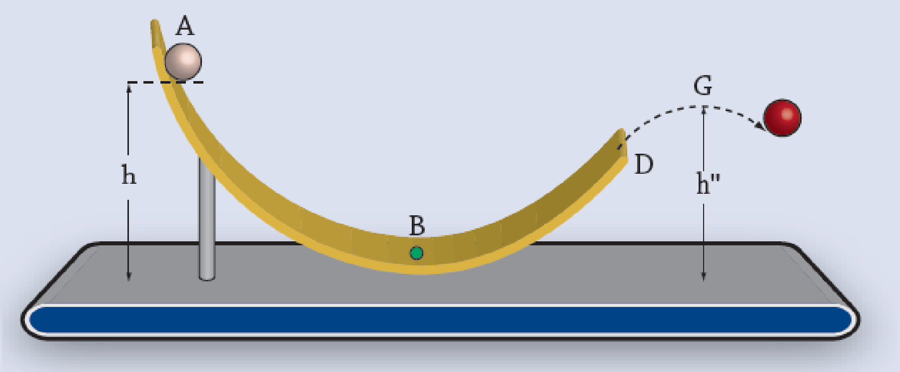
באיור 19 מוצגת מסילה נטולת חיכוך. גובהה של הנקודה A מעל הנקודה הנמוכה ביותר (B) של המסילה הוא h.

א. משחררים כדור ממנוחה בנקודה A. האם הגובה 'h של הנקודה הגבוהה ביותר C שאליה מגיע הכדור בצד הימני של המסילה קטן מ- h, גדול ממנו או שווה לו? נמקו.

ב. קוטמים את הקצה הימני של המסילה בנקודה D, הנמוכה מהנקודה A כמתואר באיור 19ב, ושוב משחררים את הכדור ממנוחה ב- A. האם הגובה המרבי "h שאליו מגיע הכדור לאחר עוזבו את המסילה קטן מ- h, גדול ממנו או שווה לו? נמקו.



א. תנועת הכדור לאורך המסילה השלמה



ב. תנועת הכדור לאורך המסילה הקטומה

איור 19: תרשימי דוגמה 9

פתרון:

א. במהלך תנועת הכדור מ- A ל-C פועלים עליו כוח הכובד והכוח הנורמלי. הכוח הנורמלי ניצב בכל נקודה לכיוון התנועה, לכן עבודתו שווה לאפס. הכוח היחיד שמבצע עבודה על הכדור הוא כוח הכובד, לכן האנרגיה המכנית נשמרת. נשווה בין האנרגיות בנקודות A ו-C:

$$E_A = E_C \Rightarrow mgh = mgh' \Rightarrow h = h'$$

כלומר הכדור עולה על החלק הימני של המסילה עד לנקודה הנמצאת בדיוק בגובה הנקודה A, ואין זה משנה אם אורך המסלול מ-B ל-C קצר מאורך המסלול מ-A ל-B או ארוך ממנו.

ב. לאחר שהכדור ניתק מן המסילה בנקודה D, הוא נע בהשפעת כוח הכובד בלבד, ותנועתו היא "זריקה משופעת". G היא הנקודה הגבוהה ביותר של מסלול הכדור לאחר הנתקותו מן המסילה. המצב כאן שונה מזה שבסעיף א, משום שכאן בשיא הגובה (נקודה G) יש לכדור מהירות אופקית, כלומר **האנרגיה הקינטית שלו בשיא הגובה אינה מתאפסת**. בנוסף לכך יש לכדור בנקודה G אנרגיית כובד. בנקודה A יש רק אנרגיית כובד. האנרגיות הכוללות בנקודות A ו-G שוות; מכאן מבינים שאנרגיית הכובד ב- A גדולה מזו שב-G: $mgh > mgh''$ לכן $h > h''$.

2.3 כוחות משמרים ואנרגיה פוטנציאלית - הכללה

א. כוח משמר

ראינו בסעיף הקודם כי כוח הכובד הוא משמר, כלומר כאשר גוף עובר בין שתי נקודות עבודתו של כוח הכובד אינה תלויה במסלול המוביל מנקודה אחת לנקודה השנייה. אילו תכונה זו של כוח הכובד לא היתה מתקיימת, לא אפשר היה להגדיר אנרגיה פוטנציאלית כובדית.

העבודה של כוח משמר הנעשית על גוף המועבר מנקודה אחת לנקודה שנייה, תלויה באיזה שהוא אופן **בשיעורי נקודות המוצא והיעד**. כך למשל, עבודת כוח הכובד תלויה ב-$y_1 - y_2$ (יחסית לציר y אנכי).

תכונה של כוח משמר:
עבודתו של כוח משמר לאורך מסלול סגור היא אפס.

כדוגמה נתבונן בכוח הכובד: כאשר זורקים כדור כלפי מעלה ותופסים אותו ברדתו בנקודת המוצא, מסלול התנועה הוא סגור. עבודת כוח הכובד בשלב העלייה שווה למינוס עבודתו בשלב הירידה, לכן העבודה לכל אורך המסלול הסגור שווה לאפס. (אגב, זה מבהיר במונחים של "עבודה" ו"אנרגיה" מדוע בהעדר התנגדות האוויר הכדור חוזר לנקודת המוצא במהירות שגודלה שווה לגודל מהירות הזריקה.

נוכיח כי עבודת כוח משמר לאורך מסלול סגור שווה לאפס: נניח כי גוף יוצא מנקודה A (איור 20א) ונע לאורך מסלול סגור (כלומר חוזר ל-A). נבחר נקודה כלשהי B על המסלול, ונסמן את שני חלקי המסלול שבין A ל-B ב-I וב-II, כמתואר באיור 20ב.

עלינו להוכיח כי:
$$W_{I,A\to B} + W_{II,B\to A} = 0 \qquad \text{(א)}$$

הכוח משמר, לכן לאורך מסלולים שונים המחברים שתי נקודות הכוח מבצע אותה עבודה:
$$W_{I,A\to B} = W_{II,A\to B} \qquad \text{(ב)}$$

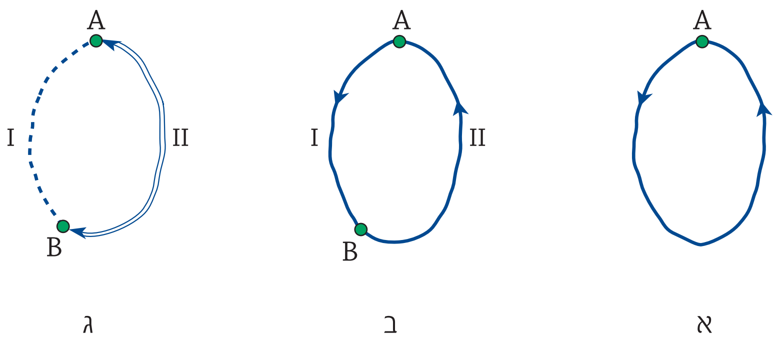
אילו הגוף היה נע על מסלול II מ-A ל-B (איור 20ג) אזי: בכל קטע קטן שנבחר, היה פועל על הגוף אותו כוח כמו בתנועה מ-B ל-A. מצד שני ההעתקים בתנועה הלוך ובתנועה חזור מנוגדים בסימנים. כלומר עבודות הכוח מ-A ל-B ומ-B ל-A מקיימות:

$$W_{II,A\rightarrow B} = -W_{II,B\rightarrow A} \qquad \text{(ג)}$$

נציב את אגף ימין של (ג) במקום אגף ימין של (ב) ונקבל:

$$W_{I,A\rightarrow B} = -W_{II,B\rightarrow A} \qquad \text{(ד)}$$

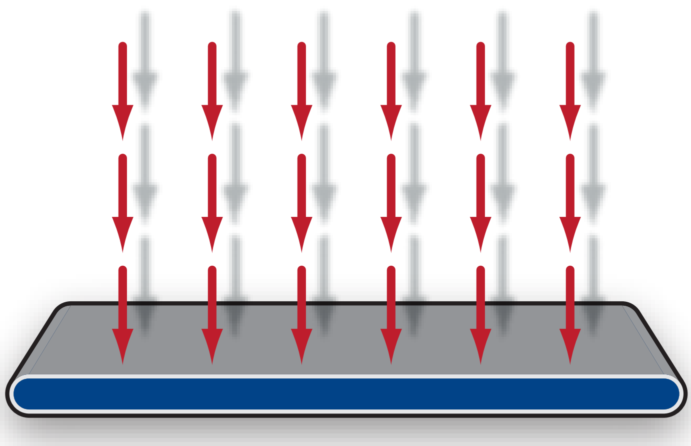
מ- (ד) מקבלים מייד את השוויון (א) שרצינו להוכיח.



איור 20: עבודת כוח משמר

כדי להראות כי כוח הכובד משמר, נעזרנו רק בתכונה שהוא קבוע בכל נקודות המרחב (ראו סעיף קודם), לא בתכונות אחרות שלו. לכן מותר להכליל:

> כל **כוח שהוא קבוע במרחב** (בגודלו ובכיוונו - כמותאר באיור 21) הוא **משמר**.



איור 21: כוח קבוע במרחב

ב. אנרגיה פוטנציאלית וכוחות משמרים

נתבונן שוב באנרגיית הכובד בה עסקנו בסעיף הקודם. נסמן ב- $U_{G,A}$ ו- $U_{G,B}$ את האנרגיות הפוטנציאליות הכובדית שיש לגוף בנקודות A ו-B בהתאמה. אם A גבוהה מ-B, אזי הגודל $U_{G,A} - U_{G,B}$ חיובי והוא משמש מדד לתוספת האנרגיה הקינטית שגוף ירכוש כאשר הוא ינוע בהשפעת כוח הכובד בלבד מ-A ל-B. אם A נמוכה מ-B, אזי $U_{G,A} - U_{G,B}$ שלילי, והוא משמש מדד לפחת באנרגיה הקינטית של גוף בתנועתו מ-A ל-B.

לגבי כוח משמר כלשהו: נסמן U - את האנרגיה הפוטנציאלית הקשורה לכוח. אנו רואים את $U_A - U_B$ כפחת באנרגיה הקינטית שהכוח בו מדובר עשוי לחולל כאשר הגוף עובר מ-A ל-B. על-פי משפט העבודה-אנרגיה שינוי באנרגיה הקינטית שווה לעבודה שהכוח עושה בעת מעבר זה.

הגדרת המושג **"אנרגיה פוטנציאלית"**:

אם כוח מסוים הוא משמר, אזי **הפחת באנרגיה הפוטנציאלית** בין שתי נקודות A ל-B מוגדר כך:

$$\boxed{U_A - U_B = W_{A\to B}} \qquad (18)$$

כאשר: U_A - האנרגיה הפוטנציאלית בנקודה A;

U_B - האנרגיה הפוטנציאלית בנקודה B;

$W_{A\to B}$ - עבודת הכוח המשמר הנעשית מן הנקודה A עד הנקודה B (לאורך מסלול כלשהו).

נדגיש כי **אפשר להתאים אנרגיה פוטנציאלית רק לכוח משמר**. אם הכוח אינו משמר - $W_{A\to B}$ תלויה במסלול (למשל כוח חיכוך), ואין משמעות להגדרת אנרגיה פוטנציאלית.

2.4 אנרגיה פוטנציאלית אלסטית

נדון במצב הבא:

קפיץ קשור בקצהו האחד לנקודה קבועה ובקצהו האחר לקרונית המונחת על מסילה אופקית וישרה.

נבחר ציר מקום כך שראשיתו בקצה הקפיץ הקשור לקרונית כשהקפיץ רפוי (אינו מתוח ואינו מכווץ - הקרונית במצב שיווי משקל בנקודת הריפיון). שיעורה של נקודה זו הוא, אם כן, $x = 0$ (איור 22א). נבחר את הכיוון החיובי של ציר המקום ימינה. מסיטים את הקרונית מנקודת שיווי המשקל ומשחררים אותה ממנוחה - היא מתחילה לנוע.

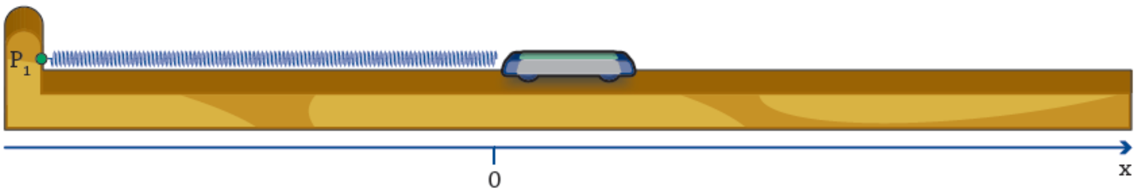
מהו הביטוי המתמטי לכוח האלסטי שהקפיץ מפעיל על הקרונית?

בפרק ג, מצאנו כי **גודל** הכוח האלסטי הוא $F = k \cdot \Delta\ell$, כאשר $\Delta\ell$ מבטא את שיעור ההתארכות או הכיווץ של הקפיץ ביחס למצבו הרפוי. כאשר הקרונית נמצאת מימין לנקודת שיווי המשקל (איור 22ב) - x מבטא את שיעור התארכות הקפיץ, לכן $k \cdot x$ מבטא את גודל הכוח. אולם הכוח מצביע שׂמאלה, לכן הוא שלילי ביחס לציר המקום הנבחר.

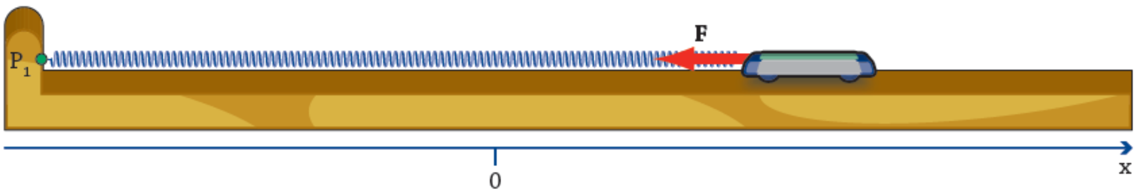
כלומר הביטוי המתמטי לכוח אלסטי הוא:

$$F = -kx \qquad (19)$$

קשר (19) מבטא את הכוח האלסטי גם כאשר הקרונית משׂמאל לנקודת שיווי המשקל (הקפיץ מכווץ). במצב כזה סימנו האלגברי של x שלילי, לכן סימנו של ביטוי (19) הוא חיובי, כפי שנדרש, כי משמאל לנקודת שיווי המשקל הכוח מצביע ימינה, בכיוון הציר.



א. הכוח האלסטי הפועל על קרונית נחה בנקודת שיווי המשקל שווה לאפס



ב. מימין לנקודת שיווי המשקל הכוח האלסטי פועל שמאלה

איור 22: כוח אלסטי

התבנית המתמטית של הכוח האלסטי שקפיץ מפעיל:

הביטוי המתמטי המייצג את הכוח שקפיץ מפעיל על גוף הקשור לקצהו, ביחס לציר x שראשיתו בנקודת הריפיון הוא:

$$F = -kx \qquad (19')$$

כאשר: x - שיעור קצה הקפיץ,

k - קבוע הקפיץ;

F - הכוח שהקפיץ מפעיל.

האם הכוח האלסטי משמר?

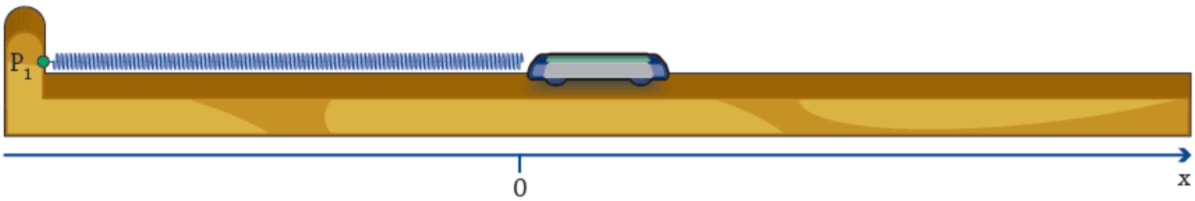
נניח שמסיטים קרונית ממצב שיווי המשקל שלה (שהוא גם מצב הרפיון של הקפיץ) תוך כדי מתיחת הקפיץ (איורים 23א ו-23ב). נבחר בשתי נקודות A ו- B לאורך מסלול התנועה, ונסמן את שיעוריהן ב-x_A ו-x_B בהתאמה. נחשב את עבודת הכוח האלסטי בתנועת הקרונית מ- A ל- B. הכוח האלסטי אינו קבוע, לכן יש לחשב את העבודה באמצעות ה"שטח" התחום בין עקומת כוח-מקום לבין ציר המקום. על- פי קשר (19), העקומה היא קו ישר, אשר עובר בראשית ואשר שיפועו שלילי, כמתואר באיור 23ג. עבודת הכוח האלסטי מ-x_A עד x_B שווה ל"שטח" הטרפז המסומן בגרף (הסימן האלגברי של העבודה חיובי כי גם ההעתק וגם הכוח שניהם שליליים).

נחשב את שטח הטרפז, על-פי מכפלת סכום הבסיסים במחצית גובה טרפז:

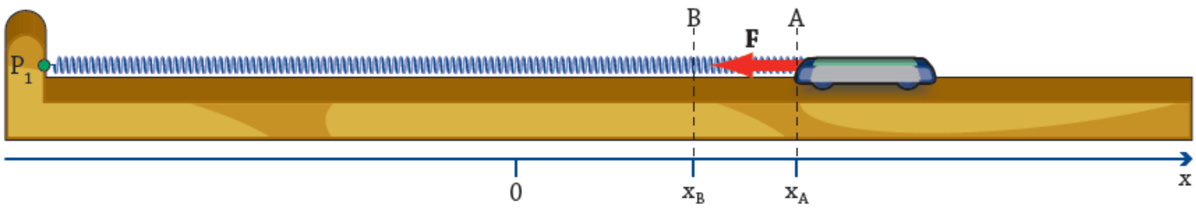
$$\text{שטח הטרפז} = \frac{1}{2}(kx_A + kx_B)(x_A - x_B) = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2$$

כאמור, שטח זה מייצג את העבודה:

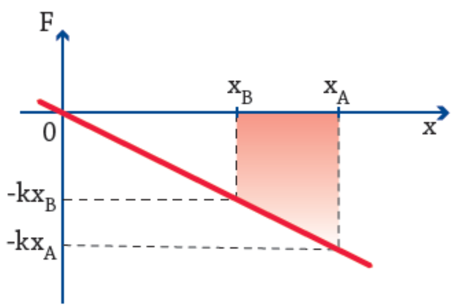
$$W_{A \to B} = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2 \qquad (20)$$



א. קרונית בנקודת שיווי המשקל



ב. הקרונית מוחזקת במצב שהקפיץ מתוח



ג. גרף המתאר את הכוח האלסטי שמפעיל הקפיץ על הקרונית כפונקציה של מקום הקרונית

איור 23: אנרגיה פוטנציאלית אלסטית

חישוב העבודה באמצעות חשבון אינטגרלי: דרך חלופית לחישוב העבודה (למנוסים באינטגרלים) היא

$$W_{A \to B} = \int_{x_A}^{x_B} F dx = \int_{x_A}^{x_B} (-kx)\, dx = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2$$

מביטוי (20) עולה מסקנה חשובה: העבודה תלויה רק בנקודת ההתחלה ובנקודת הסיום ולא בנקודות ביניים. מכאן נובע **שהכוח האלסטי משמר, לכן אפשר להתאים לו אנרגיה פוטנציאלית אלסטית**, המכונה בקיצור **אנרגיה אלסטית**. נסמן אותה ב- U_{sp}. הסימון sp מציין קפיץ (**sp**ring). כאשר משחררים את הקרונית - היא נעה בהשפעת הכוח האלסטי, אשר עבודתו ממירה אנרגיה אלסטית באנרגיה קינטית, שהולכת וגדלה.

על-פי הגדרת האנרגיה הפוטנציאלית, הפחת באנרגיה הפוטנציאלית שווה לתוספת באנרגיה הקינטית; מצד אחר, התוספת באנרגיה הקינטית שווה לעבודת הכוח האלסטי במעבר בין שתי הנקודות. לכן:

$$U_A - U_B = E_{k,B} - E_{k,A} = \Delta E_k = W_{A\to B}$$

$$U_A - U_B = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2$$

הגודל $\frac{1}{2}kx^2$ מתאים לשמש ביטוי מתמטי אנרגיה פוטנציאלית אלסטית.

הערות:

1. במקרה הפרטי של קפיץ אופקי הגוף המחובר לקפיץ נמצא במצב של שיווי משקל כאשר הקפיץ רפוי. לכן בחירת ראשית ציר המקום בנקודת הרפיון של הקפיץ מובילה לשוויון $\Delta\ell = x$ ונוכל להשתמש בנוסחה $U_{sp} = \frac{1}{2}kx^2$. אבל אם הקפיץ אינו אופקי (לדוגמה משקולת תלויה על קפיץ אנכי), אז הנקודות - שיווי משקל ורפיון - הן שונות (כפי שניווכח בסעיף 5 בפרק ח). לכן יש לבטא את האנרגיה הפוטנציאלית האלסטית באמצעות $\Delta\ell$.
2. $\Delta\ell$ מסמן את שינוי אורך הקפיץ, ביחס לאורכו הרפוי ($\Delta\ell = \ell - \ell_0$). הוא מתאים גם להתכווצות הקפיץ, כאשר מתקיים $\Delta\ell < 0$.

הביטוי המתמטי לאנרגיה פוטנציאלית אלסטית:

הביטוי המתמטי לאנרגיה הפוטנציאלית האלסטית (ובקיצור: האנרגיה האלסטית), U_{sp}, האגורה בקפיץ הוא חצי מכפלת קבוע הקפיץ, k, בריבוע ההתארכות (או ההתקצרות), $\Delta\ell$, (ביחס למצב הרפוי):

$$\boxed{U_{sp} = \frac{1}{2}k\Delta\ell^2} \qquad (21)$$

הערה: גם הביטוי $\frac{1}{2}k\Delta\ell^2 + C$ (כאשר C גודל קבוע כלשהו) ולא רק הביטוי $\frac{1}{2}k\Delta\ell^2$ מתאים לשמש אנרגיה אלסטית. זה מפני שגם עבור ביטוי זה מתקיים שהעבודה היא הפחת באנרגיה הפוטנציאלית. מכאן שהגדרת האנרגיה האלסטית אינה חד-ערכית. ביטוי (21) הוא אחד מתוך אינסוף ביטויים אפשריים. שוב אנו רואים (כפי שראינו בסעיף 2.2 עבור כוח הכובד) כי אנרגיה פוטנציאלית אינה גודל מוחלט - היא מוגדרת עד כדי קבוע בלבד. בנוסחה (21) נעשתה כבר בחירה של קבוע מסויים ($C = 0$). במסגרת בחירה זו האנרגיה האלסטית לעולם אינה שלילית. הערך המינימלי הוא אפס והוא מתקבל כאשר הקפיץ רפוי, כלומר **רמת הייחוס נבחרה במצב שבו הקפיץ רפוי**.

3. עקרון שימור האנרגיה המכנית

נניח כי גוף נע מנקודה A לנקודה B בהשפעת כוחות שונים. על-פי משפט העבודה-אנרגיה:

$$W_{A\to B}^{\text{כוללת}} = E_{k,B} - E_{k,A} \quad (= \Delta E_k) \qquad (22)$$

העבודה הכוללת (הרשומה באגף שׂמאל) היא כזכור סכום העבודות של כל הכוחות הפועלים על הגוף. נמיין את הכוחות לשתי קבוצות: **כוחות משמרים** (כובד, אלסטי, ובעתיד נראה שגם הכוח החשמלי הוא משמר), ונסמן את עבודתם הכוללת ב-$W_{A\to B}^{\text{משמרים}}$ו**כוחות שאינם משמרים** (כגון כוח החיכוך), שעבודתם הכוללת תסומן ב-$W_{A\to B}^{\text{לא משמרים}}$. במונחים אלה נרשום את (22) בצורה חדשה:

$$W_{A\to B}^{\text{לא משמרים}} + W_{A\to B}^{\text{משמרים}} = E_{k,B} - E_{k,A} \qquad (23)$$

לדוגמה, כאשר $W_{A\to B}^{\text{משמרים}}$ כולל את עבודות כוח הכובד וכוח אלסטי, עבודת כוח הכובד שווה לערך אנרגיית הכובד ב-A פחות ערכה ב-B, ובאופן דומה לגבי עבודת הכוח האלסטי. כלומר:

$$W_{A\to B}^{\text{משמרים}} = U_{G,A} + U_{sp,A} - (U_{G,B} + U_{sp,B})$$

סכום האנרגיות הפוטנציאליות בנקודה A יכונה **האנרגיה הפוטנציאלית הכוללת** ב-A, ויסומן ב-U_A. לדוגמה, כאשר מדובר בכוח הכובד ובכוח האלסטי, אז $U_A = mgh_A + \frac{1}{2}k\Delta\ell_A^2$.

מ-(23):

$$W_{A\to B}^{\text{לא משמרים}} + (U_A - U_B) = E_{k,B} - E_{k,A}$$

לכן:

$$W^{\text{לא משמרים}} = (E_{k,B} - E_{k,A}) - (U_A - U_B)$$

לאחר שינוי סדר האברים באגף ימין:

$$W^{\text{לא משמרים}} = (E_{k,B} + U_B) - (E_{k,A} + U_A) \qquad (24)$$

נכנה את הסכום של האנרגיה הקינטית בנקודה והאנרגיה הפוטנציאלית הכוללת באותה נקודה בשם **אנרגיה מכנית כוללת** בנקודה, ונסמן:

$$E_A = E_{k,A} + U_A \quad ; \quad E_B = E_{k,B} + U_B \qquad (25)$$

לאחר הצבת (25) ב- (24) נקבל תוצאה חשובה:

נוסחה עבור עבודת כוחות לא משמרים:

העבודה הכוללת של הכוחות שאינם משמרים הפועלים על הגוף שווה לשינוי באנרגיה המכנית הכוללת של אותו גוף.

בכתיב מתמטי:

$$\boxed{W_{A\to B}^{\text{לא משמרים}} = E_B - E_A = \Delta E} \qquad (26)$$

אם כוחות שאינם משמרים לא עושים עבודה על הגוף, נקבל מ-(26) כי $E_A = E_B$ כלומר האנרגיה המכנית הכוללת נשמרת.

עקרון שימור האנרגיה המכנית (conservation of mechanical energy):
כאשר גוף נע, ורק כוחות משמרים עושים עליו עבודה, אזי האנרגיה המכנית הכוללת שווה בכל נקודות המסלול.
בניסוח מתמטי:

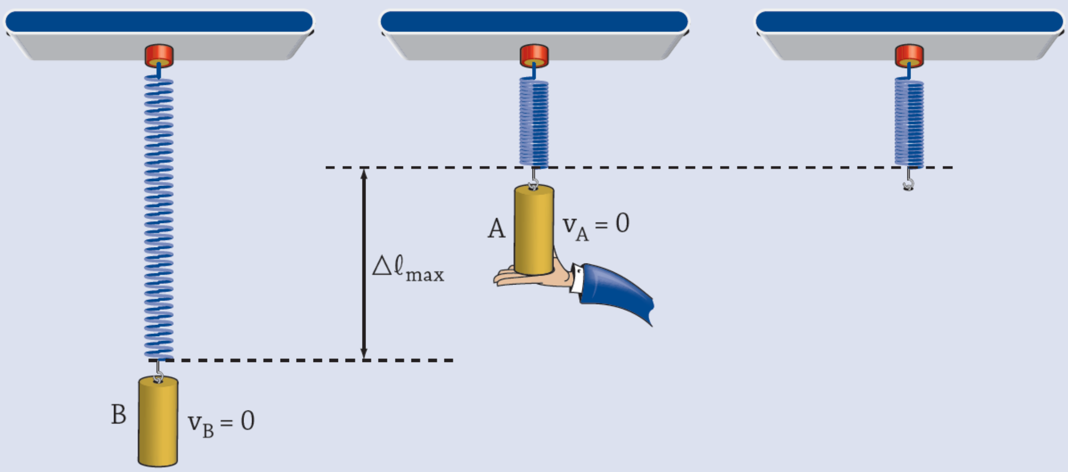
$$E_A = E_B \qquad (27)$$

דוגמה 10: יישום עקרון שימור האנרגיה המכנית

קפיץ שקבוע הכוח שלו $k = 40\ N/m$ תלוי אנכית (איור 24א). מחברים לקצהו התחתון משקולת שמסתה $m = 2\ kg$ (איור 24ב). מרפים מהמשקולת (ממצב שהקפיץ רפוי). חשבו את ההתארכות המרבית $\Delta\ell_{max}$ של הקפיץ.

פתרון:

נסמן ב-A את נקודת שחרור המשקולת (איור 24ב), וב-B את הנקודה הנמוכה ביותר שאליה היא מגיעה (איור 24ג).



א. קפיץ רפוי
ב. לקפיץ הרפוי נקשרה משקולת, והיא מוחזקת במנוחה
ג. הנקודה הנמוכה ביותר שאליה מגיעה המשקולת לאחר שחרור

איור 24: תרשימי דוגמה 10

הערה: הנקודה B נמצאת מתחת לנקודת שיווי המשקל של המשקולת, כי המשקולת מגיעה לנקודת שיווי המשקל עם מהירות מסוימת ולכן היא ממשיכה לרדת. מתחת לנקודת שיווי המשקל, הכוח השקול פועל על המשקולת כלפי מעלה, לכן מהירותה הולכת וקטנה, עד שהיא נעצרת (נקודה B).

הכוחות הפועלים על המשקולת במהלך תנועתה מ-A ל-B הם כוח הכובד והכוח האלסטי. כוחות אלה הם משמרים, לכן האנרגיה המכנית הכוללת נשמרת. בפרט, ערכה ב-A שווה לערכה ב-B:

(א) $$E_A = E_B$$

נבחר כמישור ייחוס לגבי אנרגיית הכובד את המישור האופקי העובר בנקודה B. נקודת הייחוס עבור האנרגיה האלסטית היא בנקודה A, בה הקפיץ רפוי.

בנקודה A האנרגיה הקינטית שווה לאפס (הגוף משוחרר ממנוחה) וגם האנרגיה האלסטית שווה לאפס (נקודת הייחוס). לכן:

(ב) $$E_A = mgh_A = mg\Delta\ell_{max}$$

בנקודה B האנרגיה הקינטית שווה לאפס (הגוף נעצר רגעית) וגם אנרגיית הכובד שווה לאפס (הגוף במישור הייחוס), לכן:

(ג) $$E_B = \frac{1}{2}k\ell_B^2 = \frac{1}{2}k(\Delta\ell_{max})^2$$

נציב את (ב) ו-(ג) ב-(א) ונקבל:
$$mg\Delta\ell_{max} = \frac{1}{2}k(\Delta\ell_{max})^2$$

לאחר הצבה וחישוב, נקבל כי: $\Delta\ell_{max} = 1\ m$

דוגמה 11: חישוב עבודה של כוח שאינו משמר

מקנים לגוף שמסתו $m = 2\ kg$ המונח בנקודה A על הרצפה מהירות $v_0 = 1\ m/s$. הגוף מחליק על הרצפה עד שהוא נעצר בנקודה B.

חשבו את עבודת כוח החיכוך בתנועת הגוף מהנקודה A לנקודה B.

פתרון:

הכוחות הפועלים ע הגוף במהלך תנועתו הם כוח הכובד, הכוח הנורמלי וכוח החיכוך. הכוח היחיד המבצע עבודה על הגוף הוא כוח החיכוך.

הנוסחה עבור עבודה כוללת של כוחות לא משמרים: $W_{A\to B}^{\text{לא משמרים}} = E_B - E_A = \Delta E$

$$W_f = E_B - E_A \;\Rightarrow\; W_f = 0 - \frac{mv_0^2}{2} = -\frac{2\cdot 1^2}{2}$$

עבודת כוח החיכוך: $W_f = -1J$

כלומר עבודת כוח החיכוך היא ‎–1J.

4. תנועה במעגל אנכי

4.1 שיקולי כוחות ושיקולי אנרגיה

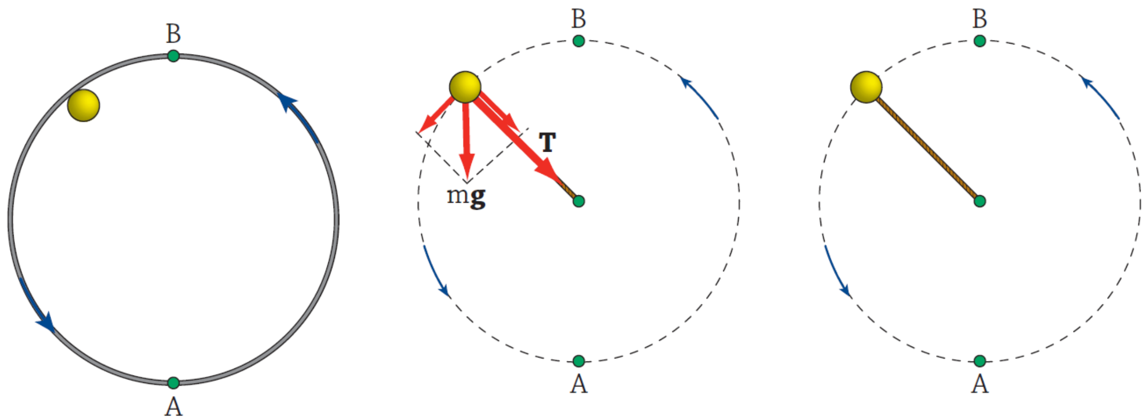
נדון במצב הבא:
כדור קטן תלוי בקצה חוט. כשהחוט אנכי, מקנים לכדור מהירות אופקית מספיק גדולה - והוא נע במעגל הנמצא במישור אנכי (איור 25א). נניח כי מסת החוט ניתנת להזנחה ביחס למסת הכדור, כמו כן נניח כי החוט אינו יכול להתארך וכי התנגדות האוויר ניתנת להזנחה. ניסויים מראים כי בעת תנועת הכדור מהנקודה הנמוכה ביותר של המסלול, A, לנקודה הגבוהה ביותר של המסלול, B, מהירותו הולכת וקטֵנה, ובירידה מ-B ל-A היא הולכת וגדֵלה.

כיצד אפשר להסביר זאת?

נסביר בשתי דרכים:

א. **שיקולי כוחות:** הכוחות הפועלים על הכדור הם **כוח המתיחות** אשר ניצב בכל נקודה לכיוון התנועה, לכן הוא אינו משנה את גודל המהירות, ו**כוח כובד** ולו רכיב רדיאלי ורכיב משיקי (איור 25ב). הרכיב המשיקי מכוון בכל נקודה במורד המסלול. לכן בעת עליית הכדור מ-A ל-B מהירותו הולכת וקטֵנה, ובירידתו מ-B ל-A היא הולכת וגדֵלה.

ב. **שיקולי אנרגיה:** כוח המתיחות ניצב בכל נקודה למסלול התנועה, לכן אינו מבצע עבודה על הכדור. הכוח היחיד המבצע עבודה הוא כוח הכובד. כוח הכובד משמר, לכן **האנרגיה המכנית נשמרת**. בכל נקודה יש לגוף אנרגיה קינטית ואנרגיה פוטנציאלית כובדית. בעת תנועת הגוף מ-A ל-B אנרגיית הכובד גדֵלה, לכן האנרגיה הקינטית קטֵנה, לכן מהירות הכדור הולכת וקטֵנה. בירידה מ-B ל-A אנרגיית הכובד קטֵנה לכן המהירות הולכת וגדֵלה.



א. הכדור קשור בקצה חוט
ב. תרשים כוחות הפועלים על הכדור
ג. הכדור בתוך חישוק

איור 25: תנועת כדור במעגל אנכי

מחזוריות: נעקוב אחרי הכדור מרגע שבו הוא עובר בנקודה A. עם תום הסיבוב הראשון הכדור חוזר ל-A בדיוק עם אותה אנרגיה שאיתה הוא יצא לדרך. לכן הוא יחזור במדויק על התנועה שוב ושוב, כלומר תנועתו היא **מחזורית**.

לא רק כדור הקשור לחוט יכול לנוע במסלול מעגלי אנכי. כאשר מעניקים לכדור הנמצא בתוך החישוק מהירות מספיק גדולה - הוא נע במעגל אנכי על פני משטחו הפנימי של החישוק (איור 25ג). על הכדור פועלים כוח הכובד והכוח הנורמלי. הכוח הנורמלי ממלא את תפקידו של כוח מתיחות החוט בתנועה המתוארת באיור 25א.

דוגמה 12: שיקולי כוחות ושיקולי אנרגיה בתנועה במסלול מעגלי אנכי

כדור שמסתו 1.2 kg ורדיוסו 0.07 m נח בנקודה הנמוכה של חישוק אנכי חלק שרדיוסו 1.57 m. מעניקים לכדור מהירות אופקית שגודלה 9 m/s, והוא נע לאורך מעגל אנכי. הנקודות A ו-C הן קצות הקוטר האנכי, B היא הקצה הימני של הקוטר האופקי (איור 29א).

א. חשבו את גדלי הכוחות הנורמליים שהמשטח הפנימי של החישוק מפעיל על הכדור בנקודות A, B ו-C.

ב. Q היא נקודה כלשהי על המסלול. θ היא הזווית בין הרדיוס המחבר את Q עם מרכז המעגל לבין הרדיוס המחבר את A עם מרכז המעגל (איור 26א). רישמו משוואות שמהן אפשר לחשב את הכוח הנורמלי הפועל על הכדור כפונקציה של θ, וחשבו את הכוח עבור $\theta = 120^\circ$.

פתרון:

כוחות ומערכת צירים: הכדור נע בהשפעת כוח נורמלי הפועל בכל נקודה לעבר מרכז החישוק, וכוח כובד הפועל כלפי מטה. הכוח הנורמלי פועל בכיוון רדיאלי. את גודלו בכל נקודה נוכל לחשב מתוך משוואת התנועה לגבי הרכיבים הרדיאליים של הכוחות והתאוצה. זאת מפני שאנו מכירים את הביטוי המתמטי לרכיב הרדיאלי של התאוצה ($a_R = v^2/r$). כדי לחשב את גודל הכוח הנורמלי כשאנו לא יודעים את גודל המהירות, נעזר במשוואה נוספת המבטאת את שימור האנרגיה המכנית הכוללת בין נקודה זו לנקודה אחרת. רדיוס המסלול המעגלי הוא המרחק ממרכז הכדור למרכז החישוק, והוא $r = 1.5$ m ‏($1.57 - 0.07 = 1.5$).

א. **בנקודה A** שני הכוחות פועלים בכיוון רדיאלי: הכוח הנורמלי, $\mathbf{N_A}$, לעבר מרכז המעגל וכוח הכובד בכיוון מהמרכז החוצה (איור 26ב). בתוקף החוק השני של ניוטון ביחס לציר זה:

$$\Sigma F_R = ma_R \;\Rightarrow\; N_A - mg = m\frac{v_A^2}{r} \qquad (\text{א})$$

ממשוואה (א) נקבל:

$$N_A = m\left(g + \frac{v_A^2}{r}\right)$$

אחרי הצבת ערכים מספריים בנוסחה האחרונה נקבל: $N_A = 76.8$ N.

בנקודה B הכוח הנורמלי, $\mathbf{N_B}$, פועל לעבר המרכז וכוח הכובד פועל בכיוון המשיק (איור 26ג). משוואת התנועה בכיוון הרדיאלי:

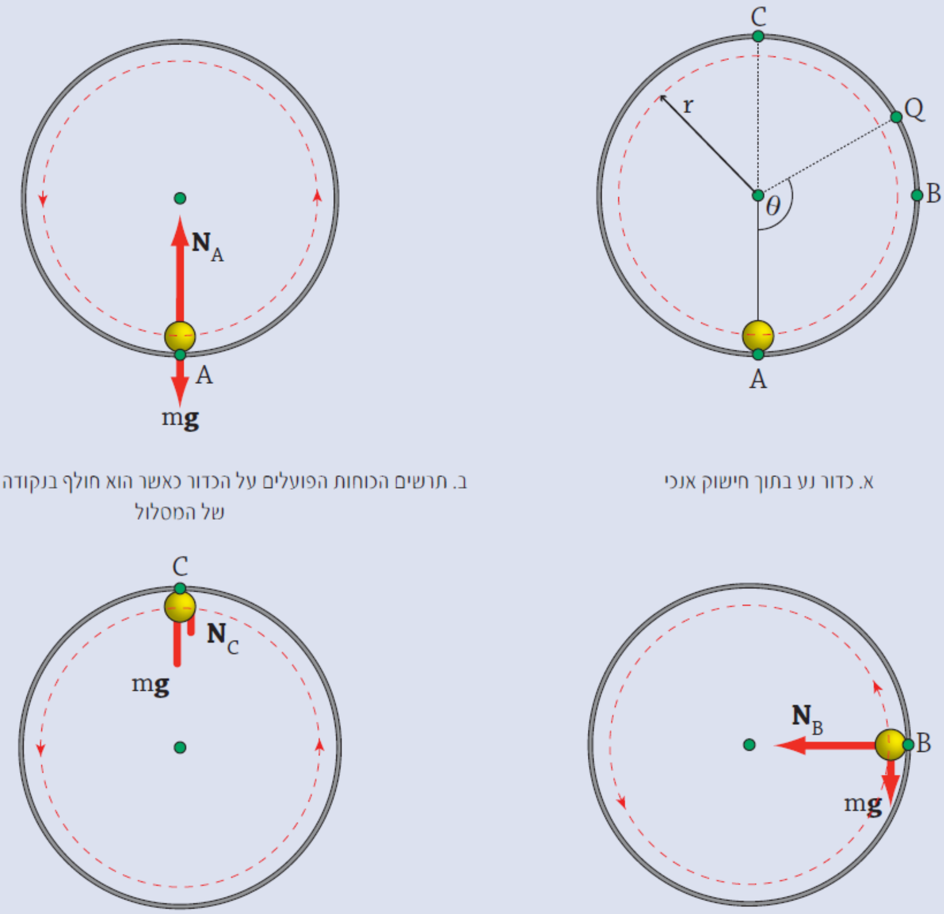
$$\Sigma F_R = ma_R \;\Rightarrow\; N_B = m\frac{v_B^2}{r} \qquad (\text{ב})$$

את מהירות הגוף ב-B נחשב בעזרת עקרון שימור האנרגיה המכנית. נבחר מישור אופקי דרך A כמישור ייחוס עבור אנרגיית הכובד. לפיכך בנקודה זו יש לכדור רק אנרגיה קינטית. בנקודה B יש לו אנרגיה קינטית ואנרגיית כובד. אנרגיית הכובד שווה ל-mgr, כי הגובה של B מעל מישור הייחוס שווה לרדיוס המסלול המעגלי r.

משוואת שימור האנרגיה:

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgr \qquad (\text{ג})$$

ממשוואות (ב) ו-(ג) ומנתוני השאלה נקבל: $N_B = 40.8\ N$.



א. כדור נע בתוך חישוק אנכי

ב. תרשים הכוחות הפועלים על הכדור כאשר הוא חולף בנקודה הנמוכה ביותר של המסלול

ג. תרשים הכוחות הפועלים על הכדור בקצה הקוטר האופקי

ד. תרשים הכוחות הפועלים על הכדור בנקודה הגבוהה ביותר של המסלול

איור 26: תרשימי דוגמה 12

בנקודה C הכוח הנורמלי, $\mathbf{N}_C$, וכוח הכובד פועלים לעבר מרכז המעגל (איור 26ד). משוואת התנועה בכיוון הרדיאלי:

$$\Sigma F_R = ma_R \quad \Rightarrow \quad N_C + mg = m\frac{v_C^2}{r} \qquad \text{(ד)}$$

ממשוואה (ד) נקבל:

$$N_C = m\left(\frac{v_C^2}{r} - g\right)$$

הערה: גודל הכוח הנורמלי אינו יכול להיות שלילי, לכן הביטוי שבסוגריים חייב להיות אי-שלילי. מכאן שתנאי הכרחי למעבר הכדור בנקודה העליונה תוך תנועה במסלול מעגלי הוא

$$v_C \geq \sqrt{rg} \qquad \text{(ה)}$$

נדון בכך בסעיף 4.2 שלהלן.

את מהירות הכדור בנקודה C נמצא בעזרת שיקולי אנרגיה; נשווה בין האנרגיה בנקודה A לזו שבנקודה C:

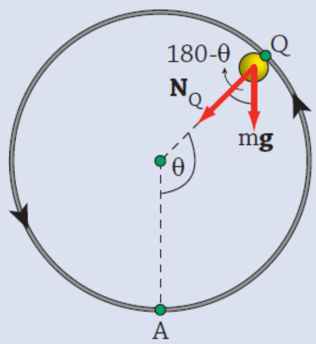
$$\frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_C^2 + mg2r \qquad \text{(ו)}$$

ממשוואות (ד) ו-(ו) ומנתוני השאלה נקבל: $N_C = 4.8\ N$.

ב. **נקודה Q**: הכוח הנורמלי, $\mathbf{N}_Q$, פועל לעבר מרכז המעגל וכוח הכובד פועל כלפי מטה (איור 27). נפרק את כוח הכובד לשני רכיבים: רכיב רדיאלי שגודלו $mg\cos(180^\circ - \theta)$, ורכיב משיקי שגודלו $mg\sin(180^\circ - \theta)$.

משוואת התנועה בכיוון רדיאלי:

$$\Sigma F_R = ma_R \ \Rightarrow\ N_Q + mg\cos(180^\circ - \theta) = m\frac{v_Q^2}{r} \qquad \text{(ז)}$$



איור 27: תרשים כוחות של הכדור בנקודה כלשהי לאורך מעגל אנכי

שיקולי אנרגיה: גובהה של הנקודה Q מעל מרכז המעגל הוא $r\cos(180^\circ - \theta)$, ומעל מישור הייחוס הוא $r + r\cos(180^\circ - \theta) = r(1 + \cos(180^\circ - \theta))$.

שימור האנרגיה:

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_Q^2 + mgr(1 + \cos(180^\circ - \theta)) \qquad \text{(ח)}$$

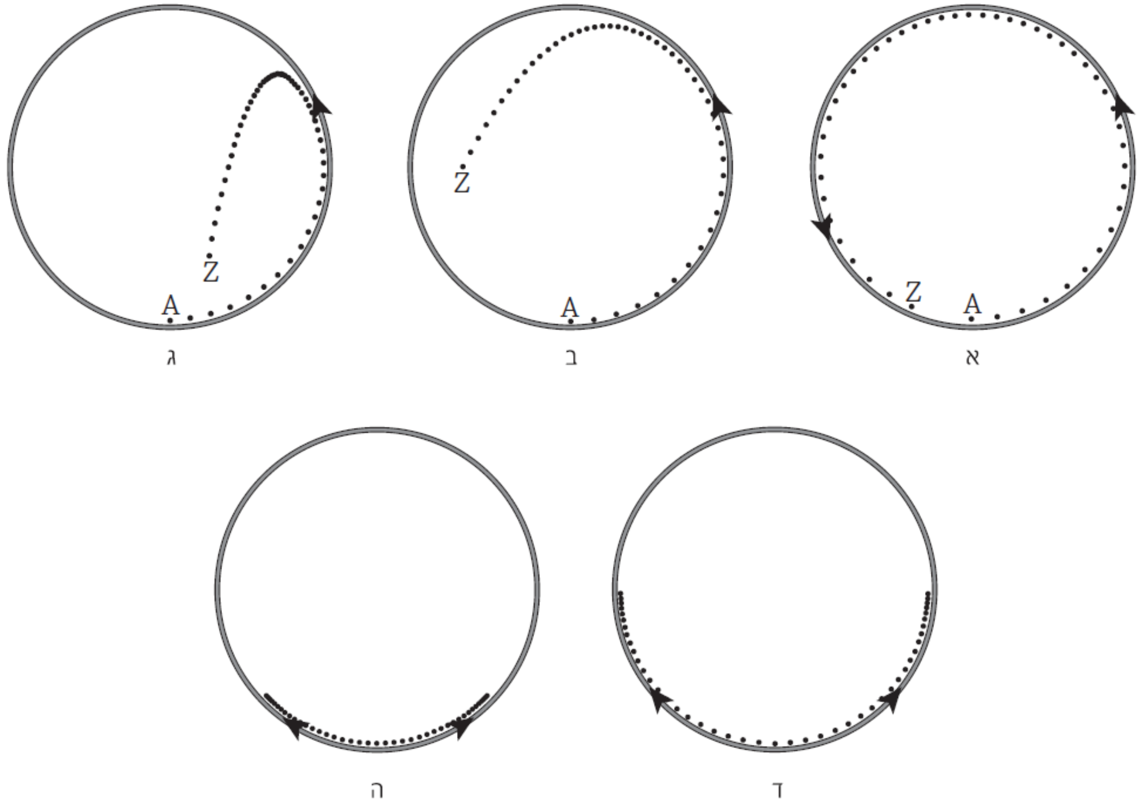
ממשוואות (ז) ו-(ח) ומנתוני השאלה נקבל עבור $\theta = 120^\circ$: $N_Q = 22.8\ N$.

תרגיל: הראה כי משוואות הכוחות ומשוואות האנרגיה בנקודות המיוחדות A, B ו-C מתקבלות כמקרים פרטיים של משוואות (ז) ו-(ח).

4.2 היניתקות מן המסלול המעגלי

באיור 28א מוצגת תוצאת הדמיית מחשב: לכדור שמסתו 1.2 ק"ג ניתנת בנקודה הנמוכה ביותר (A) של חישוק אנכי חלק מהירות של 9 מ'\ש' בכיוון ימינה. הכדור נע לאורך מסלול מעגלי שרדיוסו 1.5 מטר (הנתונים זהים לאלה שבדוגמה 11). הנקודות מ-A עד Z מתארות את מקומו של הכדור במרווחי זמן שווים. אפשר לראות באיור כי מהירות הכדור אכן הולכת וקטֵנה בעת עלייתו, והיא הולכת וגדֵלה בעת ירידתו.

באיור 28ב מוצגות תוצאות הדמייה שבה ניתנה לכדור בנקודה A מהירות של 8 מ'\ש' (ולא 9 מ'\ש'). שאר הפרמטרים בשתי ההדמיות לא השתנו. במקרה זה הכדור **ניתק** מן החישוק, ואינו משלים מסלול מעגלי שלם.



איור 28: תנועות שונות של כדור בתוך חישוק אנכי, כפי שהתקבלו באמצעות הדמיית מחשב. בכל המקרים, בנקודה הנמוכה ביותר של החישוק ניתנה לכדור מהירות אחרת: ב–א המהירות הגבוהה ביותר והמסלול מעגלי (תנועה מ–A ל–Z). ב–ב וב–ג מהירויות נמוכות יותר - הכדור ניתק מן המסילה, וב–ד ו–ה המהירות נמוכה עוד יותר, והכדור אינו עולה מעל הקוטר האופקי.

האם הכדור ניתק מהחישוק בגלל שלא היתה לו די אנרגיה להגיע לנקודה הגבוהה של החישוק?

נבחר מישור אופקי דרך A כמישור ייחוס. האנרגיה הקינטית (שהיא האנרגיה הכוללת) של הכדור בנקודה זו:

$$E_k = \frac{1}{2} mv_A^2 = \frac{1}{2} \cdot 1.2 \cdot 8^2 = 38.4 \text{ J}$$

אילו הכדור היה מגיע לנקודה הגבוהה ביותר של החישוק, היתה אנרגיית הכובד בנקודה זו:

$$U_G = mg\,2r = 1.2 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 1.5 = 36 \text{ J}$$

לכדור היתה נותרת אנרגיה קינטית בשיעור 2.4 ג'אול. תנועת הכדור עד הנקודה הגבוהה ביותר של החישוק אפשרית מבחינה אנרגטית, אולם הכדור אינו מגיע לנקודה זו.

שימור אנרגיה כתנאי הכרחי אך לא מספיק:

גם אם בתנועה לאורך מסלול מסויים האנרגיה נשמרת, אין זה הכרחי שהתנועה תתרחש. עקרון שימור אנרגיה אינו נותן את התמונה במלואה. הדרישה שתהליך יתאפשר מבחינה אנרגטית היא תנאי הכרחי אך אינה תנאי מספיק.

מהו התנאי המספיק לכך שהגוף ינוע במסלול מעגלי שלם?

ראינו בדוגמה 11 (קשר ז) כי בכל נקודה לאורך מעגל אנכי מתקיים:

$$N_Q + mg\cos(180^\circ - \theta) = m\frac{v_Q^2}{r}$$

נסתמך על הקשר $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$, ולאחר כמה פעולות אלגבריות נקבל:

$$N_Q = m\left(g\cos\theta + \frac{v_Q^2}{r}\right) \qquad (28)$$

כדי שהכדור ינוע בתנועה מעגלית - צריך להתקיים שוויון (28). כאשר סכום שני המחוברים באגף ימין חיובי - המסילה מפעילה על הכדור כוח נורמלי $\mathbf{N}_Q$ לעבר מרכז החישוק (רכיבו הרדיאלי חיובי). הכוח "מתאים את עצמו" כך שהשוויון מתקיים. ברגע שבו סכום שני המחוברים נעשׂה שלילי, שוויון (28) אינו יכול להתקיים מבחינה פיזיקלית כי **החישוק אינו יכול להפעיל כוח נורמלי שרכיבו הרדיאלי שלילי** (כלומר כוח נורמלי הפועל בכיוון ממרכז המעגל חוצה), והכדור ניתק מן המסילה.

נבחן כיצד משתנים הגדלים v_Q, θ ו-N_Q המופיעים בנוסחה (28) כאשר הנקודה Q, נעה מהנקודה הנמוכה ביותר של החישוק (מסומנת באיור 29 על ידי A) כלפי מעלה.

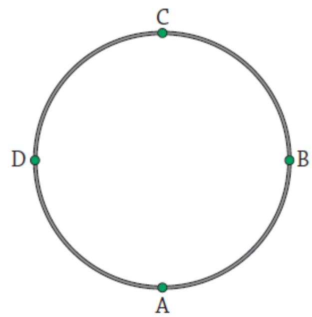
תנועה כלפי מעלה על פני הרבע התחתון של החישוק: בנקודה A מתקיים $\theta = 0$ לכן $\cos\theta = 1$. שני המחוברים באגף ימין של קשר (28) חיוביים, והחישוק מפעיל כוח נורמלי $\mathbf{N}_Q$ לעבר מרכז המעגל, כך ששוויון (28) מתקיים.

במהלך התנועה מ-A עד B המהירות v_Q הולכת וקטֵנה, ו- θ הולכת וגדֵלה, לכן שני המחוברים באגף ימין של (28) קטֵנים ($\cos\theta$ קטֵן כאשר θ גדֵלה). אולם, שניהם חיוביים (θ חדה לכן $\cos\theta > 0$), ו-N_Q אמנם קטֵן אבל השוויון (28) ממשיך להתקיים. ב- B הזווית θ מגיעה ל-90°, ו- $\cos\theta$ מתאפס אולם הסכום חיובי כי mv_Q^2/r חיובי.

כלומר: במהלך התנועה מ-A עד B אגף ימין חיובי, לכן שוויון (28) יכול להתקיים, והכדור נע על פני החישוק ללא "חשש" להנתקות ממנו.

תנועה כלפי מעלה על פני הרבע העליון של החישוק: בקטע זה $\theta > 90^\circ$ לכן אגף ימין כולל **איבר חיובי** mv_Q^2/r **ואיבר שלילי** $mg\cos\theta$ (כאשר $\theta > 90^\circ$). ככל שהכדור עולה - אגף ימין ממשיך לקטון. כאן יתכנו שלושה מקרים:

מקרה א: אגף ימין ממשיך להיות חיובי במהלך תנועת הכדור עד הנקודה C. במקרה זה שוויון (28) ממשיך להתקיים עד הנקודה C על ידי התאמת גודלו של N_Q. השוויון יתקיים גם במהלך ירידת הכדור מ-C ל-D, כי אז אגף ימין חוזר וגדל. במקרה זה הכדור נע על פני החישוק, כמתואר באיור 28א, כך שמסלולו הוא מעגל שלם.



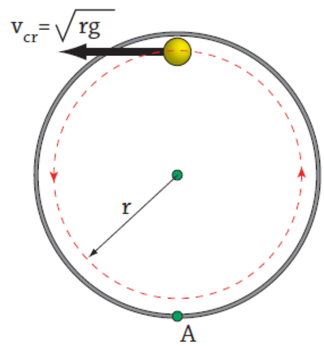
איור 29: בקטע החישוק AB לא תיתכן הנתקות של הכדור מהחישוק. בקטע מ- B עד C (ללא C) תתרחש הנתקות מיד אחרי הנקודה שבה אגף ימין של משוואה (28) מתאפס

מקרה ב: באחת הנקודות שבין B ל-C (ולא ב-C) אגף ימין של (28) מתאפס. בנקודה זו גם הכוח הנורמלי N_Q מתאפס, ושוויון (28) מתנוון לזהות 0 = 0. לכן הנקודה נמצאת עדיין על המעגל. מיד לאחר מכן, אגף ימין נעשׂה שלילי, לכן שוויון (28) אינו יכול להתקיים יותר, והכדור ניתק מן המסילה. מיד לאחר ההנתקות, הכדור נע במסלול פרבולי בהשפעת כוח הכובד בלבד, כמתואר באיורים 28ב ו-28ג. באיור 28ג מהירות הכדור ב- A היתה נמוכה מזו שבאיור 28ב, לכן ההתנתקות התרחשה בנקודה קרובה לקצה הימני של הקוטר האופקי. ההנתקות מתרחשת מיד אחרי הנקודה שבה הכוח הנורמלי, N_Q, מתאפס.

מקרה ג: התאפסות אגף ימין במשוואה (28) מתרחשת **בדיוק** בנקודה C. זה **המצב הגבולי** בין תנועה במסלול מעגלי שלם לבין הנתקות. את גודל מהירות הכדור בנקודה C, במצב זה, אפשר למצוא על פי קשר (ה): $v_C = \sqrt{rg}$. אפשר לקבל את הביטוי לגודל מהירות זו גם על ידי הצבה $N_Q = 0$ ו- $\theta = 180^\circ$ בקשר (28). גודל המהירות המתאימה למצב הגבולי מכונה **גודל המהירות הקריטית**, ומסמנים אותו ב- v_{cr}:

$$\boxed{v_{cr} = \sqrt{rg}} \qquad (29)$$

כאשר: r - רדיוס המסלול המעגלי (איור 30).



איור 30: המהירות הקריטית

לסיכום:

אם תוצאת חישוב מהירותו, v, של כדור בנקודה הגבוהה ביותר של מסלולו האנכי מקיימת:

א. $v \geq \sqrt{rg}$ אזי מסלול תנועתו של הכדור הוא מעגלי.

ב. $v < \sqrt{rg}$, אזי:

(1) אם הכדור עולה מעל הקוטר האופקי הוא ניתק מן המסלול המעגלי. הנקודה של סף ההנתקות מאופיינת בכך שהכוח הנורמלי בה מתאפס.

(2) אם הכדור אינו עולה מעל הקוטר האופקי הוא מתנודד במסלולו האנכי כמטוטלת (מתחת לרמת הקוטר האופקי).

דוגמה 13: תנועה במסלול מעגלי אנכי

כדור נח בנקודה הנמוכה ביותר A של חישוק מעגלי אנכי שמרכזו O ורדיוסו $r = 0.32\ m$. הניחו כי רדיוס הכדור קטן מאוד ביחס לרדיוס החישוק.

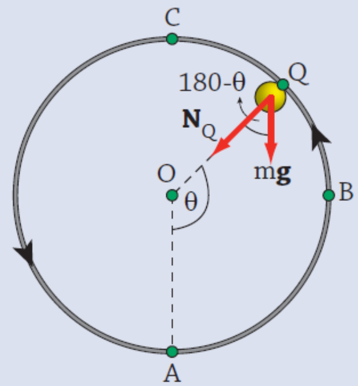
א. חשבו את גודלה של המהירות המינימלית שיש להקנות לכדור בנקודה A כדי שינוע על משטחו הפנימי של החישוק במסלול מעגלי (שלם).

מעניקים לכדור הנמצא ב-A מהירות שגודלה $3\ m/s$.

ב. האם הכדור ינוע על פני מסלול מעגלי שלם? נמקו.

ג. האם הכדור יעלה מעל קצה הקוטר האופקי? נמקו.

ד. נסמן ב-Q את הנקודה על החישוק שבה הכדור נמצא (הנקודה נעה עם הכדור), וב- θ את הזווית AOQ (איור 31). חשבו את הזווית θ שבה הכדור ניתק מן החישוק.



איור 31: תרשים כוחות של גוף בנקודה כלשהי בתנועתו לאורך מעגל אנכי

פתרון:

א. כדי שהכדור ישלים מסלול מעגלי שלם, גודל מהירותו בשיא הגובה של החישוק (נקודה שתסומן ב-C) צריך להיות גדול או שווה לגודל המהירות הקריטית. כיוון שרדיוס הכדור קטן מאוד ביחס לרדיוס החישוק, r, אפשר להניח כי בקירוב טוב רדיוס המסלול המעגלי שווה לרדיוס החישוק. גודל המהירות הקריטית:

$$v_{cr} = \sqrt{rg} = \sqrt{0.32 \cdot 10} = \sqrt{3.2}\ m/s$$

נחשב בעזרת שימור האנרגיה המכנית את גודל המהירות הדרוש לכדור ב- A, כדי שמהירותו ב-C תהיה שווה בגודלה ל-$\sqrt{3.2}\ m/s$. נבחר מישור אופקי דרך A כמישור הייחוס עבור אנרגיית הכובד. במהלך התנועה, הכוח הנורמלי הפועל על הכדור אינו מבצע עבודה, וכוח הכובד משמר. לכן האנרגיות המכניות בנקודות A ו-C שוות:

$$E_A = E_C \qquad \text{(א)}$$

האנרגיה ב-A:

$$E_A = \frac{1}{2} m v_A^2$$

האנרגיה ב-C:
$$E_C = \frac{1}{2}mv_C^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_{cr}^2 + mg2r$$

ועל-פי (א):
$$\frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_{cr}^2 + mg2r$$

פתרון המשוואה: $v_A = 4\ m/s$. כלומר: גודל המהירות המינימלית שיש להקנות לכדור בנקודה A, כדי שישלים סיבוב מעגלי שלם, הוא $4\ m/s$.

ב. אילו היו מקנים לכדור בנקודה A מהירות של $4\ m/s$ אזי מהירותו ב-C היתה המהירות הקריטית. כיוון שמקנים לו מהירות שגודלה רק $3\ m/s$, מהירותו ב-C (אילו היה מגיע לנקודה זו) היתה קטנה מהקריטית, לכן הוא לא ישלים תנועה על פני מסלול מעגלי שלם.

ג. נבטא באמצעות מסת הכדור, m, את האנרגיה המכנית הכוללת של הכדור ב-A (ביחס למישור אופקי העובר ב-A):
$$E_A = \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot 3^2 = 4.5 \cdot m$$

אם הכדור מגיע לקצה הקוטר האופקי (B) אזי אנרגיית הכובד שלו היא:
$$v_B = mgh = mgr = m \cdot 10 \cdot 0.32 = 3.2 \cdot m$$

כלומר אנרגיית הכובד ב-B נמוכה מהאנרגיה הכוללת ב-A, לכן ב-B תהיה לו גם אנרגיה קינטית, והוא יעלה מעל לקוטר האופקי.

ד. **שיקולי כוחות**: החוק השני של ניוטון לגבי הכדור בהיותו בתנועה בזווית θ כלשהי:
$$N_Q + mg\cos(180^\circ - \theta) = \frac{mv_Q^2}{r}$$

בנקודה שבה הכדור ניתק גודלו של הכוח הנורמלי הוא 0 $N_Q = 0$, לכן
$$-mg\cos\theta = \frac{mv_Q^2}{r} \qquad \text{(ב)}$$

(אגף שׂמאל חיובי כי θ זווית קהה).

שיקולי אנרגיה: גובהה של הנקודה Q מעל מרכז המעגל הוא $r\cos(180^\circ - \theta)$, ומעל מישור הייחוס הוא $r + r\cos(180^\circ - \theta) = r[1 + \cos(180^\circ - \theta)]$.

שימור האנרגיה בין הנקודות Q ו-A:
$$\frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_Q^2 + mgr[1 + \cos(180^\circ - \theta)] \qquad \text{(ג)}$$

פתרון משוואות (ב) ו-(ג): $\theta = 105.7^\circ$.

5. היבטים אנרגטיים בתרחישים שבהם התנע נשמר

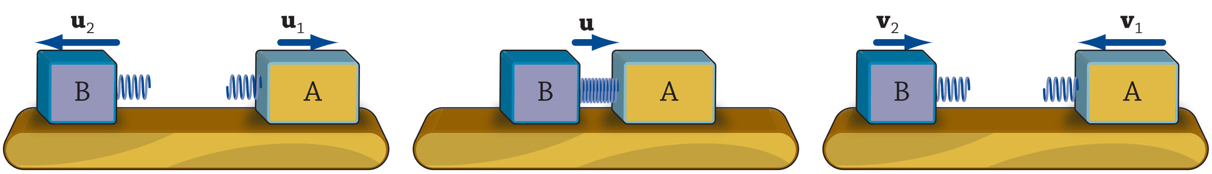
בסעיף 3 שבפרק ו עסקנו בתרחישים שבהם התנע נשמר, בעיקר בהתנגשויות. נרחיב עתה את הדיון להיבט האנרגטי של התרחישים.

5.1 התנגשויות אלסטיות

א. הגדרת ההתנגשות האלסטית

כאשר גופים מתנגשים, הם מפעילים כוחות האחד על האחר. יש גופים שכוחות אלה הם **משמרים**. במהלך ההתנגשות הגופים מתעוותים למשך שבריר שנייה (מתכווצים), וחלק מן האנרגיה הקינטית שלהם (או כולה) נאגר כאנרגיה פוטנציאלית אלסטית. מיד בתום ההתנגשות הגופים חוזרים לצורתם המקורית (לאורכם המקורי), והאנרגיה הפוטנציאלית מומרת במלואה חזרה לאנרגיה קינטית. התנגשות כזו מכונה **התנגשות אלסטית**.

איור 32 מתאר מודל לעיוות שמתרחש בהתנגשות אלסטית. על פי מודל זה הגופים באזורי המגע מתכווצים במהלך ההתנגשות כאילו היו קפיצים. במקום לומר **שהגופים** מתכווצים, נאמר שבאזורי המגע יש **קפיצים** והם אלה שמתכווצים, וכי בתום ההתנגשות הם חוזרים לאורכם המקורי. הסתכלות זו נועדה להמחיש ולחדד את מה שקורה במהלך התנגשות אלסטית.



ג. לאחר ההתנגשות | ב. בשיא ההתנגשות (לשני הגופים אותה מהירות **u**) | א. לפני ההתנגשות

איור 32: מודל להתנגשות אלסטית בין גופים

התנגשויות בין שני כדורי פלדה או בין שני כדורי ביליארד משנהב הן בקירוב טוב אלסטיות.

הגדרת המושג "**התנגשות אלסטית**" (elastic collision):

התנגשות בין גופים מכונה אלסטית אם כוחות האינטראקציה בין שני הגופים הם משמרים. במילים אחרות, אם האנרגיה הקינטית הכוללת לפני ההתנגשות שווה לזו שאחרי ההתנגשות.

בלשון מתמטית:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2=\frac{1}{2}m_1u_1^2+\frac{1}{2}m_2u_2^2 \qquad (30)$$

כאשר: m_1 , v_1 , u_1 - מסת הגוף הראשון, מהירותו לפני ההתנגשות ומהירותו לאחר ההתנגשות;
m_2 , v_2 , u_2 - מסת הגוף השני, מהירותו לפני ההתנגשות ומהירותו לאחר ההתנגשות.

ב. התנגשות אלסטית חד-ממדית

מה מאפיין את תוצאת ההתנגשות?

כיוון שלא פועלים כוחות חיצוניים, התנע של המערכת נשמר:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2 \qquad (31)$$

גם האנרגיה הקינטית הכוללת נשמרת:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 \qquad (32)$$

נרשום את משוואה (31) כך שהגדלים המתייחסים לגוף הראשון (עם אינדקס 1) יופיעו באגף שׂמאל, ואלה המתייחסים לגוף השני (עם אינדקס 2) יופיעו באגף ימין:

$$m_1(v_1 - u_1) = m_2(u_2 - v_2) \qquad (\text{א})$$

לאחר שנבצע פעולות דומות על משוואה (32) ונכפול אותה ב-2 נקבל:

$$m_1(v_1^2 - u_1^2) = m_2(u_2^2 - v_2^2) \qquad (\text{ב})$$

נפרק את הביטויים שבסוגריים המופיעים בנוסחה (ב) לפי הזהות $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, ונחלק את המשוואה המתקבלת במשוואה (א). פעולת חילוק זו מותרת בתנאי שהמכנה אינו אפס. תנאי זה מתקיים, כי בהתנגשות בין גופים מופעל על כל כדור כוח, לכן מהירותו משתנית. תוצאת חילוק המשוואות:

$$v_1 - v_2 = -(u_1 - u_2) \qquad (33)$$

מהירות יחסית בהתנגשות אלסטית חד-ממדית:

בהתנגשות כזו מהירות ההתקרבות לפני ההתנגשות שווה למהירות ההתרחקות לאחר ההתנגשות.

בניסוח מתמטי:

$$v_1 - v_2 = -(u_1 - u_2) \qquad (33')$$

הערות:

1. את המהירויות המופיעות במשוואה (33) יש להציב עם הסימנים האלגבריים המתאימים. במשוואה (32) אין לכך חשיבות, כי כאשר מעלים מהירות בריבוע מתקבל גודל חיובי. כלומר במשוואה (33) מדובר במהירויות, ובמשוואה (32) בגדלי מהירויות.
2. $v_1 - v_2$ שבמשוואה (33) מבטא את המהירות של גוף 1 ביחס לגוף 2 לפני ההתנגשות (כלומר $v_{1,2} = v_1 - v_2$; ראה פרק א נוסחה (14)), ו-$u_1 - u_2$ מבטא גודל זה לאחר ההתנגשות (כלומר $u_{1,2}$). משוואה (33) קובעת כי המהירות היחסית מחליפה כיוון בעקבות ההתנגשות, אולם גודלה אינו משתנה. במילים אחרות, מהירות **ההתקרבות** של שני הגופים לפני ההתנגשות שווה למהירות **ההתרחקות** לאחר ההתנגשות. הסימן השלילי במשוואה נובע מכך שבעקבות ההתנגשות התקרבות הופכת להתרחקות. לדוגמה: אם גוף 1 **מתקרב** לגוף 2 במהירות שגודלה 10 מ'\ש', אזי לאחר ההתנגשות האלסטית הוא **יתרחק** מגוף 2 במהירות שגודלה 10 מ'\ש'.

דוגמה 14: התנגשות אלסטית חד-ממדית

גוף שמסתו $m_1 = 2\ kg$ נע ימינה במהירות שגודלה $6\ m/s$ ומתנגש התנגשות מצח אלסטית בגוף שמסתו $m_2 = 6\ kg$, אשר נע שׂמאלה במהירות שגודלה $4\ m/s$. חשב את מהירויות הגופים לאחר ההתנגשות.

פתרון:

כיוון שההתנגשות היא התנגשות מצח, לפנינו התנגשות חד-ממדית, (ראה גם פרק ו סעיף 3.1 א). נבחר ציר מקום שכיוונו החיובי ימינה. ביחס לציר זה מהירות הגוף הראשון היא $v_1 = 6\ m/s$, ומהירות הגוף השני היא $v_2 = -4\ m/s$.

חוק שימור התנע:
$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2$$

נציב במשוואה את הנתונים:
$$2 \cdot 6 + 6 \cdot (-4) = 2u_1 + 6 \cdot u_2 \qquad \text{(א)}$$

זו משוואה בשני נעלמים. כדי למצוא אותם נדרשת משוואה נוספת. ההתנגשות אלסטית, לכן נוכל להשתמש במשוואת שימור האנרגיה הקינטית כמשוואה השנייה. אולם, נוח יותר להשתמש במשוואה (33) שהתקבלה משילוב אלגברי של משוואות שימור תנע ושימור אנרגיה קינטית.

$$v_1 - v_2 = -(u_1 - u_2)$$

ואחרי הצבה:
$$6 - (-4) = -(u_1 - u_2) \qquad \text{(ב)}$$

פתרון מערכת משוואות (א) ו-(ב): $u_1 = -9\ m/s \quad ; \quad u_2 = 1\ m/s$. כלומר הגוף הראשון נע לאחר ההתנגשות שׂמאלה במהירות שגודלה $9\ m/s$, והגוף השני נע ימינה במהירות שגודלה $1\ m/s$.

בהתנגשות אלסטית חד-ממדית נוח להשתמש **בנוסחת שימור התנע ובנוסחה (33׳)**.

ג. הערות לגבי התנגשות אלסטית בשני ממדים

בהתנגשות אלסטית בשני ממדים נוכל להשתמש בשלוש משוואות: **שימור רכיבי תנע בכיוון ציר x, שימור רכיבי תנע בכיוון ציר y, ושימור אנרגיה קינטית**.

המהירות היחסית בהתנגשות אלסטית בשני ממדים

מנוסחה (33׳) עולה כי בהתנגשות חד-ממדית גדלי המהירויות היחסיות של כל אחד מהגופים לפני ההתנגשות ואחריה שווים, וכי המהירות היחסית של כל גוף מחליפה כיוון.

בהתנגשות אלסטית **בשני ממדים** אי אפשר לקבוע לאיזה כיוון ינועו הגופים לאחר ההתנגשות ללא מידע נוסף, אך אפשר להראות (נעשׂה זאת בפרק ג בספר "מערכות ייחוס") כי גודל המהירות היחסית לאחר ההתנגשות שווה לגודל המהירות היחסית לפני ההתנגשות. לדוגמה, אם שני גופים נעים לפני התנגשותם לאורך ציר x, האחד ימינה במהירות שגודלה 4 מ׳\ש׳ והשני שׂמאלה במהירות שגודלה 6 מ׳\ש׳. גודל המהירות היחסית ביניהם הוא 10 מ׳\ש׳ ($10 = |6 - (-4)|$). גם לאחר ההתנגשות גודל המהירות היחסית יהיה 10 מ׳\ש׳, אולם לא נוכל לקבוע את כיוונה.

ד. העברה של כל האנרגיה הקינטית מגוף אחד למשנהו בהתנגשות אלסטית

האנרגיה המכנית של מערכת גופים נשמרת בהתנגשות אלסטית, אך מתחלקת מחדש בין שני הגופים. נוכל לדאוג שהחלוקה של האנרגיה בהתנגשויות אלסטיות תהיה לפי רצוננו. לעתים אנו מעוניינים **בהעברה של כל האנרגיה הקינטית מגוף אחד לגוף שני**. נציג שתי דרכים להגשים זאת:

דרך ראשונה להעברת כל האנרגיה הקינטית בהתנגשות אלסטית:

כאשר גוף אחד נע ומתנגש אלסטית בגוף אחר נח שמסתו שווה למסת הגוף הראשון וההתנגשות היא חד-ממדית (איור 33), אזי לאחר ההתנגשות הגוף הפוגע נעצר, והגוף השני יוצא לדרך עם אותה מהירות שהיתה לגוף הראשון לפני ההתנגשות (ראה תרגיל 34).

א. לפני ההתנגשות   ב. אחרי ההתנגשות

איור 33: גוף המתנגש אלסטית וחד-ממדית בגוף נח בעל מסה שווה, נעצר, והגוף השני יוצא לדרך עם אותה מהירות כמו שהיתה לגוף הראשון

אם מסות הגופים אינן שוות, אזי הגוף הפוגע אינו נעצר, והוא שומר על חלק מן האנרגיה שלו.

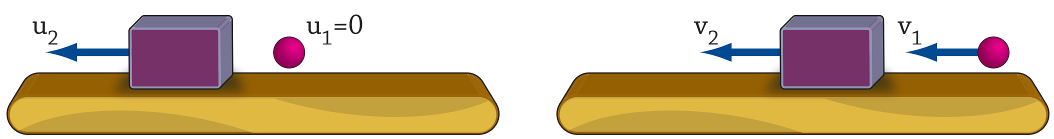
דרך שנייה להעברת כל האנרגיה הקינטית בהתנגשות אלסטית:

גוף גדול נע ללא חיכוך על משטח אופקי. משליכים בעקבותיו כדורי גומי קטנים, המתנגשים בו אלסטית.

מה צריכה להיות מהירות כדורי הגומי כדי שהם "יעצרו" לאחר ההתנגשות (איור 34) כלומר, יעבירו את מלוא האנרגיה שלהם לגוף הגדול?

נסמן: m_1, v_1, u_1 - מסת כדור קטן, מהירותו לפני ההתנגשות, מהירותו לאחר ההתנגשות

m_2, v_2, u_2 - מסת הגוף הגדול, מהירותו לפני ההתנגשות, מהירותו לאחר ההתנגשות



א. לפני ההתנגשות   ב. אחרי ההתנגשות

איור 34: גוף זעיר מתנגש אלסטית בגוף גדול. כדי שהגוף הזעיר יעביר את מלוא האנרגיה לגוף הגדול, מהירותו צריכה להיות גדולה כפליים ממהירות הגוף הגדול.

על-פי חוק שימור התנע: $m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2$ (א)

על-פי נוסחה (33): $v_1 - v_2 = -(u_1 - u_2)$ (ב)

ממשוואות (א) ו-(ב) נקבל (לאחר שנציב $u_1 = 0$):

$$u_2 = \frac{m_2 + m_1}{m_2 - m_1} v_2 \qquad \text{(ג)}$$

$$v_1 = \frac{2m_2}{m_2 - m_1} v_2 \qquad \text{(ד)}$$

עתה ניקח בחשבון כי $m_2 >> m_1$. בפתרון (ג) נוכל להזניח הן במכנה והן במונה את m_1 ביחס ל-m_2 (מעשית - נמחק את m_1 מ-(ג)). בפתרון (ד) נעשה אותו דבר לגבי המכנה. בקירוב זה, פתרונות (ג) ו-(ד) יהיו:

$$u_2 \approx v_2 \qquad\qquad v_1 \approx 2v_2$$

≈ מסמן שוויון מקורב. מצאנו אפוא כי מהירות כדורי הגומי צריכה להיות בקירוב כפולה ממהירות הגוף הגדול.

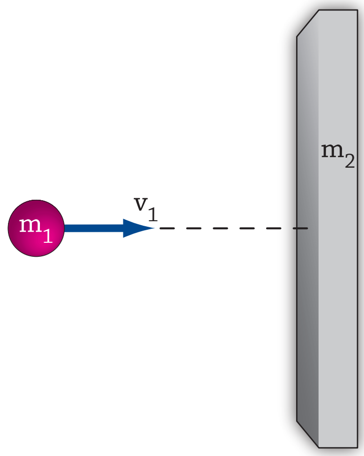
ה. התנגשות אלסטית של כדור בקיר

נדון במצב הבא:

כדור שמסתו m_1 נע במהירות v_1, ומתנגש אלסטית בקיר (נח), בכיוון ניצב לקיר (איור 35).

האם הכדור מעביר לקיר תנע? האם הוא מעביר לו אנרגיה?

תחילה נניח שהקיר אינו מחובר לרצפה, אלא מונח עליה, ושאין חיכוך בינו לבין הרצפה. בנוסף לכך נניח בשלב זה שמסת הקיר אינה גדולה מאוד ביחס למסת הכדור. נסמן את מסת הקיר ב-m_2.



איור 35: כדור מתנגש אלסטית עם קיר בכיוון ניצב לקיר

על-פי שימור התנע (ועל סמך הנתון כי $v_2 = 0$):

$$m_1v_1 + 0 = m_1u_1 + m_2u_2 \qquad \text{(א)}$$

ההתנגשות אלסטית. לכן:

$$v_1 - 0 = -(u_1 - u_2) \qquad \text{(ב)}$$

הפתרונות של מערכת משוואות (א) ו-(ב):

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \qquad \text{(ג)} \qquad\qquad u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \qquad \text{(ד)}$$

עתה ניקח בחשבון שהקיר מחובר אל כדור הארץ, לכן המסה m_2 מייצגת את מסת הקיר יחד עם כדור הארץ וכמובן מתקיים עתה $m_1 << m_2$.

הערה לגבי מערכת הייחוס: המהירויות $\mathbf{v}_1$ ו- $\mathbf{u}_1$ נמדדות ביחס למערכת ייחוס ה"צמודה" לארץ (לכן $\mathbf{u}_2 = 0$). אם מהירות הקיר יחד עם כדור הארץ משתנתה בעקבות ההתנגשות, אפילו רק באופן סימלי, מערכת הייחוס הנכונה היא מערכת הייחוס **שהיתה צמודה לכדור הארץ לפני ההתנגשות**. אם נמדוד את $\mathbf{v}_2$ ו- $\mathbf{u}_2$ ביחס למערכת ייחוס הצמודה לארץ לאחר שמהירותה השתנתה, הרי שהחלפנו מערכת ייחוס, וזה אינו "חוקי".

בפתרון (ג) נוכל להזניח הן במכנה והן במונה את m_1 ביחס ל-m_2. בפתרון (ד) נעשה אותו דבר לגבי המכנה. בקירוב זה, פתרונות (ג) ו-(ד) יהיו:

$$u_1 \approx - v_1 \qquad \text{(ה)} \qquad\qquad u_2 \approx \frac{2m_1}{m_2} v_1 \qquad \text{(ו)}$$

השוויון המקורב הופך מלא בגבול שבו $m_2 \to \infty$ (כלומר המסה m_2 שואפת לאינסוף), ומתקיים:

$$u_1 \to - v_1 \qquad\qquad u_2 \to 0 \qquad \text{(ו)}$$

ההצדקה לכך שרשמנו $m_2 \to \infty$ היא שהמסה m_2 כוללת את הקיר יחד עם כדור הארץ, ומסה זו יכולה להחשב כמובן כ"אינסופית" ביחס למסת הכדור.

חשוב להבין כי למרות שאי אפשר להבחין בתנועת הקיר, באופן עקרוני מהירותו אינה ממש אפס. לו מהירות הקיר היתה ממש אפס, גם התנע שלו היה ממש אפס. אך ברור לנו כי הקיר קיבל תנע בעת האינטראקציה, בדיוק בשיעור שבו הכדור הפסיד תנע. שינוי התנע של הכדור הוא

$$m_1 u_1 - m_1 v_1 = m_1(-v_1) - m_1 v_1 = - 2m_1 v_1$$

ומכאן שהקיר קיבל תנע בשיעור $2m_1v_1$. הקיר קיבל תנע בשיעור כפול מזה שהיה לכדור לפני ההתנגשות. למרות זה מהירותו זניחה, מפני שהמסה (של הקיר וכל מה שקשור אליו) גדולה מאוד.

כל האנרגיה נותרת אצל הכדור (מדוע?), מכאן שהקיר לא קיבל אנרגיה. האם אין הדבר מחייב שמהירותו תישאר אפס ממש? נבדוק זאת: התנע שהקיר קיבל הוא $2m_1v_1$, ולכן מהירותו היא $2m_1v_1/m_2$ (ראה גם לקשר (ו) לעיל). מהירות זו אינה ממש אפס אך היא זניחה ביחס למהירות הכדור. האנרגיה הקינטית המתאימה היא:

$$E_{k2,f} = \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{2m_1 v_1}{m_2}\right)^2 = 4\frac{m_1}{m_2} E_{k1,i}$$

אנרגיה זו אינה ממש אפס, אך היא זניחה ביחס לאנרגיה הכוללת.

תוצאות התנגשות אלסטית של כדור בקיר:

כאשר כדור מתנגש אלסטית בקיר בניצב אליו, הקיר מקבל מהירות ואנרגיה זניחים (ביחס לאלה של הכדור הפוגע), אך התנע שהוא מקבל אינו זניח כלל - הוא כפול מן התנע של הכדור הפוגע.

5.2 התנגשויות אי-אלסטיות

א. המרת אנרגיה קינטית לאנרגיה פנימית

כאשר גופים מתנגשים, האנרגיה הקינטית הכוללת של הגופים לאחר ההתנגשות היא לרוב (פרט למקרה של התנגשויות אלסטיות) **קטנה** מזו שלפני ההתנגשות. התנגשויות שבהן האנרגיה הקינטית קטֵנה מכונות **התנגשויות אי-אלסטיות** (Inellastic Collisions).

לאן "נעלמת" אנרגיה קינטית בהתנגשויות אי-אלסטיות?

כתוצאה מהתנגשות יכולים להתרחש כמה שינויים בגופים המתנגשים. **שינוי שכיח אחד הוא עליית הטמפרטורה** שלהם. אמנם בהתנגשות רגילה בין כדורים, שיעור עליית הטמפרטורה הוא כה זעיר, עד כי אי אפשר להבחין בו, אלא רק באמצעות תרמומטר רגיש. לעומת זאת, אם נקיש בחוזקה בפטיש כמה פעמים על מסמר, נצליח לחוש בעליית הטמפרטורה של המסמר, אף ללא מכשיר מדידה מיוחד אלא רק על ידי נגיעה במסמר באצבעותינו.

את העלייה בטמפרטורה אפשר לתאר במונחים של אנרגיה (נושא זה לא יוסבר בפרק הנוכחי). כאשר הטמפרטורה של גוף עולה, אומרים שיש עלייה ב**אנרגיה הפנימית** של הגוף, כלומר עלייה באנרגיה של החלקיקים המרכיבים את הגוף. עליית הטמפרטורה של הגוף גורמת בדרך כלל לכך שטמפרטורת הגוף גבוהה מטמפרטורת הסביבה. במצב זה מתרחש תהליך משני: אנרגיה פנימית של הגופים המתנגשים מומרת לאנרגיה פנימית של הסביבה (של האוויר).

הגדרת המושג "**חום**" (Heat):

חום הוא אנרגיה שעוברת מגוף חם לגוף קר יותר כתוצאה מהפרש טמפרטורות בין הגופים.

האנרגיה ה"נמצאת" בגוף החם נקראת אנרגיה פנימית. גם החלק שעבר לגוף שהיה קר הופך לחלק מהאנרגיה הפנימית שלו. אולם **במעבר** מהגוף החם לקר האנרגיה נקראת חום. כלומר חום זו אנרגיה במעבר.

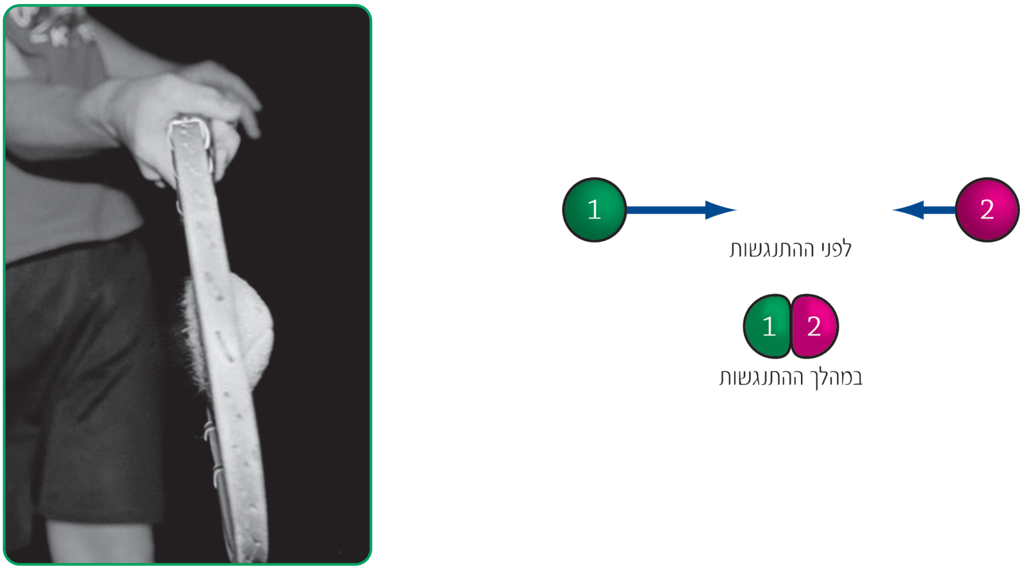
לעיתים מתנסחים בצורה לא מדוייקת ואומרים, שבהתנגשות אי-אלסטית אנרגיה קינטית של הגופים המתנגשים מומרת לחום. כאשר מדייקים בניסוח אומרים שאנרגיה קינטית מומרת באנרגיה פנימית של הגופים המתנגשים, ואנרגיה פנימית זו מומרת לאנרגיה פנימית של הסביבה. נסכם:

אובדן אנרגיה קינטית בהתנגשות אי-אלסטית:

בהתנגשות אי-אלסטית אנרגיה קינטית של הגופים המתנגשים מומרת לאנרגיה פנימית, שעשוייה להתבטא בעלייה בטמפרטורה.

האם במהלך התנגשות אי-אלסטית, במקביל לעליה באנרגיה הפנימית, יכול להתרחש שינוי בנוסף לעליית הטמפרטורה?

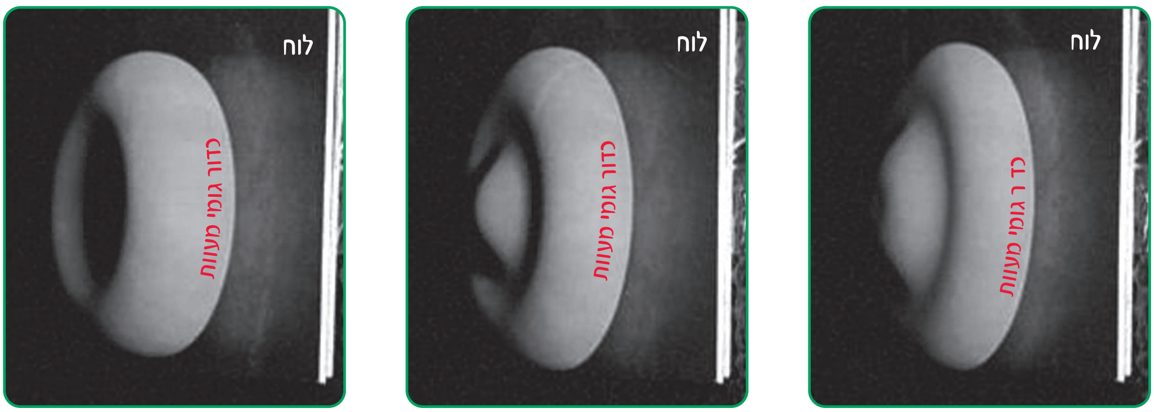
בנוסף לעלייה בטמפרטורה יכול להתרחש **עיוות** במשטח הפָנים של הגופים המתנגשים. באיור 36א מוצג עיוות בשני גופים מתנגשים. באיור 36ב מוצג עיוות במחבט טניס ובכדור טניס המתנגשים.



א. התנגשות שני גופים
ב. התנגשות כדור טניס במחבט

איור 36: עיוותים המתרחשים בגופים במהלך התנגשות.

באיור 37 מתואר כדור גומי במהלך התנגשותו בלוח, בשלושה זמנים סמוכים. רואים בעליל כי במהלך ההתנגשות הכדור מתעוות.



א. מעט אחרי תחילת ההתנגשות
ב. ברגע מאוחר יותר
ג. בשיא העיוות של הכדור

איור 37: התנגשות כדור גומי עם לוח

האם העיוות נותר לאחר שהגופים נפרדים זה מזה?

הדבר תלוי בתכונות החומרים שמהם הגופים עשׂויים. גופים עשויים מחומרים גמישים (אלסטיים) חוזרים לצורתם המקורית; גופים העשויים מחומרים פלסטיים, כגון פלסטלינה, אינם חוזרים לצורתם המקורית, **ונשארים מעוותים**. ככל שהחומר פחות אלסטי נותר בו יותר מן העיוות, ואנרגיה קינטית של הגופים המתנגשים עשויה להיות מומרת לאנרגיה הקשורה בעיוות הגופים.

ב. התנגשות פלסטית

בפרק ו עסקנו בהתנגשות פלסטית (התנגשות שבה שני הגופים נצמדים זה לזה בעקבות ההתנגשות).

האם האנרגיה הקינטית נשמרת בהתנגשות פלסטית?

תשובה מהירה נקבל עבור המקרה שבו שני גופים נעים עם תנעים מנוגדים זה לקראת זה, מתנגשים, ובעקבות ההתנגשות נעצרים. במקרה זה **כל האנרגיה המכנית אובדת** בעקבות ההיצמדות, תוך גידול של האנרגיה הפנימית.

נראה זאת עתה באופן כללי יותר:

נניח כי גוף שמסתו m_1 ומהירותו v_1 מתנגש פלסטית בגוף שמסתו m_2 ומהירותו $v_2 = 0$. המהירות המשותפת לאחר ההתנגשות תסומן ב- u.

מתוקף חוק שימור התנע:

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)u$$

מכאן:

$$u = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

האנרגיות הקינטיות E_i ו-E_f לפני ואחרי ההתנגשות, הן, בהתאמה:

$$E_i = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$$

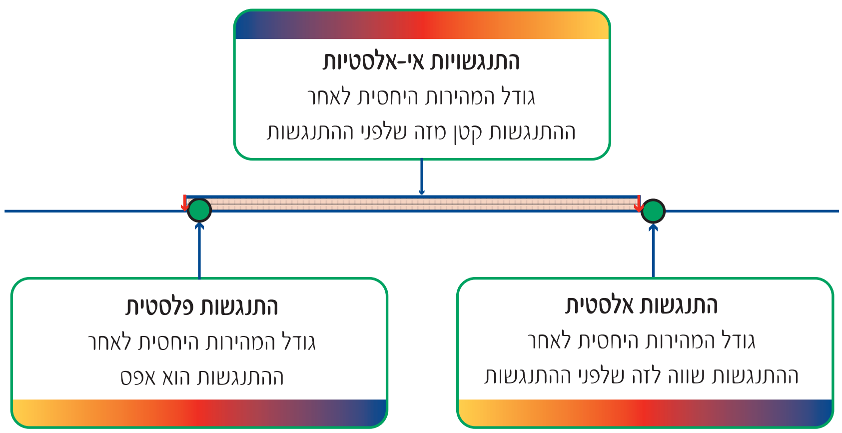
$$E_f = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)$$

מכאן:

$$\frac{E_f}{E_i} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} < 1$$

כלומר **בהתנגשות פלסטית האנרגיה הקינטית הכוללת פוחתת**.

התנגשות אלסטית היא מקרה גבולי (איור 38) שבו אנרגיה קינטית אינה מומרת כלל לאנרגיה פנימית וכל גוף שומר על גודל המהירות היחסית שלו ביחס לגוף האחר. בדרך כלל חלק מן האנרגיה הקינטית מומרת לאנרגיה פנימית. במקרים כאלה המהירות היחסית אינה שומרת על גודלה. התנגשות פלסטית היא מקרה גבולי מנוגד, המתקבל כאשר המהירות היחסית יורדת לאפס בעקבות ההתנגשות.



איור 38: סוגי התנגשויות

דוגמה 15: התנגשות פלסטית

גוף שמסתו m נע במהירות v_1 ומתנגש פלסטית בגוף נח שמסתו 2m.

א. בטאו באמצעות נתוני השאלה את המהירות הסופית.

ב. מצאו איזה חלק מן האנרגיה המכנית ההתחלתית מהווה האנרגיה המכנית הסופית.

פתרון:

א. נסמן ב-u את המהירות המשותפת לאחר ההתנגשות.

משוואת שימור התנע:

$$mv_1 + 0 = (m + 2m)u \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{3}v_1$$

ב. האנרגיה המכנית הכוללת בהתחלה: $E_i = \frac{1}{2}mv_1^2$

האנרגיה המכנית הכוללת בסוף: $E_f = \frac{1}{2}3mu^2 = \frac{1}{2}3\left(\frac{v_1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}E_i$

כלומר: שליש מן האנרגיה המכנית המקורית נותר. שאר האנרגיה מומרת לאנרגיה פנימית בגופים המתנגשים.

5.3 רתע

בהתנגשות אלסטית האנרגיה הקינטית לאחר ההתנגשות שווה לזו שלפניה. ככל שההתנגשות פחות אלסטית - אחוז קטן יותר מהאנרגיה הקינטית נשאר לאחר ההתנגשות.

לעומת תהליכים אלה, בתופעת הרתע (פרק ו' סעיף 3.2) - האנרגיה הקינטית לאחר ההתנגשות **גדולה** מזו שלפניה.

לדוגמה, קליע נורה מרובה. מקורן של האנרגיות הקינטיות של הקליע ושל הרובה לאחר הירי הוא באנרגיה הכימית שהיתה אגורה באבק השריפה שבתוך תרמיל הכדור.

6. הספק ונצילות

6.1 הספק

נניח כי אדם מרים גוף לגובה 1 מטר, כשהוא מפעיל עליו כוח קבוע בן 50 ניוטון. עבודת הכוח שהאדם מפעיל שווה ל-50 ג'אול, ללא תלות במשך הזמן שבו האדם מבצע את הפעולה. אין זה משנה, לצורך חישוב העבודה, אם הפעולה בוצעה במשך חמש שניות, חמש דקות, או במשך עשירית השנייה.

במקרים רבים יש חשיבות **לקצב שבו נעשית עבודה**. גודל זה מכונה **הספק**.

הגדרת המושג **"הספק ממוצע"** (average Power):

ההספק הממוצע, $\bar{P}$, של כוח מוגדר כיחס בין העבודה ΔW שנעשית על ידי הכוח בפרק זמן מסוים Δt, לבין פרק הזמן.

בנוסחה:

$$\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \qquad (34)$$

אם קצב עשיית העבודה קבוע, מכונה היחס הרשום בנוסחה (34) בשם "**הספק**":

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} \qquad (35)$$

הספק הוא **גודל סקלרי**, כיוון שהוא מוגדר כיחס בין שני גדלים סקלריים.

כיוון שעבודה היא תהליך המרת אנרגיה, גם ההספק הוא הקצב שבו אנרגיה מומרת.

על-פי הקשר (34), ההספק נמדד בג'אולים לשנייה. יחידה זו נקראת בקיצור וָט, על שמו של המהנדס הסקוטי **ג'יימס וט** (James Watt, 1736-1819). וט טבע את יחידת ההספק "כוח-סוס" (ראו טבלה 2 להלן), אך היחידה התקנית כיום נקראת על שמו.

פרוש המשפט "ההספק שווה ל-10 וט" הוא: בכל שנייה מבוצעת עבודה בת 10 ג'אול.

הגדרת יחידת ההספק **"וט"** (Watt):

1 וט (1 W) הוא ההספק של תהליך שבו במשך שנייה אחת נעשית עבודה של 1 ג'אול.

כאשר מדובר בהספק גבוה, נוח להשתמש ביחידות הנגזרות מהיחידה **וָט**: **קילוֹוָט** - $1\ kW = 10^3\ W$ או מֶגָוָט - $1\ MW = 10^6\ W$. יחידות הספק שאינן שייכות למערכת SI, אך עדיין נהוגות, מוצגות בטבלה 2.

יחידות הספק	ערכן ב-W
כוח-סוס מטרי	736
כוח-סוס בריטי (גם באה"ב)	746

טבלה 2: יחידות הספק שאינן נגזרות מיחידות SI.

את צריכת החשמל בבתינו מודדת חברת החשמל ביחידת אנרגיה המקובלת בשימוש מסחרי, אשר נקראת **קילוֹוט־שעה** (קוט"ש - kWh). יחידה זו אינה שייכת למערכת היחידות התקנית SI.

על-פי הגדרה (34) עבודה (או אנרגיה) שווה למכפלת ההספק במשך הזמן.

1 **קוט"ש** הוא האנרגיה החשמלית הנצרכת על-ידי מכשיר שהספקו 1 קילוֹוט (1000 וט) במשך שעה אחת.

נחשב את הקשר בין קוט"ש לבין ג'אול:

$$\Delta W = P\Delta t \quad \Rightarrow \quad 1\,\text{kWh} = 1\,\text{kW} \cdot 1\,\text{h} = 10^3\,\text{W} \cdot 3600\,\text{s} = 3.6 \cdot 10^6\,\text{J}$$

כלומר קוט"ש אחד שווה ל-3.6 מגה-ג'אול. נדגיש כי קוט"ש היא יחידת אנרגיה, **ולא** יחידת הספק.

עבור המקרים שבהם קצב עשׂיית עבודה משתנה, נגדיר את **ההספק הרגעי**:

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} \qquad (36)$$

או בצורת כתיבה מקובלת יותר:

$$P = \frac{dW}{dt} \qquad (36')$$

כלומר נגזרת הפונקציה W(t) לפי t.

כאשר כוח פועל על גוף נע, הוא מבצע עבודה על הגוף (פרט למקרה שבו הכוח והמהירות מאונכים זה לזה). את ההספק אפשר לבטא על פי הכוח והמהירות.

נניח שגוף נע במהירות v לאורך קו ישר, ו- $\mathbf{F}$ הוא אחד הכוחות הפועלים על הגוף, אשר יוצר זווית θ עם ההעתק $\Delta\mathbf{x}$. נפתח ביטוי עבור הספק הכוח:

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{|\mathbf{F}|\cos\theta\,|\Delta\mathbf{x}|}{\Delta t} = Fv\cos\theta$$

$$\boxed{P = Fv\cos\theta} \qquad (37)$$

6.2 נצילות

מכוֹנות אינן יעילות ב-100%; האנרגיה הנפלטת ממכונה לצורך מטרותינו נמוכה מזו המושקעת בה. היתר מתבזבז, בגלל חיכוך או מסיבות אחרות.

לדוגמה, נורה נועדה להאיר. אנו מספקים לנורה אנרגיה חשמלית, והיא ממירה חלק מאנרגיה זו לאור. האנרגיה שנושׂא האור מכונה **אנרגיית קרינה**. אולם, יתר האנרגיה נפלט כחום ואינו תורם להארה. הפקת חום אינה מטרת הנורה, לכן הוא נחשב לאנרגיה מבוזבזת כאשר מדובר בשימוש בנורה. דוגמה אחרת היא מכונית; מכונית נועדה לנסוע (אנרגיה קינטית).

נסמן **אנרגיה מועילה** שנפלטת בפרק זמן Δt ב-E_{eff} (eff - קיצור של effective - מועיל).

נסמן את **האנרגיה המושקעת** במכונה בפרק הזמן Δt ב- E_{in}. בנורה חשמלית למשל, זו האנרגיה החשמלית המסופקת לנורה. במכונית - זו האנרגיה הכימית שמשתחררת בתהליך שריפת הדלק.

תפקיד מכשירים ומכונות הוא להמיר אנרגיה משוקעת, E_{in}, לאנרגיה המועילה E_{eff} כמתואר באיור 39.

תהליך המרה של אנרגיה אף פעם אינו מושלם - תמיד יש אנרגיה מבוזבזת בשיעור $E_{in} - E_{eff}$ (איור 39). בנורה חשמלית למשל, סוג האנרגיה המבוזבז הוא החום הנפלט מהנורה לסביבה.

איור 39: המרות אנרגיה על ידי מכונה

המדד ליעילות המרת האנרגיה מבחינתנו הצרכנים, הוא היחס E_{eff} / E_{in} שמשמעותו איזה חלק מהאנרגיה המשוקעת מהווה האנרגיה המועילה. אפשר לבטא נצילות גם כיחס בין הספק המועיל P_{eff} להספק המושקע, P_{in}. מקובל לבטא את הנצילות באחוזים, ואז יש לכפול את היחס P_{eff} / P_{in} ב-100.

הגדרת המושג **"נצילות"** (efficiency):

הנצילות, η (קרא: אֶטָה), של מכונה היא השיעור (החֵלק) שמהווה הספק פליטת האנרגיה מהסוג המועיל, P_{eff}, מכלל ההספק המושקע במכונה, P_{in}.

בנוסחה:

$$\eta = \frac{P_{eff}}{P_{in}} \cdot 100 \qquad (38)$$

6.3 ג'יימס וט - האדם והמהנדס

במאה ה-18 אנשים הבינו שאפשר לבצע עבודה בעזרת חום, והם ניסו לענות על השאלה: "כיצד אפשר להמיר חום לעבודה בצורה יעילה?"

בשנת 1732 בנה נפח אנגלי בשם ניוקומב (Newcombe) את משאבת הקיטור המסחרית הראשונה. משאבה זו פעלה בהצלחה בשאיבת מים במכרות. עיקרון פעולתה היה פשוט, והוא התבסס על הידע - שאז היה חדש יחסית - על כוחו הגדול של הלחץ האטמוספרי. בוכנה גדולה הוצבה בתוך גליל סגור, כשהחלל הנמצא בצדה האחד מלא בקיטור. צינון הקיטור גרם לעיבויו והפיכתו למים, והותיר בחלל הזה כמעט ריק. כתוצאה מכך - ללחץ האטמוספרי בצדה האחר של הבוכנה לא הייתה התנגדות בצדה השני, והוא דחף את הבוכנה בעוצמה מרשימה. הבוכנה חוברה למשאבה, שהעלתה את המים ממעמקי המכרה. מנועי ניוקומב רבים נבנו ושימשו באותה תקופה, אף על פי שהם לא היו יעילים, וצרכו כמויות גדולות מאוד של פחם ליצירת הקיטור.

בשנת 1764 נתבקש ג'יימס וט - שעבד באוניברסיטת גלאזגו כ"יצרן מכשירים מתמטיים" – לשפר את מנוע ניוקומב. וט תפס מייד שבמכונה זו לא השתבש דבר, אלא העיקרון שעליו היא מבוססת לא היה יעיל. בשנת 1765 רשם את ההמצאה הגדולה ביותר שלו, שהגדילה את נצילותם של מנועי קיטור באחוזים רבים. וט הבין שרוב החום הנוצר במנוע ניוקומב מבוזבז על חימום הבוכנה ודפנות הגליל בכל אחד ממחזורי הפעולה, מפני שאחרי ההתחממות צריך לחזור ולצנן אותם, כדי לעבות את הקיטור. במנוע של וט, לעומת זאת, הבוכנה והגליל נשארים חמים כל הזמן, והקיטור מתעבה במיכל נפרד, שנשאר קר כל הזמן. המים במצבם הנוזלי צריכים להפוך לקיטור, ואחר כך להתעבות ולחזור לשוב למצב הנוזלי. כל מה שצריך לעשות הוא להתקין שסתומים, שיכניסו את הקיטור ויוציאו את המים על ידי פתיחתם וסגירתם ברגעים הנכונים של המחזור. סביר להניח שאלמלא ההמצאה של וט, המהפכה התעשייתית הייתה מתרחשת הרבה יותר לאט.

עם השיפור שחל ביעילותו של מנוע הקיטור, גברה הדרישה לשימוש באנרגיה למטרות נוספות, לא רק לשאיבת מים. וט פיתח שיטה מקורית להמרת תנועה קווית של הלוך-חזור לתנועה סיבובית. יתר על כן, כדי להפוך את התהליך ל"חלק יותר" ואף להכפיל את הכוח, הוא הכניס קיטור לסרוגין לשני צדי הבוכנה. הפיתוח הזה שיחרר את מנועי הקיטור מן השימוש בלחץ אטמוספרי להנעת הבוכנה, וסלל את הדרך לשימוש בקיטור בלחץ גבוה, אם כי לכך וט דווקא התנגד.

איור 40: בול שהונפק לכבודו של ג'יימס וט

ב-150 השנים שלאחר מכן שימשו מנועי וט (אמנם לא בגרסתם המקורית אלא בגרסאות משופרות רבות) באניות, ברכבות ובבתי חרושת ברחבי העולם. הצעד הגדול הבא היה פיתוחן של טורבינות קיטור, שבהן קיטור בלחץ גבוה מניע סידרה של להבים מסתובבים. היתרון הגדול של טורבינות היא היכולת לסובב באופן ישיר ובמהירות גבוהה, תכונה שבזכותה טורבינות מהוות אמצעי אידאלי להנעת גנרטורים חשמליים (דינמו). הטורבינות הומצאו כבר בשנת 1884, אבל השימוש הנרחב בהן התפתח רק כעבור שנים רבות. כיום, הטורבינות מאפשרות את הפקת רובו של החשמל בעולם. למרבה האירוניה, וט המציא דווקא את "היפוכה" של הטורבינה - את המדחף (פרופלור) שאותו יש לסובב ובתמורה הוא דוחף את המים אחורנית ומניע את האנייה קדימה. הוא קרא לזה "משוט סלילי".

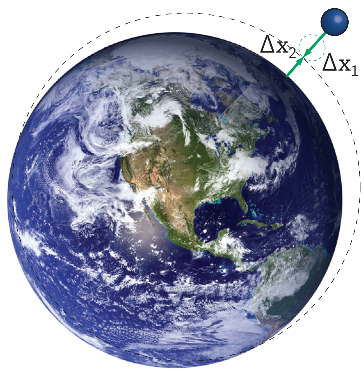
וט היה אדם הגון וצנוע. למרות הצורך שלו בכסף, הוא סירב לקבל הצעה נדיבה שהציעו לו הצרפתים בשנת 1786 תמורת הפטנט שלו, מפני שעל פי תפיסתו, הייתה התוכנית "מנוגדת לאינטרסים של אנגליה" (למרות שהוא היה בכלל סקוטי!). בשלב מאוחר יותר בחייו סירב גם לתואר "ברון" שהשלטונות ביקשו להעניק לו.

7. אנרגיה פוטנציאלית כאנרגיית אינטראקציה

עד כה עסקנו בפעולת כוח הכובד שהארץ מפעילה על גוף, תוך הנחה שהארץ אינה מושפעת מכוח התגובה שהגוף מפעיל עליה. זה אמנם נכון בקירוב מצויין בכל המקרים שבהם נתקלנו עד כה, אולם **עקרונית** זה לא כך. על פי החוק השלישי של ניוטון, כל כוח הוא צד אחד של אינטראקציה. אם הארץ מושכת גוף, גם הגוף מושך את הארץ. **מעשית** תאוצת הארץ קטנה מאוד (בגלל מסתה הגדולה) ולכן אפשר להתעלם מתנועתה. אף על פי כן, יש חשיבות לדיון העקרוני, מפני שבעתיד נתעניין גם במערכות שבהן האינטראקציה תיעשה בין שני גופים בעלי מסות דומות - למשל אינטראקציה בין כוכבים. תוך כדי כך נברר לעצמנו בצורה מעמיקה יותר את המושג אנרגיה פוטנציאלית.

נערוך "ניסוי מחשבתי" שבו הגוף הקרוב לפני הארץ הוא מסיבי מאוד - מסתו היא מסדר גודל של מסת הארץ. במקרה כזה איננו יכולים להתעלם מתנועת הארץ. באופן מעשי נתקשה בעריכת הניסוי, כי אם ננסה ליצור גוף בעל מסה כזו בגודל של כדור-סל נזדקק לצפיפויות אדירות. כמו כן, נוכחותו של גוף כזה סמוך לארץ תגרום לעיוות כדור הארץ. אך לצורך הבהרת המושגים נניח שעומד לרשותנו כדור כזה וכי הארץ קשיחה מאוד - כמעט אינה מתעוותת.

נניח כי אנו משחררים את שני הגופים ממנוחה, והם מתחילים לנוע זה לקראת זה (איור 41).



איור 41: אינטראקציה בין כדור הארץ לבין כדור שמסתו היא מסדר גודל של מסת הארץ

כעבור פרק זמן מסוים התקרב "הגוף הנופל" אל הארץ ועבר מרחק $|\Delta \mathbf{x}_1|$ בהשפעת כוח הכובד שגודלו mg. העבודה שנעשית על הגוף:

$$W_1 = mg\,|\Delta \mathbf{x}_1|$$

כדור הארץ נע לעבר "הגוף הנופל" ועובר מרחק $|\Delta \mathbf{x}_2|$, תחת השפעת כוח תגובה בעל כיוון מנוגד שגם גודלו mg. העבודה שהכוח עושה על הארץ:

$$W_2 = mg\,|\Delta \mathbf{x}_2|$$

שימוש במשוואת העבודה-אנרגיה (5) נותן את תוספת האנרגיה הקינטית של שני הגופים:

$$\Delta E_{k,1} = mg\,|\Delta \mathbf{x}_1| \qquad \Delta E_{k,2} = mg\,|\Delta \mathbf{x}_2|$$

השינוי הכולל באנרגיה הקינטית הוא:

$$\Delta E_k = \Delta E_{k,1} + \Delta E_{k,2} = mg\,(|\Delta \mathbf{x}_1| + |\Delta \mathbf{x}_2|) = mg\,h$$

כלומר התוספת באנרגיה הקינטית שווה ל- mgh.

אנרגיה פוטנציאלית כובדית כאנרגיית אינטראקציה:

הגודל mgh ממלא את התפקיד של אנרגיה פוטנציאלית כובדית גם כאשר לוקחים בחשבון את תנועת הארץ. **הפחת באנרגיה הפוטנציאלית הכובדית מתחלק בין האנרגיות הקינטיות של כדור הארץ ושל "הגוף הנופל"**.

חשוב להבחין כי הביטוי mgh מתקבל כאן מן הצרוף $mg(|\Delta\mathbf{x}_1| + |\Delta\mathbf{x}_2|)$ המכיל מידע על **שני** הגופים. מכאן **שאין זה מדוייק לדבר על האנרגיה הפוטנציאלית של גוף מסויים**, אלא על **אנרגיית האינטראקציה של שני הגופים**. לעתים אנו משתמשים בביטוי "האנרגיה הפוטנציאלית של הגוף" בהקשר שבו תנועת הארץ זניחה ואפשר להתייחס אל הגוף השני בלבד, אך עקרונית אנרגיה פוטנציאלית אינה שייכת לגוף מסויים אלא לזוג הגופים הנמצאים באינטראקציה.

לסיכום נוכל לסרטט קווים להבחנה בין אנרגיה קינטית לאנרגיה פוטנציאלית. אנרגיה קינטית היא האנרגיה של כל גוף הנובעת מתנועתו. אנרגיה זו אינה תלויה באופן ישיר במיקומם של הגופים אלא במהירויותיהם בלבד. אפשר ליחס אנרגיה קינטית נפרדת לכל אחד מן הגופים. לעומת זאת האנרגיה הפוטנציאלית אינה קשורה בתנועת הגופים אלא במיקומם היחסי במרחב. מערך מרחבי מסויים קובע את האנרגיה הפוטנציאלית. במקרה המיוחד של האנרגיה הפוטנציאלית הכובדית ראינו כי המרחק **היחסי** בין הארץ לבין הגוף השני הוא הקובע את האנרגיה. האנרגיה הפוטנציאלית אינה "רכושו" של אחד הגופים והיא תכונה של זוג הגופים.

עיקרי הדברים - פרק ז

1. הביטוי ל**אנרגיה הקינטית** E_k של חלקיק שמסתו m, הנע במהירות שגודלה v היא: $E_k = \frac{1}{2}mv^2$

2. עבודה הנעשׂית על-ידי כוח על גוף נקודתי:

א. במקרה שבו הכוח קבוע, והתנועה מתנהלת לאורך קו ישר: העבודה שווה למכפלת גודל הכוח בגודל ההעתק ובקוסינוס הזווית שבין הכוח וההעתק: $W = |\mathbf{F}| \cdot \cos\theta \cdot |\Delta\mathbf{x}|$

ב. במקרה שבו הכוח משתנה, והתנועה מתנהלת לאורך קו ישר: בהינתן העקומה המתארת את רכיב הכוח על ציר התנועה כפונקציה של המקום - העבודה שווה לשטח התָחום בין העקומה לבין ציר המקום.

ג. במקרה שבו הכוח משתנה, והתנועה מתנהלת לאורך מסלול עקום: מחלקים את המסלול לקטעים קטנים מאוד, כך שכל קטע הוא בקירוב ישר, והכוח בו הוא בקירוב קבוע, ומחשבים בכל קטע את העבודה על-פי א דלעיל. לבסוף מחברים את העבודות לאורך כל הקטעים הקטנים, ומקבלים את העבודה לאורך כל המסלול.

3. **העבודה הכוללת** מוגדרת כסכום העבודות של כל הכוחות הפועלים על גוף. אם הגוף נקודתי אזי העבודה הכוללת שווה לעבודת הכוח השקול.

4. **כוח משמר:**

א. **הגדרה:** כוח שעבודתו בין כל שתי נקודות אינה תלויה במסלול התנועה (אלא רק בנקודת המוצא ובנקודת היעד).

ב. **תכונה:** עבודת כוח משמר לאורך מסלול סגור שווה לאפס.

5. **אנרגיה פוטנציאלית:**

ניתן לייחס אנרגיה פוטנציאלית רק לכוחות משמרים.

רק הפרש באנרגיה הפוטנציאלית, ולא האנרגיה הפוטנציאלית עצמה, מוגדר באופן חד ערכי.

הגדרה: האנרגיה הפוטנציאלית בנקודה A מינוס האנרגיה הפוטנציאלית בנקודה B שווה לעבודת הכוח מ-A ל-B:

$$U_A - U_B = W_{A \to B}$$

לגבי כוח כובד:

$$U_{G,A} - U_{G,B} = mgh_A - mgh_B$$

לגבי כוח אלסטי:

$$U_{sp,A} - U_{sp,B} = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2$$

אם בוחרים את רמת-האפס של האנרגיה במצב שבו הקפיץ רפוי אזי:

$$U_{sp} = \frac{1}{2}kx^2$$

6. **אנרגיה מכנית** היא סכום של האנרגיה הקינטית ושל כל סוגי האנרגיות הפוטנציאליות.

7. **העבודה הכוללת של הכוחות שאינם משמרים** שווה לשינוי באנרגיה המכנית הכוללת:

$$W_{A\to B}^{\text{לא משמרים}} = E_B - E_A = \Delta E$$

8. **עקרון שימור האנרגיה המכנית:** כאשר רק כוחות משמרים עושים עבודה על גוף, אזי האנרגיה המכנית הכוללת שווה בכל נקודות המסלול.

$$E_A = E_B$$

9. **התנגשות אלסטית:** התנגשות שבה האנרגיה הקינטית הכוללת נשמרת:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2$$

10. **התנגשות אי-אלסטית:** התנגשות שבה האנרגיה הקינטית לאחר ההתנגשות קטנה מזו שלפני ההתנגשות (היא מומרת **באנרגיה פנימית** של הגופים המתנגשים).

11. **התנגשות פלסטית:** התנגשות אי-אלסטית שבה הגופים נעים באותה מהירות לאחר ההתנגשות.

שאלות, תרגילים ובעיות

בכל התרגילים אפשר להזניח את התנגדות האוויר, אלא אם כן נאמר אחרת.

I. תרגילים מותאמים לסעיפי הפרק

תרגילים 1 - 50 ממוינים על-פי סעיפי הפרק והם נועדו בעיקר לתרגול החומר המופיע באותם סעיפים. תרגילי סיכום אינטגרטיביים מופיעים אחרי תרגילים אלה.

סעיף 1: אנרגיה קינטית, עבודה והקשר ביניהן

תת סעיף 1.1: העבודה הנעשית על ידי כוחות קבועים על גוף נקודתי הנע לאורך קו ישר

תת-סעיף ב: "אנרגיה קינטית"

1. חשבו את האנרגיה הקינטית של כדור באולינג שמסתו 6 ק"ג, הנע על הרצפה במהירות שגודלה 6 מטר\שנייה.

2. האם האנרגיה הקינטית של גוף תלויה בכיוון תנועתו? האם היא יכולה להיות שלילית? נמקו תשובתיכם.

3. פי כמה גדֵלה האנרגיה הקינטית של מכונית המגבירה את מהירותה פי שניים? פי כמה גדֵל התנע של המכונית?

4. הביאו דוגמה הממחישה שאנרגיה קינטית תלויה במערכת הייחוס.

5. גוף שמסתו $m = 0.4$ kg נע בתנועה מעגלית קצובה שרדיוסה $r = 50$ cm. זמן מחזור התנועה הוא $T = 1$ s. חשבו את האנרגיה הקינטית של הגוף.

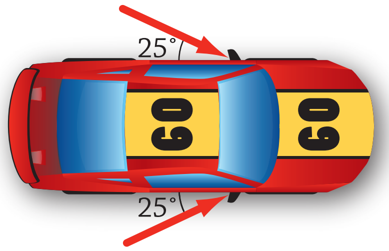
תת-סעיף ג: "עבודה"

6. חשבו את העבודה שאתם עושים בהרימכם כדור באולינג שמסתו 6 ק"ג מהרצפה לגובה 1 מטר, במהירות קבועה.

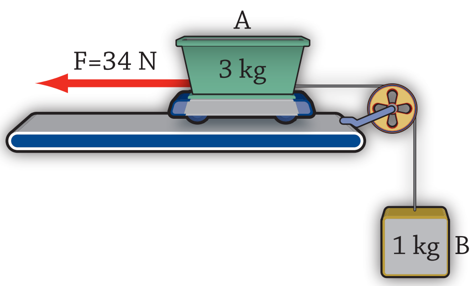
7. האם תוכלו להצביע על מילים שיש להן בשׂפת היום-יום משמעות שונה ממשמעותן המדעית, בדומה למילה "עבודה"?

8. חשבו את העבודה שאתם עושים, אם הינכם מפעילים כוח אופקי בן 300 N בדחיפת מכונית שמנועה כבה, למרחק של 5 m לאורך כביש אופקי.

9. שני אנשים דוחפים מכונית שמנועה כבה. כל אחד מהאנשים מפעיל על מסגרת החלון של דלת קידמית כוח בן 320 N בזווית 25° עם כיוון התקדמות המכונית. חשבו את העבודה שעושה כל אחד מהאנשים, אם המכונית נדחפת למרחק של 7 m.



10. במערכת המתוארת באיור, ניתן להזניח את החיכוך בין הקרונית A לבין השולחן. הקרונית A נעה שׂמאלה.



✶א. האם הנתון בשאלה "הקרונית A נעה שמאלה" אינו מיותר? האם לא נובע מהנתונים המופיעים באיור שהקרונית בהכרח נעה שמאלה? הסבירו.

ב. ציינו מהם הכוחות הפועלים על קרונית A.

ג. חשבו את העבודה שעושה כל אחד מן הכוחות הפועלים על קרונית A בעת תנועתה שׂמאלה לאורך 40 cm .

ד. חשבו את עבודת הכוח השקול הנעשית על קרונית A לאורך 40 cm.

11. במהלך הפרק מוצגת הנוסחה:

$$W = |\mathbf{F}|\ \cos\theta\,|\Delta\mathbf{x}|$$

א. איזה גודל מייצג כל סמל המופיע בנוסחה?

ב. מהי יחידת המדידה ב- S.I. של כל אחד מהגדלים שבנוסחה?

ג. באילו תנאים הנוסחה תקפה?

ד. קבעו באילו תנאים מתקיים כל אחד מהקשרים:

(1) $W > 0$ (2) $W < 0$ (3) $W = 0$.

ה. הופכים את כיוון ציר ה- x. האם הערך של W משתנה? נמקו.

ו. חברו תרגיל פשוט שבו יידרש להשתמש בנוסחה הרשומה לעיל לצורך חישוב מספרי של עבודה. פתרו את התרגיל שחיברתם.

תת-סעיף ג: משפט עבודה-אנרגיה

12. גוף משוחרר ממנוחה מגובה 1.8 m מעל הקרקע ונופל חופשית. חשבו, בעזרת משפט עבודה-אנרגיה, את גודל מהירות הגוף כהרף עין לפני פגיעתו בקרקע.

13. גוף נזרק כלפי מעלה במהירות התחלתית שגודלה 30 m/s. חשבו בעזרת משפט עבודה-אנרגיה לאיזה גובה מרבי מעל נקודת המוצא עולה הגוף.

14. תארו במילים, באמצעות המושגים "עבודה", "אנרגיה קינטית" והקשר ביניהם, את התנועות המתוארות להלן.

א. נפילה של תפוח שנשר מעץ; תארו את התנועה מרגע שהוא ניתק מהעץ עד לרגע לפני התנגשותו בקרקע.

ב. תנועת כדור הנזרק כלפי מעלה על ידי ילד; תארו את התנועה מרגע שהילד מתחיל להפעיל על הכדור כוח כלפי מעלה, עד שהכדור מגיע לגובה המרבי.

ג. תנועת קליע הנורה אופקית מרובה; תארו את התנועה מהרגע שלאחר פיצוץ אבק השריפה עד צאת הקליע מהקנה.

ד. תנועת קופסת קרטון לאחר שילד בעט בה. הקופסה מחליקה על הרצפה, ולאחר מכן נעצרת; תארו את התנועה מתחילת הבעיטה עד עצירת הקופסה.

15. במהלך הפרק מוצגת הנוסחה: $W_{\text{כוללת}} = \Delta E_k$

א. איזה גודל פיזיקלי מייצג כל סמל המופיע בנוסחה?

ב. לאילו תרחישים הנוסחה מתאימה ובאילו תנאים היא תקפה?

ג. נסחו במילים את המשפט המנוסח באמצעות הנוסחה. כיצד נקרא המשפט?

16. אתם זורקים כדור כלפי מעלה במהירות התחלתית שגודלה v_0, ותופסים אותו ברדתו באותו מקום ממנו נזרק. האם גודל המהירות v שבה הכדור פוגע בידיכם גדול מ- v_0, קטן ממנו או שווה לו? קבעו באופן איכותי, בעזרת משפט עבודה-אנרגיה לגבי תנועת הכדור -

א. בהזנחת התנגדות האוויר.

ב. ללא הזנחת התנגדות האוויר.

17. קפיץ מונח על משטח אופקי חסר חיכוך וקשור בקצהו האחד לקיר. גוף שמסתו 2 kg נע על המשטח ימינה, בכיוון החיובי, ופוגע בקצה החופשי של הקפיץ במהירות שגודלה 3 m/s, ומוחזר מהקפיץ שמאלה במהירות שגודלה 3 m/s.

א. חשבו את שינוי התנע של הגוף.

ב. חשבו את שינוי האנרגיה הקינטית של הגוף.

ג. האם המתקף שהקפיץ מפעיל על הגוף שווה לאפס? נמקו.

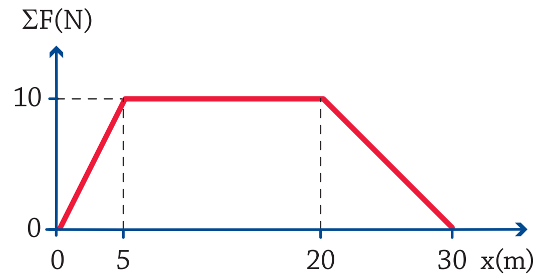
ד. האם העבודה הנעשית על ידי הכוח שהקפיץ מפעיל על הגוף שווה לאפס? נמקו.

תת סעיף 1.2: העבודה הנעשית על גוף נקודתי הנע לאורך קו ישר, כאשר רכיבי הכוחות לאורך הקו הישר משתנים

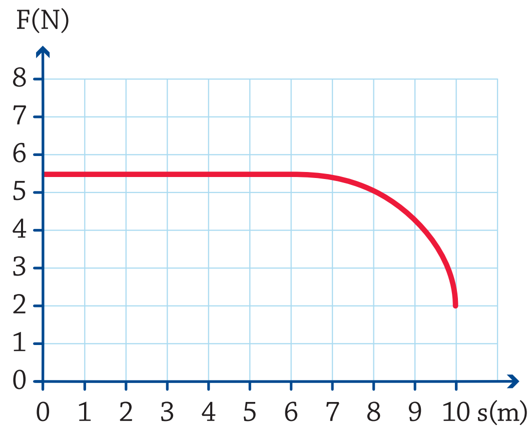
18. חלקיק קטן ("נקודתי") שמסתו 2 ק"ג נמצא במנוחה בנקודה ששיעורה $x = 0$. החל מרגע מסויים מופעלים על החלקיק כוחות, והוא נע לאורך ציר ה- x. הגרף מתאר את שקול הכוחות הפועלים על החלקיק כפונקציה של מקומו.

א. היכן, בקטע $0 \le x \le 30\text{ m}$, היתה מהירות הגוף מרבית? נמקו.

ב. חשבו את מהירות הגוף ב- $x = 30\text{ m}$.



19. באיור מתואר גודלו של אחד הכוחות הפועלים על חלקיק נע, כפונקציה של הדרך s.



א. אם כיוון הכוח בכל נקודה זהה לכיוון תנועת החלקיק, מהי העבודה הנעשית על-ידי הכוח על החלקיק -

(1) ב- 6 המטרים הראשונים?

(2) ב- 10 המטרים הראשונים?

ב. ענו על שאלה א (2) עבור המקרה שכיוון הכוח בכל נקודה מנוגד לכיוון תנועת החלקיק.

ג. ענו על שאלה א (2) עבור המקרה שכיוון הכוח ניצב בכל נקודה לכיוון תנועת החלקיק.

סעיף 2. אנרגיה פוטנציאלית ושימור אנרגיה מכנית

תת-סעיף 2.2: אנרגיה פוטנציאלית כובדית, ועקרון שימור האנרגיה המכנית

20. מעלית שמסתה 600 kg חונה בגובה 70 m מעל קומת המרתף. מהי האנרגיה הפוטנציאלית הכובדית של המעלית ביחס לקומת המרתף?

21. אדם מעלה דלי מלא מים מבאר שעומקה 10 m. מהו השינוי באנרגיה הפוטנציאלית הכובדית של הדלי (עם המים) אם מסתו (עם המים) 30 kg?

22. הסבירו את משמעות המשפט "כוח הכובד הוא כוח משמר."

23. גוף שמסתו 0.8 kg נעזב מנקודה A הנמצאת בגובה 1.8 m מעל הקרקע. נקודה B נמצאת בגובה 1 מטר מעל הקרקע וב- C הגוף נמצא כהרף עין לפני פגיעתו בקרקע.

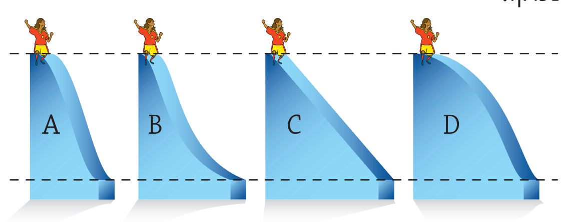
א. תארו במילים את המרות האנרגיה בתנועת הגוף מ- A ל-C.

ב. העתיקו את הטבלה, ורשמו בה את ערכי האנרגיה הפוטנציאלית הכובדית ביחס לקרקע (U_G), הקינטית (E_k) והמכנית הכוללת (E) בנקודות A, B ו- C.

נקודה	U_G (J)	E_k (J)	E (J)
A			
B			
C			

ג. סרטטו במערכת צירים אחת עקומות המתארות את האנרגיה המכנית הכוללת, האנרגיה הפוטנציאלית הכובדית והאנרגיה הקינטית, כפונקציה של גובה הגוף מעל הקרקע.

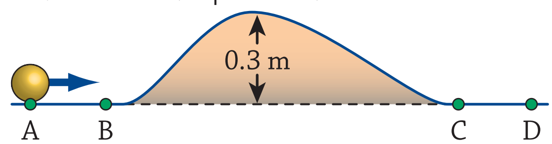
24. באיור מתוארים ארבעה משטחי החלקה חסרי חיכוך, הנמצאים בגן שעשועים. נערה רוצה לבחור משטח החלקה, שעליו היא תגיע אל תחתית המשטח במהירות שגודלה מרבי. איזה משטח עליה לבחור? נמקו.



A (1)   B (2)   C (3)   D (4)

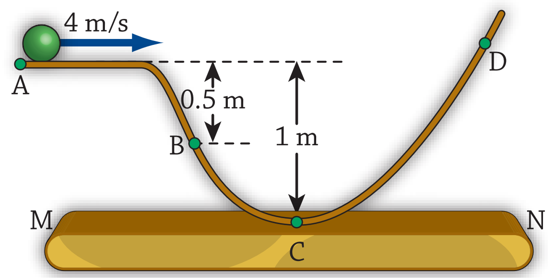
(5) גודל המהירות הסופית שווה בכל המשטחים.

25. כדור קטן נע ימינה על מסילה ABCD חסרת חיכוך. גודל מהירות הכדור על-פני הקטע AB הוא 1 m/s.



האם יעבור הכדור את ה'גבעה' שגובהה 0.3 מטר? נמקו.

26. כדור קטן שמסתו 2 kg מחליק ללא חיכוך על מסילה ABCD הנמצאת במישור אנכי. מהירות הכדור בנקודה A היא 4 m/s. D היא הנקודה הגבוהה ביותר שאליה מגיע הכדור.



א. מדוע האנרגיה המכנית הכוללת נשמרת במהלך התנועה?

ב. העתיקו את הטבלה למחברתכם, ורשמו בה את הערכים המספריים. "אנרגיית כובד" ו"גובה" נמדדים ביחס למשטח MN.

נקודה	האנרגיה המכנית הכוללת (J)	האנרגיה הקינטית (J)	אנרגיית הכובד (J)	המהירות (m/s)	הגובה (m)
A					
B					
C					
D					

ג. אילו ערכים בטבלה היו משתנים, אילו בחרתם מישור ייחוס שונה מ- MN עבור אנרגיית הכובד?

ד. אילו הכדור היה נעזב מהנקודה B (ראו איור) -

(1) איזו תנועה הוא היה מבצע? לאיזה גובה היה עולה הכדור במעלה השיפוע הימני? נמקו.

(2) מה היתה האנרגיה המינימלית שהיה צריך להוסיף לכדור כדי שהוא ייצא מה"בור"?

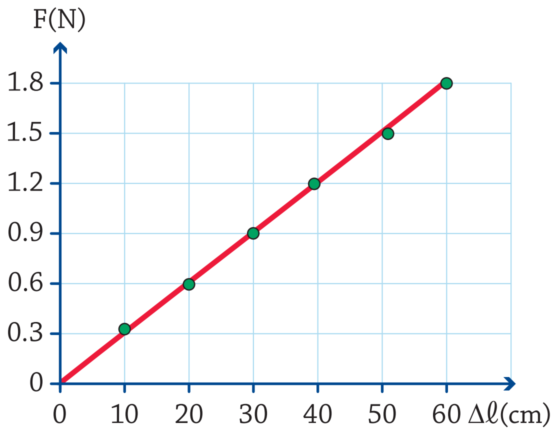
תת-סעיף 2.2: כוחות משמרים

27. מהי עבודת כוח הכובד הפועל על ציפור אשר עפה מהקן, וחוזרת אליו כעבור שעה קלה? נמקו.

28. מדוע אי אפשר להגדיר אנרגיה פוטנציאלית הקשורה עם כוח החיכוך?

סעיף 3. עקרון שימור האנרגיה המכנית

29. לשם חקירת התנהגות קפיץ, תלמיד הפעיל עליו כוחות שונים, ומדד בכל פעם את התארכותו (ביחס לאורכו הרפוי). ממצאי הניסוי מתוארים בגרף.



א. איזה גודל גרפי מבטא את שינוי האנרגיה הפוטנציאלית האלסטית כאשר הקפיץ נמתח ממצבו הרפוי בשיעור של 20 cm? חשבו שינוי זה.

ב. איזה גודל גרפי מבטא את העבודה הדרושה להגדלת התארכות הקפיץ מ- 30 cm ל- 50 cm? חשבו עבודה זו.

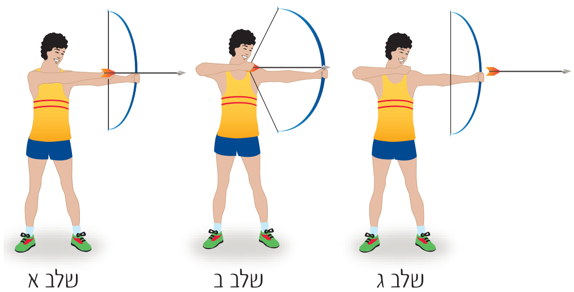
30. במהלך הפרק מוצגת הנוסחה: $E_A = E_B$

א. מה מייצג כל אחד מהסימונים (מהאותיות) בנוסחה?

ב. באילו תנאים הנוסחה תקפה?

ג. נסחו במילים את החוק המנוסח באמצעות הנוסחה.

31. האיור מתאר שלושה שלבי ירי של חץ מקשת.



איזו מהאפשרויות שלפניכם מתארת את המרות האנרגיה במעבר **משלב ב לשלב ג**? הסבירו בחירתכם.

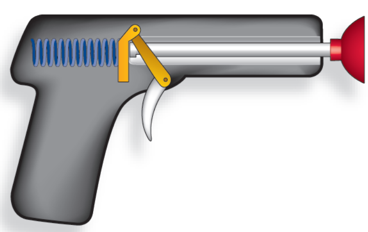
	האנרגיה האלסטית של הקשת	האנרגיה הקינטית של החץ	סך כל האנרגיה המכנית של החץ והקשת
(1)	קְטֵנָה	גְדֵלָה	נשארת קבועה
(2)	קְטֵנָה	קְטֵנָה	נשארת קבועה
(3)	גְדֵלָה	גְדֵלָה	גדלה
(4)	קְטֵנָה	גְדֵלָה	קטנה
(5)	גְדֵלָה	קְטֵנָה	נשארת קבועה

32. נניח כי קֶשֶׁת ציידים פועלת כקפיץ קוי.

א. מצאו את היחס בין מהירותו של חץ הנורה כאשר מיתר הקשת נמשך אחורה בשיעור של 20 cm, לבין המהירות של החץ כאשר המיתר נמשך לאחור 10 cm.

ב. פי כמה גבוה יותר יכול הקֶשֶׁת לירות את החץ במקרה הראשון לעומת המקרה השני?

33. ילד מכניס חץ שמסתו 20 gr לאקדח צעצוע ודורך את האקדח.



בעת הדריכה מכווץ הילד קפיץ בשיעור של 6 cm, תוך כדי הפעלת כוח מרבי שגודלו 3 N. הילד יורה את החץ בכיוון אופקי, מגובה מטר אחד מעל הקרקע.

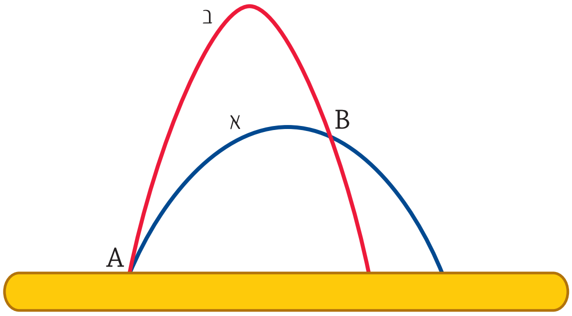
חשבו את גודל מהירות הפגיעה של החץ בקרקע.

34. באיור מוצגים מסלוליהם א ו-ב של שני פגזים זהים שנורו באותו רגע מנקודה A. המהירויות ההתחלתיות שוות בגודלן, אך שונות בכיוונן. מסלולי הפגזים נחתכים בנקודה B.

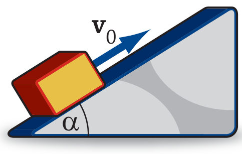
א. האם הפגזים נפגשים בנקודה B? נמקו.

ב. האם גדלי מהירויות הפגזים ב- B שווים? נמקו.

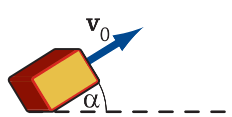
ג. האם מהירויות הפגזים ב- B שוות? נמקו.



35. בשני מקרים מעניקים לגוף מהירות התחלתית v_0:
פעם הגוף נזרק באוויר בכיוון משופע בזווית α (איור א), ופעם הוא נזרק מנקודה הנמצאת לרגלי משטח משופע (איור ב) שזווית שיפועו α (המשטח המשופע ארוך, והגוף אינו מגיע לפסגתו). החיכוך בין המשטח המשופע לבין הגוף ניתן להזנחה.



איור ב



איור א

א. האם האנרגיה המכנית של הגוף הנע על המשטח המשופע נשמרת? נמקו.

ב. באיזה משני המקרים מגיע הגוף לגובה רב יותר? נמקו.

36. במהלך הפרק מוצגת הנוסחה:

$$W_{A\to B\ \text{לא משמרים}} = E_B - E_A$$

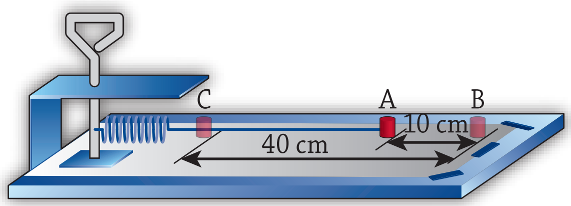
א. איזה גודל פיזיקלי מייצג כל סמל המופיע בנוסחה?

ב. אגף שמאל של משפט עבודה-אנרגיה, כולל את עבודת כוח הכובד, ואילו אגף שמאל של הנוסחה הרשומה לעיל אינו כולל את עבודת כוח הכובד. מהו מקור הבדל זה בין שתי הנוסחאות?

ג. נסחו במילים את החוק המנוסח באמצעות הנוסחה.

ד. חברו תרגיל פשוט שבו יידרש להשתמש בנוסחה הרשומה לעיל לצורך חישוב מספרי של $W_{A\to B\ \text{לא משמרים}}$.
פתרו את התרגיל שחיברתם.

37. קפיץ אופקי שקבוע הכוח שלו 10 N/m קשור בקצהו האחד. לקצהו האחר קשור גוף שמסתו 0.05 kg באמצעות חוט ארוך. כאשר הגוף נמצא ב-A (ראה איור) הקפיץ רפוי. מסיטים את הגוף למרחק 10 cm לנקודה B, תוך כדי מתיחת הקפיץ, ומשחררים אותו ממנוחה. הגוף נע שׂמאלה מרחק של 40 cm עד עצירתו ב- C. חשבו את מקדם החיכוך בין הגוף לבין השולחן.



הערה: לביצוע ניסוי מתאים, ראו תדריך בספר "פעילויות חקר בפיזיקה" מאת עדי רוזן, פעילות הנקראת "גרירת גוף על ידי קפיץ".

סעיף 4: תנועה במעגל אנכי

38. אורך החוט של מטוטלת פשוטה הוא 50 cm. מסיטים את משקולת המטוטלת מנקודת שיווי המשקל עד שהחוט יוצר זווית בת 60° עם האנך, ומשחררים אותה ממנוחה.

א. מצאו את זווית הפרישׂה המרבית של המטוטלת מצדו האחר של האנך. הסבירו תשובותיכם.

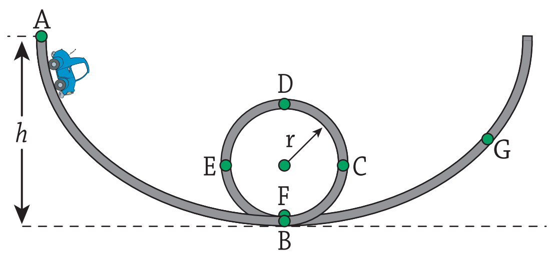
ב. חשבו את גודל מהירות המשקולת -

(1) בעוברה את קו האנך;

(2) כאשר המטוטלת יוצרת עם האנך זווית בת 30°.

ג. האם התאוצה הרגעית של המשקולת בזווית פרישׂה מרבית היא אפס? אם כן - הסבירו מדוע. אם לא - חשבו את גודל התאוצה.

39. באיור מתוארת מסילה ABCDEFG חסרת חיכוך. הנקודה F נמצאת מאחורי הנקודה B, על קטע המסילה EG. קטע המסילה BCDEF הוא מעגל שרדיוסו r, BD קוטרו האנכי ו- EC קוטרו האופקי. מכונית צעצוע קטנה שמסתה m משוחררת מהנקודה A הנמצאת בגובה h מעל תחתית המסילה.



א. בטאו באמצעות r את הגובה המזערי h שעבורו המכונית אינה ניתקת מן המסילה.

ב. נתון כי h = 3r. בטאו באמצעות נתוני השאלה את:

(1) מהירות (גודל וכיוון) המכונית בנקודה D;

(2) הכוח שהמכונית מפעילה על המסילה בנקודה D;

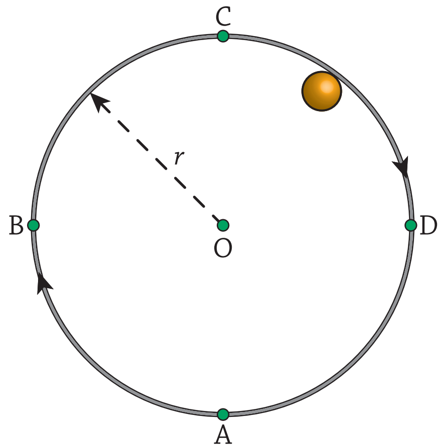
(3) התאוצה הרדיאלית, המשיקית והשקולה בנקודה E;

(4) גובהה של המכונית מעל תחתית המסלול, ברגע עצירתה (עצירה רגעית) בחלק הימני של המסילה.

ג. האם בנקודה המוזכרת בסעיף ב(4) שווה תאוצתה הרגעית של המכונית לאפס? נמקו.

ד. האם הכוח הנורמלי הפועל על המכונית בתנועתה על המסילה מבצע עבודה? נמקו.

40. כדור קטן שמסתו m נע בתוך מסילה מעגלית אנכית נטולת חיכוך שרדיוסה r, במגמה המסומנת באיור. A ו-C הן קצות הקוטר האנכי, B ו- D הן קצות הקוטר האופקי.



א. מדוע האנרגיה המכנית נשמרת במהלך תנועת הכדור?

ב. הסבירו, באמצעות חוק שימור האנרגיה המכנית, מדוע מהירות הכדור קְטֵנָה עם תנועתו מ-A ל-C, וגדֵלה עם תנועתו מ-C ל-A (ראו גם תרגיל 35 סעיף א בפרק ה).

ג. מדוע גודלי מהירויות הכדור בקצות מיתר אופקי שווים? האם גם המהירויות שוות? הסבירו.

ד. נתון כי $m = 1\ kg$, $r = 0.4\ m$ וגודל מהירות הכדור בנקודה A הוא $5\ m/s$. מצאו את:

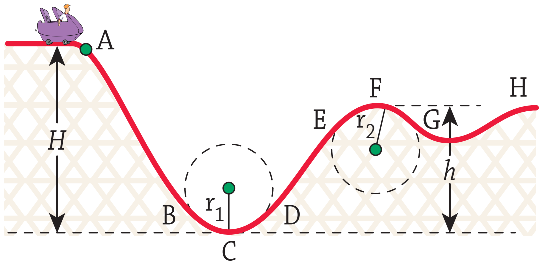
(1) מהירויות הכדור בנקודות B, C ו- D.

(2) הכוחות שהכדור מפעיל על המסילה בנקודות A, B ו-C.

41. באיור מוצגת "רכבת הרים" בלונה פארק. תלמיד נעמד בנקודה A (ראו איור) ליד הקרונית, ושחרר מידו אבן. האבן נפלה חופשית, והגיעה לקרקע כעבור 3 שניות. לאחר מכן התלמיד נכנס לקרונית, הציב מאזניים על הכסא, והתיישב עליהם כך שרגליו לא נגעו ברצפת הקרונית. המאזניים הראו את משקלו mg.

לאחר מכן התלמיד יצא לדרכו מ-A עם הקרונית, במהירות התחלתית השווה לאפס. הקרונית נעה על פני המסילה ABCDEFGH, ללא חיכוך וללא שמוש במנוע.

בנקודה C הראו המאזניים ערך השווה ל- 5mg. כאשר התלמיד חלף בנקודה F הוא שוב שחרר אבן (במהירות אפס ביחס לקרונית), וזו פגעה בקרקע 2.7 ש׳ לאחר שחרורה. הוריית המאזניים ב-F היתה שווה לאפס.



א. חשבו את הגובה H של הנקודה A מעל הקרקע.

ב. חשבו את מהירות הקרונית בנקודה C.

ג. קטע המסילה BCD הוא קשת של מעגל שרדיוסו r_1. חשבו את r_1.

ד. חשבו את הגובה h של הנקודה F מעל הקרקע.

ה. מה היתה המהירות ההתחלתית (ביחס לקרקע) של האבן ששוחררה מ-F? (ציינו גודל וכיוון).

ו. קטע המסילה EFG הוא קשת של מעגל שרדיוסו r_2. חשבו את r_2.

סעיף 5: היבטים אנרגטיים בתרחישים שבהם התנע נשמר

42. גוף שמסתו 3 kg נע על משטח אופקי חסר חיכוך במהירות שגודלה 4 m/s ומתנגש התנגשות אלסטית חד-ממדית עם גוף נח שמסתו 2 kg. חשבו את מהירותו של כל אחד מהגופים לאחר ההתנגשות.

43. גוף A שמסתו 0.3 kg מחליק ימינה על משטח אופקי חסר חיכוך במהירות שגודלה 10 cm/s, ומתנגש התנגשות חד-ממדית בגוף B שמסתו 0.1 kg הנע לקראתו במהירות שגודלה 20 cm/s. מצאו את מהירותו של כל אחד משני הגופים לאחר ההתנגשות, אם ההתנגשות היא אלסטית.

44. גוף שמסתו m נע במהירות v ומתנגש התנגשות אלסטית בגוף נח שמסתו גם היא m.

הוכיחו כי:

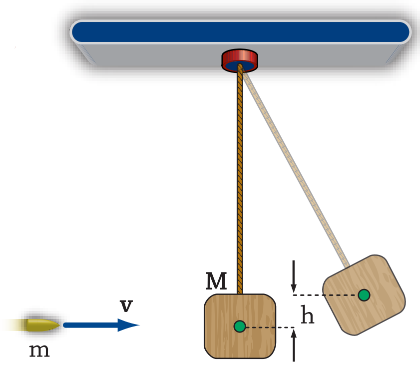
א. אם ההתנגשות היא חד-ממדית, אזי הגוף הראשון נעצר, והשני נע לאחר ההתנגשות במהירות v;

★ב. אם ההתנגשות היא דו-ממדית, נעים שני הכדורים כך שהזווית בין מסלוליהם לאחר ההתנגשות היא ישרה.

45. לפני שפותחו חיישני זמן אלקטרוניים השתמשו **במטוטלת בליסטית** לשם מדידת גדלי מהירויות של קליעים.

באיור מתוארת מטוטלת בליסטית המורכבת מגוש עץ שמסתו $M = 9.985\ kg$ התלוי בחוט שמסתו זניחה. קליע שמסתו $m = 15\ gr$ פוגע אופקית במרכז גוש העץ, ננעץ בו, ונעצר יחסית אליו. כתוצאה מכך מתרומם מרכז המסה של גוש העץ (עם הקליע בתוכו) לגובה מרבי $h = 5\ cm$.

הניחו כי ניתן להזניח את משך חדירת הקליע לגוש העץ, ביחס למשך עליית גוש העץ.



א. האם האנרגיה הקינטית של הקליע לפני הפגיעה שווה לתוספת באנרגיה הפוטנציאלית של מערכת גוש העץ (עם הקליע) - כדור הארץ? הסבירו.

ב. האם הכוח שמפעיל החוט על גוש העץ במהלך עלייתו מבצע עבודה? נמקו.

ג. חשבו את גודל מהירות הקליע לפני הפגיעה.

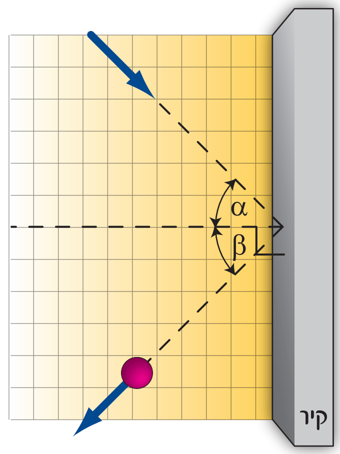
46. כדור שמסתו $m = 0.2\ kg$ משוחרר ממנוחה מגובה $2.45\ m$ מעל הרצפה, פוגע בה, ומנתר לגובה מרבי של $1.8\ m$ מעל הרצפה.

א. מהו השינוי בתנע של הכדור כתוצאה מהתנגשותו ברצפה?

ב. מהו השינוי באנרגיה הקינטית של הכדור כתוצאה מהתנגשותו ברצפה?

ג. לאיזה סוג אנרגיה הומרה האנרגיה ש"אבדה" בהתנגשות? לאילו גופים "שייכת" אנרגיה זו?

47. כדור הנע על רצפה מתנגש התנגשות אלסטית בקיר. אין חיכוך בין הכדור לרצפה, ובין הכדור והקיר.



הוכיחו כי הכדור מוחזר בדומה לאלומת אור המוחזרת ממראה, כלומר: הזווית α בין כיוון תנועתו לפני ההתנגשות לבין האנך לקיר בנקודת הפגיעה, שווה לזווית β בין כיוון ההחזרה לבין האנך.

סעיף 6: הספק ונצילות

48. מרים משקולות מניף משקולת שמסתה $200\ kg$ לגובה $1.5\ m$ במשך שנייה אחת. מהו ההספק הממוצע של הכוח שנדרש להנפת המשקולת?

49. חשבו את האנרגיה (בקוט"ש) הנצרכת על-ידי מזגן שהספקו $1000\ W$ כאשר הוא פועל במשך 6 שעות.

50. משאבה שואבת מים מבאר שעומקה 20 מטר בקצב של 150 ק"ג לשנייה. נצילות המשאבה היא 60%.

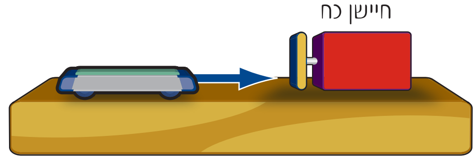
א. מהו ההספק של שאיבת המים?

ב. מהו ההספק המושקע במשאבה?

II. תרגילי סיכום

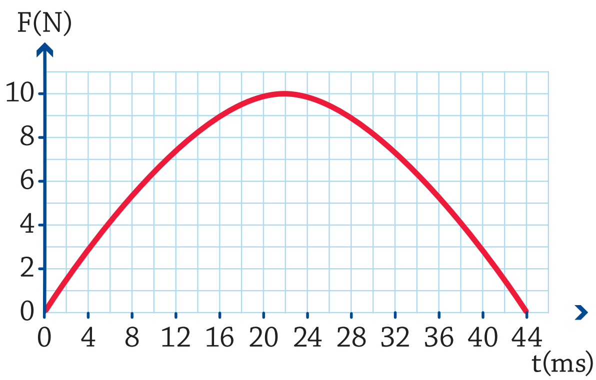
תרגילים 51 - 63 מיועדים לתרגול אינטגרטיבי, וכהכנה לבחינה מסכמת של הפרק.

51. כדי לבחון את החוק הקובע כי "המתקף הכולל הפועל על גוף שווה לשינוי בתנע של הגוף", ביצע תלמיד ניסוי. הוא הדף קרונית שמסתה 0.46 kg (ההדיפה ארכה זמן קצר), וזו נעה על שולחן (איור א).



איור א

החיכוך בין השולחן לקרונית זניח. הקרונית התנגשה בחיישן כוח שמוצמד לקצה השולחן. לאחר ההתנגשות נעה הקרונית בכיוון המנוגד לכיוון תנועתה שלפני ההתנגשות. במהלך התנגשות הקרונית בחיישן, מדד החיישן, במרווחי זמן קצרים מאוד, את הכוח שהקרונית הפעילה עליו. ערכי הכוח (בניוטון) כפונקציה של הזמן (באלפיות שנייה - ms) הוזנו למחשב, ובעזרת תוכנה מתאימה סורטט גרף המתאר את גודל הכוח כפונקציה של הזמן במהלך ההתנגשות (איור ב).



איור ב

התלמיד ספר, במידת הדיוק שהגרף מאפשר, 138 משבצות בין העקומה לבין ציר הזמן.
זמן קצר לפני ההתנגשות מדד התלמיד ומצא שהקרונית עברה מרחק של 3.0 cm במשך 0.090 s, וזמן קצר לאחר תום ההתנגשות, בעת תנועתה בכיוון המנוגד לכיוון התנועה לפני ההתנגשות, מצא התלמיד שהיא עברה מרחק של 3.0 cm במשך 0.102 s.

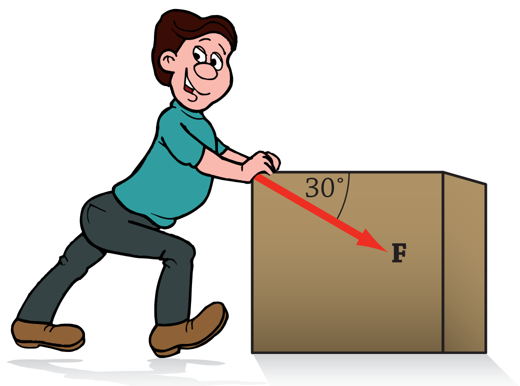
א. מצאו, על סמך איור ב, את גודל המתקף שהחיישן הפעיל על הקרונית במהלך ההתנגשות.

ב. בלי להסתמך על איור ב, חשבו את השינוי בתנע של הקרונית בעקבות ההתנגשות.

ג. ציינו **שני** גורמים אפשריים לאי־דיוק בערכים שהתקבלו בניסוי זה (המתקף הכולל והשינוי בתנע של הקרונית).

ד. האם בפרק הזמן המתואר באיור ב התאפסה מהירות הקרונית? הסבירו.

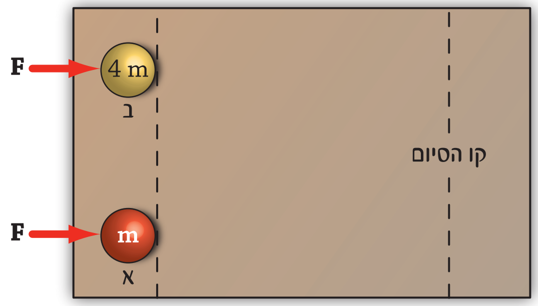
52. אדם דוחף תיבה על משטח אופקי, בכוח **F** בזווית 30° מתחת לאופק, כמתואר באיור. מסת התיבה 40 kg והיא נעה במהירות קבועה. מקדם החיכוך בין התיבה למשטח הוא 0.3.



א. חשבו את העבודה הנעשית על ידי הכוח **F** לאורך 5 m.

ב. אילו האדם היה **מושך** את התיבה במהירות קבועה בזווית בת 30° **מעל** הכיוון האופקי, האם היתה נדרשת אותה עבודה (לאורך אותה דרך) כמו במקרה הקודם? נמקו תשובתכם מתוך שיקול דעת, ללא חישובים נוספים.

53. האיור מתאר שני גופים שווי גודל הנחים על שולחן אוויר. מסתו של גוף ב גדולה פי ארבעה מזו של גוף א. החל מרגע מסוים הגופים נדחפים על ידי כוחות שווים.



א. קבעו לאיזה גוף יש אנרגיה קינטית גדולה יותר בקו הסיום, ונמקו את קביעתכם.
(1) לגוף א
(2) לגוף ב
(3) לשני הגופים אנרגיה קינטית שווה.
(4) אי אפשר לענות על השאלה בגלל העדר נתונים.

ב. קבעו איזה גוף יגיע ראשון לקו הסיום, ונמקו את קביעתכם.
(1) גוף א
(2) גוף ב
(3) שני הגופים יגיעו באותו רגע לקו הסיום.
(4) אי אפשר לענות על השאלה בגלל העדר נתונים.

ג. קבעו לאיזה גוף יש תנע גדול יותר בקו הסיום, ונמקו את קביעתכם.
(1) לגוף א
(2) לגוף ב
(3) לשני הגופים תנע שווה.
(4) אי אפשר לענות על השאלה בגלל העדר נתונים.

54. גוף נע בתנועה קצובה לאורך מסלול עקום.

א. הוכיחו, באמצעות "משפט עבודה-אנרגיה", שבכל נקודה הכוח השקול הפועל על הגוף ניצב למסלול, או שהוא שווה רגעית לאפס.

✶ב. סרטטו מסלול עקום הכולל נקודה שבה הכוח השקול שווה לאפס, וסמנו בו את הנקודה. הסבירו מדוע הכוח השקול בנקודה שסמנתם הוא אפס.

55. נער שמסתו M ניצב על משטח אופקי חסר חיכוך. הנער מחזיק בידו כדור שמסתו m ‏($M > m$), וזורק את הכדור במהירות אופקית שגודלה v אל קיר אנכי הנמצא במרחק d ממנו. הכדור מתנגש בקיר התנגשות אלסטית וחוזר אל הנער.

א. בטאו באמצעות נתוני השאלה את מהירותו של הנער לאחר שזרק את הכדור.

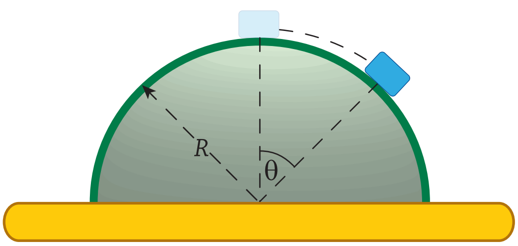
ב. בטאו באמצעות נתוני השאלה את מהירותו של הנער לאחר שהוא תפס את הכדור המוחזר מן הקיר.

ג. מדוע נדרשה ההנחה ש- $m > M$ (מעבר לעובדה שהמצב ההפוך, שמסת הכדור גדולה ממסת הנער, אינו מציאותי).

ד. בטאו, באמצעות M, m, ו-d, את המרחק שהנער עבר מרגע שהוא זרק את הכדור עד לרגע שהכדור חזר אליו.

ה. לפני זריקת הכדור היו הנער והכדור במנוחה, ולאחר שהכדור חזר אליו היו שניהם בתנועה. האם עובדה זו נמצאת בסתירה לחוק שימור התנע? נמקו..

56. באיור מתואר חצי כדור חסר חיכוך שרדיוסו R המוצמד לשולחן אופקי. גוף שמסתו m וממדיו קטנים מאוד ביחס ל- R, נח בנקודה הגבוהה של המשטח הכדורי. לגוף ניתנת מהירות התחלתית אופקית קטנה מאוד, והוא מחליק על המשטח. החיכוך בין הגוף והמשטח ניתן להזנחה. הזווית בין הקו המחבר את הגוף עם מרכז הכדור לבין הכיוון האנכי מסומנת באות θ.

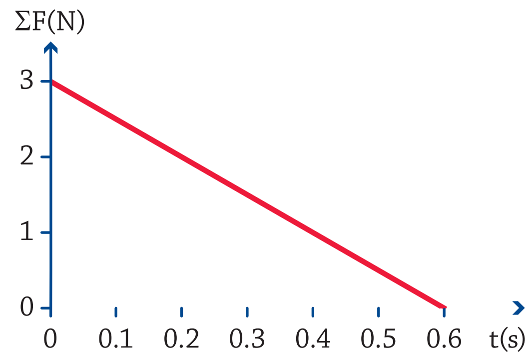


א. בטאו, באמצעות R ו- θ, את מהירות הגוף בנקודה כלשהי על המשטח.

ב. הראו כי ככל ש- θ גדֵלה - קטֵנים הכוחות שהגוף והמשטח מפעילים זה על זה.

ג. חשבו את הזווית θ ברגע שהגוף ניתק מן המשטח.

57. גלשן שמסתו 0.85 kg נע על מסילת אוויר. הגרף מתאר את גודל הכוח השקול הפועל על הגלשן, כפונקציה של הזמן. מהירות הגלשן ברגע $t = 0$ שווה ל- 0.15 m/s בכיוון החיובי.



א. תארו במילים את תנועת הגלשן מרגע $t = 0$ עד $t = 0.6$ s (השתמשו במונחים "מתקף", "תנע", "עבודה" ו"אנרגיה קינטית", ולא בחוק השני של ניוטון).

ב. חשבו את התנע של הגלשן ברגע $t = 0$ (תנע התחלתי).

ג. חשבו את מתקף שקול הכוחות הפועלים על הגלשן מרגע $t = 0$ עד $t = 0.6$ s.

ד. חשבו את שינוי התנע של הגלשן במרווח זמן זה.

ה. חשבו את התנע של הגלשן ברגע $t = 0.6$ s (תנע סופי).

ו. חשבו את מהירות הגלשן ברגע $t = 0.6$ s.

ז. חשבו את האנרגיה הקינטית הסופית ואת האנרגיה הקינטית ההתחלתית של הגלשן.

ח. חשבו את השינוי באנרגיה הקינטית של הגלשן.

ט. חשבו את העבודה שנעשתה על ידי הכוח השקול.

58. ארגז ניצב על רצפת מעלית.

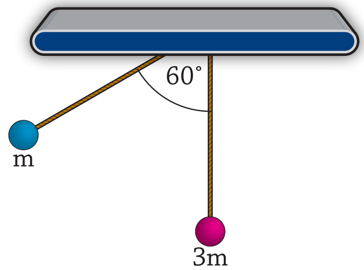
א. המעלית נחה. הסבירו מדוע העבודה שעושה הכוח הנורמלי הפועל על הארגז היא אפס.

ב. המעלית עולה במהירות קבועה.

(1) הסבירו מדוע עבודת הכוח הנורמלי, במקרה זה אינה אפס.

(2) כיצד ייתכן שהכוח הנורמלי מבצע עבודה, למרות שהאנרגיה הקינטית של הארגז אינה משתנה?

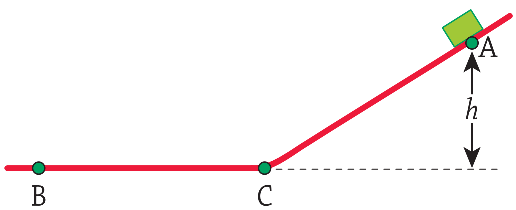
★59. שני כדורים קשורים באמצעות חוטים לתקרה. מסתו של הכדור הראשון היא m, והוא מוחזק כך שהחוט יוצר זווית בת 60° עם הכיוון האנכי. מסתו של הכדור השני היא 3m והוא תלוי במנוחה. משחררים את הכדור הראשון, והוא מתנגש פלסטית בכדור השני. ברגע ההתנגשות שני החוטים אנכיים.



א. בטאו באמצעות נתוני השאלה את מתיחותו של כל חוט כהרף עין לפני ההתנגשות.

ב. מצאו את הזווית בין החוטים לכיוון האנכי כאשר הכדורים מגיעים לשיא הגובה לאחר ההתנגשות.

60. גוף שמסתו m משוחרר ממנוחה מנקודה A הנמצאת בגובה h מעל המשטח האופקי. הגוף מחליק במורד המשטח הישר AC, ממשיך בתנועתו על המשטח האופקי ונעצר בנקודה B (ראו איור).



העבודה הדרושה כדי לגרור אותו בחזרה לנקודת המוצא A על ידי כוח המקביל בכל נקודה לכיוון התנועה של הגוף, היא:

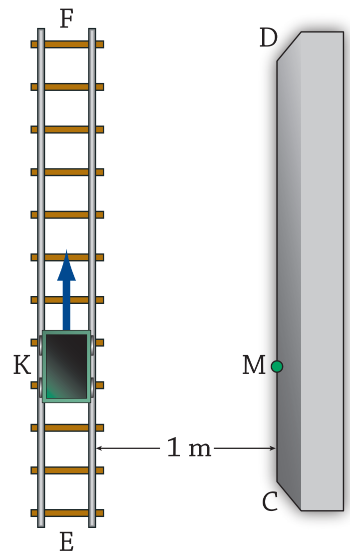
(1) $\frac{2}{3}mgh$

(2) mgh

(3) $\frac{3}{2}mgh$

(4) $2mgh$

61. על מסילה חלקה EF, הנמצאת על משטח אופקי, נעה קרונית K במהירות שגודלה $v_1 = 0.5\frac{m}{s}$. במקביל למסילה במרחק 1 m ממנה ניצב קיר חלק CD (ראו איור, מבט מלמעלה). כאשר הקרונית חולפת מול הנקודה M, נזרק מתוכה כדור בכיוון הניצב למסילה EF, במהירות שגודלה $v_2 = 0.5\frac{m}{s}$ ביחס לקרונית. הכדור נזרק בגובה הרצפה לעבר הקיר CD, נע על-פני הרצפה החלקה, ומתנגש התנגשות אלסטית בקיר CD. הקרונית ממשיכה לנוע על המסילה EF.



א. העתיקו את האיור למחברותיכם, וסרטטו בו באופן סכמטי את הצורה של מסלול תנועת הכדור עד לפגיעתו בקיר CD (ישר, פרבולה, היפרבולה, מסלול אחר). הסבירו.

ב. באיזה מרחק מהנקודה M יפגע הכדור בקיר CD? הסבירו.

ג. האם מהירות הקרונית, לאחר שהכדור נזרק ממנה, קְטֵנה, גדֵלה או שאינה משתנה? הסבירו.

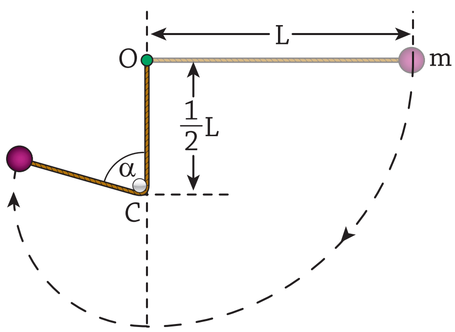
ד. לאיזה כיוון יחזור הכדור מהקיר CD? הוכיחו בעזרת חוקי שימור.

ה. האם הכדור והקרונית יפָּגשו? אם כן - היכן? אם לא - מדוע לא?

62. א. נער מחזיק בקצהו האחד של חוט שלקצהו האחר קשור כדור קטן שמסתו m. הנער מסובב באמצעות ידו את הכדור עם החוט במעגל אנכי, כך שהכדור נע במהירות קבועה בגודלה.
הראו כי מתיחות החוט בנקודה התחתונה, L, של מסלול תנועת הכדור, גדולה מן המתיחות בנקודה העליונה, H, של המסלול בכפליים משקל הכדור (כלומר ב- 2mg).

ב. הנער קושר את קצה החוט שבידו למסמר אופקי, כך שהחוט אנכי. לאחר מכן הוא מקנה לכדור מהירות אופקית, וכתוצאה מכך הכדור נע במעגל אנכי (לאחר שהנער הרפה ממנו) (הפעם תנועת הכדור אינה קבועה בגודלה). הראו כי מתיחות החוט בנקודה התחתונה, L, של המסלול גדולה מן המתיחות בנקודה העליונה, H של המסלול, בשש פעמים משקל הכדור.

63. כדור קטן שמסתו m קשור לקצהו של חוט שאורכו L. קצהו האחר של החוט קבוע בנקודה O. הכדור משוחרר ממצב שבו החוט אופקי וישר. כאשר החוט מגיע למצב אנכי הוא נתקל בנקודה C במוט גלילי דק המאונך למישור תנועת הכדור (מערכת זו מכונה **מטוטלת אויילר**).



א. מהי מתיחות החוט במהלך תנועתו, ברגע שהחוט אנכי? בטאו תשובתכם באמצעות נתוני השאלה.

ב. מהו גודל המהירות של הכדור כאשר החוט יוצר זווית כלשהי α עם OC, כמתואר באיור? בטאו תשובתכם באמצעות L ו- α.

ג. הראו כי הזווית המרבית, α, שבה מסלול הכדור הוא עדיין מעגלי מקיימת: $\cos\alpha = \frac{2}{3}$.

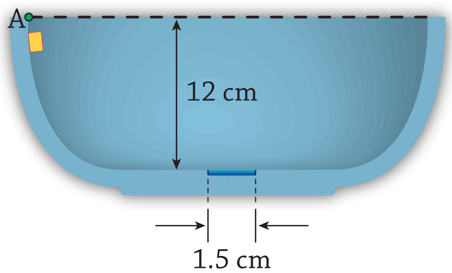
ד. מה תהיה צורת המסלול של הכדור כל עוד המתיחות בחוט היא אפס?

III. תרגילי העמקה

תרגילים 64 - 70 מיועדים להעמקה.

64. גוף קטן מחליק הלוך ושוב בתוך קערה שגובהה 12 cm.

התנועה החלה ממנוחה משפת הקערה A. הקערה חסרת חיכוך, פרט לקטע בקרקעיתה שאורכו 1.5 cm (ראו איור) בו מקדם החיכוך עם הגוף הוא 0.86. כמה פעמים יעבור הגוף על פני הקצה הימני של הקטע המחוספס?



65. א. גוף שמסתו M מתנגש פלסטית בגוף נח שמסתו m. E_i - האנרגיה המכנית של מערכת הגופים לפני ההתנגשות; E_f - האנרגיה המכנית אחרי ההתנגשות. הוכח כי החלק שמהווה האנרגיה המכנית ה'אובדת', $E_i - E_f$, מהאנרגיה המכנית שלפני ההתנגשות, E_i, ניתן על ידי

$$\frac{E_i - E_f}{E_i} = \frac{m}{M + m}$$

ב. הסתמכו על הביטוי הרשום בסעיף א והראו כי כאשר:

(1) $M << m$ - אנרגיה מכנית כמעט ואינה 'אובדת'.

(2) $M = m$ - 'אובדת' בדיוק מחצית האנרגיה המכנית.

(3) $M >> m$ - רוב האנרגיה המכנית 'אובדת'.

ג. הסתמכו על סעיפים א ו- ב, וסרטטו גרף מקורב של $(E_i - E_f)/E_i$, כפונקציה של m/M.

ד. הפיקו באמצעות מחשב את הגרף שהתבקשתם לסרטט בסעיף ג, והשוו בין שני הגרפים.

66. א. גוף שמסתו M נע במהירות שגודלה v_1 ומתנגש בגוף נח שמסתו m. ההתנגשות אלסטית וחד-ממדית. אחרי ההתנגשות נע הגוף הראשון (M) במהירות שגודלה u_1. הוכיחו כי:

$$\frac{v_1}{u_1} = \frac{M + m}{M - m}$$

ב. הסתמכו על הביטוי הרשום בסעיף א והראו כי כאשר:

(1) $M << m$ - מהירותו של הגוף הראשון כמעט ואינה משתנה.

(2) $M < m$ - הגוף הראשון ממשיך לנוע בכיוון תנועתו המקורי.

(3) $M = m$ - הגוף הראשון נעצר.

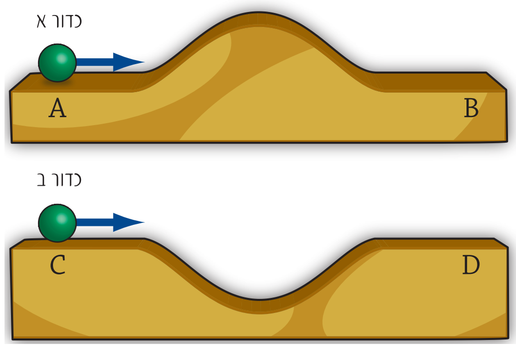
(4) $M > m$ - הגוף הראשון מוחזר.

(5) $M >> m$ - הגוף הראשון מוחזר, וגודל מהירותו לאחר ההתנגשות קרוב מאוד לגודל מהירותו לפניה.

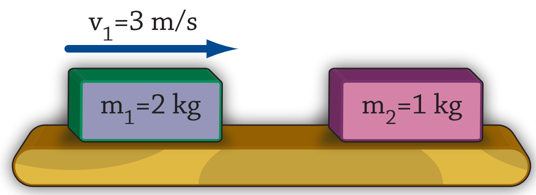
ג. הסתמכו על סעיפים א ו- ב וסרטטו גרף מקורב של v_1/u_1 כפונקציה של m/M.

ד. הפיקו באמצעות מחשב את הגרף שהתבקשתם לסרטט בסעיף ג, והשוו בין שני הגרפים.

★67. כדור א נע על מסילה AB מנקודה A לנקודה B. כדור ב, זהה ל-א, נע על מסילה CD מ- C ל- D. לשני הכדורים ניתנה אותה מהירות התחלתית, ושתי המסילות שוות באורכן. הניחו כי ניתן להזניח את החיכוך בין הכדורים למסילות, וכי כדור א מצליח לעבור את ה'גבעה'. איזה משני הכדורים יעבור את המסלול בזמן קצר יותר? נמקו.



★**68.** גוף שמסתו $m_1 = 2\ kg$, נע על משטח אופקי חסר חיכוך במהירות שגודלה $v_1 = 3\ m/s$, לקראת גוף נח שמסתו $m_2 = 1\ kg$ (ראו איור). כל זמן שהמרחק ℓ בין הגופים גדול מ- 1 מ', לא פועל ביניהם כוח כלשהו, אולם כאשר המרחק קטן או שווה ל- 1 מ' פועל ביניהם כוח דחייה קבוע, שגודלו $F = 10\ N$.



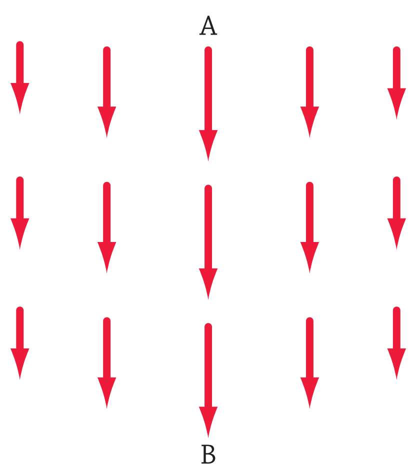
א. כעבור כמה זמן מרגע התחלת פעולת כוח הדחייה בין הגופים יהיה המרחק ביניהם מינימלי?

הנחיה: המרחק בין הגופים הוא מינימלי כאשר המהירות היחסית ביניהם היא אפס.

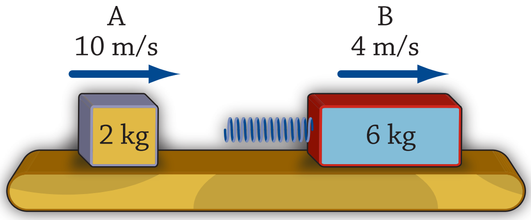
ב. חשבו את המרחק המינימלי בין הגופים.

ג. חשבו את מהירות הגופים אחרי הפסקת פעולת הכוח ביניהם.

69. באיור מתואר "שדה כוח". כלומר לכל נקודה במרחב מותאם וקטור המתאר את הכוח (גודל וכיוון) שיפעל על גוף שמסתו 1 kg שיוצב בנקודה. הכוחות הם הגדולים ביותר לאורך הקו AB, והם הולכים ונחלשים ככל שמתרחקים מ- AB. לאורך כל קו אנכי הכוחות שווים. האם הכוח הוא משמר? נמקו.



★**70.** גופים A ו-B נעים באותו כיוון לאורך קו ישר, על משטח אופקי חסר חיכוך כמתואר באיור. מסתו של הגוף A היא 2 kg וגודל מהירותו 10 m/s, ולגוף B מסה של 6 kg וגודל מהירותו 4 m/s. לגוף B צמוד מאחוריו קפיץ שהקבוע שלו 800 N/m.



א. מהי מהירותו של גוף A ביחס לגוף B לפני ההתנגשות?

ב. מהי מהירותו של גוף A ביחס לגוף B לאחר ההתנגשות?

ג. מהי המהירות היחסית בין הגופים ברגע שבו התכווצות הקפיץ היא מרבית? הסבירו.

ד. מהי התכווצותו המרבית של הקפיץ?

תשובות

1. 108 J

2. רמז: בחנו את הביטוי לאנרגיה הקינטית.

3. רמז: בחנו את הביטויים לאנרגיה הקינטית ולתנע.

4. דוגמה: האנרגיה הקינטית של אדם המחכה לאוטובוס בתחנה, ביחס לתחנה, היא אפס, אך ביחס לאוטובוס (נוסע) הוא שונה מאפס.

5. $0.2\pi^2\ J \approx 1.97\ J$

6. 60 J

7. לדוגמה המונחים: מהירות, תאוצה, כוח.

8. 1500 J

9. $\approx 2030\ J$

10. א. הנתון **אינו** מיותר, כי ...

ג. כוח הכובד: 0; הכוח הנורמלי: 0

הכוח F: 13.6 J; כוח המתיחות: $-6.4\ J$

ד. 7.2 J

11. ה. לא, כי ...

12. 6 m/s

13. 45 m

14. א. ככל שהתפוח יורד, העבודה החיובית של כוח הכובד הנעשית על התפוח החל מתחילת הנפילה הולכת וגדֵלה, לכן האנרגיה הקינטית של התפוח הולכת וגדֵלה.

16. א. מהירויות הזריקה והחזרה שוות בגודלן, כי ...

ב. גודל מהירות החזרה קטן מגודל מהירות הזריקה, כי ....

17. א. -12 Ns

ב. 0

ג. לא, כי ...

ד. כן, כי ...

18. א. ב- $x = 30$ m

ב. 15 m/s

19. א. (1) 33 J (2) ≈ 51.5 J

ב. ≈ -51.5 J

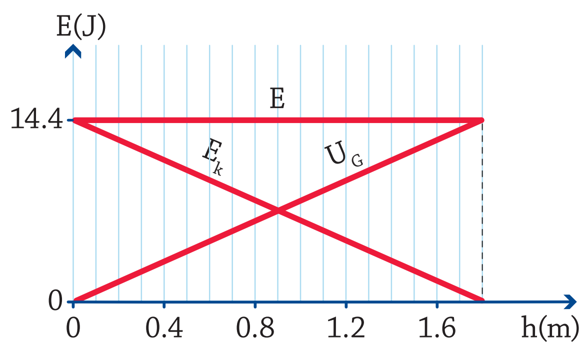
ג. 0

20. $4.2 \cdot 10^5$ J

21. 3000 J

22. המשמעות היא שכאשר גוף מועבר מנקודת מוצא מסוימת לנקודת יעד מסוימת, עבודת כוח הכובד שווה לאורך כל המסלולים האפשריים המחברים את נקודת המוצא לנקודת היעד.

23. ג. הגרפים:



24. האפשרות הנכונה היא (5), כי ...

25. לא, כי ...

26. ד. (2) 10 J

27. רמז: כוח הכובד משמר.

28. כי כוח החיכוך אינו משמר.

29. א. 0.06 J

ב. 0.24 J

30. ב. כאשר על המערכת פועלים רק כוחות משמרים.

31. האפשרות הנכונה היא (1), כי ...

32. א. 2

ב. 4 פי

33. ≈ 5.4 m/s

34. א. לא. רמז: בחנו בעזרת שיקולים קינמטיים.

ב. רמז: בחנו בעזרת שיקולים אנרגטיים.

ג. רמז: מהירות היא גודל וקטורי.

35. א. כן, כי ...

ב. במקרה המתואר באיור ב הגוף מגיע לגובה רב יותר, כי ...

36. ב. הביטוי לעבודת כוח הכובד המופיע באגף שמאל של נוסחת אנרגיה-עבודה, הועבר לאגף ימין של הנוסחה בשאלה זו. לכן במשוואה שבתרגיל 36 הוא אינו מופיע באגף שמאל אלא באגף ימין כשינוי באנרגיה פוטנציאלית כובדית.

37. 0.25

38. ב. (1) ≈ 2.2 m/s

(2) ≈ 1.9 m/s

ג. $8.66\ \frac{m}{s^2}$

39. א. 2.5 r

ב. (1) $\sqrt{2gr}$ בכיוון אופקי שמאלה.

(2) mg כלפי מעלה.

(3) גודל התאוצה הרדיאלית: 4g.

התאוצה המשיקית: g כלפי מטה.

התאוצה השקולה: $\sqrt{17}\,g$ בזווית $\approx 14^\circ$ מתחת לכיוון האופקי ימינה.

ג. לא, כי ...

40. ד. (1) ב-B: ≈ 4.1 m/s כלפי מעלה.

ב-C: 3 m/s בכיוון אופקי ימינה.

ב-D: ≈ 4.1 m/s כלפי מטה.

(2) ב-A: 72.5 N כלפי מטה.

ב-B: 42.5 N בכיוון אופקי שׂמאלה.

ב-C: 12.5 N כלפי מעלה.

41. א. 45 m

ב. 30 m/s

ג. 22.5 m

ד. 36.45 m

ה. ≈ 13.1 m/s בכיוון אופקי ימינה.

ו. ≈ 17.1 m

42. 0.8 m/s ; 4.8 m/s

43. כיוון התנועה של כל גוף מנוגד לכיוון תנועתו המקורי.

גודל מהירותו של A: 5 cm/s;

גודל מהירותו של B: 25 cm/s.

44. ב. הנחיה: ייצגו את שימור התנע באמצעות וקטורי תנע, והראו שהמקבילית היא מלבן.

45. א. לא, כי ...

ג. ≈ 667 m/s

46. א. $2.6\ \text{kg}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ כלפי מעלה.

ב. -1.3 J

ג. האנרגיה "שאבדה" הומרה לאנרגיה פנימית של הכדור ושל הרצפה.

47. רמז: רכיב התנע של הכדור בכיוון מסוים נשמר.

48. 3 kW

49. 6 kW h

50. א. 30 kW

ב. 50 kW

51. א. 0.276 N · s

ב. $0.288\ \text{kg}\cdot\frac{\text{m}}{\text{s}}$

ג. 1. התוצאה המתקבלת מספירת המשבצות אינה מדוייקת.

2. המהירויות שחושבו הן ממוצעות, והן שוות רק בקירוב למהירויות הרגעיות.

3. המערכת אינה מבודדת ממש - יש חיכוך מסוים.

ד. כן, כי לפני ההתנגשות התנועה היתה ימינה, ולאחריה היא שמאלה.

52. א. ≈ 725.7 J

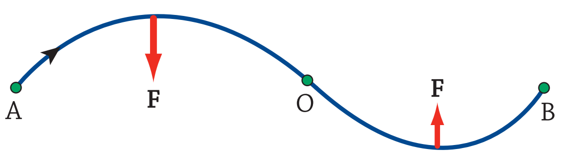
ב. לא, כי ...

53. א. האפשרות הנכונה היא (3), כי ...

ב. האפשרות הנכונה היא (1), כי ...

ג. האפשרות הנכונה היא (2), כי ...

54. ב. בנקודת הפיתול O באיור שלהלן הכוח השקול שווה לאפס.



הסבר: בתנועה קצובה לאורך מסלול עקום התאוצה מכוונת לעבר הצד הקעור של המסלול, ועל פי החוק השני של ניוטון הכוח השקול מכוון לעבר הצד הקעור של המסלול.

לכן במסלול המסורטט לעיל בקטעי המסלול AO ו-OB הכוח השקול מכוון לצדדים שונים של המסלול. הכוח השקול לאורך המסלול משתנה בצורה רציפה, לכן חייבת להיות נקודה שכיווני הכוחות השקולים לפניה ואחריה הם שונים, ובה הכוח השקול שווה לאפס.

55. א. $\frac{m}{M}v$ בכיוון מנוגד לכיוון זריקת הכדור.

ב. $\frac{2m}{M+m}v$ בכיוון מנוגד לכיוון זריקת הכדור.

ג. אחרת מהירות הנער היתה גדולה ממהירות הכדור, והכדור לא היה חוזר לידיו של הנער.

ד. $\frac{2m}{M-m}d$

ה. אין סתירה. הנער והכדור אינם מערכת מבודדת משום ש ...

56. א. $v = \sqrt{2gR(1-\cos\theta)}$

ג. $\approx 48.2^\circ$

57. ב. $0.1275\ kg \cdot \frac{m}{s}$

ג. $0.9\ Ns$

ד. $0.9\ Ns$

ה. $1.0275\ kg \cdot \frac{m}{s}$

ו. $\approx 1.21\ m/s$

ז. $\approx 0.01\ J\ ;\ \approx 0.62\ J$

ח. $\approx 0.61\ J$

ט. $\approx 0.61\ J$

58. ב.(1) כי הכוח הנורמלי פועל לאורך דרך, והוא אינו מאונך למהירות.

59. א. מתיחות החוט הקשור לגוף שמסתו m: $2mg$

מתיחות החוט הקשור לגוף שמסתו 3m: $3mg$

ב. $\approx 14.4^\circ$

60. אפשרות (4)

61. א. למהירות ההתחלתית של הכדור ביחס לרצפה יש שני רכיבים: רכיב המאונך למסילה שגודלו 0.5 m/s, ורכיב בכיוון תנועת הקרונית, שגם גודלו 0.5 m/s. לכן למהירות ההתחלתית זווית בת 45° עם המסילה, לפיכך הכדור ינוע לאורך קו ישר בכיוון זה.

ב. 1m

ג. אינה משתנה, כי ...

ד. בזווית 45° עם הקיר, כי ...

ה. ייפגשו במרחק 2 m ממקום זריקת הכדור.

62. א. מצאו, על סמך החוק השני של ניוטון ביטוי למתיחות, T_L, בנקודה הנמוכה ביותר, וביטוי למתיחות, T_H, בנקודה הגבוהה ביותר. לבסוף הראו כי $T_L - T_H = 2mg$.

ב. מצאו, על סמך החוק השני של ניוטון ביטוי למתיחות, T_L, בנקודה הנמוכה ביותר, וביטוי למתיחות, T_H, בנקודה הגבוהה ביותר. השתמשו גם בחוק שימור האנרגיה המכנית. לבסוף הראו כי $T_L - T_H = 6mg$.

63. א. $3mg$

ב. $\sqrt{gL(1-\cos\alpha)}$

ד. פרבולה

64. 10 פעמים.

67. כדור ב, כי ...

68. א. $0.2\ s$

ב. $0.7\ m$

ג. מהירות m_1: $1\ m/s$

מהירות m_2: $4\ m/s$

69. לא. רמז: בחנו אם העבודה לאורך מסלול סגור שווה לאפס.

70. א. $6\ m/s$

ב. $-6\ m/s$

ג. 0

ד. $\approx 26.0\ cm$

פרק ח

תנועה הרמונית פשוטה

1. תנועות מחזוריות ותנודות

1.1 תנועה מחזורית

בפרקים הקודמים התוודענו לשתי תנועות מחזוריות: תנועה מעגלית קצובה (פרק ה') ותנועה לאורך מעגל אנכי (פרק ז'). ראינו, כי תנועה מחזורית מאופיינת על ידי **זמן המחזור**, T, של התנועה: אם גוף שתנועתו מחזורית לאורך קו ישר נמצא ברגע כלשהו t, במקום מסוים, אז הוא יימצא בדיוק באותו מקום גם ברגע t + T. כלומר: $x(t) = x(t+T)$ לכל x. נעיר כי הדרישה שהשוויון $x(t) = x(t + T)$ יתקיים **לכל x** מבטיחה שיתקיים גם $v(t) = v(t + T)$.

תנועות מחזוריות אינן מוגבלות למסלול מעגלי דווקא; עיין בטבלה 1 כדי לקבל תמונה על תנועות מחזוריות בטבע, ועל סדרי גודל של התדירויות שלהן.

התנועה המחזורית	**תדירות** f(Hz)
תנועת הארץ סביב השמש	$3.17 \cdot 10^{-8}$
תנועת הירח סביב הארץ	$4 \cdot 10^{-7}$
ילד מתנדנד בנדנדה	=0.5
פעימות הלב של האדם	≈1
עור התוף באוזן האדם	20-20,000

התנועה המחזורית	**תדירות** f(Hz)
תנודות מים בגלי סונאר	$1\text{-}10^6$
תנודות גביש בשעון	$\approx 10^5$
אלקטרונים באנטנה של תחנת שידור	$\approx 10^6$
קרינה מיסוד צזיום בשעון אטומי	$9 \cdot 10^9$
תנודה של מולקולות המימן	$1.31 \cdot 10^{14}$

טבלה 1: תדירויות – סולם ערכים

דוגמה לתנועה מחזורית: כדור מתרוצץ בין שני קירות

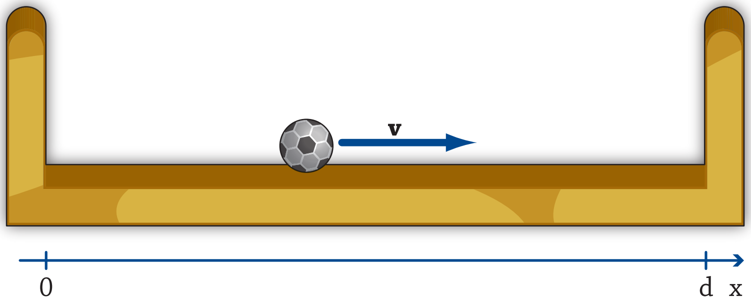
כדור קטן נע על פני רצפה אופקית חסרת חיכוך הלוך ושוב בין שני קירות שהמרחק ביניהם הוא d. נניח כי התנגשויות הכדור עם הקירות הן אלסטיות. גודל מהירות הכדור בעת תנועתו בין שני הקירות קבוע, ונסמנו ב- v. נתאר באמצעות גרף את מקום הכדור כפונקציה של הזמן, ונראה כיצד משתקפת מחזוריות התנועה בצורת הגרף.

נבחר ציר מקום שנמתח לאורך מסלול התנועה, כיוונו החיובי פונה ימינה, וראשיתו בקיר השׂמאלי (איור 1א). נבחר $t = 0$ ברגע בו ארעה אחת ההתנגשויות של הכדור עם הקיר השׂמאלי.

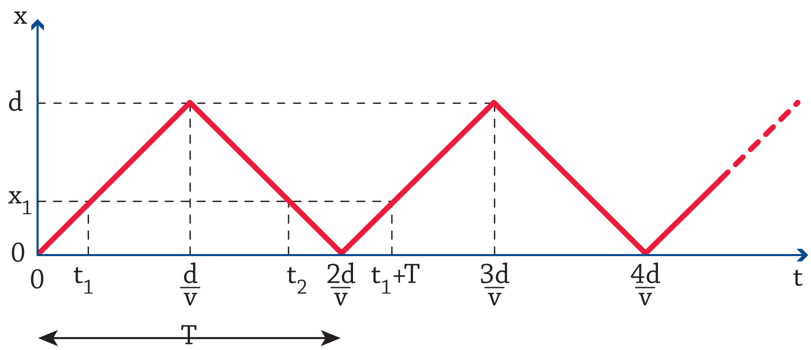
ברגע $t = 0$ הגוף נמצא ב-$x = 0$, ולאחר שהוא נרתע מהקיר השׂמאלי הוא נע מרחק d תוך פרק זמן d/v, עד התנגשותו עם הקיר הימני. גרף מקום-זמן (איור 1ב) המתאים לחלק זה של התנועה הוא קו ישר המתחיל בראשית הצירים (בהתאם לנוסחה $x = v \cdot t$).

לאחר ההתנגשות עם הקיר הימני הכדור נע לעבר הקיר השׂמאלי; תנועה זו מתחילה ברגע $t = d/v$ מנקודה ששיעורה $x = d$, ונמשכת עד רגע $t = 2d/v$ שבו הכדור מתנגש עם הקיר השׂמאלי הנמצא בנקודה ששיעורה $x = 0$. גם קטע גרף זה הוא לינארי, אך שיפועו שלילי. מכאן ואילך התנועה חוזרת על עצמה.

פרק הזמן $T = 2d/v$ בין שתי התנגשויות עוקבות **באותו קיר** הוא זמן מחזור התנועה. אם הכדור היה ברגע t_1 במקום ששיעורו x_1 (איור 1ב), אזי כעבור פרק זמן $2d/v$ (כלומר ברגע $t_1 + T$) הכדור יימצא בדיוק באותו מקום. התנאי $x(t) = x(t + 2d/v)$ מתקיים לכל רגע t.



א. תנועת הכדור



ב. גרף מקום-זמן של תנועת הכדור

איור 1: תנועה מחזורית של כדור המתרוצץ בין שני קירות

שאלה: מדוע פרק הזמן $T' = t_2 - t_1$ (t_1 ו-t_2 מסומנים באיור 1ב) אינו מחזור התנועה, למרות שמתקיים $x(t_1) = x(t_1 + T')$?

1.2 תנודות

כאשר גוף נע **בתנועה מחזורית** הלוך ושוב על פני מסלול בעל שתי נקודות קצה אומרים שהוא **מתנודד**. כדור מתרוצץ בין שני קירות, שאת תנועתו המחזורית ניתחנו בסעיף הקודם, מבצע תנודות.

נציג שלוש דוגמאות נוספות לתנודות.

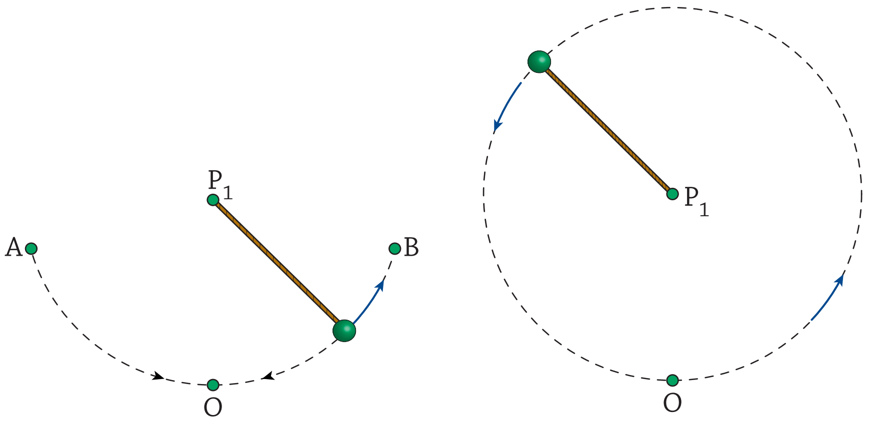
א. כדור קשור בקצה חוט

באיור 2א מתואר כדור הקשור לחוט שקצהו האחר קשור לנקודה קבועה P_1. הכדור נח בנקודת שיווי משקל. אם נקנה לכדור מהירות מספיק גדולה בכוון מאונך לחוט, הוא ישלים סיבוב מעגלי, ויגיע לנקודת המוצא (איור 2ב). אִילו לא היה חיכוך, הכדור היה מגיע לנקודת המוצא בדיוק עם אותה אנרגיה שהיתה לו ברגע שיגורו, והיה נע בתנועה מחזורית במעגל אנכי.

לעומת זאת, אם נסיט את הכדור מנקודת שיווי המשקל לנקודה כלשהי הנמוכה מ-P_1 (נקודה A באיור 2ג), ונשחרר אותו, בהעדר חיכוך הוא **יתנודד** הלוך ושוב בין נקודות A ו-B הנמצאות שתיהן באותו גובה.

כאשר מדברים על **תנודה אחת** מתכוונים למהלך הגוף המתנודד במשך מחזור אחד. תנועת הכדור למשל מ-A ל-B (דרך נקודת שיווי המשקל O) וחזרה ל-A היא תנודה אחת.

נשים לב כי תנודות הן קבוצה מיוחדת של התנועות המחזוריות, לכן המושׂגים "זמן מחזור" ו"תדירות" אותם הגדרנו עבור כל תנועה מחזורית, מוגדרים בפרט עבור תנודות.



א. הכדור בשיווי משקל

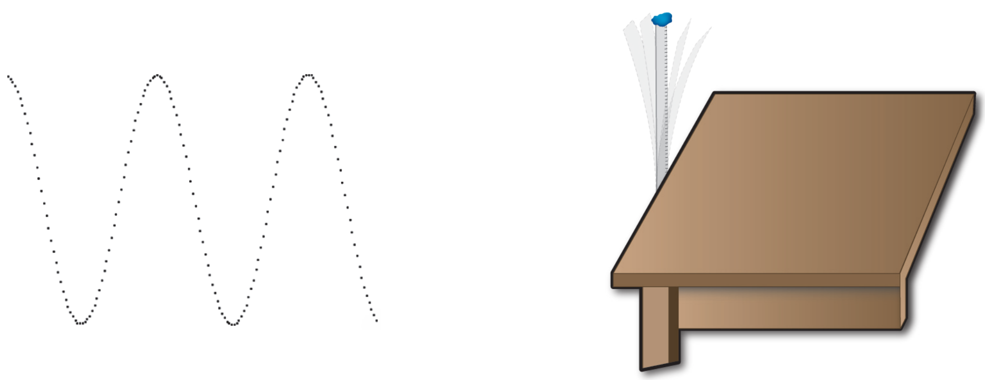
ב. הכדור נע לאורך מעגל אנכי בתנועה מחזורית

ג. הכדור מבצע תנודות

איור 2: כדור קשור בקצה חוט

ב. תנודות גוף הקשור לקצה סרגל מפלדה

סרגל מפלדה המאונך לפני שולחן מחובר לשולחן בקצהו התחתון, ולקצהו העליון קשור גוף. הגוף מתנודד כאשר מוציאים אותו מנקודת שיווי המשקל (איור 3א). גם ללא ניתוח מעמיק, ברור שעקומת מקום-זמן "מתנדנדת" בין ערכים חיוביים ושליליים של המקום (אם ראשית ציר המקום נבחרת בנקודת שיווי המשקל). כדי לקבל תמונה מדויקת יותר, עקבנו אחר תנודות הגוף באמצעות מד-טווח המחובר למחשב (איור 3ב).



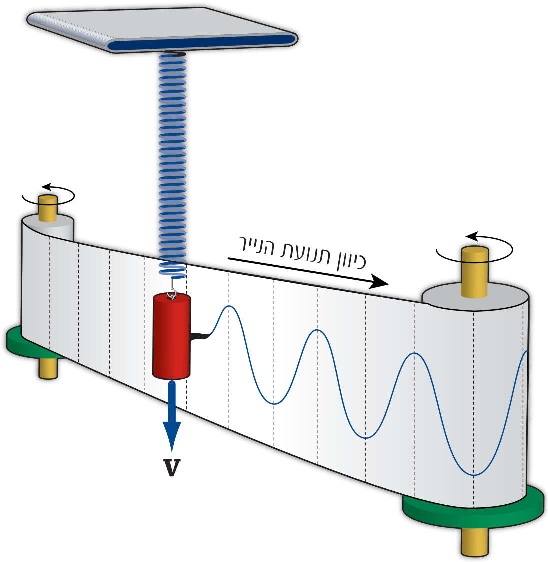
א. מערכת הניסוי

ב. עקומת מקום-זמן של תנועת הגוף

איור 3: גוף מתנודד בקצה סרגל פלדה

ג. תנודות משקולת התלויה על קפיץ אנכי

משקולת התלויה על קפיץ אנכי מתנודדת לאחר שחרורה מנקודה הנמצאת מעל נקודת שיווי המשקל או מתחתיה. אפשר ללמוד על תנודות אלה באמצעות המתקן המתואר באיור 4 שבו עט מחובר למשקולת ומאחורי העט נעה רצועת נייר במהירות קבועה. כאשר המשקולת מתנודדת, רושם העט על גבי רצועת הנייר עקומה שממנה אפשר ללמוד על מקומה האנכי של המשקולת בכל רגע ורגע.

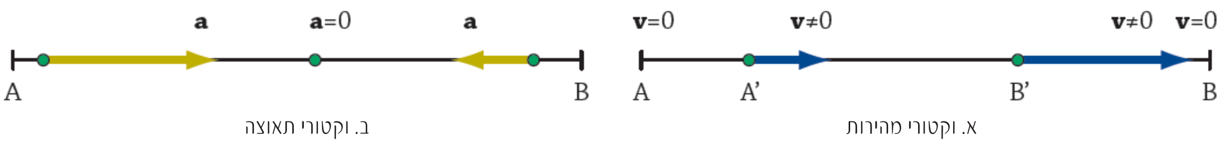


איור 4: תנודות משקולת התלויה על קפיץ

ד. האם לכל גוף מתנודד יש נקודת שיווי משקל לאורך מסלול תנועתו?

נבחן את השאלה לגבי תנודות לאורך קו ישר. נסמן ב- A ו- B את הנקודות שביניהן הגוף מתנודד - מהירותו מתאפסת בשתי נקודות אלה. כאשר הגוף יוצא מנקודה A לעבר B, מהירותו גדֵלה מאפס לערך כלשהו (איור 5א), כלומר תאוצתו מכוונת לעבר B (איור 5ב). כאשר הגוף מתקרב לנקודה B, מהירותו צריכה לקטון עד שתתאפס בנקודה B (איור 5א), לכן התאוצה מכוונת לעבר A (איור 5ב). מאחר והתאוצה משתנה באופן **רציף**, חייבת להיות לפחות נקודה אחת בין A ל- B בה התאוצה מתאפסת (איור 5ב). בנקודה זו גם הכוח השקול מתאפס, וזו נקודת שיווי משקל.

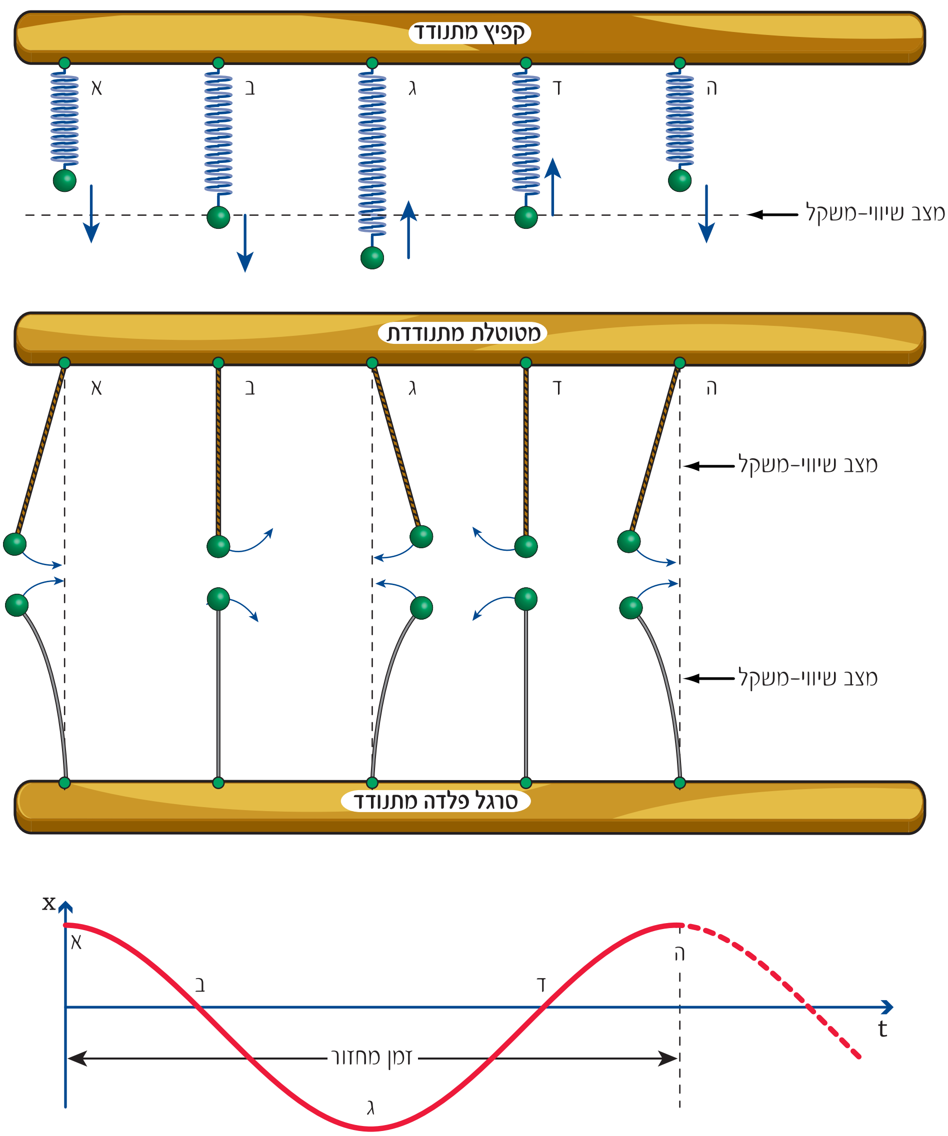
כלומר: לכל גוף המתנודד לאורך קו ישר, חייבת להיות לאורך מסלול תנועתו לפחות נקודת שיווי משקל אחת. בדוגמה של הכדור שנע בין שני קירות - כל נקודה שבין שני הקירות היא נקודת שיווי משקל, לכן במקרה זה קיימות אינסוף נקודות שיווי משקל.



איור 5: לכל גוף מתנודד יש לפחות נקודת שיווי משקל אחת על מסלול התנודה

נסכם:

תנודות הן תנועות מחזוריות מיוחדות, בהן הגוף נע בין שתי נקודות קצה של מסלול תנועתו. מאחר והתנודות שייכות למשפחת התנועות המחזוריות, הן מאופיינות על-ידי זמן מחזור. לעיתים, בדיוק באמצע בין שתי נקודות הקצה נמצאת על המסלול נקודת שיווי משקל יחידה. ניתוחי ניסויים מראים שגרפי מקום-זמן של תנודות רבות דומים מאוד אלה לאלה, כמתואר באיור 6.



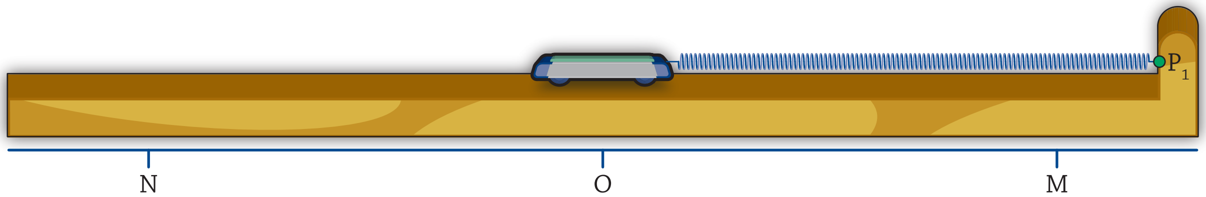
איור 6: שלושה גופים מתנודדים: משקולת על קפיץ, מטוטלת, וגוף בקצה סרגל פלדה. התנודות מאופיינות על ידי אותה עקומת מקום–זמן. במצבים א–ה מתוארים ההעתקים השונים, ומולם הנקודות המתאימות בעקומה. מצב ה שקול למצב א, הוא מסמל את סיומו של מחזור שלם, ואת תחילתו של המחזור הבא.

2. הכוח בתנועה הרמונית פשוטה

סוג מסוים של תנודות חשובות מכונה "תנודות הרמוניות". הן נגרמות בהשפעת כוח שיש לו תבנית מתמטית מסוימת. נבהיר זאת בעזרת הדוגמה הבאה.

2.1 דוגמת מבוא לתנועה הרמונית פשוטה

קפיץ הניתן לכיווץ ולמתיחה קשור בקצהו האחד לנקודה קבועה P_1 ובקצהו האחר לקרונית הנמצאת על משטח אופקי (איור 7). כשהקרונית נחה (בנקודה O) הקפיץ רפוי (אינו מכווץ ואינו מתוח).



איור 7: קרונית קשורה לקפיץ רפוי

במצב זה פועלים על הקרונית כוחות רק בכיוון אנכי: כוח נורמלי (**N**) כלפי מעלה, ומשקל (m**g**) כלפי מטה. שקול כוחות אלה הוא אפס. O היא נקודת שיווי המשקל של המערכת. מסיטים את הקרונית לנקודה M (איור 7) תוך כדי כיווץ הקפיץ, ומשחררים אותה ממנוחה - הקרונית מתחילה להתנודד; היא נעה מנקודה M שׂמאלה, חולפת על פני הנקודה O, וממשיכה לנוע תוך מתיחת הקפיץ. אם לא פועלים כוחות חיכוך על הקרונית אז על-פי חוק שימור האנרגיה המכנית, הקרונית מגיעה לנקודה N, שמרחקה מ-O שווה למרחק הנקודה M מ-O. בנקודה N משנה הקרונית את כיוון תנועתה, ונעה ימינה עד שהיא מגיעה שוב לנקודה M (ובכך משלימה תנודה אחת), וחוזר חלילה.

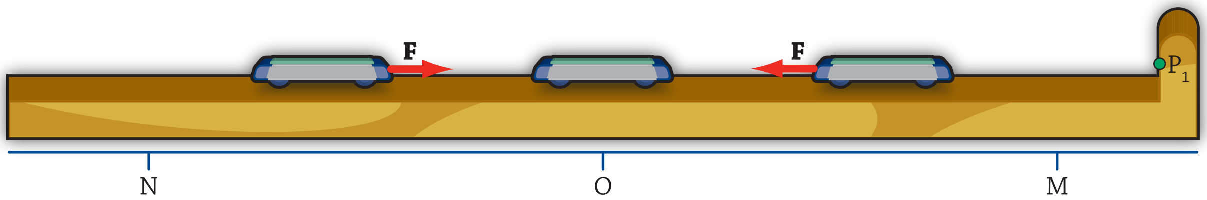
> הגדרת המושג **"משרעת"**:
>
> המרחק המרבי בין גוף המתנודד לנקודת שיווי המשקל שלו מכונה **משׂרעת** (אמפליטודה) התנודות. נסמן אותה באות A, קיצור ל-**A**mplitude.

באיור 7 המשרעת היא אורך הקטע MO.

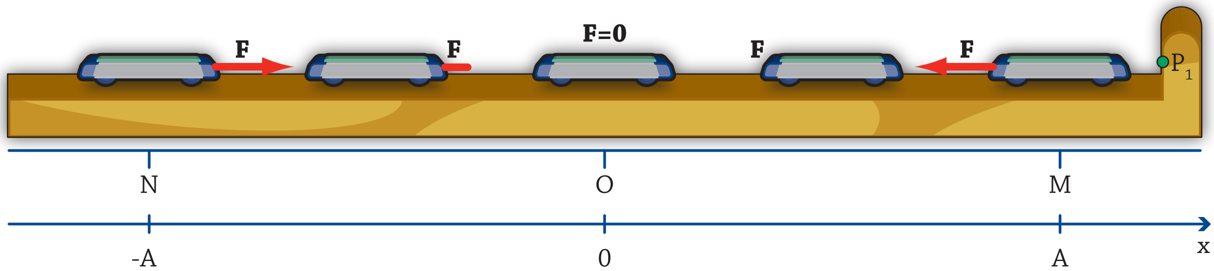
כאשר בודקים באופן ניסויי את גרף מקום-זמן של תנודות הקרונית, מתברר שמתקבל גרף דומה לגרפי מקום-זמן של שלוש התנודות שסקרנו בסעיף 1. לכן כדאי לבחון מהי חוקיות הכוח שגורם לתנודות אלה.

הקרונית נעה בהשפעת הכוח שמפעיל עליה הקפיץ. נאפיין כוח זה:

כיוון הכוח: באיור 8א מתוארת הקרונית בשלושה מקומות שונים לאורך מסלול תנועתה (הקפיץ לא צוייר כדי לפשט את האיור). בנקודה O הכוח שווה לאפס. בכל נקודה מימין ל-O הקפיץ מכווץ, לכן הוא מפעיל על הקרונית כוח שכיוונו שׂמאלה, ובכל נקודה משמאל ל-O הקפיץ מתוח לכן הוא מפעיל כוח ימינה. כלומר: **הכוח מכוון תמיד לעבר נקודת שיווי המשקל.**



א. הכוח מכוון לעבר נקודת שיווי המשקל



ב. הכוח גדול יותר ככל שהקרונית רחוקה יותר מנקודת שיווי המשקל

איור 8: הכוח השקול הפועל על הקרונית (הקפיץ אינו מסורטט)

גודל הכוח: מניחים שהתקצרות הקפיץ והתארכותו נמצאים בתחום בו הקפיץ לינארי, כלומר: **גודל הכוח משתנה ביחס ישר למרחק הקרונית מנקודת שיווי המשקל** (איור 8ב).

נוח לבטא את הכוח באמצעות ביטוי מתמטי. לשם כך נגדיר ציר x בכיוון מסלול התנועה, שראשיתו בנקודת שיווי המשקל. שיעורי הנקודות M ו-N הם A ו-(A-) בהתאמה (איור 8ב).

ניתן לכתוב את הביטוי לכוח כך:
$$F = -kx \qquad (1)$$

ביטוי זה מתאר את הכוח גם כאשר הקרונית נמצאת מימין לנקודת שיווי המשקל, וגם משמאל לה: k חיובי תמיד. מימין x חיובי לכן kx - שלילי כנדרש, כי וקטור הכוח מצביע שׂמאלה. משׂמאל לנקודת שיווי המשקל, x שלילי לכן kx - חיובי, ואכן הכוח מצביע ימינה.

2.2 הגדרת תנועה הרמונית פשוטה

תנועת קרונית הקשורה לקפיץ אופקי היא דוגמה לתנועה הרמונית פשוטה. בחלק מהתנודות, כאשר גוף מוסט משיווי משקל יציב, פועל עליו כוח בעל תבנית מתמטית כדוגמת (1), (אם כי מקור הכוח אינו חייב להיות דווקא קפיץ). תנועות אלה מכונות **תנועות הרמוניות פשוטות**.

הגדרת המושג "**תנועה הרמונית פשוטה**" (simple harmonic motion):

תנועה הרמונית פשוטה היא תנועת גוף לאורך קו ישר, בהשפעת כוח שקול הפועל לאורך ציר התנועה, ומאופיין כך:

א. הכוח מכוון לעבר נקודת שיווי המשקל, לכן הוא מכונה **כוח מחזיר**.

ב. גודל הכוח משתנה ביחס ישר למרחק הגוף מנקודת שיווי המשקל.
בלשון מתמטית:

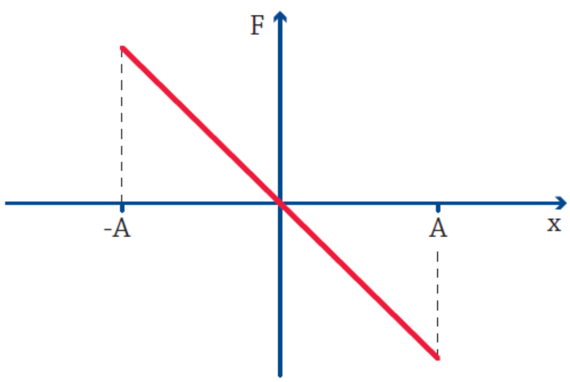
$$F = -c\,\Delta x \qquad (2)$$

כאשר:
F - הכוח השקול הפועל על הגוף;
Δx - העתק הגוף מנקודת שיווי המשקל;
c - קבוע חיובי שממדיו הם ממדים של כוח חלקי ממדים של אורך, וביחידות SI הוא נמדד ב- N/m.

נוח לבחור את ראשית הציר בנקודת שיווי המשקל, ואז:

$$\boxed{F = -cx} \qquad (2')$$

כאשר x - שיעור הנקודה בה הגוף נמצא.
נכנה את המערכת המתנודדת בשם **מתנד (אוסצילטור) הרמוני פשוט**.
איור 9 הוא ייצוג גרפי של הכוח השקול כפונקציה של המקום (כאשר ראשית ציר המקום בנקודת שיווי המשקל).
שיפוע גרף זה הוא (-c).



איור 9: גרף כוח-מקום בתנועה הרמונית פשוטה

הערות:
1. קבוע הכוח (c) בדוגמת המבוא הוא קבוע הקפיץ (k). בהמשך נטפל גם בתנודות הרמוניות שאינן מתרחשות בהשפעת קפיץ, ואז c לא יהיה קבוע של קפיץ.
2. כל תנועה בהשפעת כוח שהתנהגותו מתוארת על ידי תבנית (2') היא הרמונית פשוטה; בכל פעם שנרצה לבחון אם תנועה מסוימת היא הרמונית פשוטה – נבחן את הביטוי לכוח השקול.

בתוקף החוק השני של ניוטון, **התאוצה נמצאת ביחס ישר לכוח, לכן גם היא מכוונת לעבר נקודת שיווי המשקל, וגודלה משתנה ביחס ישר להעתק מנקודה זו**. כאשר מציבים את ביטוי (2') בחוק השני של ניוטון מקבלים:

$$-cx = ma$$

או:

$$\boxed{a = -\frac{c}{m}x} \qquad (3)$$

אפשר להגדיר תנועה הרמונית הפשוטה גם על-פי התנהגות התאוצה, ולא רק על-פי התנהגות הכוח.

3. משוואת התנועה ופתרונה

התאוצה של גוף שנע בתנועה הרמונית אינה קבועה (קשר (3)). לכן לא נוכל להשתמש בנוסחאות שפיתחנו עבור תנועה שוות תאוצה. עלינו לפתח כלים מתמטיים מתאימים עבור תנועה הרמונית. פיתוח הכלים המתמטיים יעשה בתת סעיף 3.1 בעזרת החשבון הדיפרנציאלי. פיתוח זה מהווה במובן מסוים "דרך המלך", משום שהוא מתאר שיטה כללית לפתרון בעיות במכניקה. פיתוח חלופי (לאלה שאינם בקיאים בחשבון דיפרנציאלי) מוצג בנספח ג; הוא אינו דורש ידע בחשבון דיפרנציאלי, אך חסרונו בכך שאינו מציג שיטה כללית, אלא מתבסס על ניתוח התנועה בדרך מיוחדת. עם זאת, הקורא יוכל לרכוש את אותם מושׂגים ואת אותן נוסחאות המתארות את התנועה ההרמונית בכל אחד משני הפיתוחים.

3.1 ניתוח תנועה הרמונית באמצעות חשבון דיפרנציאלי

בפרק א הגדרנו את המהירות הרגעית כנגזרת של המיקום לפי הזמן, ואת התאוצה הרגעית כנגזרת של המהירות לפי הזמן. לכן התאוצה הרגעית שווה לנגזרת השנייה של המיקום לפי הזמן:

$$a(t) = \ddot{x}(t) \qquad (4)$$

הערה: בפיזיקה נהוג לסמן נגזרת **על-פי הזמן** באמצעות נקודה מעל הפונקציה שיש לגזור, במקום באמצעות פסיק. למשל נגזרת המקום, x, לפי הזמן מסומנת ב-$\dot{x}$. $\ddot{x}$ מציין נגזרת שנייה לפי זמן.

תרגיל: הסתמכו על נוסחאות שבפרק א, והראו כי בתנועה שוות תאוצה, הנגזרת הראשונה של נוסחת המקום לפי הזמן שווה למהירות הרגעית, והנגזרת השנייה שווה לתאוצה (הקבועה).

בהסתמכנו על קשר (4) נרשום את החוק השני של ניוטון עבור תנועה לאורך ציר x כך:

$$\Sigma F_x = m\ddot{x}(t) \qquad (5)$$

ניתוח תנועתו של אוסצילטור הרמוני

נבחר ציר מקום לאורך מסלול התנועה, שראשיתו בנקודת שיווי המשקל. תבנית הכוח השקול היא:

$$\Sigma F = -cx$$

נציב ביטוי זה במשוואת החוק השני של ניוטון (נוסחה (5)), ונקבל את **משוואת התנועה** של האוסצילטור:

$$-cx(t) = m\ddot{x}(t)$$

או:

$$\boxed{\ddot{x}(t) = -\frac{c}{m}x(t)} \qquad (6)$$

משוואת התנועה היא **משוואה דיפרנציאלית**: במשוואה מופיעה נגזרת (מסדר שני) של הנעלם. הנעלם במשוואה זו הוא המקום, x, של האוסצילטוֹר, אך הפתרון אינו מספר כגון $x = 0.2\ m$ אלא ביטוי מתמטי המתאר את **המקום כפונקציה של הזמן**. המשמעות של התרת המשוואה הדיפרנציאלית היא מציאת נוסחת מקום-זמן - $x(t)$, אשר הצבתה במשוואה (6) תביא אותה לידי זהות.

משוואות דיפרנציאליות שכיחות בפיזיקה, ופתרונן מאפשר ללמוד על התנהגותם של גדלים פיזיקליים.

התרה כללית של משוואה דיפרנציאלית מהסוג המתואר ב- (6) חורגת ממסגרת ספר זה, אך בעזרת שיקולים פיזיקליים נצביע על פתרונות אפשריים:

ראשית, אנו מצפים שהמערכת תבצע תנודות מחזוריות, לכן הפתרון צריך להיות פונקציה מחזורית. בנוסף לכך, מהתבוננות במשוואת התנועה (6) רואים שהנגזרת השנייה של הפונקציה המבוקשת פרופורציונית לפונקציה עצמה, כאשר קבוע הפרופורציה שלילי.

פונקציות המקיימות שני תנאים אלה הן הפונקציות סינוס וקוסינוס (הנגזרת השנייה של הפונקציה סינוס היא מינוס סינוס. קשר דומה מתקיים לגבי הפונקציה קוסינוס). לכן, נוכל לצפות שהפתרון יהיה פונקציית סינוס או קוסינוס, של ביטוי שהוא פונקציה של הזמן t.

כאמור, איננו פותרים את המשוואה פתרון כללי, אלא מציגים את הפתרון, והקוראים מתבקשים להציב אותו במשוואה (6) ולהיווכח שהוא אכן מקיים אותה.

נוסחת מקום-זמן בתנועה הרמונית פשוטה:

כאשר גוף שמסתו m נע לאורך קו ישר בהשפעת כוח שתבניתו היא $F = -cx$ (הגוף מבצע תנודות הרמוניות) אזי הפתרון **הכללי** של משוואת התנועה הוא:

$$x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}}\,t + \phi\right) \qquad (7)$$

כאשר: ϕ ו-A הם גורמים חופשיים שלא היו במשוואת התנועה אלא "צצו" במהלך פתרון המשוואה כקבועי אינטגרציה.

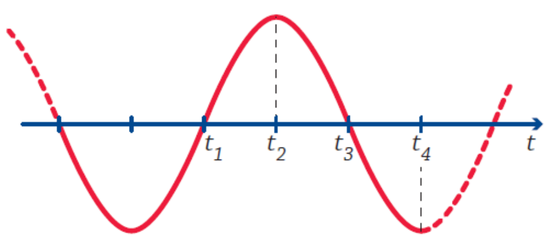
מהי המשמעות הפיזיקלית של A ?

נתבונן בנוסחה (7): הערך המרבי של $x(t)$ הוא A וערכו המזערי $(-A)$ (מדוע?), כלומר A הוא המרחק המרבי מנקודת שיווי המשקל, כלומר A **מייצג את משרעת התנודות**.

מהי המשמעות הפיזיקלית של ϕ ?

הייצוג הגרפי של נוסחה (7) הוא גרף הרמוני כמתואר באיור 10. אנו חופשיים בבחירת רגע האפס; רגע זה יכול להיות תחילת התנועה או כל רגע אחר. אם נבחר $t = 0$ למשל באחד הרגעים שבהם הגוף חולף בנקודת שיווי המשקל בעת תנועתו ימינה (למשל t_1 באיור 10), אזי פונקציה ההרמונית תהיה הפונקציה סינוס, ואז נוסחת מקום-זמן היא:

$x(t) = A\sin\sqrt{\frac{c}{m}}\,t$ (במקרה זה $\phi = -\pi/2$, כי $\cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) = \sin\alpha$).



איור 10: גרף מקום-זמן הרמוני. אם בוחרים $t = 0$ למשל ברגע t_1 אז הגרף ההרמוני הוא גרף סינוס

אם נבחר את t_2 כ- $t = 0$, אזי הפונקציה ההרמונית היא קוסינוס, ואז נוסחת מקום-זמן היא $x(t) = A\cos\sqrt{\frac{c}{m}}\,t$ (במקרה זה $\phi = 0$).

עבור הבחירה $t_3 = 0$ נקבל: $x(t) = -A\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t$ $(\phi = +\pi/2)$.

ϕ הוא מספר הנקבע לפי בחירת הרגע $t = 0$. בדרך כלל נבחר את רגע האפס בנקודה מסוג t_2, שעבורו $\phi = 0$. משמעות הבחירה היא שברגע אפס הגוף היה בחלק החיובי של ציר המקום, בנקודה הרחוקה ביותר מנקודת שיווי המשקל. במילים אחרות, ברגע זה הגוף בנקודה ששיעורה $x = A$, ומהירותו $v = 0$. זוֹ בחירה "טבעית" משום שבאופן מעשי מסיטים בדרך כלל את הגוף לאיזושהי נקודה, ומשחררים אותו ממנוחה מנקודה זו. **כל הנוסחאות שנפתח בהמשך תהיינה מתאימות לבחירה זו.**

הארגומנט $\sqrt{\frac{c}{m}}t + \phi$ בנוסחת מקום-זמן מכונה **מופע (פאזה)**, ו- ϕ, שהוא ערך המופע ברגע $t = 0$, מכונה **מופע התחלתי** או **קבוע המופע** (phase constant); בתנאֵי ההתחלה שבחרנו קבוע זה מתאפס. תוכלו לקרוא יותר על קבוע המופע בנספח ב.

נוסחת מקום-זמן בתנועה הרמונית פשוטה, המתאימה לתנאי ההתחלה $x_0 = A$ ו- $v_0 = 0$:

$$x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}}t\right) \tag{8}$$

מהי המשמעות הפיזיקלית של $\sqrt{c/m}$?

ביטוי זה קובע את מחזור הפונקציה $x(t)$ (ראו נספח ג). זהו גם **זמן המחזור של התנועה ההרמונית**.

על פי נוסחה (3) בנספח ג, המחזור של נוסחת מקום-זמן (8) לעיל הוא:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}} \tag{9}$$

מנוסחה (9) נובעת מסקנה מפתיעה במידת מה: זמן המחזור אינו תלוי במשרעת, אלא רק במסת האוסצילטור ובקבוע c. אפילו נגדיל את המתיחה ההתחלתית פי עשרה, ישלים האוסצילטור מחזור אחד (ויעבור דרך ארוכה פי עשרה) במשך אותו פרק זמן. הסבירו באמצעות שיקולים קינמטיים איכותיים, מדוע מתקבל על הדעת שזמן המחזור אינו תלוי במשרעת.

T הוא זמן המחזור ו- f היא תדירות התנודה. נגדיר גודל פיזיקלי חדש, שהוא פרופורציוני לתדירות תנודות הגוף.

הגדרת המושג **"תדירות זוויתית"** של תנועה הרמונית:

התדירות הזוויתית, ω, בכל תנועה מחזורית מוגדרת כך:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{c}{m}} \tag{10}$$

ביחידות SI התדירות הזוויתית נמדדת ברדיאנים\שנייה. מאחר ורדיאנים חסרי ממדים, יחידת התדירות הזוויתית היא s^{-1}.

על המושגים "מהירות זוויתית" ו"תדירות זוויתית".

המהירות הזוויתית הוגדרה בפרק ה על-ידי (נוסחה (32)): $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$

והתדירות הזוויתית הוגדרה בפרק זה על ידי נוסחה (10).

שני המושגים מסומנים באותה אות (ω), שניהם נמדדים ביחידה s^{-1}, אך אלה מושגים **שונים**.

בתנועה מעגלית קצובה למהירות הזוויתית של הגוף ולתדירות הזוויתית של התנועה יש אותו ערך מספרי, אך זה מקרה מיוחד; בתנודות מטוטלת פשוטה למשל - המהירות הזוויתית משתנה כפונקציה של הזמן, ואין כל קשר מספרי בינה לבין התדירות הזוויתית של התנודה. כאשר מדובר בגוף הנע בתנועה שאינה מחזורית יש משמעות למהירות הזוויתית בכל נקודה ונקודה, אך אין משמעות לתדירות הזוויתית.

נוסחאות מקום-זמן, מהירות-זמן ותאוצה-זמן המתאימות לתנאי ההתחלה $x_0 = A$ ו- $v_0 = 0$

נציב את נוסחה (10) ב- (8), ואז נוסחת מקום-זמן תיראה כך:

$$\boxed{x(t) = A\cos\omega t} \quad (11)$$

נוסחת מהירות-זמן מתקבלת מגזירה לפי הזמן של x(t):

$$\boxed{v(t) = -\omega A\sin\omega t} \quad (12)$$

נוסחת תאוצה-זמן מתקבלת מגזירה לפי הזמן של v(t):

$$\boxed{a(t) = -\omega^2 A\cos\omega t} \quad (13)$$

נוסחאות (11), (12) ו-(13) מתארות בכל רגע את מקומו, מהירותו ותאוצתו של אוסצילטור הרמוני (נזכור שהן מתאימות רק לתנאֵי ההתחלה שבחרנו).

3.2 תיאורים גרפיים של הפונקציות x(t) , v(t) ו-a(t)

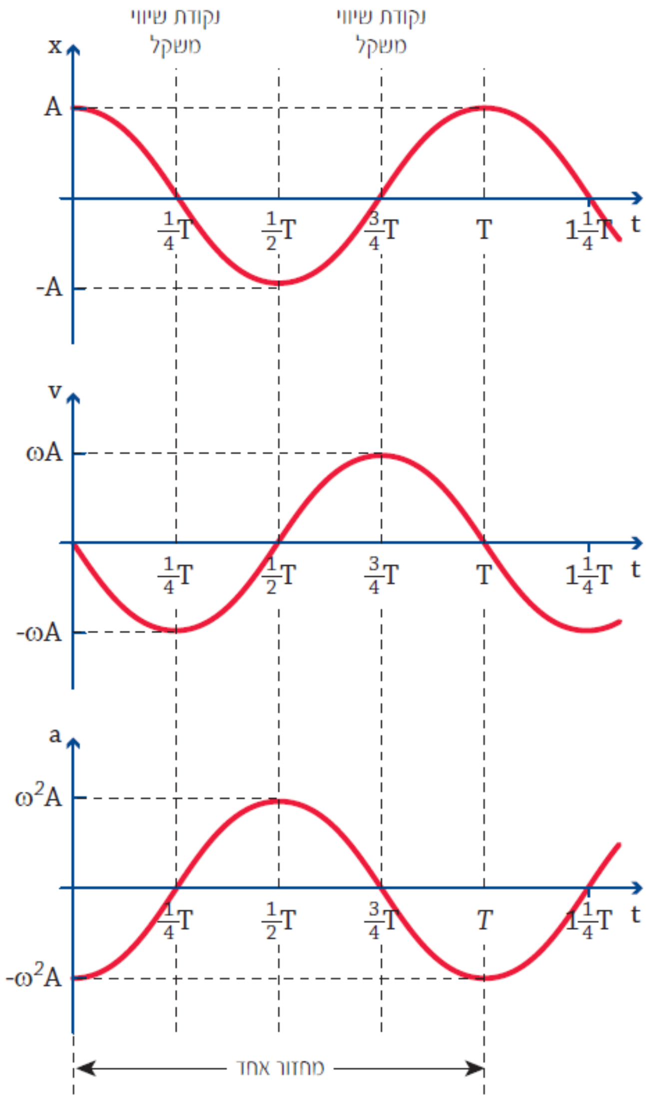
נדון בגוף המבצע תנודות הרמוניות על קטע MN, ביחס לציר x כפי שמתואר באיור 8. באיור 11 מיוצגים מקומו, מהירותו ותאוצתו של הגוף כפונקציה של הזמן. גרפים אלה מתאימים לנוסחאות (11), (12) ו- (13) (אשר פותחו גם בנספח ג).

נתבונן בשלושת הגרפים; ברגע אפס, הגוף נמצא בנקודה הרחוקה ביותר מימין לנקודת שיווי המשקל, ומהירותו שווה לאפס. על הגוף פועל כוח שכיוונו שמאלה וגודלו מרבי. לפיכך גם תאוצת הגוף מכוונת שׂמאלה וגודלה מרבי, ואת זה אפשר לראות בגרף השלישי.

כאשר הגוף מתקרב לנקודת שיווי המשקל, גודל הכוח הולך וקטֵן, לכן גם גודל התאוצה הולך וקטֵן, אך כיוון שהתאוצה מכוונת בכיוון המהירות הגוף נע יותר ויותר מהר.

כאשר הגוף מגיע לנקודת שיווי המשקל (רגע $t = T/4$) גודל מהירותו מרבי. מאחר והכוח מתאפס בנקודה זו - מתאפסת גם תאוצתו.

לאחר שהגוף עובר את נקודת שיווי המשקל (x שלילי) כיוון הכוח מתהפך (הוא מכוון ימינה, לעבר נקודת שיווי המשקל) והמהירות (שהיא שלילית) הולכת וקטנה בגודלה, עד שהיא מתאפסת בנקודה הרחוקה ביותר בצד שׂמאל (רגע $t = T/2$).



איור 11: המקום, המהירות והתאוצה כפונקציה של הזמן בתנועה הרמונית פשוטה (בתנאי שקבוע המופע $\phi = 0$).

3.3 המהירות והתאוצה כפונקציה של המקום

נוסחאות (11), (12) ו-(13) מאפשרות לחשב את המהירות ואת התאוצה בכל מקום x: אפשר לחשב תחילה, על פי נוסחה (11), את הזמן, t, בו הגוף יימצא במקום x מסויים, ואחר-כך, לחשב באמצעות נוסחאות (12) ו-(13) את מהירותו ואת תאוצתו. אבל אפשר לפתח נוסחאות הקושרות ישירות את המהירות ואת התאוצה עם המקום, ללא צורך בחישוב ביניים של הזמן.

המהירות כפונקציה של המקום:

$$v = -\omega A \sin \omega t = \pm\ \omega A \sqrt{1 - \cos^2 \omega t} = \pm\ \omega \sqrt{A^2 - A^2 \cos^2 \omega t}$$

במקום הביטוי $A^2\cos^2\omega t$ המופיע מתחת לשורש נציב x^2 (על-פי נוסחה (11)) ונקבל:

$$\boxed{v = \pm\,\omega\sqrt{A^2 - x^2}} \qquad (14)$$

לגבי הסימן האלגברי הכפול ±: בנקודה נתונה x, לאוסצילטור אותו גודל מהירות, בין אם הוא נע ימינה או שׂמאלה; אם הוא נע בכיוון החיובי סימן המהירות יהיה +, ואם בכיוון השלילי הסימן יהיה -.

התאוצה כפונקציה של המקום: $a = -\omega^2 A\cos\omega t = -\omega^2 x$

$$\boxed{a = -\omega^2 x} \qquad (15)$$

את נוסחה (15) אפשר לקבל גם על ידי הצבה של נוסחה (10) בנוסחה (3).

דוגמה 1: תנודות קרונית הקשורה לקפיץ אופקי

קפיץ אופקי, בעל קבוע 25 נ\'מ', קשור בקצה אחד לנקודה קבועה. לקצה האחר קשורה קרונית שמסתה 0.5 ק"ג, המונחת על משטח אופקי חסר חיכוך. מותחים את הקפיץ בשיעור 15 ס"מ ומרפים. חשבו את:

א. זמן המחזור של התנודות.

ב. הגודל המרבי של מהירות הקרונית.

ג. הגודל המרבי של תאוצת הקרונית.

פתרון:

א. זמן המחזור: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.5}{25}} = 0.89\ \text{s}$

ב. $v(t) = -\omega A\sin\omega t$; ערך הסינוס משתנה בין 1- לבין 1, לכן הגודל המרבי של המהירות:

$$v_{max} = \omega A = \frac{2\pi}{T}A = \frac{2\pi}{0.89}0.15 \approx 1.06\ \text{m/s} \qquad (\text{א})$$

לקרונית מהירות 1.06 מ'\ש' בנקודת שיווי המשקל (פעמיים בכל מחזור - פעם בעת תנועתה ימינה ופעם בעת תנועתה שׂמאלה).

ביטוי (א) מתקבל גם מנוסחה (14) כאשר מציבים בה $x = 0$ (מדוע?).

ג. $a(t) = -\omega^2 A\cos\omega t$; ערך הקוסינוס משתנה בין 1- לבין 1, לכן הגודל המרבי של התאוצה:

$$a_{max} = \omega^2 A = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A = \left(\frac{2\pi}{0.89}\right)^2 0.15 \approx 7.5\ \text{m/s}^2 \qquad (\text{ב})$$

לקרונית תאוצה שגודלה 7.5 מ'\ש'^{2} בשתי הנקודות הקיצוניות של מסלול התנועה.

את ביטוי (ב) אפשר לקבל גם מנוסחה (15).

דרך חלופית לחישוב הגודל המרבי של התאוצה נסמכת ישירות על החוק השני של ניוטון:

$$a_{max} = \frac{F_{max}}{m} = \frac{kA}{m} = \frac{25\cdot 0.15}{0.5} = 7.5\ \text{m/s}^2$$

4. המרות אנרגיה

נתבונן שוב בדוגמת המבוא בה דנו בתנודות קרונית הקשורה לקפיץ אופקי (סעיף 2.1). גודל מהירותה של הקרונית הוא מרבי ברגע שהיא חולפת בנקודת שיווי המשקל, והוא מתאפס כאשר היא משנה את כיוון תנועתה. לכן, האנרגיה הקינטית מתאפסת בקצות המסלול, ומגיעה לערכה המרבי באמצע המרחק ביניהם. מאחר ולא פועלים על הקרונית כוחות שאינם משמרים, האנרגיה המכנית הכוללת שלה נשמרת. כאשר האנרגיה הקינטית נמוכה מערכה המרבי, נצפה, בהתאם לעקרון שימור האנרגיה המכנית, שהפרש האנרגיה הקינטית מועבר למערכת כאנרגיה פוטנציאלית. נבחן עתה שוב את המרות האנרגיה, תוך שימוש בנוסחאות שפיתחנו בפרק זה, ונראה שהאנרגיה המכנית הכוללת, שהיא סכום האנרגיות הקינטית והפוטנציאלית האלסטית, נשארת קבועה במהלך התנודות.

כפי שפיתחנו בפרק ז סעיף 2.4, האנרגיה הפוטנציאלית האלסטית כפונקציה של המקום (ביחס לציר x שראשיתו במקום בו הקפיץ רפוי והגוף בשיווי-משקל):

$$U_{sp} = \frac{1}{2}kx^2 \qquad \text{(א)}$$

נבטא את האנרגיה הקינטית כפונקציה של המקום: נציב בביטוי לאנרגיה הקינטית את הביטוי למהירות, v, על-פי נוסחה (14), ונקבל:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2\left(A^2 - x^2\right)$$

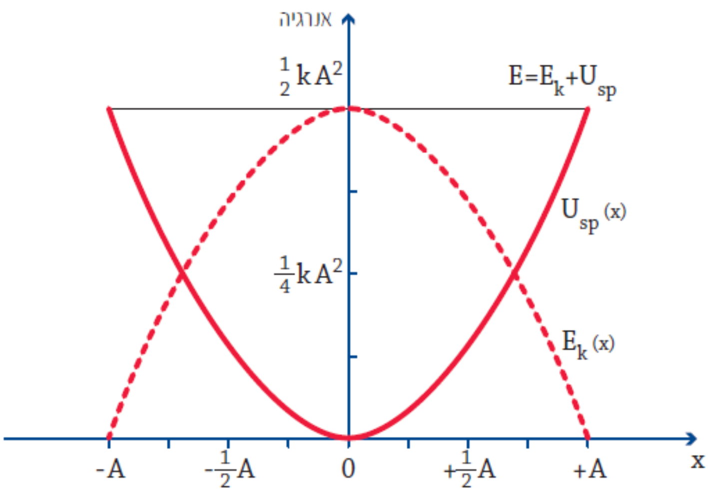
נציב $k = m\omega^2$ (נוסחה (10)) ונקבל:

$$E_k = \frac{1}{2}k\left(A^2 - x^2\right) \qquad \text{(ב)}$$

האנרגיה המכנית הכוללת היא סכום האנרגיות, לכן בכל רגע ורגע היא נתונה על ידי:

$$E = U_{sp} + E_k = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}k\left(A^2 - x^2\right) = \frac{1}{2}kA^2$$

כצפוי, האנרגיה הכוללת קבועה (איור 12). נשים לב שהיא פרופורציונית לריבוע משרעת התנודה.



איור 12: המרות אנרגיה של אוסצילטור הרמוני

תוצאות דומות נקבל עבור תנודות של גוף הנע בהשפעת כוח כלשהו, המתואר על ידי ביטוי מתמטי $F = -cx$ גם במקרה כללי זה האנרגיה הפוטנציאלית נתונה על-ידי הביטוי:

$$U_{sp} = \frac{1}{2}cx^2$$

חשוב לשים לב שגם הטענה ההפוכה נכונה: אם האנרגיה הפוטנציאלית של מערכת תלויה בריבוע ההעתק מנקודת שיווי המשקל, אזי היא מתנודדת בתנועה הרמונית פשוטה. יש מערכות שבהן קריטריון זה לאיפיון תנועה הרמונית נוח מקריטריון הכוח.

5. תנודות משקולת התלויה על קפיץ אנכי

5.1 ניתוח הכוחות הפועלים על המשקולת

האם תנועתה של משקולת התלויה על קפיץ אנכי היא הרמונית פשוטה?

כדי לברר את השאלה, נפתח את הביטוי המתמטי לכוח השקול הפועל על המשקולת המתנודדת.

באיור 13 מוצג הקפיץ בשלושה מצבים:

באיור 13א הקפיץ רפוי (המשקולת עדיין אינה קשורה לקפיץ).

באיור 13ב המשקולת תלויה במנוחה על הקפיץ (בנקודת שיווי המשקל).

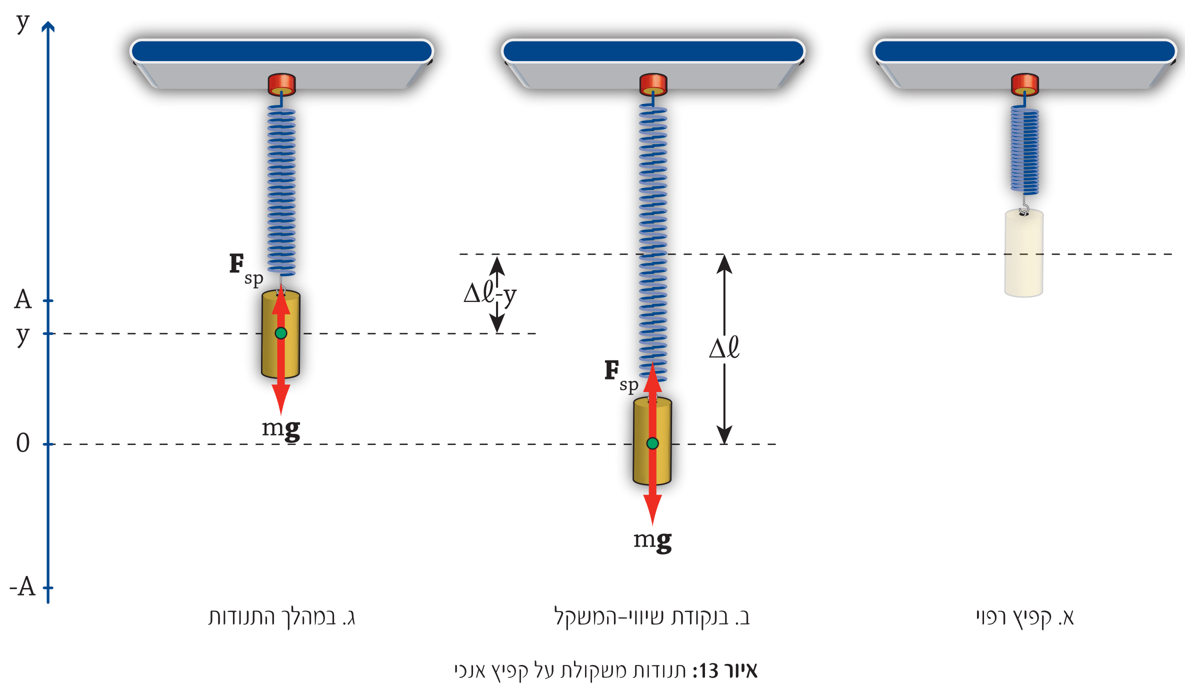
נסמן את התארכות הקפיץ מהמצב הרפוי עד למצב בו המשקולת תלויה במנוחה ב- $\Delta\ell$ (איור 13).

הכוחות הפועלים על המשקולת הנחה בנקודת שיווי המשקל הם כוח הכובד - $m\mathbf{g}$ כלפי מטה, והכוח שמפעיל הקפיץ, $\mathbf{F}_{sp}$, כיוונו כלפי מעלה, וגודלו $k\Delta\ell$ (k – קבוע הקפיץ).

נבחר ציר מקום (y) שראשיתו בנקודת שיווי המשקל (איור 13). כאשר המשקולת בראשית הציר, בתוקף החוק השני של ניוטון:

$$k\Delta\ell - mg = 0 \qquad \text{(א)}$$

נסמן את שיעור הנקודה ממנה שוחררה המשקולת ב-A, וב- y את שיעור הנקודה בה נמצאת המשקולת ברגע כלשהו במהלך תנודתה (איור 13ג).



איור 13: תנודות משקולת על קפיץ אנכי

כדי לבחון אם תנועת המשקולת היא הרמונית, נבחן אם תבנית הכוח השקול היא: $\Sigma F = -cy$, כאשר c קבוע חיובי ו- y **העתק מנקודת שיווי המשקל** (ולא מהמצב הרפוי).

בנקודה ששיעורה y פועלים על המשקולת שני הכוחות:

א. כוח הכובד, **mg**, כלפי מטה.

ב. כוח $\mathbf{F}_{sp}$ שמפעיל הקפיץ כלפי מעלה וגודלו $k(\Delta\ell - y)$, כי התארכות הקפיץ ביחס למצב הרפוי היא $\Delta\ell - y$.

הביטוי $\Delta\ell - y$ מבטא את התארכות הקפיץ ממצבו הרפוי גם כאשר המשקולת מעל נקודת שיווי המשקל (כמו באיור 12ג), וגם כאשר היא מתחתה (בדוק!).

הכוח השקול הפועל על המשקולת: $\Sigma F = k(\Delta\ell - y) - mg = k\Delta\ell - ky - mg$ (ב)

ממשוואות (א) ו-(ב) נקבל: $\Sigma F = -ky$

מסקנות:

1. על פי המוגדר בסעיף 2.2 של פרק זה, תנודות משקולת על קפיץ אנכי הן הרמוניות.
2. הקבוע של התנועה ההרמונית הוא קבוע הקפיץ (למרות שבנוסף לכוח שמפעיל הקפיץ על המשקולת פועל עליה גם כוח הכובד).
3. תדירות התנודות של משקולת הקשורה לקפיץ **אופקי** בעל קבוע k שווה בדיוק לתדירות התנודות של אותה משקולת המתנודדת על אותו קפיץ כשהוא אנכי.

נכליל ונאמר **שגוף הנע בהשפעת כוח הניתן לתיאור על ידי $\mathbf{F = -cx}$ ינוע בתנועה הרמונית, גם אם יתווסף לכוח זה כוח קבוע**. רק מקומו של מרכז התנודה (נקודת שיווי המשקל) ישתנה.

5.2 המרות אנרגיה בתנודות משקולת התלויה על קפיץ אנכי

נוכל ליישׂם את עקרון שימור האנרגיה במערכת של משקולת התלויה על קפיץ אנכי בשתי גישות לגבי אופן חישוב האנרגיה הפוטנציאלית.

בגישה הראשונה, מתחשבים בכל אינטראקציה בנפרד: באנרגיה הפוטנציאלית הכובדית ובאנרגיה הפוטנציאלית האלסטית. את רמת האפס של האנרגיה הפוטנציאלית האלסטית נוח לבחור במצב שבו הקפיץ רפוי (ראה פרק ז סעיף 2.4), ואז הביטוי עבורה הוא $U_{sp} = \frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2$, כאשר $\Delta\ell$ היא התארכות הקפיץ ביחס למצבו הרפוי. את רמת האפס של האנרגיה הפוטנציאלית הכובדית נוכל לבחור במקום כלשהו. האנרגיה הכוללת בכל נקודה היא סכום שתי האנרגיות הפוטנציאליות והאנרגיה הקינטית.

הגישה השנייה שונה במקצת: התבנית המתמטית של הכוח השקול לכוח האלסטי ($k\Delta\ell$) ולכוח הכובד (mg) היא $\Sigma F = -ky$. נוכל להסתכל על המשקולת כאילו היא מתנודדת בהשפעת כוח יחיד (הכוח השקול). כוח זה משמר, ונוכל "לקשור" לו אנרגיה פוטנציאלית. אנרגיה פוטנציאלית זו׳ תובא בחשבון כאנרגיה הפוטנציאלית **הכוללת**, במקום סכום האנרגיות הפוטנציאליות האלסטית, הקשורה לכוח האלסטי, והכובדית, הקשורה לכוח הכובד. בפרק ז פיתחנו את הביטוי לאנרגיה הפוטנציאלית האלסטית של קפיץ. פיתוח דומה מראה כי האנרגיה הפוטנציאלית הקשורה לכוח השקול $\Sigma F = -ky$ היא:

$$U_{tot} = \frac{1}{2}ky^2$$

כאשר ראשית הציר y בנקודת שיווי המשקל (y **אינו** המרחק מהמצב בו הקפיץ רפוי). בגישה זו׳ נרשום את האנרגיה המכנית הכוללת כסכום האנרגיה הפוטנציאלית הכוללת, U_{tot}, והאנרגיה הקינטית.

דוגמה 2: תנודות משקולת על קפיץ אנכי

על קפיץ הקבוע בקצהו העליון תולים משקולת שמסתה 2 ק"ג. הקפיץ מתארך ממצבו הרפוי עד לנקודת שיווי המשקל ב- 50 ס"מ (איור 14א). מעלים את המשקולת ב- 30 ס"מ מעל נקודת שיווי המשקל ומרפים ממנה. המשקולת מתנודדת במסלול אנכי. מצאו, באמצעות שיקולי אנרגיה ובשתי הגישות, את גודל מהירות המשקולת בנקודה הנמצאת 10 ס"מ מתחת לנקודת שיווי המשקל.

א. באמצעות חישוב שינויים באנרגיות הפוטנציאלית האלסטית והכובדית, ובאנרגיה הקינטית.

ב. באמצעות חישוב שינוי באנרגיה הפוטנציאלית הכוללת ובאנרגיה הקינטית.

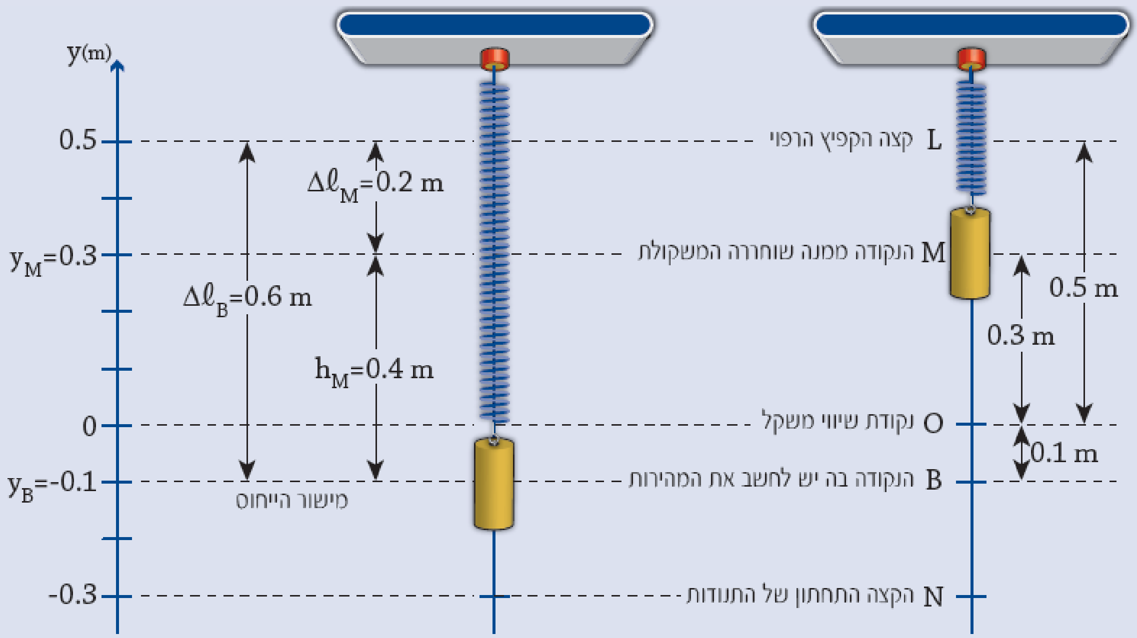
פתרון:

נחשב תחילה את קבוע הקפיץ, k. משקולת בת 2 ק"ג גורמת להתארכות הקפיץ ב- 0.5 מ', לכן:

$$k = \frac{F}{\Delta \ell} = \frac{mg}{\Delta \ell} = \frac{20}{0.5} = 40 \text{ N/m}$$

א. פתרון בגישה הראשונה

באיור 14א מתוארת המערכת לפני שחרור המשקולת בנקודה M, ובאיור 14ב היא מתוארת כאשר המשקולת נמצאת רגעית בנקודה B בה יש לחשב את גודל המהירות.



א. המשקולת בנקודה שממנה שוחררה

ב. המשקולת בנקודה בה יש לחשב את המהירות

ג. שיעורי הנקודות

איור 14: תרשימי דוגמה 2

נבחר מישור אופקי העובר ב- B כמישור ייחוס לגבי האנרגיה הפוטנציאלית הכובדית.

האנרגיות המכניות הכוללות בנקודות M ו-B שוות, ולפיכך:

$$\frac{1}{2}k(\Delta\ell_M)^2 + mgh_M = \frac{1}{2}k(\Delta\ell_B)^2 + \frac{1}{2}mv_B^2 \qquad \text{(א)}$$

כדי לדעת מהי המשמעות הסימונים ℓ_M, ℓ_B ו- h_M ראו איור 14ב.

נציב ב- (א) את הערכים המספריים הידועים:

$$\frac{1}{2}\cdot 40\cdot(0.2)^2 + 2\cdot 10\cdot 0.4 = \frac{1}{2}\cdot 40\cdot(0.6)^2 + \frac{1}{2}\cdot 2v_B^2$$

פתרון המשוואה: $v_B \approx \pm\, 1.26\ m/s$

ב. פתרון בגישה השנייה

באיור 14ג מוצג ציר מקום y שראשיתו בנקודת שיווי המשקל, y_M שיעור הנקודה שממנה שוחררה המשקולת, ו- y_B שיעור הנקודה בה יש לחשב את גודל המהירות.

האנרגיות המכניות הכוללות בנקודות ששיעוריהן y_M ו- y_B שוות, לכן:

$$\frac{1}{2}ky_M^2 = \frac{1}{2}ky_B^2 + \frac{1}{2}mv_B^2 \qquad (ב)$$

נציב ב- (ב) את הגדלים הידועים:

$$\frac{1}{2}\cdot 40\cdot(0.3)^2 = \frac{1}{2}\cdot 40\cdot(-0.1)^2 + \frac{1}{2}\cdot 2v_B^2$$

פתרון משוואה זו: $v_B \approx \pm\, 1.26\ m/s$.

כלומר המשקולת עוברת בנקודה הנמצאת 10 ס"מ מתחת לנקודת שיווי המשקל, במהירות שגודלה בקירוב 1.26 מ'\ש' .

הערה: פתרון דוגמה 2 בשתי הגישות לגבי חישוב האנרגיה הפוטנציאלית מראה יתרון ברור לגישה השנייה, המתגלה כנוחה וכפשוטה הרבה יותר מהגישה הראשונה.

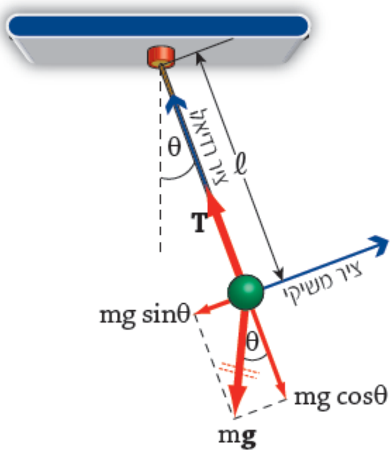
6. מטוטלת פשוטה

6.1 תנודות הרמוניות של מטוטלת פשוטה

מטוטלת פשוטה (מכונה לעיתים גם **מטוטלת מתמטית**) מורכבת מגוף בעל ממדים קטנים, התלוי על חוט אשר מסתו ומידת התארכותו ניתנים להזנחה. כאשר מסיטים את הגוף מנקודת שיווי המשקל ומשחררים אותו, הוא מתנודד במישור אנכי בשני הצדדים של נקודת שיווי המשקל, לאורך קשת של מעגל. נפתח ביטוי עבור זמן המחזור של תנודות אלה.

באיור 15 מוצגת מטוטלת פשוטה שאורכה ℓ, ומסת הגוף m. המטוטלת יוצרת ברגע מסוים זווית θ עם הכיוון האנכי. הכוחות הפועלים על הגוף הם כוח הכובד **mg**, ומתיחות החוט, **T**. נבחר מערכת צירים כך שציר אחד משיק למעגל התנועה (ציר משיקי), והציר האחר מכוון לאורך הרדיוס (ציר רדיאלי). נפרק את הכוח **mg** לרכיב רדיאלי שגודלו $mg\cos\theta$, ולרכיב משיקי שגודלו $mg\sin\theta$. הרכיב בכיוון הרדיאלי של הכוח השקול גורם לתאוצה הרדיאלית, הדרושה כדי לקיים את התנועה לאורך הקשת המעגלית. הרכיב המשיקי הוא הכוח המחזיר הפועל על הגוף:

$$F = -mg\sin\theta \qquad (\text{א})$$



איור 15: מטוטלת פשוטה

מ-(א) רואים כי הכוח המחזיר **אינו** נמצא ביחס ישר להעתק הזוויתי, θ, אלא ביחס ישר ל-$\sin\theta$, לכן התנועה **אינה** הרמונית פשוטה.

עם זאת, זווית θ קטנה הנמדדת ברדיאנים מקיימת:

$$\sin\theta \approx \theta \qquad (\text{ב})$$

בטבלה 2 מוצגים ערכים להמחשת קירוב זה.

ההעתק לאורך הקשת הוא $x = \ell\theta$ (כאשר θ נמדדת ברדיאנים), ובזוויות קטנות מדובר בתנועה המתנהלת בקירוב טוב לאורך קו ישר.

בתנאים שבהם קשר (ב) תקף נקבל מ-(א):

$$F \approx -mg\theta = -mg\frac{x}{\ell} = -\frac{mg}{\ell}x \qquad (\text{ג})$$

מ-(ג) רואים כי בזוויות קטנות גודל הכוח המחזיר נמצא בקירוב ביחס ישר להעתק מנקודת שיווי המשקל. ככל שהזווית קטנה יותר גם כיוונו בכל נקודה ונקודה סוטה פחות מהכיוון לעבר נקודת שיווי המשקל.

θ (מעלות)	$\sin\theta$	θ (רדיאנים)	הפער באחוזים בין $\sin\theta$ לבין θ המבוטאת ברדיאנים
10	**0.17**3648177	**0.17**4532925	0.57
5	**0.087**155742	**0.087**266462	0.127
1	**0.01745**2406	**0.01745**3292	0.005
0.5	**0.008726**535	**0.008726**646	0.001
0.1	**0.00174532**8	**0.00174532**9	$5.7\cdot10^{-5}$
0.01	**0.000174533**	**0.000174533**	0[1]

(1) כאשר ערכי $\sin\theta$ ו-θ מוצגים עם 9 ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

טבלה 2: המחשת הכלל: $\sin\theta\approx\theta$ בזוויות קטנות המבוטאות ברדיאנים

הקבוע mg/ℓ הוא הקבוע c בתבנית הכללית $F = -cx$ של הכוח בתנודות הרמוניות. נציב את הקבוע בנוסחה (9) לזמן המחזור של תנועה הרמונית:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{mg/\ell}}$$

או:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}} \qquad (16)$$

נוסחה (16) מבטאת את **זמן המחזור של תנודות הרמוניות של מטוטלת פשוטה**. זמן המחזור תלוי באורך המטוטלת ℓ ובגודל תאוצת הנפילה החופשית g, ואינו תלוי במסה m ובמשרעת (או בזווית התנודה), כל עוד זווית הסטייה המרבית קטנה.

6.2 מדידת g בעזרת מטוטלת פשוטה

אם נשתמש במטוטלת בעלת אורך ידוע ונמדוד את זמן המחזור של תנודתה, נוכל לחשב את גודל תאוצת הנפילה החופשית g. באופן מעשי משנים כמה פעמים את אורך המטוטלת, בכל פעם מודדים את משך הזמן הנדרש למספר גדול של תנודות, ומחלקים אותו במספר התנודות כדי להגיע לדיוק רב יותר במדידה של זמן המחזור. כאשר מסרטטים גרף של ריבוע זמן המחזור, T^2, כפונקציה של אורך המטוטלת, ℓ, מתקבל קו מגמה ישר העובר בראשית הצירים. לאחר שמעלים בריבוע את שני אגפי נוסחה (16), רואים כי שיפוע הקו שווה ל- $4\pi^2/g$. מחישוב שיפוע הגרף הניסיוני והשוואתו לביטוי $4\pi^2/g$ אפשר לחשב את g. את אורך המטוטלת, ℓ, יש למדוד מהקצה הקבוע של החוט עד **מרכז הכובד** של הגוף; אם הגוף הוא למשל כדור - אז יש למדוד עד מרכז הכדור (איור 15).

מדידה זו קלה בהרבה ממדידת g בניסוי של נפילה חופשית ומדויקת יותר. נציין שתי סיבות לכך:

א. משך זמן המדידה באמצעות המטוטלת כמעט בלתי מוגבל. משך הזמן של נפילה מגובה של כמה מטרים הוא מסדר גודל של שנייה אחת.

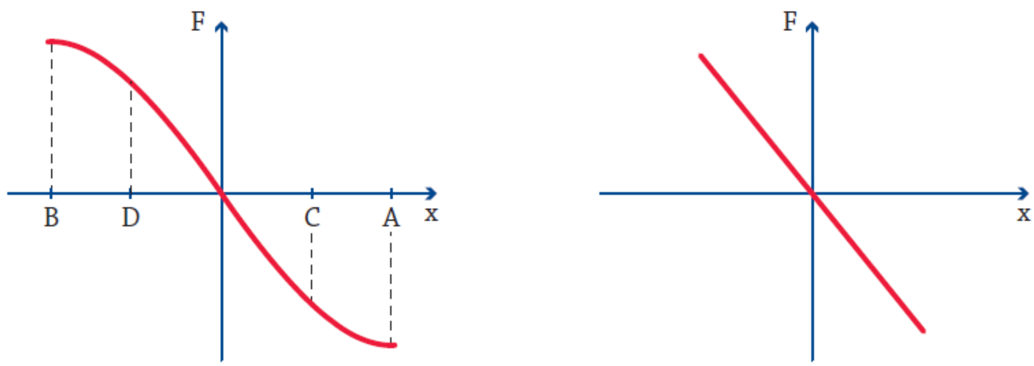
ב. במדידה באמצעות מטוטלת אין נחשפים למהירויות גבוהות בהן התנגדות האוויר משמעותית.

7. קירוב תנודות על ידי תנודות הרמוניות פשוטות

למדנו כי תנועה הרמונית פשוטה נוצרת על ידי כוח מחזיר בעל תבנית מתמטית $F = -cx$ (איור 16א). ראינו גם כי תנועה הרמונית היא פתרון מקורב לתנועת מטוטלת פשוטה: ככל שהזוויות קטנות יותר - תיאור תנודותיה של מטוטלת פשוטה באמצעות תנועה הרמונית מתאים יותר. איור 16ב הוא גרף של הכוח המחזיר הפועל על מטוטלת פשוטה כפונקציה של אורך הקשת x (אורך הקשת פרופורציוני לזווית).

השוואת שני הגרפים מבליטה את הסיבה לכך שתנועה הרמונית פשוטה היא תיאור מתאים לתנודות מטוטלת רק כאשר זווית הסטייה המרבית קטנה: אם מטוטלת מתנודדת לדוגמה בין נקודות A ו-B (איור 16ב), הכוח המחזיר שונה בצורה ניכרת מזה האופייני לתנועה הרמונית פשוטה. אך אם הזוויות קטנות, לדוגמה בין נקודות C ו-D, הגוף המתנודד מושפע מכוח שמיוצג בקירוב טוב על ידי התבנית המתמטית $F = -cx$ (כלומר הגרף בקירוב ישר).

מטוטלת פשוטה היא דוגמה לתנודות אשר אינן הרמוניות פשוטות כאשר משרעת התנודה גדולה. אולם, כאשר הגוף אינו מתרחק יתר על המידה מנקודת שיווי המשקל - הכוח המחזיר נעשה דומה לכוח המתואר באיור 16א. תנודות כאלה ניתן לראות בקירוב כהרמוניות פשוטות. למעשה, **תנודה הרמונית פשוטה היא קירוב טוב כמעט לכל גוף המתנודד מספיק קרוב לנקודת שיווי המשקל שלו.** מכאן החשיבות של תנועות הרמוניות.



א. הכוח המחזיר הפועל על אוסצילטור הרמוני פשוט, כפונקציה של המקום   ב. הכוח המחזיר הפועל על מטוטלת פשוטה, כפונקציה של אורך הקשת

איור 16: גרפי כוח-מקום

הערה: בעזרת כלים מתמטיים מתקדמים, החורגים מתכנית הלימודים בבית הספר התיכון, אפשר להציג כל תנודה כסכום של תנודות הרמוניות פשוטות, בעלות תדירות שונות (פיתוח פורייה).

8. תנודות הרמוניות מרוסנות

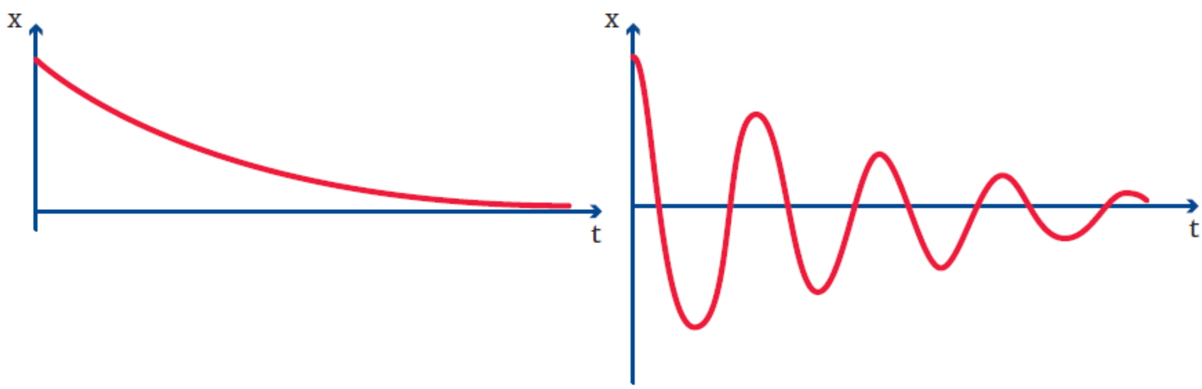
ניתחנו את תנועותיהם של גופים מתנודדים בתנועה הרמונית פשוטה תוך הזנחת כוחות חיכוך הפועלים על הגופים המתנודדים. אִילו הנחה זוֹ היתה נכונה במלואה, היתה מטוטלת פשוטה למשל, מתנודדת לעד. במערכות אמיתיות כוחות חיכוך גורמים ל"בזבוז" האנרגיה המכנית האגורה במערכת המתנודדת, והיא תגיע לבסוף למנוחה בנקודת שיווי המשקל שלה. תנועה כזוֹ מכונה **תנועה הרמונית מרוסנת** (damped harmonic motion).

כאשר חוקיות הכוח המרסן נתונה, אפשר לנתח את התנועה באופן אנליטי (ראה סעיף 8.2). בגלל המורכבות המתמטית הנדרשת לניתוח האנליטי נתאר תחילה באופן איכותי תוצאות של שני ניסויים.

8.1 תנודות הרמוניות מרוסנות - תיאור איכותי

ריסון חלש קיים למשל במטוטלת פשוטה המתנודדת באוויר. על המטוטלת פועלת התנגדות האוויר, ובכל מחזור של תנודתה מתבזבזת אנרגיה מכנית, אך שיעורה קטן ביחס לאנרגיה של המטוטלת.

באיור 17א מוצג גרף מקום-זמן של אוסצילטור הרמוני עם ריסון חלש.



א. גרף מקום-זמן של תנודות הרמוניות מרוסנות ריסון חלש

ב. גרף מקום-זמן המתאים לריסון חזק

איור 17: תנודות הרמוניות מרוסנות

בכל מחזור משׂרעת התנודה הולכת וקטֵנה.

ריסון חזק קיים למשל במטוטלת אשר מתנודדת בתוך גליצרין. המערכת חוזרת לנקודת שיווי המשקל מבלי לבצע תנודות, כפי שמוצג באיור 17ב.

8.2 תנודות הרמוניות מרוסנות – תיאור כמותי

כאמור לעיל, בהינתן חוקיות הכוח המרסן, אפשר לנתח את התנועה באופן אנליטי. במערכות רבות בהן המערכת המתנודדת נעה בתווך צמיג, הכוח המרסן, F_d, (d - קיצור ל-**d**amping - מרסן) מנוגד לכיוון התנועה, וגודלו נמצא בקירוב ביחס ישר לגודל מהירות הגוף:

$$F_d = -bv = -b\dot{x} \tag{17}$$

כאשר b הוא קבוע שנקבע על-פי עוצמת הכוח המרסן (ככל ש- b גדול - הכוח המרסן חזק יותר).

על האוסצילטור פועלים שני כוחות: (1) כוח שהתבנית המתמטית שלו היא $F = -cx$; בהשפעת כוח זה בלבד התנועה היא הרמונית פשוטה, (2) כוח הגורם לריסון שתבניתו המתמטית היא $-bv$, כוח זה פועל תמיד בכיוון מנוגד לכיוון המהירות. התבנית המתמטית של הכוח השקול היא:

$$\Sigma F = -cx - b\dot{x}$$

נציב את התבנית המתמטית של הכוח השקול בחוק השני של ניוטון, ונקבל משוואה דיפרנציאלית:

$$-cx - b\dot{x} = m\ddot{x} \tag{18}$$

בעזרת כלים מתמטיים מתקדמים אפשר להגיע לפתרון המשוואה:

$$\boxed{x(t) = Ae^{-bt/2m}\cos(\omega t + \phi)} \tag{19}$$

כאשר: $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$ (א)

ו- e מסמן את הבסיס של הלוגריתמים הטבעיים.

תרגילים

1. הראו כי ביטוי (19) (יחד עם (א)) מהווה פתרון של משוואה (18).
2. הראו כי בהעדר כוח מרסן ביטוי (19) מתנוון לביטוי $x(t)$ עבור תנועה הרמונית פשוטה.

8.3 יישוּמים טכנולוגיים

במערכות טכנולוגיות רבות רצוי שהריסון יהיה מינימלי. כך למשל בשעון מטוטלת. תנועת מחוגי השעון נקבעת על ידי זמן המחזור של תנודות המטוטלת. האנרגיה המתבזבזת כתוצאה מחיכוך בשעון המטוטלת מוחזרת למערכת על ידי קפיץ מתוח הנמצא בשעון, אשר הולך ומשתחרר.

מאידך גיסא, יש מערכות המתוכננות דווקא כך שהמערכת תגיע בזמן מזערי לנקודת שיווי המשקל. כאלו הן מערכות בולמי הזעזועים במכוניות. מערכות אחרות הן מכשירי מדידה שונים, למשל מאזניים אנליטיים; כדי שהמשתמש לא יצטרך לחכות זמן רב עד שהמאזניים יתייצבו, מתקינים במאזניים לשונית הטבולה בנוזל צמיג (למשל שמן) וכאשר המאזניים מתנודדים השמן מרסן את התנודות, דבר שמקטין את משך הזמן הדרוש להתייצבות הוריית המאזניים.

עיקרי הדברים - פרק ח

1. **תנודה** היא תנועה מחזורית הלוֹך ושוֹב לאורך מסלול בעל שתי נקודות קצה.

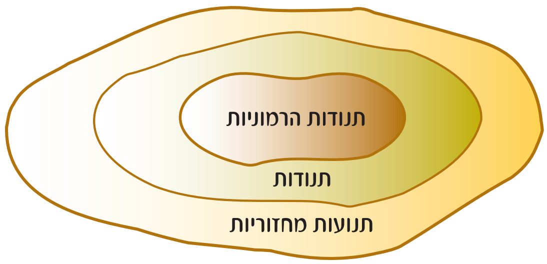
2. **תנועה הרמונית פשוטה** היא תנועת גוף בהשפעת כוח שקול שתבניתו המתמטית:

$$F = -cx$$

כאשר נקודת האפס של ציר x היא בנקודת שיווי המשקל של הגוף.
(כלומר הכוח מכוון בכל נקודה לעבר נקודת שיווי המשקל, וגודלו פרופורציוני למרחק מנקודת שיווי המשקל).

התאוצה בתנועה הרמונית פשוטה: $a = -\frac{c}{m} \cdot x$

3. דיאגרמה לתיאור הקשרים בין תנועות מחזוריות, תנודות ותנועות הרמוניות:



4. **משוואת התנועה ההרמונית:** $\ddot{x}(t) = -\frac{c}{m} x(t)$

פתרון המשוואה: $x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}}\, t + \phi\right)$

5. תנועה הרמונית פשוטה היא תנועה **מחזורית**.

זמן המחזור: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}$

התדירות : $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c}{m}}$

התדירות הזוויתית : $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{c}{m}}$

6. כאשר גוף מבצע תנודות הרמוניות, המקום המהירות והתאוצה כפונקציה של הזמן עבור תנאי ההתחלה: ב- $t_0 = 0$, $x_0 = A$ ו- $v_0 = 0$ הם:

$$x(t) = A\cos\omega t$$
$$v(t) = -\omega A\sin\omega t$$
$$a(t) = -\omega^2 A\cos\omega t$$

7. המהירות והתאוצה כפונקציה של המקום:

$$v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$
$$a = -\omega^2 x$$

8. לאוסצילטור הרמוני גודל מקסימלי של מהירות בנקודת שיווי המשקל וערכו:

$$v_{max} = \omega A$$

וגודל מקסימלי של תאוצה בקצות המסלול וערכו:

$$a_{max} = \omega^2 A$$

9. תנודות משקולת על קפיץ אנכי הן הרמוניות; קבוע התנועה ההרמונית הוא קבוע הקפיץ.

10. במהלך תנועה הרמונית פשוטה האנרגיה המכנית (קינטית + פוטנציאלית כובדית + פוטנציאלית אלסטית) נשמרת.

אנרגיה פוטנציאלית נתונה על ידי: $U = \frac{1}{2}kx^2$ כאשר $x = 0$ במקום שבו הגוף בשיווי משקל.

11. תנודות מטוטלת מתמטית אינן ממש הרמוניות, אולם ככל שמשׂרעת התנודה קטנה כך תיאור התנודות כתנודות הרמוניות הוא מדוייק יותר.

מחזורהתנודות:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

שאלות, תרגילים ובעיות

I. תרגילים מותאמים לסעיפי הפרק

תרגילים 1 - 22 ממויינים על-פי סעיפי הפרק והם נועדו בעיקר לתרגול החומר המופיע באותם סעיפים. תרגילי סיכום אינטגרטיביים מופיעים אחרי תרגילים אלה.

סעיף 1: תנועות מחזוריות ותנודות
סעיף 2: הכוח בתנועה הרמונית פשוטה

1. כדור המשוחרר ממנוחה נופל חופשית, ומתנגש ברצפה התנגשות אלסטית.

האם תנועת הכדור היא: א. מחזורית? הסבירו.

ב. הרמונית פשוטה? הסבירו.

סעיף 3: משוואת התנועה ופתרונה

2. בפרק הוצגה הנוסחה $x = A \cos \omega t$.

א. איזה גודל פיזיקלי מייצג כל סמל המופיע בנוסחה?

ב. מהי יחידת המדידה ב- .S.I של כל אחד מהגדלים המיוצגים בנוסחה?

ג. מהי יחידת המדידה של ωt?

ד. לאילו מצבים ובאילו תנאים תקפה הנוסחה?

3. באיור שבתחתית העמוד מסומנות עקבותיו של חלקיק שתנועתו הרמונית פשוטה, במרווחי זמן שווים של 0.1 s. באיור זה, העקבות מופיעות גם בקצות מסלול החלקיק, וגם בנקודת שיווי המשקל. ממדיה של כל משבצת הם 1mm x 1mm.

א. איזו מבין העקבות A_1-A_{11} היא נקודת שיווי-משקל? נמקו.

ב. הגדירו ציר x שראשיתו בנקודת שיווי-המשקל וכיוונו החיובי ימינה. בנו טבלת מקום-זמן של החלקיק בתנועתו מהעקבה A_1 עד A_{11}, וסרטטו גרף מקום-זמן.

4. א. העתיקו למחברתכם באופן מקורב את האיור של תרגיל 3, והוסיפו לו בעקבות A_5 ו-A_7 תרשימים של וקטורי הכוח השקול, התאוצה והמהירות, המתאימים לתנועת החלקיק שׂמאלה. התייחסו לכיווני הווקטורים, ולגדלים היחסיים של וקטורים מאותו סוג.

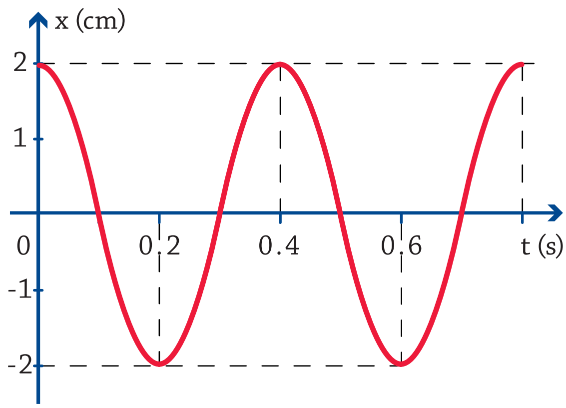
ב. ענו על סעיף א לגבי תנועת הגוף ימינה.

ג. העתיקו שוב את האיור באופן מקורב, והוסיפו לו תרשים של הווקטורים (כח שקול, תאוצה ומהירות) בעקבות A_3 ו- A_5 המתאימים לתנועת החלקיק שׂמאלה, כך שיבלטו ההבדלים בין גדלי הכוחות, המהירויות והתאוצות שבשתי נקודות אלו.

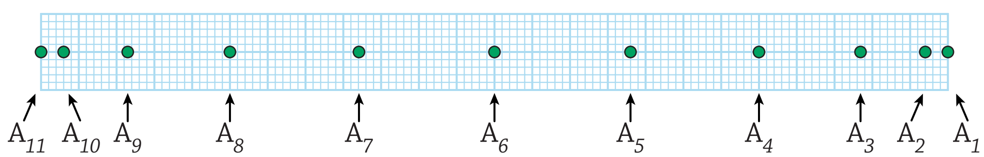
ד. באיזו נקודה (או באֵילו נקודות) מגיע כל אחד מהגדלים: גודל הכוח השקול, גודל המהירות וגודל התאוצה לערכו המרבי ובאֵילו לערכו המזערי? הסבירו.

ה. תארו במילים את תנועת החלקיק מנקודה A_1 ל-A_{11}, ומ-A_{11} ל-A_1. השתמשו במונחים "כוח שקול", "תאוצה" ו"מהירות".

5. באיור מוצג גרף מקום-זמן של גוף שמסתו 0.05 ק"ג ותנועתו הרמונית פשוטה.



איור לתרגיל 3



א. מתי הגוף עובר לראשונה בנקודת שיווי המשקל? מתי בפעם השנייה?

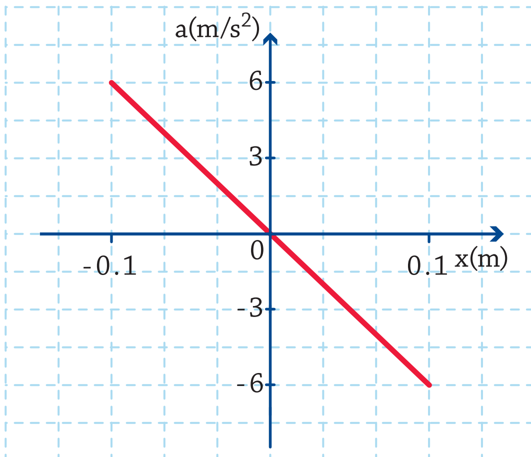
ב. מצאו את משרעת התנודה, זמן המחזור, התדירות וגודל הכוח הפועל על הגוף ברגע $t = 0.6s$.

6. קצהו של קולן מבצע תנודות הרמוניות שתדירותן 256 הרץ ומשרעתן מ"מ אחד.

א. חשבו את הגודל המרבי של תאוצת קצות הקולן.

ב. חשבו את גודל המהירות כאשר גודל התאוצה מרבי.

7. גוף שמסתו $m = 0.2$ kg מתנודד סביב נקודה ששיעורה 0. הגרף מתאר את תאוצת הגוף כפונקציה של שיעור הנקודה x בה נמצא הגוף. ברגע $t = 0$ הגוף משוחרר ממנוחה מנקודה ששיעורה 0.1 מטר.



א. האם תנועת הגוף היא הרמונית פשוטה? נמקו.

ב. חשבו את הכוח השקול הפועל על הגוף בנקודה ששיעורה (0.1-) מטר.

ג. כמה זמן חולף מתחילת התנועה עד שהגוף מגיע לראשונה לנקודה ששיעורה 0?

ד. חשבו את מהירות הגוף בנקודה ששיעורה 0.

8. הגרף מציג את מהירותו של חלקיק שתנועתו הרמונית פשוטה כפונקציה של הזמן.

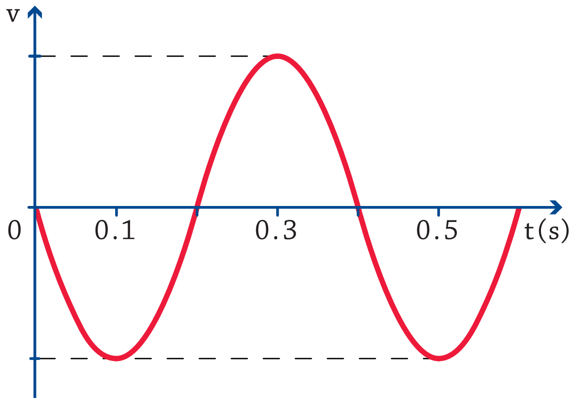
איזה מבין המשפטים שלפניכם **אינו** נכון? נמקו.

(1) ברגע $t = 0.1$ s החלקיק נמצא בנקודת שיווי המשקל.

(2) ברגע $t = 0.1$ s האנרגיה הקינטית היא מרבית.

(3) ברגע $t = 0.2$ s התאוצה היא אפס.

(4) ברגע $t = 0.3$ s הכוח המחזיר הוא אפס.



9. גוף משוחרר ממנוחה ברגע $t = 0$ מנקודה הנמצאת במרחק 0.22 מ' מימין לנקודת שיווי-המשקל, ומבצע תנודות הרמוניות שזמן המחזור שלהן 2 ש'.

א. רשמו את נוסחת מקום-זמן של תנועת הגוף.

ב. חשבו את מקום הגוף ברגע $t = 0.2$ s?

ג. חשבו את מרחק נקודת המוצא מהנקודה שאליה הגוף מגיע ברגע $t = 0.2$ s.

ד. חשבו את מהירות הגוף ברגע $t = 0.2$ s.

10. גוף שמסתו 0.01 ק"ג משוחרר ממנוחה ברגע $t = 0$ מנקודה הנמצאת במרחק 5 ס"מ מימין לנקודת שיווי-המשקל, ונע בתנועה הרמונית פשוטה שזמן מחזורה 0.4 ש'.

א. מתי יגיע הגוף לראשונה לנקודה הנמצאת במרחק 5 ס"מ משמאל לנקודת שיווי-המשקל?

ב. מצאו את המהירות, התאוצה והכוח השקול הפועל על הגוף בנקודה הנמצאת 2 ס"מ משמאל לנקודת שיווי המשקל, כאשר הגוף נע שמאלה.

ג. חשבו את הגודל המרבי של מהירות הגוף, ומהי התאוצה כאשר גודל המהירות הוא מרבי.

11. חלקיק מבצע תנודות הרמוניות שמשרעתן 10 ס"מ. איזו דרך עובר החלקיק בזמן קצר יותר: מ- $x = 10$ cm ל- $x = 9$ cm, או מ- $x = 1$ cm לנקודת שיווי-המשקל? נמקו.

סעיף 4: המרות אנרגיה

12. גוף שמסתו 0.5 ק"ג נע בתנועה הרמונית פשוטה בעלת תדירות 10 הרץ ומשרעת 10 ס"מ. חשבו את גודל התאוצה, גודל הכוח השקול, האנרגיה הפוטנציאלית והאנרגיה הקינטית כאשר הגוף עובר בנקודה המרוחקת 5 ס"מ מנקודת שיווי-המשקל.

13. חלקיק שמסתו 50 גרם מתנודד בתנועה הרמונית פשוטה המתוארת על ידי $x = 4 \cos 10t$, כאשר x נמדד בס"מ ו-t בשניות. מצאו:

א. ביטוי לכוח המחזיר הפועל על החלקיק, כפונקציה של המקום.

ב. את האנרגיה הקינטית המרבית.

ג. את האנרגיה הפוטנציאלית המרבית ואת האנרגיה המכנית הכוללת.

14. חלקיק מתנודד בתנועה הרמונית פשוטה שמשׂרעתה A. באיזה מרחק מנקודת שיווי-המשקל שווה האנרגיה הפוטנציאלית לאנרגיה הקינטית? בטאו תשובתכם באמצעות A.

סעיף 5: תנודות משקולת התלויה על קפיץ אנכי

15. משקולת שמסתה 0.4 ק"ג תלויה על קפיץ שקבוע הקפיץ שלו 40 נ'\מ'. מעלים את המשקולת לנקודה הנמצאת בגובה 9.5 ס"מ מעל נקודת שיווי-המשקל, ומשחררים אותה ממנוחה.

א. מהי התארכות הקפיץ מהמצב הרפוי עד לנקודת שיווי המשקל?

ב. העתיקו והשלימו את הטבלה שלפניכם, כאשר:

h - גובה המשקולת מעל נקודת שיווי המשקל;

$\mathbf{F_1}$ - הכוח שהקפיץ מפעיל על המשקולת;

$\mathbf{F_2}$ - כוח הכובד הפועל על המשקולת;

$\Sigma\mathbf{F}$ - הכוח השקול הפועל על המשקולת.

הכוח \ h (ס"מ)		0	3	6	9
$\mathbf{F_1}$	גודל (ניוטון)				
	כיוון				
$\mathbf{F_2}$	גודל (ניוטון)				
	כיוון				
$\Sigma\mathbf{F}$	גודל (ניוטון)				
	כיוון				

ג. הראו כי ערכי הכוח השקול שחישבתם בסעיף ב, וכיוונו, מתאימים לתבנית הכוח בתנועה הרמונית פשוטה.

16. כדי לחקור את תלות זמן המחזור של תנועה הרמונית במסה מבצע תלמיד פעולות אלה:
הוא קושר קפיץ לכן ותולה על הקפיץ סל. לתוך הסל הוא מכניס בזו אחר זו דסקיות, שמסת כל אחת מהן 20 גרם. בכל פעם הוא מרים את הסל מעל נקודת שיווי-המשקל ומשחרר. בעזרת שעון עצר הוא מודד את הזמן הדרוש לעשרה מחזורים עבור מספר דסקיות משתנה, ומחשב בכל פעם את זמן המחזור, T. תוצאות המדידות רשומות בטבלה שלפניך.

מספר הדסקיות	T (s)
2	0.53
3	0.60
4	0.66
5	0.72
6	0.77

א. מדוע מדד התלמיד עשרה מחזורים, אף-על-פי שהיה לו שעון עצר המודד מאיות שנייה?

ב. סרטטו גרף של T^2 כפונקציה של מסת הדסקיות.

ג. קבעו, בלי להתבסס על ממצאי הניסוי, מדוע התקבל קו ישר?

ד. איזה גודל פיזיקלי מייצגת כל אחת מנקודות החיתוך של הקו עם הצירים?

ה. חשבו את מסת הסל.

ו. חשבו את קבוע הקפיץ.

17. בקצה התחתון של קפיץ אנכי תלויה משקולת. מושכים את המשקולת כלפי מטה מרחק ℓ ממצב שיווי המשקל ומרפים ממנה.

א. האם זמן מחזור התנודות תלוי ב- ℓ? נמקו.

ב. מה ישתנה בתנודות אם הן תתבצענה על פני הירח? הסבירו.

18. תולים משקולת שמסתה 1.6 ק"ג בקצה קפיץ אנכי. הקפיץ נמתח ב- 8 ס"מ עד נקודת שיווי המשקל. מושכים את המשקולת 5 ס"מ (מנקודת שיווי-המשקל) כלפי מטה, ומרפים ממנה.

א. מהו זמן מחזור התנודות?

ב. מהי העבודה הנעשית בעת מתיחת הקפיץ מנקודת שיווי המשקל עד לנקודה הנמצאת במרחק 5 ס"מ מתחת לנקודת שיווי-המשקל? פתרו בשתי דרכים:

(1) באמצעות חישוב שינויים באנרגיות הפוטנציאליות האלסטית והכובדית.

(2) באמצעות חישוב שינוי באנרגיה הפוטנציאלית הכוללת.

19. משקולת שמסתה 0.3 ק"ג תלויה על קפיץ בעל קבוע 15 נ'\מ'. מעלים את המשקולת לנקודה הנמצאת בגובה 10 ס"מ מעל נקודת שיווי המשקל, ומשחררים אותה ממנוחה. מהי מהירותה המרבית של המשקולת?

פתרו בשלוש דרכים:

א. באמצעות שימוש בנוסחות מתאימות לחישוב מהירות גוף המבצע תנודות הרמוניות פשוטות.

ב. באמצעות חישוב השינויים באנרגיות הפוטנציאליות האלסטית והכובדית.

ג. באמצעות חישוב השינוי באנרגיה הפוטנציאלית הכוללת.

סעיף 6: מטוטלת פשוטה

20. ערכו בעזרת גיליון אלקטרוני טבלה בת ארבע עמודות:

$\frac{(x(rad) - \sin x)\cdot 100}{x(rad)}$	$\sin x$	x (rad)	x (°)

בעמודה הימנית זוויות, x, מ-°0 עד °40, בקפיצות של °0.2. בעמודה השנייה (מימין) ערכי הזוויות מבוטאות ברדיאנים. בעמודה השלישית ערכי $\sin x$, ובעמודה הרביעית השיעור באחוזים שמהווה הפער בין ערך הזווית x (ברדיאנים) לבין $\sin x$, מהזווית x (ברדיאנים).

השתמשו בטבלה שהתקבלה וענו על השאלות שלפניכם:

א. מהי מגמת השתנות הפער בין הזוויות x המבוטאות ברדיאנים לבין $\sin x$, כאשר הזוויות הולכות וקטנות?

ב. עד איזו זווית ההפרש בין ערך הזווית x מבוטא ברדיאנים שונה מ $\sin x$ בשיעור קטן מ-1% ?

ג. מהו שיעור ההפרש (באחוזים) בין זווית °15 כשהיא מבוטאת ברדיאנים לבין ערך הסינוס של זווית זו?

אם נבצר ממכם לבצע את המטלה המבוקשת, השלימו את הטבלה (הסתייעו במחשבון) עבור הזוויות:

°0, °0.1, °0.5, °1, °5, °10, °15, °20, °30, °40 וענו על סעיפים א ו-ג.

21. אסטרונאוט נחת על כוכב לכת. כדי למצוא את גודל תאוצת הנפילה החופשית על-פני כוכב הלכת, הוא מדד זמני מחזור, T, של מטוטלות פשוטות בעלות אורכים ℓ שונים. ממצאי הניסויים רשומים בטבלה שלפניכם.

ℓ (cm)	T (s)
20	1.46
40	2.02
60	2.53
80	2.88
100	3.23
120	3.58
140	3.84

מצאו, באמצעות גרף מתאים, את גודל תאוצת הנפילה החופשית על פני כוכב לכת זה.

22. בסעיף א של תרגיל שתלמיד פתר נדרש היה לחשב את זמני המחזור של מטוטלות מתמטיות בעלות אורכים שונים.

התלמיד רשם את הנוסחה לזמן מחזור של מטוטלת מתמטית:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \qquad (\text{א})$$

לאחר מכן העלה בריבוע את שני אגפי המשוואה:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g}\ell \qquad (\text{ב})$$

הוא זכר מהדיונים בכיתה כי בקירוב טוב מתקיים $g = \pi^2$. לכן הוא צמצם במשוואה (ב) את שני הגדלים האלה, וקיבל:

$$T^2 = 4\ell \qquad (\text{ג})$$

בעזרת משוואה (ג) הוא חישב את זמני המחזור של המטוטלות המבוקשות. כאשר הוא השווה את תוצאות חישוביו עם התשובות בספר, הוא מצא, לשמחתו, שכולן תואמות.

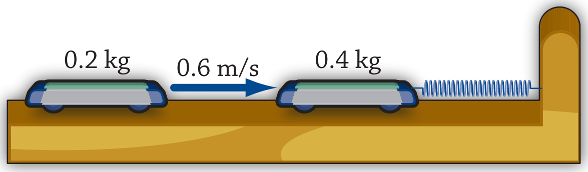
בסעיף ב של התרגיל הוא התבקש לחשב את זמן המחזור של מטוטלת שאורכה 4 מטר, שתוצב על פני הירח. הוא הציב במשוואה (ג) $\ell = 4\text{ m}$, ומצא כי $T = 4\text{ s}$. אולם הוא גילה, לצערו, כי תוצאת החישוב שלו שונה מהתשובה שבספר.

האם התלמיד טעה, או שהוא צדק אך נפלה טעות בתשובה שבספר, כפי שסבר חברו? הסבירו.

II. תרגילי סיכום

תרגילים 23 - 35 מיועדים לתרגול אינטגרטיבי, וכהכנה לבחינה מסכמת.

23. קפיץ בעל קבוע כוח 10 נ'\מ', קבוע בקצהו האחד, ולקצהו האחר קשורה קרונית נחה שמסתה 0.4 ק"ג. קרונית שנייה, שמסתה 0.2 ק"ג, נעה במהירות שגודלה 0.6 מ'\ש' ומתנגשת בראשונה. הנח כי ניתן להזניח את החיכוך בין הקרוניות והמשטח, וכי ההתנגשות היא מצחית ואלסטית ונמשכת זמן קצר מאוד.



א. חשבו את מהירות הקרונית הקשורה לקפיץ כהרף עין לאחר ההתנגשות.

ב. מהי משרעת התנודות של הקרונית הקשורה לקפיץ?

ג. מהי נוסחת מקום-זמן של הקרונית המתנודדת אם רגע ההתנגשות נבחר כ- $t = 0$?

★ד. האם שתי הקרוניות תתנגשנה שנית? נמקו.

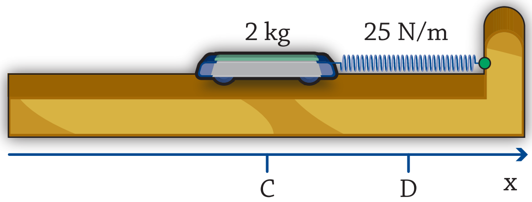
24. אורכו של קפיץ הוא ℓ_0 כאשר הוא רפוי, ו- ℓ כאשר תלויה עליו משקולת שמסתה m במנוחה. מעלים את המשקולת לנקודה מעל נקודת שיווי המשקל ומרפים ממנה - המשקולת מתנודדת.

א. חשבו את האורך של מטוטלת פשוטה אשר זמן המחזור שלה שווה לזמן המחזור של תנודות המשקולת התלויה על הקפיץ.

ב. בטאו, באמצעות m את מסתה של משקולת נוספת שיש לתלות על הקפיץ על מנת שזמן המחזור יוכפל.

25. קרונית שמסתה 2 kg מונחת על משטח אופקי וחלק וקשורה לקצה האחד של קפיץ אופקי שקבוע הכוח שלו $k = 25\text{ N/m}$. הקפיץ קשור בקצה האחר לנקודה קבועה, כמתואר באיור. כאשר הקרונית נמצאת בנקודה C הקפיץ רפוי.

מסיטים את הקרונית לנקודה D תוך כיווץ הקפיץ בשיעור של 6 cm, ומשחררים אותה ממנוחה.



א. היכן לאורך מסלול תנועתה גודל מהירות הקרונית מרבי? הסבירו.

ב. חשבו את הגודל המרבי של מהירות הקרונית.

ג. סרטטו גרף המייצג את הכוח הפועל על הקרונית כפונקציה של הזמן, החל מרגע שחרור הקרונית מהנקודה D, עד שהיא חוזרת לראשונה לנקודה D. סמנו על הגרף את ערכי הזמן והכוח בקצות הקו שהתקבל.

ד. באילו קטעים של תנועת הקרונית כיוון המהירות זהה לכיוון הכוח? הסבירו.

ה. חשבו תוך כמה זמן לאחר שחרורה עוברת הקרונית **דרך** של 9 cm.

26. מסת המשקולת של מטוטלת פשוטה היא m, אורך המטוטלת ℓ, וזמן המחזור שלה T.

א. מחליפים את המטוטלת באחרת, שמסתה קטנה פי תשעה, ואורכה גדול פי תשעה. בטאו את זמן המחזור של המטוטלת החדשה באמצעות T.

ב. מעתיקים את המטוטלת לירח. האם זמן המחזור יקטן, לא ישתנה או יגדל? נמקו.

27. גוף מבצע תנודות הרמוניות שזמן מחזורן הוא T. רגע $t = 0$ נבחר כרגע שבו הגוף נמצא בקצה המסלול, בנקודה ששיעורה $x = +A$.

א. סרטטו גרף מקורב של האנרגיה הקינטית של הגוף כפונקציה של הזמן.

ב. מהו מחזור העקומה שהתקבלה בסעיף א? בטאו תשובתכם באמצעות T.

28. כדי לחקור תנודות מסוימות, תלמיד מכוון מד-טווח לעבר משקולת התלויה על קפיץ, ומגדיר ציר מקום שראשיתו בנקודת שיווי המשקל של המשקולת. לאחר מכן, הוא מסיט את המשקולת, וברגע $t = 0$ משחרר אותה ממנוחה; מד הטווח דוגם את מקום המשקולת במרווחי זמן של 0.02 s, החל מרגע השחרור, עד שהמשקולת משלימה כחצי תנודה. לאחר מכן התלמיד מודד את מסת המשקולת, ומוצא שהיא 0.6 kg.

זמן - t (s)	מקום - x (m)
0	0.2000
0.02	0.1980
0.04	0.1921
0.06	0.1823
0.08	0.1688
0.10	0.1521
0.12	0.1322
0.14	0.1097
0.16	0.0851
0.18	0.0587
0.20	0.0312
0.22	0.0030
0.24	-0.0252
0.26	-0.0529
0.28	-0.0796
0.30	-0.1046
0.32	-0.1276
0.34	-0.1480
0.36	-0.1655
0.38	-0.1797
0.40	-0.1903
0.42	-0.1971
0.44	-0.1999
0.46	-0.1988

א. התבוננו בערכים הרשומים בטבלה, וענו על השאלות שלפניכם:

(1) האם במהלך המדידות המשקולת שינתה את כיוון תנועתה? נמקו.

(2) מצאו את משרעת התנודה.

(3) העריכו את זמן מחזור התנודה (קבעו עבורו גבול עליון וגבול תחתון).

ב. הקלידו את הנתונים שבטבלה לגיליון אלקטרוני, וענו על השאלות שלפניכם:

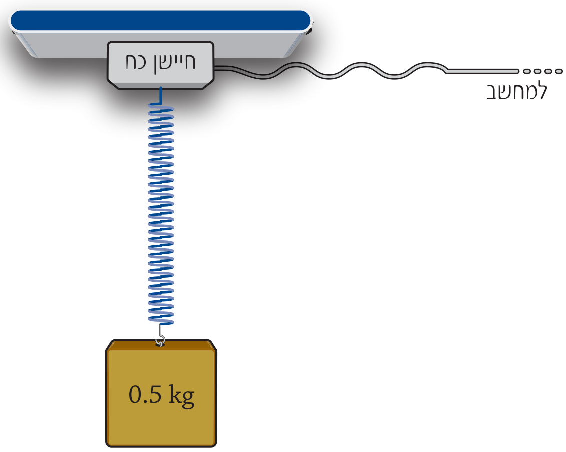
(1) הראו, באמצעות גרף מתאים, שהתנודות הן הרמוניות.

(2) רשמו ביטוי לכוח השקול הפועל על המשקולת כפונקציה של המקום.

(3) בנו (באמצעות הגיליון) דיאגרמת פיזור של האנרגיה הקינטית של המשקולת כפונקציה של המקום.

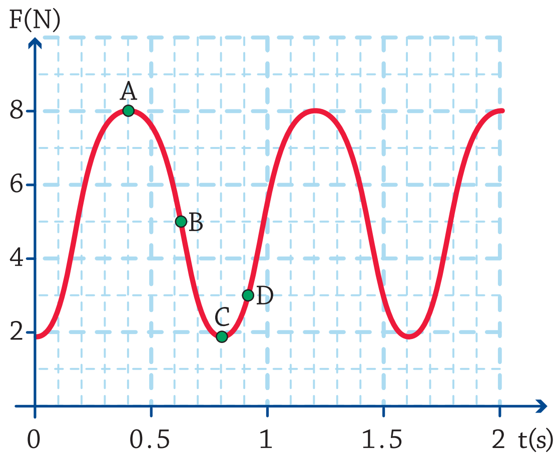
(4) הוסיפו קו מגמה פולינומיאלי מסדר 2, והציגו את משוואת הקו ואת ריבוע מקדם המתאם, R^2. הסבירו את התוצאות שקיבלתם.

29. תלמיד מצמיד לתקרה חיישן כוח המחובר למחשב. על החיישן הוא תולה קפיץ, ועל הקצה החופשי של הקפיץ הוא תולה משקולת שמסתה 0.5 ק"ג (איור א).



איור א

התלמיד מסיט את המשקולת ומשחרר אותה, והיא מתנודדת לאורך מסלול אנכי. על צג המחשב מצטייר גרף של הוריית מד הכוח כפונקציה של הזמן מרגע שחרור המשקולת, כמתואר באיור ב.



איור ב

א. האם התלמיד הסיט את המשקולת כלפי מטה או כלפי מעלה כדי להביאה לתנודות? נמקו.

ב. קבעו, לגבי כל אחד מהרגעים המתאימים לנקודות A, B ו- C, אם המשקולת נעה, או נחה רגעית. אם היא נחה רגעית – נמקו את קביעתכם. אם היא נעה – קבעו את כיוון תנועתה.

ג. קבעו את זמן מחזור התנודות.

ד. מצאו את הגדלים ואת הכיוונים של הווקטורים המצוינים ב-(1) – (4) המתאימים לנקודה D, ונמקו את קביעותיכם.

(1) הכוח שמפעיל הקפיץ על המשקולת.

(2) הכוח השקול הפועל על המשקולת.

(3) תאוצת המשקולת.

ה. חשבו את קבוע הקפיץ.

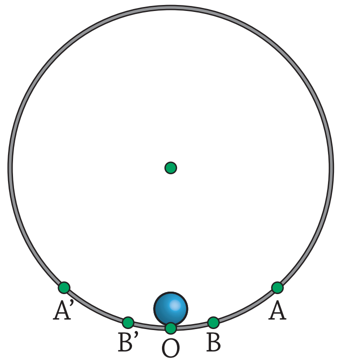
ו. (1) מצאו את משרעת התנודות.

(2) באיזה מרחק מנקודת שיווי המשקל היתה המשקולת ברגע שנרשמה נקודה D? האם היא נמצאת מתחת לנקודת שיווי המשקל או מעליה?

ז. חשב את גודל מהירות המשקולת בנקודה D.

30. באיור מתואר כדור קטן הנמצא בנקודה הנמוכה ביותר של חישוק אנכי חלק. לגבי כל אחת משלוש תנועות הכדור המתוארות בסעיפים א, ב ו- ג, ציינו אם התנועה היא: מחזורית, תנודתית, הרמונית, בקירוב

הרמונית (אם התנועה שייכת ליותר מסוג אחד - ציינו את כל הסוגים להם היא שייכת). נמקו את בחירותיכם.

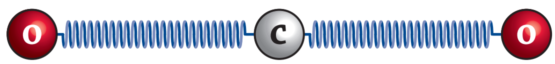


א. מקנים לכדור מהירות משיקית, והוא נע בתנועה מעגלית.

ב. מקנים לכדור מהירות משיקית, והוא מתנודד בין הנקודות A ו-A'.

ג. מקנים לכדור מהירות משיקית, והוא מתנודד בין הנקודות B ו-B', הקרובות לנקודת שיווי-המשקל.

31. מודל פשוט של מולקולה CO_2 כולל שלוש מסות נקודתיות (האטומים) המחוברות באמצעות שני קפיצים (כוחות חשמליים) כמתואר באיור.



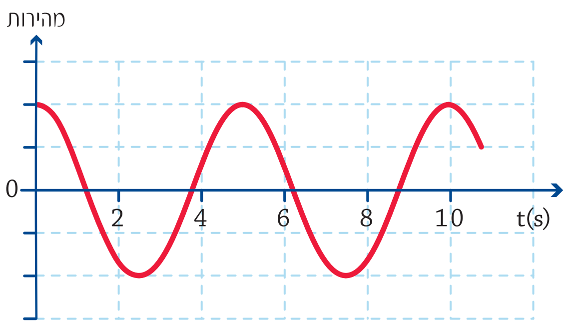
אחד האופנים שמערכת כזו יכולה להתנודד הוא שאטום הפחמן, C, נשאר במנוחה, ושני אטומי החמצן, O, מתנודדים באופן סימטרי משני צידי אטום הפחמן. מסת אטום חמצן היא $2.66 \cdot 10^{-26}$ ק"ג. תדירות תנודה זו היא $4.0 \cdot 10^{13}$ הרץ.

מצאו קבוע הכוח האפקטיבי של שני הקפיצים.

32. באיור א הנמצא בתחתית העמוד מוצגת מסילה חלקה ABC, שבה הקטע BC אופקי, וגובה הנקודה A מעל BC הוא 5 m. קרון שמסתו 150 kg משוחרר ממנוחה מהנקודה A, ומתנגש ברגע t = 0 בקרון שני שמסתו 50 kg והמחובר לקצהו של קפיץ אופקי. הקפיץ קשור בקצהו האחר לקיר בטון. כתוצאה מההתנגשות שני הקרונות נצמדים, ומתנודדים כגוף אחד לאורך הקטע האופקי של המסילה. הניחו כי משך ההתנגשות קצר מאוד.

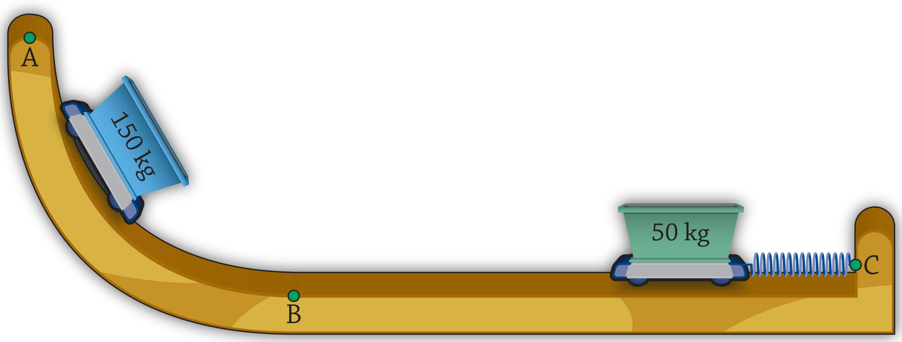
הגרף באיור ב מציג את מהירות שני הקרונות כפונקציה של הזמן מרגע t = 0.

א. השלימו ערכים מספריים של המהירות על הציר האנכי.



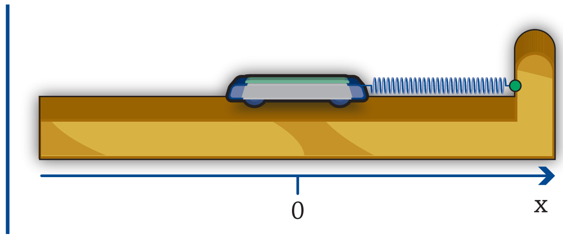
איור ב

ב. סרטטו גרף המציג את המיקום של שני הקרונות יחד החל מרגע t = 0 עד רגע t = 10 s. סמנו ערכים מספריים על שני הצירים.



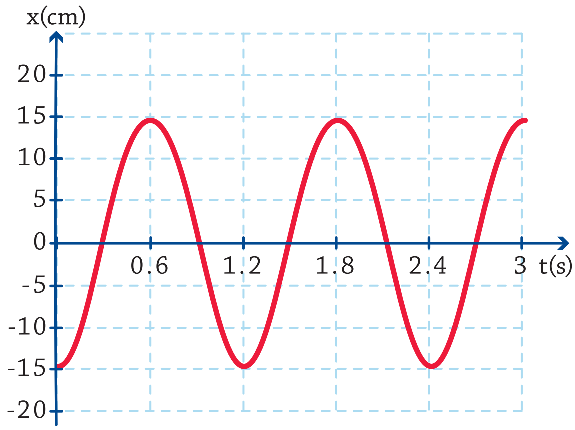
איור א לתרגיל 32

33. קרונית שמסתה 200 גרם מונחת על משטח אופקי חלק, וקשורה לקצהו של קפיץ אופקי. קצהו האחד של הקפיץ קשור לנקודה קבועה, כמתואר באיור א.



איור א

ברגע $t = 0$ תלמיד מסיט את הקרונית מנקודת שיווי המשקל, ומשחרר אותה ממנוחה. גרף מקום-זמן של תנועת הקרונית מוצג באיור ב.



איור ב

א. מהי תדירות התנודות? הסבירו.

ב. חשבו את קבוע הקפיץ.

ג. מתי, בפרק הזמן $0.1s \le t \le 0.4s$ מתאפסת -

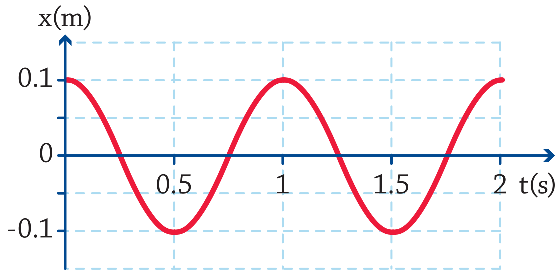
(1) מהירות הקרונית? הסבירו.

(2) תאוצת הקרונית? הסבירו.

ד. קבעו את כיוון תנועת הקרונית ברגע $t = 0.7\ s$. הסבירו.

34. א. התבנית המתמטית של הכוח המחזיר בתנועה הרמונית פשוטה היא $F = -cx$. הסבירו מדוע נדרש הסימן האלגברי – (מינוס) בתבנית זו.

איור א הוא גרף המציג את מיקומה של משקולת בת 100 גרם, המתנודדת על קצהו של קפיץ אנכי, כפונקציה של הזמן, כפי שהתקבל בניסוי מסוים.



איור א

ב. חשבו את קבוע הקפיץ.

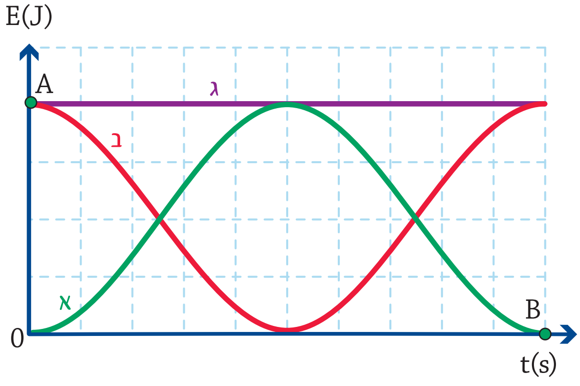
ג. ענו על שאלות (1) – (3) לגבי רגע $t=0.25\ s$:

(1) מהו הכוח שהקפיץ מפעיל על המשקולת?

(2) מהי האנרגיה הפוטנציאלית האלסטית האגורה בקפיץ?

(3) מהי האנרגיה הפוטנציאלית הכוללת (הקשורה לשקול של כוח הכובד והכוח האלסטי) כאשר רמת האפס נקבעת בנקודת שיווי המשקל?

ד. באיור ב מוצגות עקומות א, ב ו-ג של האנרגיה הפוטנציאלית הכוללת, האנרגיה הקינטית והאנרגיה המכנית כפונקציה של הזמן בניסוי הנדון.



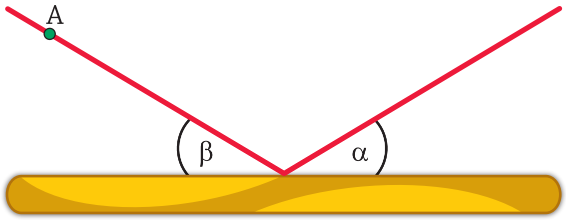
איור ב

(1) איזה סוג אנרגיה מתאים לכל אחת מהעקומות?

(2) מצאו את ערך הזמן המתאים לנקודה B.

(3) מצאו את ערך האנרגיה המתאים לנקודה A.

35. האיור מתאר שני מישורים משופעים חלקים. זוויות השיפוע של המישור הימני ושל המישור השמאלי הן α ו- β בהתאמה. גוף שוחרר ממנוחה מנקודה A הנמצאת על המישור השמאלי. הניחו כי מעבר הגוף ממישור אחד למשנהו הוא 'חלק', כלומר ללא התנגשות.



איזה מבין המשפטים שלפניכם הוא הנכון? נמקו.

(1) התנועה הרמונית לכל α ו- β.

(2) התנועה הרמונית רק כאשר α ו- β שווֹת.

(3) התנועה הרמונית בקירוב כאשר α ו- β קטנות.

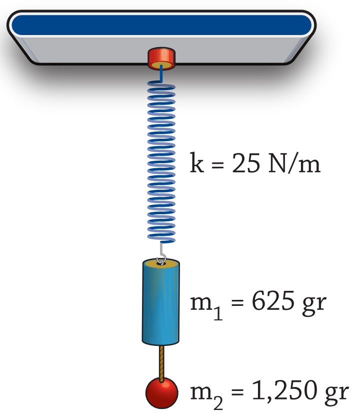
(4) התנועה הרמונית בקירוב כאשר α ו- β קטנות ושוות.

(5) התנועה אינה הרמונית בשום מקרה.

III תרגילי העמקה

תרגילים 36 - 46 מיועדים להעמקה.

36. קצהו העליון של קפיץ קשור לתקרה. אורכו של הקפיץ במצב רפוי הוא 40 cm, והקבוע שלו 25 N/m. לקצהו התחתון של הקפיץ חיברו משקולת שמסתה $m_1 = 625$ gr, ולקצה התחתון שלה קשרו כדור שמסתו $m_2 = 1{,}250$ gr, כמתואר באיור.



ברגע $t = 0$, כשהמערכת היתה במנוחה, ניתק הכדור מהמשקולת, וכתוצאה מכך היא החלה להתנודד.

א. חשבו את הגודל המרבי של האנרגיה הפוטנציאלית האלסטית האגורה בקפיץ.

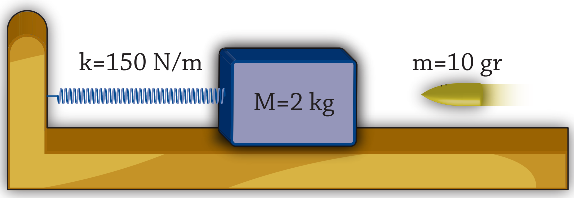
ב. (1) חשבו את הגודל המרבי של האנרגיה הקינטית של המשקולת.

(2) מתי לראשונה תהיה למשקולת אנרגיה זו? נמקו.

ג. חשבו את הגודל המרבי של הכוח שהקפיץ מפעיל על התקרה.

ד. מתי מתאפס לראשונה הכוח שהקפיץ מפעיל על התקרה? נמקו.

37. קליע נחושת שמסתו $m = 10$ gr וגודל מהירותו $v = 100$ m/s נורה אל תיבת עץ שמסתה $M = 2$ kg ונתקע בה. תיבת העץ קשורה לקפיץ שהקבוע שלו $k = 150$ N/m. הניחו כי החיכוך בין התיבה לבין המשטח ניתן להזנחה.



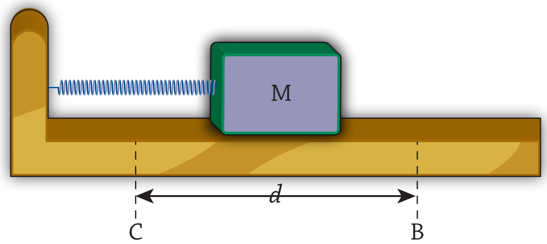
א. חשבו את הכיווץ המרבי של הקפיץ.

ב. במקרה אחר יורים על התיבה קליע גומי, שמסתו ומהירותו שווים בהתאמה לאלה של קליע הנחושת. ההתנגשות בין קליע הגומי לבין התיבה היא אלסטית.

האם ההתכווצות המרבית של הקפיץ, כאשר פוגע בתיבה קליע גומי, קטנה מההתכווצות המרבית של הקפיץ כאשר פוגע בה קליע נחושת, גדולה ממנה או שווה לה? נמקו.

★ג. באיזו זווית ביחס לאופק על קליע הנחושת לפגוע בתיבה, כך שהתכווצות המרבית של הקפיץ תהיה רק רבע ממידת התכווצותו המרבית שבסעיף א(2)?

38. גוף שמסתו M קשור לקצה קפיץ אופקי בעל קבוע k, ומתנודד בתנועה הרמונית בין הנקודות B ו-C, על פני שולחן אופקי חלק. המרחק בין הנקודות B ו-C הוא d .



בטאו את התשובות לשאלות שלפניכם באמצעות k, M ו-d.

א. כתבו ביטויים עבור:

(1) זמן מחזור התנודות.

(2) האנרגיה המכנית הכוללת האגורה במערכת המתנודדת.

גוש פלסטלינה שמסתו M נופל חופשית מגובה h, פוגע בגוף המתנודד ונדבק אליו.

ב. ענו על סעיף א, אם הפגיעה מתרחשת כאשר הגוף המתנודד נמצא בנקודה C.

ג. ענו על סעיף א, אם הפגיעה מתרחשת כאשר הגוף המתנודד נמצא בדיוק באמצע הדרך בין B ו- C.

39. אוסצילטור הרמוני פשוט מתואר על-ידי הנוסחה:

$$x(t) = 0.2\cos(2t + 0.6)$$

כאשר x ו- t מבוטאים ביחידות SI.

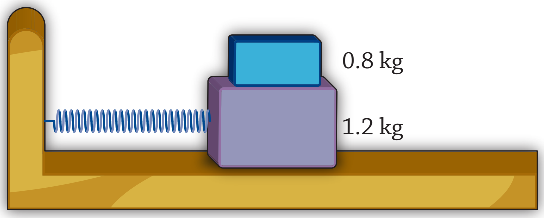
א. מצאו את המשרעת, זמן המחזור, התדירות וקבוע המופע של התנועה.

ב. מצאו את נוסחאות מהירות-זמן ותאוצה-זמן.

ג. מצאו את מקום האוסצילטור ואת מהירותו ברגע $t = 0$.

ד. סרטטו גרף מקורב של מקום האוסצילטור כפונקציה של הזמן.

40. קפיץ אופקי בעל קבוע 25 נ'\מ', הניתן לכיווץ ולמתיחה, קבוע בקצהו האחד, ולקצה האחר קשור לגוף שמסתו 1.2 ק"ג. על גוף זה מונח גוף שמסתו 0.8 ק"ג (ראה איור). מקדם החיכוך הסטטי בין שני הגופים הוא 0.4. מסיטים את מערכת שני הגופים למרחק 25 ס"מ מנקודת שיווי המשקל, ומשחררים אותה ממנוחה. מערכת הגופים מתנודדת בתנועה הרמונית פשוטה על משטח ללא חיכוך.



א. מהו זמן המחזור של התנודות?

ב. סרטטו במערכת צירים אחת שתי עקומות המתארות:

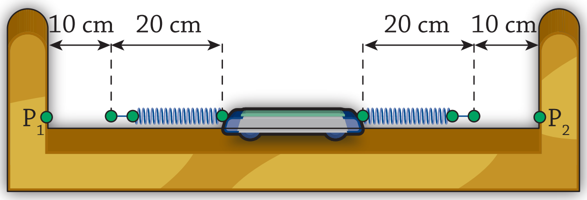
(1) את הכוח השקול הפועל על מערכת שני הגופים, כפונקציה של שיעור הנקודה בה היא נמצאת.

(2) את הכוח השקול הפועל על הגוף העליון, כפונקציה של שיעור הנקודה בה הוא נמצא.

ג. מהי המשׂרעת המרבית שבה יתנודדו שני הגופים **יחד**?

41. שני קפיצים שאורכם במצב רפוי 20 ס"מ, קשורים לשני צדדיה של קרונית. מסת הקרונית היא 0.1 ק"ג, והיא מונחת על משטח אופקי חלק. קבועי הכוח של הקפיצים הם 30 נ'\מ' ו- 50 נ'\מ'.

קצותיהם החופשיים של הקפיצים נקשרים לשתי נקודות קבועות P_1 ו-P_2 הנמצאות ברווח 10 ס"מ מהקצוות החופשיים של הקפיצים במצבם הרפוי.



א. מצאו את אורכו של כל אחד משני הקפיצים לאחר שקצותיהם נקשרו ל- P_1 ו-P_2 (והקרונית במנוחה).

ב. מסיטים את הקרונית ממצב שיווי-המשקל ומשחררים אותה. הראו כי תנודות הקרונית לא היו משתנות אילו שני הקפיצים היו מוחלפים בקפיץ יחיד שקבוע הכוח שלו הוא 80 נ'\מ'.

ג. מצאו את זמן מחזור תנודות הקרונית.

★**42.** תולים משקולת שמסתה 0.8 ק"ג בקצהו של קפיץ אנכי. הקפיץ מתארך ב- 8 ס"מ עד נקודת שיווי-המשקל. אחר-כך מסירים את המשקולת, חותכים את הקפיץ לשני חלקים שווים, ותולים את המשקולת על מחצית הקפיץ המקורי.

א. מצאו את התארכות הקפיץ החדש עד נקודת שיווי-המשקל.

ב. מעלים את המשקולת לגובה 2 ס"מ מעל נקודת שיווי המשקל, ומשחררים אותה ממנוחה. בתוך כמה זמן תגיע המשקולת לראשונה לנקודת שיווי-המשקל?

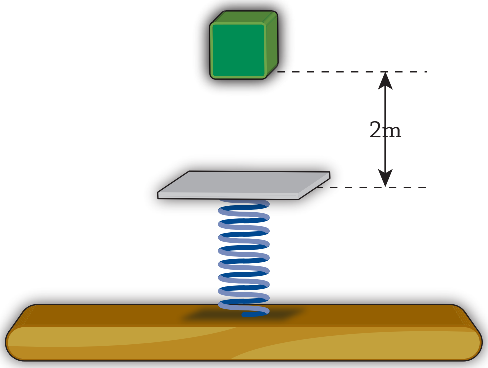
★**43.** בנמל מסוים פני הים עולים ויורדים בתנועה הרמונית כתוצאה מגיאות ושפל. גובה פני המים בשעת השפל הוא 2 מ', ובשעת הגיאות 12 מ'. מרגע הגיאות עד רגע השפל חולפות בקירוב 6 שעות. מהו הזמן המרבי בו אניה יכולה לשהות בנמל, אם לצורך עגינתה היא זקוקה למים שעומקם 8 מ' לפחות?

44. לקצה העליון של קפיץ אנכי מחובר לוח אופקי. קבוע הקפיץ הוא 4000 נ'\מ'. מגובה 2 מטר מעל הכף משוחררת ממנוחה משקולת שמסתה 2 ק"ג, המשקולת נופלת חופשית ונדבקת ללוח. מסות הלוח והקפיץ ניתנות להזנחה. מצא את:

א. התכווצותו המרבית של הקפיץ.

ב. תדירות תנודות המשקולת.

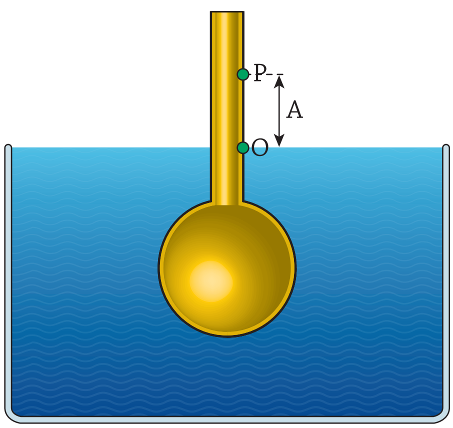
ג. משרעת התנודות.



45. אחד החוקים הבסיסיים בהידרוסטטיקה (תורת הנוזלים הנמצאים במצב סטטי) הוא **חוק ארכימדס**: "כאשר גוף טבול בתוך נוזל, פועל עליו כוח כלפי מעלה ('כוח עילוי') שגודלו שווה למשקל הנוזל שנפחו כנפח חלק הגוף הטבול בנוזל."

א. גוף צף בנוזל שצפיפותו ρ. נפח חלק הגוף הטבול בנוזל הוא V. הראה כי אפשר לבטא את כוח העילוי F' כך: $F' = \rho V g$

ב. מצוף מורכב מכדור חלול וגליל ארוך ששטח חתכו S קבוע לכל אורכו. המצוף צף במי אגם שקטים ונמצא במנוחה, כשהנקודה O נמצאת בגובה פני המים (ראו איור). מסת המצוף כולו M. צפיפות מי האגם היא ρ.



(1) ציינו את הכוחות הפועלים על המצוף (מהו הכוח, מהו כיוונו).

(2) משקיעים את המצוף כך שהנקודה P הנמצאת

במרחק A מעל לנקודה O מגיעה עד לפני המים, ועוזבים את המצוף. בטא באמצעות נתוני השאלה את הכוח השקול הפועל על המצוף (גודל וכיוון) מיד לאחר שעוזבים אותו.

(3) הראו, כי בהזנחת התנגדות המים, תנועת המצוף היא הרמונית פשוטה. בטאו את זמן המחזור באמצעות נתוני השאלה.

46. חידה: אתם נמצאים בחדר, על ידכם שעון ועל רגליכם נעל עם שׂרוך. כיצד תמדדו באמצעות אביזרים אלה את אורך החדר?

תשובות

1. א. כן, כי ...

ב. לא, כי ...

2. ג. ωt נמדד ברדיאנים.

ד. הנוסחה מתאימה לתנועה הרמונית עם תנאי התחלה שברגע t = 0 מתקיים x = A ו- v = 0.

3. א. A_6, כי ...

4. ד. גודל המהירות מגיע לערכו המרבי ב- A_6, ולערכו המזערי (אפס) ב- A_1 וב- A_{11}. גודל הכוח השקול וגודל התאוצה מגיעים לערכיהם המרביים ב- A_1 וב- A_{11}, לערכיהם המזעריים (אפס) ב- A_6.

5. א. 0.3 s ; 0.1 s

ב. ≈ 0.247 N ; 2.5 Hz ; 0.4 s ; 2 cm

6. א. ≈ 2590 m/s^2

ב. 0

7. ב. 1.2 N לעבר נקודת שיווי המשקל.

ג. ≈ 0.2 s

ד. ≈± 0.77 m/s

8. ההיגד שאינו נכון הוא (3), כי ...

9. א. x = 0.22 cos πt (x ו- t מבוטאים ביחידות SI).

ב. ≈ 17.8 cm

ג. ≈ 4.2 cm

ד. 0.41 m/s ≈ שמאלה.

10. א. 0.2 s

ב. ≈ 0.049 N ; ≈ 4.9 m/s^2 ; ≈ -0.72 m/s

ג. 0 ; ≈ 0.79 m/s

11. את הדרך מ- x = 1 cm עד נקודת שיווי המשקל החלקיק עובר בזמן קצר יותר, כי ...

12. $0.75\,\pi^2$ J ; $0.25\pi^2$ J ; $10\pi^2$ N ; $20\pi^2$ m/s^2

13. א. הנחיה: F = -5x מצא על-פי נוסחת מקום-זמן הנתונה את התדירות הזוויתית.

ב. $4 \cdot 10^{-3}$ J

ג. $4 \cdot 10^{-3}$ J ; $4 \cdot 10^{-3}$ J

14. $A/\sqrt{2}$

15. א. 10 cm

ב. בגובה 3 ס"מ מעל נקודת שיווי המשקל: הקפיץ מפעיל כוח בן 2.8 ניוטון כלפי מעלה, כוח הכובד הוא 4 ניוטון כלפי מטה, הכוח השקול הוא 1.2 ניוטון כלפי מטה.

16. ד. רמז: הגדלים הפיזיקליים מתייחסים לסל.

ה. ≈ 30 g

ו. ≈ 10 N/m

17. ב. רמז: משהו ישתנה, אך זה אינו זמן מחזור התנודות.

18. א. ≈ 0.56 s

ב. 0.25 J

19. ≈ 0.71 m/s

20. ב. עד לזווית שבין 14° ל- 14.2°.

ג. ≈ 1.14 %

21. ≈ 3.72 m/s^2

22. התלמיד טעה, כי על פני הירח ...

23. א. 0.4 m/s

ב. 0.08 m

ג. x(t) = 0.08 sin 5t (x ו- t מבוטאים ביחידות SI).

ד. לא. רמז: חשב את מקום הקרונית השנייה, לאחר

שהראשונה מבצעת חצי מחזור של תנודתה.

24. א. ℓ-ℓ_0

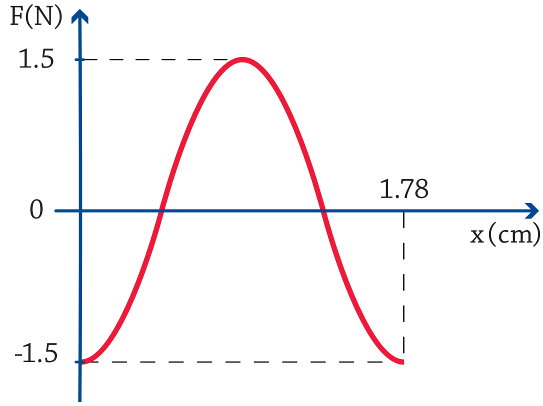
ב. 3m

25. א. גודל מהירות הקרונית הוא מרבי בנקודת שיווי המשקל A, כי ...

ב. ≈ 21.2 cm/s

ג. הגרף נבנה בעזרת הנוסחה:

$F = -1.5\cos(\sqrt{12.5}\,t)$



ד. נסמן ב- C את הקצה השמאלי של המסלול. כיוון המהירות זהה לכיוון הכוח בקטעים מ- B ל- A ומ- C ל- A, כי ...

ה. ≈ 0.59 s

26. א. 3T

27. ב. T/2

28. א. (1) הנקודה האחרונה שנדגמה מתאימה לתנועת הגוף בכיוון המנוגד.

(2) 20 cm

(3) $0.88\text{ s} < T < 0.92\text{ s}$

ב. (1) הנחיה: סרטטו גרף של התאוצה כפונקציה של המקום.

(2) $F \approx -29.8\,x$

29. א. כלפי מעלה, כי ...

ב. נקודה A - נחה רגעית, כי ...
נקודה B - המשקולת עולה
נקודה C - נחה רגעית, כי ...

ג. 0.8 s

ד. (1) 3 N כלפי מעלה.

(3) $4\,\frac{m}{s^2}$ כלפי מטה.

ה. $k \approx 30.8\,\frac{N}{m}$

ו. (1) כ- 9.74 cm

(2) כ- 6.49 cm מעל נקודת שיווי המשקל.

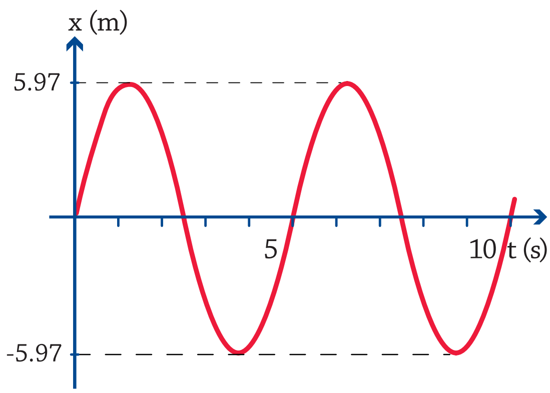
ז. ≈ 0.57 m/s

30. א. התנועה היא מחזורית, כי ...

31. א. ≈ 1680 N/m

32. א. ערכי הקיצון של המהירות הם $\pm 7.5\,\frac{m}{s}$

ב. הגרף:



33. א. ≈ 0.83 Hz

ב. $\approx 5.48\,\frac{N}{m}$

ג. (1) אף פעם, כי ...

(2) ב- 0.3 s, כי ...

ד. שמאלה, כי ...

34. ב. $\approx 3.95\,\frac{N}{m}$

ג. (1) 1 N

(2) ≈ 0.126 J

(3) 0

ד. (2) 0.5 s

(3) ≈ 0.02 J

35. משפט (5), כי ...

36. א. 7.03 J

ב. (1) $3.12\ J$

(2) $\approx 0.248\ s$

ג. $18.75\ N$

ד. $0.33\ s$

37. א. $\approx 5.76\ cm$

ב. התכווצות הקפיץ כתוצאה מפגיעת קליע גומי המתנגש אלסטית בתיבה גדולה יותר, כי ...

ג. $\approx 75.5°$

38. א. (1) $2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$

(2) $\frac{kd^2}{8}$

ב. (1) $2\pi\sqrt{\frac{2M}{k}}$

(2) $\frac{kd^2}{8}$

ג. (1) $2\pi\sqrt{\frac{2M}{k}}$

(2) $\frac{kd^2}{16}$

39. א. $0.2\ m$; $\pi\ s$; $\approx 0.32\ Hz$; $0.6\ rad$

ב. $v(t) = -0.4\sin(2t + 0.6)$

$a(t) = -0.8\cos(2t + 0.6)$

ג. $x(0) \approx 16.5\ cm$; $v(0) \approx 22.6\ cm/s$

40. א. $\approx 1.78\ s$

ג. $0.32\ m$

41. א. $32.5\ cm$; $27.5\ cm$

ג. $\approx 0.22\ s$

42. א. $4\ cm$

ב. $\approx 0.1\ s$

43. $\approx 5\frac{1}{4}\ h$

44. שימו לב: כיוון שמסות הלוח והקפיץ ניתנות להזנחה, האנרגיה הקינטית של המשקולת אינה מומרת לאנרגיה פנימית בהתנגשות (הגופים אינם מתחממים).

א. $\approx 0.147\ m$

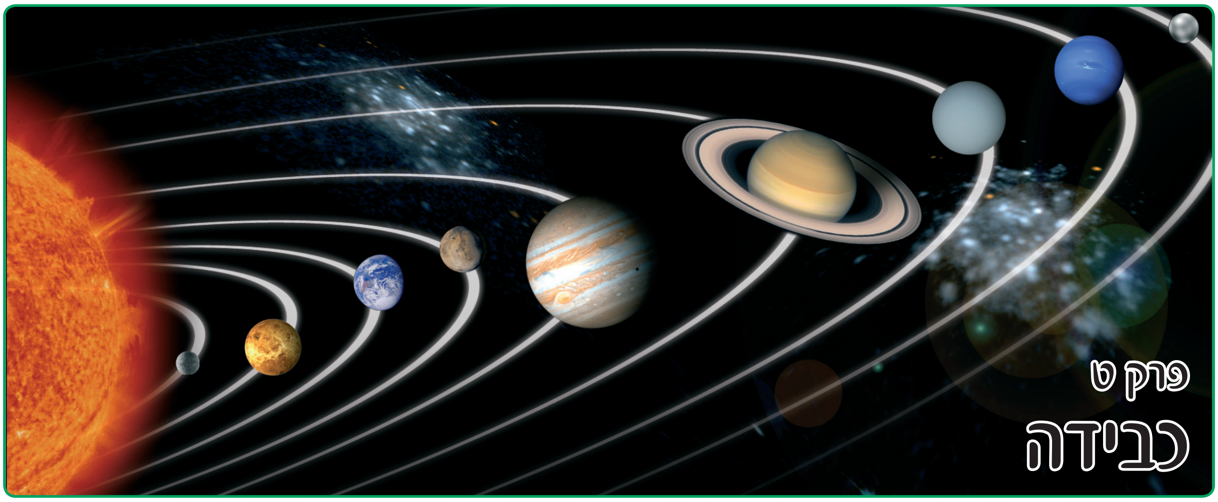
ב. $\approx 7.12\ s^{-1}$

ג. $\approx 0.142\ m$

45. ב. (2) ρSgA כלפי מעלה.

(3) $2\pi\sqrt{\frac{M}{\rho Sg}}$

46. הנחיה: אפשר להפוך את הנעל עם השרון למטוטלת ...


פרק ט
כבידה

1. תקציר של ראשית האסטרונומיה

בסעיף זה נביא מעט מן ההיסטוריה של התפתחות האסטרונומיה. סקירה היסטורית רחבה יותר נציג בנספח ה.

פיתגורס, (Pythagoras, 589bce - 475bce) הגה את התפיסה שהארץ **נייחת**, והיא **מרכז היקום**. מודל פלנטרי (כלומר מודל של מערכת השמש הכולל את השמש, הארץ וכוכבי הלכת) המניח שהארץ נמצאת במרכז היקום מכונה **מודל גאוצנטרי** (geos - אדמה ביוונית).

לאדם העוקב אחר תנועת הכוכבים במשך כמה שעות במהלך הלילה מתברר כי כוכב הצפון אינו משנה את מקומו; שאר הכוכבים חגים סביבו במסלולים מעגליים (ראה נספח ד איור 1). במהלך 24 שעות כל כוכב משלים מעגל שלם.

כאשר עוקבים אחר תנועת כוכבי הלכת (הפלנטוֹת) במשך כמה חודשים (מספיקה תצפית אחת בחודש), רואים כי היא אינה סדירה: לעיתים הם נעים מזרחה, ולעיתים מערבה (ראה נספח ד איור 2). תיאור תנועתם אינו פשוט.

השאלה מהי צורתם הגאומטרית של המסלולים שלאורכם נעים כוכבי הלכת היתה נושׂא מרכזי בו עסקו הוגי דיעות ביוון העתיקה (יוון העתיקה - מהמאה הרביעית עד המאה הראשונה לפני הספירה).

אפלטון (Aplaton, 427 bce - 347 bce) הציג את השאלה המרכזית:

"כוכבי השבת נעים במסלולים מעגליים. כיצד אפשר לבנות את המסלול של כוכב לכת, כפי שהוא נצפה מהארץ, מצירוף של מעגלים?"

בשאלה של אפלטון חבוייה הנחת יסוד, האומרת כי המסלול של כוכב לכת הוא צרוף של **מעגלים**. כלומר כוכב לכת נע לאורך מעגל, שמרכזו (של המעגל) נע לאורך מעגל אחר, וכך הלאה. הנחת יסוד זו נראתה לאנשי יוון העתיקה כה מובנת מאליה, עד כי במשך כאלפיים שנה האסטרונומים חיפשו תשובה לשאלה של אפלטון, בלי לערער על ההנחה הבסיסית הטמונה בה.

אריסטו (Aristoteles, 384 bce - 322 bce) חילק את העולם לשניים: לעולם תת-ירחי, בו הגופים מורכבים מארבעה יסודות - אדמה, מים, אש ואוויר, ולעולם על-ירחי - כוכבי השבת (כך נקראו הכוכבים בעבר), כוכבי הלכת והשמש. על-פי אריסטו העולם העל-ירחי בנוי מיסוד חמישי - "אתר", אשר תנועתו ה"טבעית" היא במסלולים מעגליים. אריסטו הניח חוקי טבע שונים בעולם העל-ירחי ובעולם התת-ירחי.

תלמי (Claudius Ptolemaeus, 90 - 168) שיכלל מודלים פלנטריים שבנו קודמיו, והוא פיתח מודל שעל-פיו הארץ נמצאת במרכז היקום, השמש וכוכבי הלכת נעים סביבה. על פי מודל זה מסלולו של כל כוכב לכת מורכב מצרוף מעגלים רבים. המודל של תלמי היה מסובך מאוד, אך הוא התאים בצורה טובה למדי לתצפיות. על-פי המודל של תלמי נבנה לוח השנה. הכנסיה אימצה את התפיסות של אריסטו ושל תלמי.

אי-דיוקים בלוח השנה שניבנה על בסיס המודל של תלמי, כמעט ולא הורגשו במהלך עשרות שנים, אולם הם הלכו והצטברו במשך דורות, והפכו משמעותיים. במאה ה-16, לקח על עצמו האסטרונום הפולני **קוֹפרניקוס** (Nicolaus Copernicus, 1473 - 1543) לתקן את לוח השנה. המודל הפלנטרי של תלמי נראה לקופרניקוס סבוך מדי. הוא מצא שאפשר להסביר את תנועות כוכבי הלכת גם על ידי מודל אחר, המניח שהשמש, ולא הארץ, היא מרכז המערכת הפלנטרית. מודל כזה מכונה **מודל הליוצנטרי** (helios - שמש ביוונית). על-פי מודל זה כוכבי הלכת חגים סביב השמש. הארץ אינה מרכז היקום ואינה נייחת, אלא היא חגה סביב השמש, בדומה לשאר כוכבי הלכת.

המודל של קופרניקוס היה פשוט ונוח מזה של תלמי. אולם, הוא לא התקבל על דעתם של הרוב, משום שתנועת הארץ נתפסה כבלתי הגיונית וכנוגדת את חוקי הטבע שהיו ידועים בתקופתו. יתר על כן, הוא עמד בניגוד לאמונתה של הכנסיה.

האסטרוֹנוֹם **טיכו ברהה** (Ticho Brahe, 1546-1601) ערך במהלך חייו תצפיות על גרמי שמיים בדיוק ובהיקף חסרי תקדים. הוא רשם את הכיוונים שבהם ניצפו יותר מאלף כוכבים בדיוק רב מאוד. במדידות שערך במשך עשרים שנה אין טעות העולה על ′1 (החלק השישים של המעלה). הנתונים התצפיתיים הרבים והמדויקים שימשו מאוחר יותר בסיס להבנת תנועותיהם של כוכבי הלכת.

גלילאוֹ גליליי (Galileo Galilei, 1564 - 1642) היה מבין הראשונים שחקרו את השמיים באמצעות הטלסקופ (החל משנת 1609). תצפיותיו פתחו עידן חדש באסטרונומיה. תגליותיו כוללות: תיאור פני הירח, גילוי ארבעה מבין הירחים של צדק, גילוי מופעי כוכב הלכת נוגה ותיאור כתמים על פני השמש.

לאור תגליותיו, גלילאו הכריע לטובת המודל הפלנטרי של קופרניקוס, והפך חסיד של תורה זו. בגלל תמיכתו במודל הקופרניקי, הוא עורר את זעמה של הכנסיה הקתולית, שהאמינה בתורת תלמי, וחייבה את הנוצרים להאמין בה. הוא הובא למשפט האינקוויזיציה ודינו נחרץ למאסר עולם בביתו.

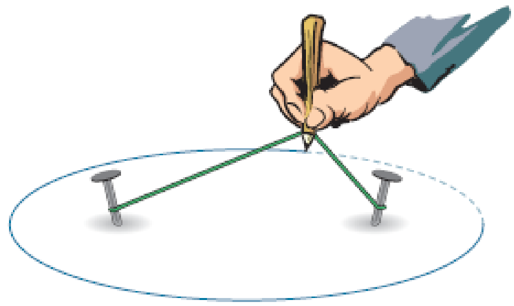
יוהן קפלר (Johannes Kepler, 1571-1630) היה אסטרונום בן תקופתו של גלילאו גליליי. בתחילת דרכו כאסטרונום הוא התמנה להיות עוזרו הראשי של טיכו ברהה. טיכו הטיל על קפלר לפתור את בעיית המאדים: היה פער בין תוצאות החישובים לגבי מסלולו של כוכב לכת זה שנערכו על בסיס המודלים הקיימים, לבין הערכים שנמדדו על-ידי טיכו. פער זה היה גדול מאי הדיוק של המדידות.

קפלר התמודד עם בעיית המאדים כשבעים פעם במשך שמונה שנים, ותמיד נכשל. בהתמודדות האחרונה עם בעיית המאדים הגיע קפלר למסקנה שמסלול המאדים אינו מעגל או צירוף של מעגלים כפי שחזה אפלטון, אלא **אליפסה**. רעיון זה גרם לתפנית בחקר האסטרונומיה. פריצת הדרך של קפלר התאפשרה ברגע שהוא נטש את ההנחה הבסיסית שהיתה מקובלת עוד מתקופת היוונים, כי התנועה הטבעית בעולם העל-ירחי היא מעגלית. קפלר הצליח לגלות קשרים מתמטיים בין אין-ספור המספרים שהותיר טיכו, ולנסח אותם בשלושה חוקים אמפיריים, המכונים **שלושת חוקי קפלר** המפורטים בסעיף 2 המופיע מיד בהמשך. שלושת חוקי קפלר מתארים את תנועת כוכבי הלכת, ובזכותם נכנס קפלר להיסטוריה.

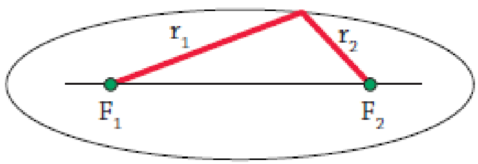
חכמי ישראל היו מחוייבים להיות בעלי שליטה באסטרונומיה כדי שיוכלו לתאם בין השנה על פי הירח לשנה על פי השמש. תאום זה נדרש כדי שחג הפסח שעליו נאמר "שמור את חודש האביב" יחול תמיד באביב.
המצווה "קידוש החודש" היא המצווה הראשונה בתורה שניתנה לבני ישראל.

2. שלושת חוקי קפלר

לפני שנציג את שלושת חוקי קפלר נסביר מהי אליפסה: ננעץ שני מסמרים בדף נייר. ניטול חוט, נקשור כל קצה שלו למסמר אחר. לאחר מכן נסרטט את העקומה המתקבלת כאשר עוברים עם עפרון על דף הנייר במצב שבו החוט מתוח (איור 1א). כשנעבור עם העיפרון על כל הנקודות האפשריות תתקבל צורה גאומטרית המכונה אליפסה. סכום המרחקים של כל נקודה על האליפסה משני המסמרים הוא קבוע, ושווה לאורך החוט.



א. סרטוט אליפסה באמצעות חוט ושני מסמרים



ב. מוקדי אליפסה

איור 1: אליפסה

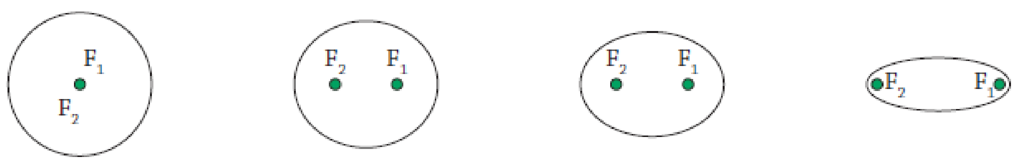
הגדרת אליפסה:

אליפסה היא המקום הגאומטרי של נקודות במישור, שסכום מרחקיהן משתי נקודות קבועות במישור הוא גודל קבוע.

כל אחת משתי הנקודות מכונה **מוקד של אליפסה**. באיור 1ב מסורטטת אליפסה שמוקדיה הם F_1 ו-F_2. עבור כל נקודה על האליפסה נסמן את מרחקה מ-F_1 ב-r_1 ומ-F_2 ב-r_2. אם אורך החוט יסומן ב-2a אזי כל נקודה על האליפסה מקיימת:

$$r_1 + r_2 = 2a$$

המרחק בין המוקדים (המסמרים) קובע את מידת **פחיסות** האליפסה. באיור 2 מתוארות ארבע אליפסות בהן אורך החוט (כלומר $r_1 + r_2$) קבוע, אך המרחק בין המוקדים הולך וקטֵן. באיור 2א המרחק בין המוקדים הוא הגדול ביותר ופחיסות האליפסה היא הגדולה ביותר. באיור 2ד המרחק בין המוקדים שווה לאפס (כלומר רק מסמר אחד). במקרה זה מתקבלות כל הנקודות במישור שמרחקיהן מנקודה אחת הוא גודל קבוע, כלומר מעגל. **ניתן לראות את המעגל כמקרה פרטי של אליפסה, ששני מוקדיה מתלכדים**.



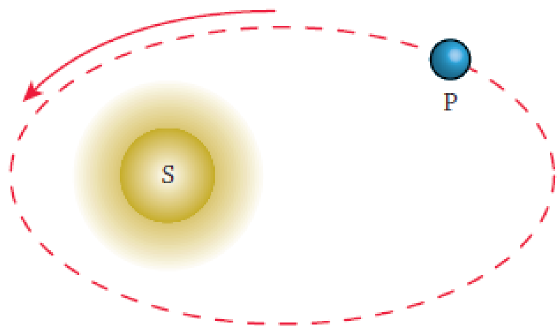
א. ב. ג. ד.

איור 2: השפעת המרחק בין מוקדי אליפסה על מידת פחיסותה

נציג את שלושת החוקים שקפלר מצא באופן אמפירי, על-סמך ממצאי התצפיות שערך טיכו ברהה.

החוק הראשון של קפלר (חוק המסלולים):
כל כוכב לכת נע במסלול אליפטי, והשמש נמצאת באחד ממוקדי האליפסה.

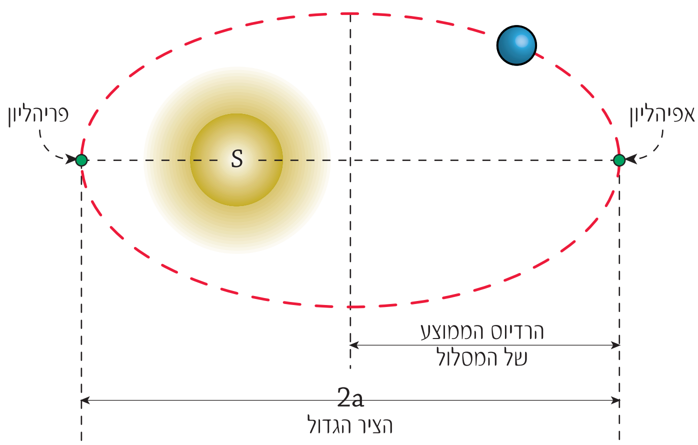
איור 3 מתאר מסלול אליפטי של כוכב לכת P (P - קיצור ל-planet - כוכב לכת) (כדי להדגיש את הצורה האליפטית - סורטט המסלול עם סטייה רבה מצורת מעגל). השמש (S) נמצאת באחד ממוקדי האליפסה (למוקד השני אין משמעות מיוחדת). האליפסות שלאורכן נעים כוכבי הלכת השונים, שונות זו מזו בגודל ובמידת הפחיסות שלהן.



איור 3: החוק הראשון של קפלר: מסלול תנועתו של כוכב לכת הוא אליפסה, השמש נמצאת באחד ממוקדיה

לאורך מסלול כוכב לכת, הנקודה הקרובה ביותר לשמש מכונה **פריהליון** (איור 4), והרחוקה ביותר - **אפיהליון**. הקו הדימיוני המחבר את הפריהליון לאפיהליון נקרא **הציר הראשי של האליפסה**, ואורכו 2a (הראה זאת!).

לדוגמה, מרחק הפריהליון של כוכב הלכת נוגה מהשמש הוא $107 \cdot 10^6$ ק"מ, ומרחק האפיהליון - $109 \cdot 10^6$ ק"מ (ראה טבלה 1 בהמשך). לכן אורך הציר הראשי שווה ל-$216 \cdot 10^6$ ק"מ. נציין כי מרחק של כוכב לכת מהשמש נמדד ממרכז השמש למרכז כוכב הלכת.



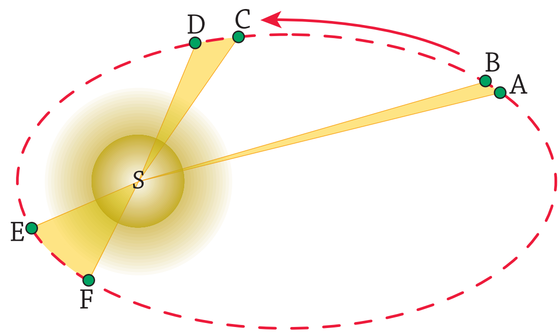
איור 4: מונחים הקשורים במערכת השמש

החוק השני של קפלר (חוק השטחים):

הקו הישר המקשר את השמש עם כוכב לכת חולף על פני שטחים שווים בפרקי זמן שווים.

באיור 5 מייצג העיגול S את השמש, והאליפסה את מסלולו של כוכב לכת כלשהו. אם כוכב הלכת נע על פני הקשתות AB, CD ו-EF בפרקי זמן שווים, אזי השטחים SAB, SCD, ו-SEF שווים.

מהחוק השני של קפלר נובע כי ככל שכוכב לכת קרוב יותר לשמש - מהירותו גדולה יותר, כיוון שהקו המקשר אותו עם השמש קצר יותר.



איור 5: החוק השני של קפלר: הקו המחבר כוכב לכת עם השמש חולף על פני שטחים שווים בזמנים שווים

החוק השלישי של קפלר (חוק זמני המחזור):

ריבוע זמן המחזור, T, של תנועת כוכב לכת סביב השמש פרופורציוני לחזקה השלישית של מחצית הציר הראשי, a.

בניסוח מתמטי: $T^2 = ka^3$ (1)

כאשר: k - קבוע, המשותף לכל כוכבי הלכת

קפלר מצא כי מסלולי כוכבי הלכת סביב השמש הם בקירוב מעגלים, אולם אף אחד מהם אינו בדיוק מעגל.

הטיפול המתמטי במסלולי כוכבי לכת ולוויָנים יעשֶׂה בספר זה בהנחת הקירוב שהמסלולים הם מעגלים. לכל מסלול של כוכב לכת נייחס רדיוס שיכונה **הרדיוס הממוצע של המסלול**, שיסומן ב- $\bar{r}$, וגודלו שווה למחצית הציר הגדול של המסלול האליפטי:

$$\bar{r} = a$$

מרחק זה שווה גם לממוצע החשבוני של מרחקי הפריהליון והאפיהליון מהשמש. הרדיוס הממוצע של כוכב הלכת נוגה למשל, שווה ל-$108 \cdot 10^6$ ק"מ (טבלה 1).

נרשום ניסוח חלופי לחוק השלישי של קפלר עבור מסלולים מעגליים, באופן שיהיה נוח להשוות בין הרדיוסים הממוצעים לבין זמני המחזור של שני כוכבי לכת:

לגבי כוכב לכת אחד: $T_1^2 = k(\bar{r}_1)^3$

לגבי כוכב לכת אחר: $T_2^2 = k(\bar{r}_2)^3$

משתי הנוסחאות האחרונות נקבל:

$$\boxed{\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{\bar{r}_1}{\bar{r}_2}\right)^3} \quad (1')$$

בטבלאות 1, 2 ו- 3 רשומים נתונים אודות גרמי שמיים אחדים (זמני המחזור נמדדים בשנים או בימֶמות **של הארץ**).

גרם שמיים	מסה m $(10^{24}$ kg)	רדיוס ממוצע של המסלול $\bar{r}$ $(10^6$ km)	מרחק הפריהליון מהשמש $(10^6$ km)	מרחק האפיהליון מהשמש $(10^6$ km)	זמן מחזור T (שנים)	הרדיוס של גרם השמיים $R(10^6$ m)
כוכב חמה (Mercury)	0.330	57.9	45.9	69.8	0.2410	2.44
נוגה (Venus)	4.869	108.2	107	109	0.615	6.05
ארץ (Earth)	5.97	150	147	152	1.00	6.37
מאדים (Mars)	0.642	228	207	249	1.88	3.4
צדק (Jupiter)	1900	778	740	816	11.9	71.4
שבתאי (Saturn)	569	1430	1350	1510	29.5	60.0
אוֹרָון (Uranus)	86.9	2871	2730	3010	84.0	26.1
רַהַב (Neptun)	102	4500	4460	4540	165	24.3
פלוטו (Pluto)	0.013	5900	4410	7360	248	1.5-1.8

טבלה 1: נתונים לגבי הפלנטות ולגבי פלוטו

גרם שמיים	מסה m (kg)	רדיוס ממוצע של המסלול $\bar{r}$ (m)	זמן מחזור T (יממות)	הרדיוס של גרם השמיים R (m)
שמש	$2 \cdot 10^{30}$	------	------	$7 \cdot 10^{8}$
ירח	$7.3 \cdot 10^{22}$	$3.84 \cdot 10^{8}$	27.3	$1.74 \cdot 10^{6}$

טבלה 2: נתונים לגבי השמש, והירח של הארץ

ירח	מסה m $(10^{22}$ km)	רדיוס ממוצע של מסלול $\bar{r}$ $(10^3$ km)	מרחק מזערי מצדק $(10^3$ km)	מרחק מרבי מצדק $(10^3$ km)	זמן מחזור T (יממות)
איו (Io)	8.9	422	422	422	1.77
אירופה (Europa)	4.8	671	671	671	3.55
גנימד (Ganymede)	1.5	1070	1068	1071	7.16
קליסטו (Callisto)	1.1	1883	1870	1896	16.69

טבלה 3: נתונים לגבי הירחים הגדולים של כוכב הלכת צדק

דוגמה 1: חישוב יחס רדיוסי מסלולים על-פי יחס זמני מחזור

מסלוליהם של הארץ ושל כוכב הלכת נוגה הם בקירוב רב מעגליים. זמן המחזור של הארץ (T_E) בתנועתה סביב השמש הוא שנה אחת, ושל נוגה (T_V) - 0.615 שנה. חשבו את היחס בין רדיוס מסלול הארץ סביב השמש ($\bar{r}_E$) לרדיוס המסלול של כוכב הלכת נוגה ($\bar{r}_V$).

פתרון:

על-פי נוסחה (1′), יחס הרדיוסים פרופורציוני לחזקה $\frac{2}{3}$ של יחס זמני המחזור.

$$\frac{\bar{r}_E}{\bar{r}_V} = \left(\frac{T_E}{T_V}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{0.615}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.38$$

אסטרואידים

קפלר גילה את שלושת החוקים הקרויים על שמו על סמך תצפיות בשישה כוכבי הלכת שהיו ידועים בתקופתו. כיום ידועים שמונה כוכבי לכת, כמפורט בטבלה 1. פלוטו, למרות שיש לו מאפיינים רבים של כוכב לכת, אינו נחשב לכוכב לכת. בנוסף לשמונת כוכבי הלכת נתגלו עשרות אלפים גרמי שמיים זעירים המכונים **אסטרואידים** (Asteroids). לרובם ממדים של סלעים גדולים. רוב האסטרואידים נעים סביב השמש במסלולים הנמצאים בין המסלול של מאדים לזה של צדק.

נהוג למדוד מרחקים במערכת השמש ביחידה השווה למרחק הארץ מן השמש. יחידה זו מכונה **יחידה אסטרונומית**, והיא מסומנת ב- A.U. (Astronomical Unit); $1\ \text{A.U.} = 1.5 \cdot 10^{11}\ \text{m}$. רוב האסטרואידים נעים במרחק של 2.5 A.U. עד 3 A.U. מן השמש. האסטרואיד הגדול ביותר נקרא "Ceres", וממדיו הם מסדר גודל של 1000 km (ראה תרגיל 35).

כיוון שהאסטרואידים, כמו כוכבי הלכת, נעים בהשפעת השמש, **הם מקיימים את החוק השלישי של קפלר עם אותו קבוע k (ראה קשר (1)) כמו כוכבי הלכת**.

המונח "כוכב"

נדגיש כי כוכבי הלכת (כוכב לכת באנגלית - planet) **אינם** כוכבים (למרות שהמילה "כוכב" מופיעה במונח "כוכב לכת"). כוכבי הלכת נראים לנו כיוון שהם **מחזירים** את אור השמש.

כוכב (ובאנגלית - star), או כפי שהוא נקרא בעבר - כוכב שבת, הוא גרם שמיים שהוא בעצמו **המקור** של האור הנפלט ממנו. השמש היא דוגמה לכוכב. כמעט כל העצמים הבהירים המתגלים לעינינו בשמיים הם כוכבים, כלומר הם מקורות אור, ולא גרמי-שמיים המחזירים את אור השמש.

הרחבת החוק השלישי של קפלר:

כאשר לוויין נע במסלול אליפטי בשדה הרדיאלי של גרם שמיים, ועל הלוויין לא מופעל כוח על ידי גרם שמיים אחר, ריבוע זמן המחזור, T, של הלוויין פרופורציוני לחזקה השלישית של הרדיוס הממוצע של מסלולו, r.

כלומר:

$$T^2 = kr^3$$

כאשר k משותף לכל הלוויינים של גרם השמיים. לכל גרם שמיים מתאים ערך אחר של k.

3. חוק הכבידה העולמי

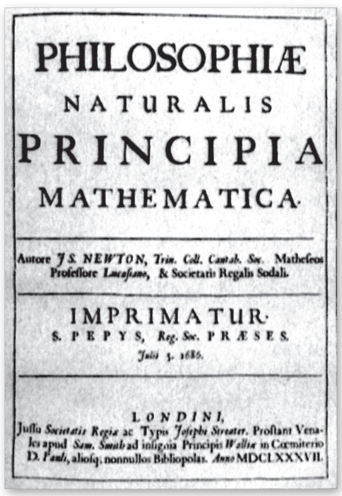
3.1 הקדמה

חוקי קפלר הם קינמטיים; הם **מתארים** את תנועת כוכבי הלכת, אך לא את **הסיבות** לתנועות אלה, כלומר אינם אומרים דבר על **הכוח** הגורם לתנועה המיוחדת של כוכבי הלכת. קפלר נכשל בהסבר הדינמי לתנועת כוכבי הלכת.

בשנת 1684, כאשר אייזיק ניוטוֹן כיהן כפרופסור באוניברסיטת קיימברידג', הוא נפגש עם אסטרוֹנוֹם צעיר בשם אֶדְמוֹנְד הַלְיי (Edmond Halley, 1656-1742). הליי השתתף בוויכוחים מדעיים שהתקיימו בחברה המלכותית בלונדון (אירגון של מדענים) סביב השאלה "איזה מין כוח מפעילה השמש על כוכבי הלכת, הגורם לתנועתם בהתאם לחוקים שגילה קפלר?". המדענים העלו השערה כי מדובר בכוח שגודלו פרופורציוני הפוך לריבוע המרחק של כוכב הלכת מן השמש. אולם, הם לא הצליחו להוכיח באופן מתמטי כי מסלולי כוכבי הלכת, כפי שתוארו על-ידי קפלר, אכן נגזרים מכוח כזה.

הליי הפנה את הבעיה לניוטוֹן. ניוטון השיב כי הוא כבר הוכיח את העניין בשנת 1666, שנים רבות לפני פגישתו עם הליי, אולם לא עלה בידיו לשחזר בו במקום את ההוכחה. ניוטוֹן הבטיח לשלוח את ההוכחה להליי, לאחר שיפתח אותה מחדש. ואכן, לאחר כמה חודשים, הליי קיבל תשעה עמודים מפורטים תחת הכותרת "על תנועת גופים במסלולים סביב השמש", בהם ניוטוֹן הוכיח את שלושת החוקים האמפיריים של קפלר לגבי תנועת כוכבי הלכת, בהתבסס על כך שהשמש מפעילה על כוכב לכת כוח שגודלו פרופורציוני הפוך לריבוע המרחק של כוכב הלכת מהשמש. זוהי תרומתו השנייה של ניוטון (אחרי חוקי התנועה), ואולי הכבירה ביותר לפיתוחה של המכניקה.

החל מחודש אוגוסט 1684, לאחר ביקורו של הליי, ניוטוֹן השקיע את כל מרצו בכתיבת ספר. בשנת 1686 הגיש לחברה המלכותית את טיוטת ספרו **"עקרונות מתמטיים של פילוסופיית הטבע"** ובקיצור **"עקרונות"** (בלטינית - Philosophiae Naturalis Principia Mathematica). מכיוָן שלחברה המלכותית למדעים חסרו האמצעים לפרסום הספר, לקח הליי על עצמו את נטל ההוצאות הכספיות, ערך את הספר והביאו לדפוס. בשנת 1687 פורסם הספר המהווה יצירת מופת ששינתה את פני המדע. עמוד השער של הספר מוצג באיור 6. בנוסף לשלושת החוקים המכונים "חוקי ניוטוֹן", ניוטוֹן ניסח בספרו את **חוק הכבידה העולמי**, המתאר את אופי כוח המשיכה שגופים מפעילים האחד על האחר. הוא כינה כוח זה בשם **"כוח כבידה"** (gravity), הידוע כיום ככוח בסיסי ביקום.


PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA

Autore J S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostant Venales apud Sam. Smith ad insignia Principis Walliæ in Cœmiterio D. Pauli, aliosq; nonnullos Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

איור 6: עמוד השער של הספר "עקרונות"

3.2 הירח והתפוח

המאמץ הראשון של ניוטוןן להסביר את תנועת כוכבי הלכת הופנה להבנת **הסיבה לתנועת הירח סביב כדור הארץ**.

אילו לא היה פועל כוח על הירח - תנועתו היתה קצובה לאורך מסלול ישר. אולם מנקודת ראות של צופה על הארץ - הירח נע לאורך מסלול מעגלי בקירוב, ולפיכך יש לו תאוצה (צנטריפטלית). ניוטוןן התחבט בשאלה איזה כוח גורם לירח לנוע סביב כדור הארץ. ניוטון סיפר לאחדים מחבריו, ביניהם הפילוסוף הצרפתי וולטר (Voltaire), כי התשובה צצה בראשו שעה שישב בקיץ 1666 בגן, ותפוח נשר מעץ. ניוטוןן הגה את הרעיון המבריק ש**אותו סוג כוח המושך את התפוח, פועל גם על הירח**.

נתבסס על העובדה שהירח נע במסלול מעגלי בקירוב, ונחשב את גודל תאוצתו הצנטריפטלית ביחס לארץ (נסמן אותה ב-$g_{\text{של הירח}}$). על-פי נוסחה (28) בפרק ה:

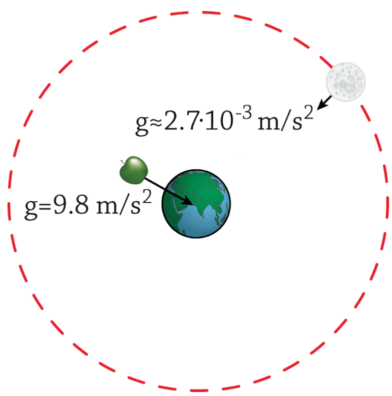
$$g_{\text{של הירח}} = \frac{v^2}{r} = \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 \cdot \frac{1}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} \qquad \text{(א)}$$

זמן המחזור, T, של הירח סביב הארץ שווה ל-27.3 יום: $T = 27.3 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60\ s = 2.36 \cdot 10^6\ s$,

ורדיוס מסלול הירח: $r = 3.84 \cdot 10^8\ m$.

נציב ערכים אלה בנוסחה (א) ונקבל: $g_{\text{של הירח}} \approx 2.7 \cdot 10^{-3}\ m/s^2$

לעומת זאת, גודל תאוצתו של גוף הנופל חופשית על פני הארץ גדול יותר, והוא $g = 9.8\ m/s^2$ (איור 7).



איור 7: אותו סוג כוח המאיץ את התפוח פועל גם על הירח

ניוטוןן הציג לעצמו שאלות מהסוג: מדוע תאוצת הירח קטנה מתאוצת גוף הנופל בקרבת הארץ? האם הכוח שבו הארץ מושכת גוף כלשהו הולך וקטֵן ככל שהגוף רחוק יותר מהארץ? אם כן - מהי החוקיות המתמטית המקשרת בין מרחק הגוף מהארץ ובין הכוח הפועל עליו? כדי לענות על שאלות אלה, נעבור לדון במערכת הפלנטרית.

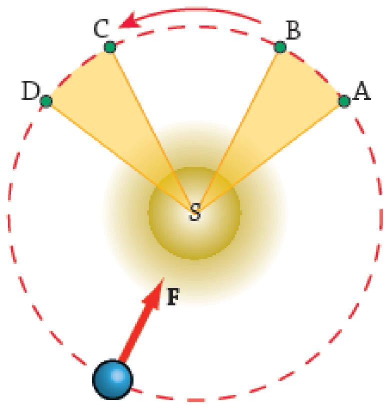
3.3 גזירת הביטוי המתמטי לכוח המשיכה של השמש

ניוטוןן גזר את התבנית המתמטית של הכוח שהשמש מפעילה על כוכבי הלכת מחוקי קפלר. בגלל המורכבות המתמטית הכרוכה בטיפול במסלולים אליפטיים נסתפק בגזירת הכוח בהנחת הקירוב שמסלולי כוכבי הלכת הם מעגלים.

מהו כיוון הכוח הפועל על כוכב לכת?

באיור 8 מתואר המסלול המעגלי של תנועת כוכב לכת, שבמרכזו נמצאת השמש (S). AB ו-CD הן שתי קשתות שלאורכן כוכב הלכת נע בפרקי זמן שווים. על-פי החוק השני של קפלר, שטחי הגְזרות SAB ו-SCD שווים, לכן $\sphericalangle ASB = \sphericalangle CSD$ (הראה זאת; תוכל להשתמש לשם כך בנוסחה לחישוב שטח גיזרה - $\frac{\alpha(rad)\cdot R^2}{2}$). לכן הקשתות AB ו-CD שוות באורכיהן. מצאנו אם כן, שכוכב לכת נע בפרקי זמן שווים כלשהם לאורך דרכים שוות, כלומר תנועתו קצובה.

בפרק ה הראינו כי הכוח השקול הפועל על גוף הנע בתנועה מעגלית קצובה מכוון לעבר מרכז המעגל. לכן, **הכוח הפועל על כוכב לכת מכוון לעבר מרכז השמש**.



איור 8: תנועת כוכב לכת לאורך מסלול מעגלי היא קצובה

מהו גודל הכוח הפועל על כוכב לכת?

בתוקף החוק השני של ניוטון, גודל הכוח מקיים: $F = m\frac{v^2}{r}$ (א)

בתנועה מעגלית קצובה מתקיים: $v = \frac{2\pi r}{T}$ (ב)

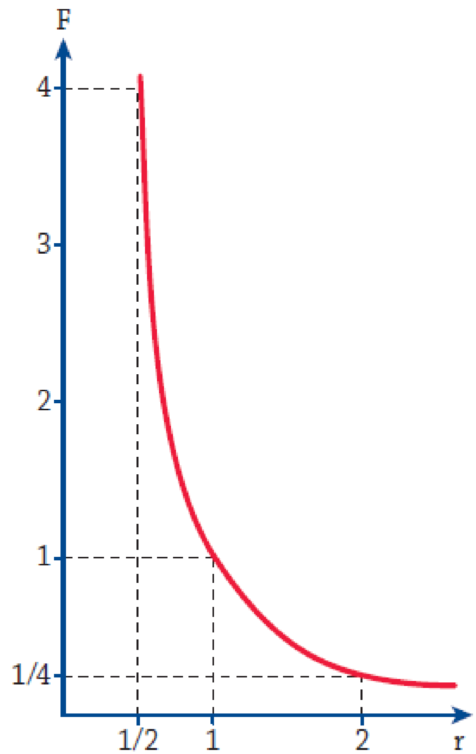
ועל פי החוק השלישי של קפלר: $T^2 = kr^3$ (ג)

נציב את אגף ימין של (ב) במקום v שבנוסחה (א). בביטוי שמתקבל נציב במקום T^2 את kr^3 (על-פי (ג)), ונקבל לבסוף:

$F = \left(\frac{4\pi^2}{k}\right)\frac{m}{r^2}$ (ד)

כאשר: F - גודל הכוח שהשמש מפעילה על כוכב לכת;
m - מסת כוכב הלכת;
r - רדיוס המסלול של כוכב הלכת.

על פי נוסחה (ד) גודל הכוח שהשמש מפעילה על כל כוכב לכת פרופורציוני למסת הכוכב, ופרופורציוני הפוך לריבוע מרחקו מהשמש. גודל הכוח כפונקציה של המרחק (ביחידות שרירותיות) מתואר באיור 9.



איור 9: עוצמת הכוח הפועל על כוכב לכת כפונקציה של מרחקו מהשמש (ביחידות שרירותיות)

ניוטון גזר כאמור את התבנית לכוח משלושת חוקי קפלר, ללא הנחת הקירוב של מסלולים מעגליים. הוא הצליח להוכיח גם את הטענה ההפוכה: חוקי קפלר נובעים מהתבנית המתמטית של הכוח (נוסחה (ד)) ומחוקי התנועה (שלושת חוקי ניוטון). בכך הראה כי אפשר להסביר את התנועה הפלנטרית, המתוארת על-ידי חוקי קפלר, בעזרת התבנית המתמטית של הכוח ובעזרת חוקי התנועה.

3.4 חוק הכבידה העולמי

א. כוח הכבידה שמפעילה השמש

הכוח שהשמש מפעילה על כל כוכב לכת מכוון לעבר השמש, וגודלו הוא פונקציה של מרחק כוכב הלכת מהשמש. מכאן סביר להניח כי השמש היא מקור הכוח הפועל על כוכבי הלכת. כוח זה מכונה **כוח כבידה** (Gravitation, גרביטציה).

מהי משמעות הגורם $4\pi^2/k$ המופיע בביטוי לכוח (ביטוי (ד) לעיל)?

אם השמש היא מקור הכוח, הרי הגורם $4\pi^2/k$ צריך לייצג את עצמתה של השמש כמקור כוח המשיכה; אִילו השמש היתה מוחלפת בגרם שמיים אחר, דמוי הירח למשל, הכוחות שהיו פועלים על כוכבי הלכת היו ככל הנראה שונים.

כדי לבחון איזו מבין תכונות השמש מיוצגת על-ידי הגורם $4\pi^2/k$, נסתכל על מערכת הכוללת את השמש וכוכב לכת: השמש מושכת את כוכב הלכת, ומצד שני, בתוקף החוק השלישי של ניוטון, גם כוכב הלכת מושך את השמש. כוח הכבידה פרופורציוני למסת הגוף **עליו הכוח פועל**, לכן הוא חייב להיות פרופורציוני למסת השמש. הגורם $4\pi^2/k$ כולל, אם כן, את מסת השמש.

נרשום:

$$\frac{4\pi^2}{k} = GM_S$$

כאשר: M_S - מסת השמש (נשתמש בסימון זה במהלך הפרק);

G - קבוע הכבידה.

כוח הכבידה שמפעילה השמש יירשם עתה כך:

$$\boxed{F = G\frac{M_S m}{r^2}} \qquad (2)$$

מסת השמש ומסת כוכב לכת מופיעים בתבנית הכוח באופן סימטרי, כמתחייב מהחוק השלישי של ניוטון.

על-פי נוסחה (2), יחידתו של G ב- SI היא $\frac{N \cdot m^2}{kg^2}$.

ב. כוח הכבידה שמפעילה הארץ

הארץ מפעילה כוח משיכה על גופים. האם גם כוח זה נמצא ביחס הפוך לריבוע המרחק?

נבחן אם התבנית המתמטית של הכוח שהארץ מפעילה היא:

$$\boxed{F = G\frac{M_E m}{r^2}} \qquad (3)$$

כאשר: F - גודל הכוח שהארץ מפעילה;

M_E - מסת הארץ (נשתמש בסימון זה במהלך הפרק);

m - מסת הגוף שעליו מופעל הכוח;

r - מרחק הגוף ממרכז הארץ.

נניח שגוף שמסתו m נופל חופשית לארץ. נסמן את גודל תאוצת הגוף בהיותו במרחק r ממרכז הארץ ב-g^* (בקרבת הארץ $g^* = g$). נפתח ביטוי מתמטי ל-g^*:

על פי החוק השני של ניוטון:

$$F = mg^* \qquad (א)$$

מ-(3) ו-(א) נקבל:

$$mg^* = \frac{GM_E m}{r^2} \qquad (ב)$$

לאחר חילוק ב-m:

$$\boxed{g^* = \frac{GM_E}{r^2}} \qquad (4)$$

אם גודל הכוח שהארץ מפעילה מתנהג אכן לפי אותה תבנית מתמטית, אזי גודל התאוצה של גוף הנופל חופשית פרופורציוני הפוך לריבוע מרחק הגוף ממרכז הארץ.

המרחק של הירח ממרכז הארץ גדול פי 60 בערך ממרחקו של גוף הנמצא על פני הארץ ממרכז הארץ. אם כוח הכבידה שהארץ מפעילה אכן פרופורציוני הפוך לריבוע המרחק ממרכז הארץ, אזי תאוצת הירח צריכה להיות קטנה פי 60^2 בערך מתאוצת גוף הנופל חופשית על פני הארץ. זה צריך להיות יחס גדלי התאוצות אם נוסחה (3) אכן תקפה. מצד שני, התאוצות של הירח ושל עצם על פני הארץ ידועות (ראה סעיף 3.2), והיחס ביניהן:

$$\frac{g}{g_{\text{של הירח}}} = \frac{9.8}{2.7 \cdot 10^{-3}} \approx 3600 = 60^2$$

יחס גדלי התאוצות אכן שווה ליחס המחושב, הנסמך על ההנחה שנוסחה (3) תקפה. השמש והארץ מפעילות על גופים כוחות כבידה, הניתנים לתיאור באמצעות **אותה תבנית מתמטית**.

ג. חוק הכבידה העולמי

ניוטון צעד צעד נוסף, והעלה השערה מרחיקת לכת, כי קיימת משיכה כבידתית **בין כל שני חלקיקי חומר ביקום**.

חוק הכבידה העולמי

כל שני חלקיקי חומר מפעילים זה על זה כוחות משיכה של כבידה. גודל הכוח שחלקיק נקודתי אחד מפעיל על חלקיק נקודתי אחר (איור 10) פרופורציוני למסות החלקיקים, ופרופורציוני הפוך לריבוע המרחק ביניהם.

בלשוןמתמטית:

$$\boxed{F = \frac{Gm_1 m_2}{r^2}} \qquad (5)$$

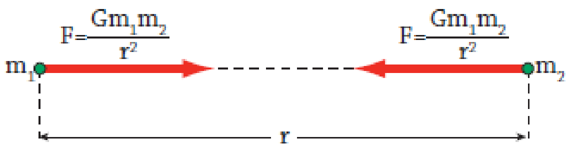
כאשר: F - גודל כוח הכבידה שחלקיק אחד מפעיל על משנהו;

G - קבוע הכבידה העולמי (עולמי - כי ערכו אינו תלוי בגופים שבאינטראקציה);

m_1 - מסתו של חלקיק חומר אחד;

m_2 - מסתו של חלקיק החומר האחר;

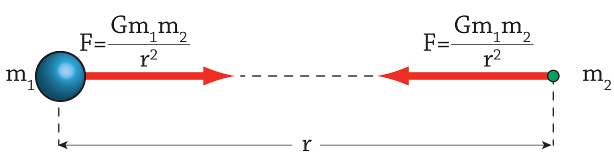
r - המרחק בין שני חלקיקי החומר.



איור 10: משיכה כבידתית בין שני חלקיקי חומר

משיכה כבידתית בין כדור אחיד לחלקיק נקודתי

אם מדובר בכוחות משיכה בין גוף כדורי אחיד לחלקיק נקודתי, או בין קליפה כדורית אחידה לחלקיק נקודתי, אפשר להוכיח באמצעות חישוב אינטגרלים, כי כוחות הכבידה ניתנים לחישוב כאשר מתייחסים אל הכדור (או אל הקליפה הכדורית) כאל גוף נקודתי שכל מסתו מרוכזת במרכזו. כלומר מציבים בנוסחה (5) את מסות הכדור והחלקיק הנקודתי, ואת המרחק בין מרכז הכדור לחלקיק הנקודתי (איור 11). כדי לחשב למשל את כוח הכבידה שהארץ מפעילה על תפוח, מציבים את מסות הארץ והתפוח, ואת המרחק בין מרכזיהם.

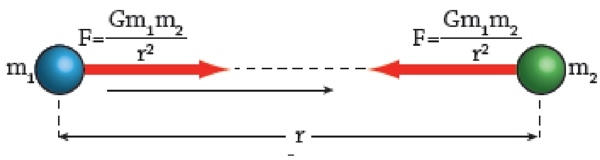


איור 11: משיכה כבידתית בין כדור אחיד לבין חלקיק נקודתי

משיכה כבידתית בין שני כדורים אחידים

כאשר מדובר בכוחות משיכה בין שני גופים **כדוריים אחידים** (או קליפות כדוריות אחידות), אפשר להוכיח, שוב באמצעות אינטגרלים, כי **מותר לחשב את כוח המשיכה כאשר מתייחסים לכל כדור** (או קליפה כדורית) **כאל גוף**

נקודתי, שמסתו מרוכזת במרכז הכדור (או הקליפה הכדורית). כלומר מציבים בנוסחה (5) את מסות הכדורים, ואת המרחק בין שני מרכזי הכדורים (איור 12). כדי לחשב למשל את כוח הכבידה שהארץ מפעילה על הירח, מציבים את מסות הארץ והירח, ואת המרחק בין מרכזיהם.

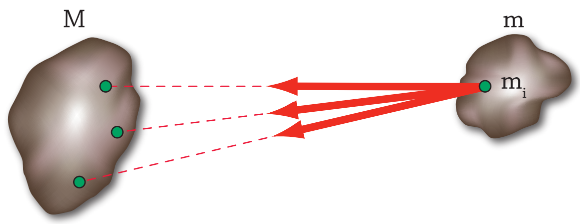


איור 12: משיכה כבידתית בין שני כדורים אחידים

משיכה כבידתית בין שני גופים בעלי צורה כלשהי

כאשר עוסקים בשני גופים שלא ניתן להתייחס אליהם כאל חלקיקי חומר נקודתיים ולא כאל גופים כדוריים אחידים, חישוב הכוח שגוף אחד מפעיל על משנהו נעשׂה מורכב מבחינה מתמטית. ברמה העקרונית, מחשבים את הכוח כך:

נניח כי גוף בעל מסה M מושך גוף שני שמסתו m (איור 13).



איור 13: משיכה כבידתית בין שני גופים בעלי צורה כלשהי

מחלקים כל אחד משני הגופים להרבה מאוד חלקיקי חומר קטנים מאוד. בוחרים בגוף השני חלקיק כלשהו שמסתו תסומן ב- m_i, ומחשבים על-פי נוסחה (5) את הכוח שמפעיל עליו כל אחד מחלקיקיו של הגוף הראשון. לאחר שמסכמים (באופן וקטורי) את כל הכוחות האלה, מקבלים את הכוח בו הגוף הראשון בכללותו מושך את החלקיק m_i. ברמה המעשית החישוב נעשׂה באמצעות האינטגרל, כי כאשר המסות של חלקיקי הגוף הראשון שואפות לאפס ומספרן שואף לאינסוף, הסכום של אינסוף הכוחות הופך לאינטגרל. חוזרים על התהליך לגבי **כל** חלקיקי הגוף השני, ומסכמים את הכוחות הפועלים על חלקיקיו השונים (שוב באמצעות אינטגרל). התוצאה המתקבלת מבטאת את הכוח שבו הגוף שמסתו M מושך את הגוף שמסתו m.

3.5 קבוע הכבידה, G

כדי לקבוע את ערכו של G יש למדוד את כוח הכבידה הפועל בין שני גופים שמסותיהם ידועות. אם אחד הגופים הוא גרם שמיים - כוח הכבידה מספיק גדול כדי שאפשר יהיה למדוד אותו, אולם מסת גרם שמיים אינה ניתנת לקביעה ללא ידיעת ערכו של G. מצד שני, אם שני הגופים בעלי ממדים מעבדתיים, אין קושי למדוד את המסות, אך כוח הכבידה קטן, ומדידתו היא משימה קשה.

א. ניסוי קבנדיש

הראשון שערך מדידה עדינה כזו היה הפיזיקאי האנגלי **הנרי קבנדיש** (1731 - 1810, Henry Cavendish) בניסוי גאוני בשנת 1798.

קָבֶנְדִיש השתמש בטכניקה של מאזני פיתול שהתפתחה במחצית השנייה של המאה ה-18: הוא הצמיד שני כדורי עופרת בעלי קוטר של 5 ס"מ כל אחד לשני קצותיו של מוט אופקי קל (ראה קטע מקווקו באיור 14א) שאורכו 2 מטרים. את המוט תלה במרכזו על סיב דק. לאחר מכן הציב בקרבת כל אחד משני הכדורים כדור עופרת שקוטרו 30 ס"מ. (עופרת מתאימה לניסוי זה בזכות שתי תכונות: צפיפותה גדולה, והיא אינה משתתפת באינטראקציה מגנטית). כתוצאה מכוח המשיכה הכבידתי שכדור גדול הפעיל על כדור קטן - כל אחד משני הכדורים הקטנים התקרב מעט אל כדור גדול. יחד עם התקרבותם הסתובב מעט המוט האופקי, ופיתל את הסיב.

כאשר מפתלים סיב (או חבל) - מפעיל הסיב כוח על הגוף המפתל אותו, בדומה לכוח המתיחות שהוא מפעיל כאשר מותחים אותו.

הסיב המפותל הפעיל כוח (באמצעות המוט) על כל אחד משני הכדורים הקטנים. כוח זה היה מנוגד לכוח המשיכה הכבידתי שהופעל על כדור על ידי כדור גדול שבקרבתו (איור 14ב). ככל שזווית הפיתול של הסיב גדלה - גדל גם הכוח המחזיר שפעל על כדור קטן. בסופו של דבר הכדורים הקטנים התייצבו במצב שבו גודל הכוח המחזיר שהופעל כתוצאה מפיתול הסיב השתווה לגודל כוח המשיכה הכבידתי שהופעל על-ידי כדור גדול.

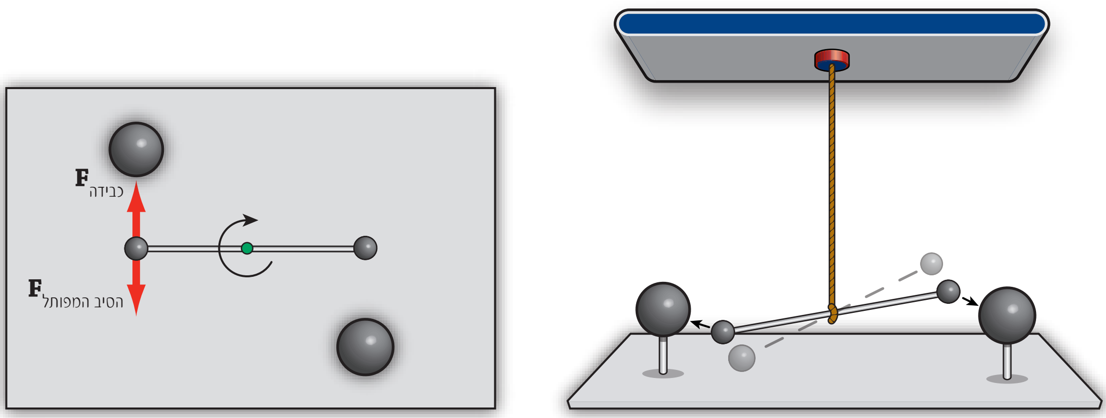
קבנדיש אשר חקר לפני כן את תכונות הסיב, יכול היה לקבוע את גודל הכוח שפעל על כדור קטן בהשפעת הסיב המפותל, וזאת על-פי זווית הפיתול של הסיב שאותה הוא מדד. כוח זה היה שווה בגודלו לכוח הכבידה שהפעיל כל כדור גדול על הכדור הקטן הקרוב אליו.

ממדידת כוח הכבידה, מסות הכדורים והמרחק בין מרכזיהם, קבנדיש חישב את קבוע הכבידה העולמי G. סטיית תוצאת המדידה שלו, מערכו של G הידוע כיום, אינה עולה על 1%!

ערכו של G הידוע כיום הוא: $G = 6.67259(85) \cdot 10^{-11}\, Nm^2/(kg)^2 \approx 6.67 \cdot 10^{-11}\, Nm^2/(kg)^2$

המספר 85 הרשום בסוגריים הוא מידת אי-הוודאות בערכו המדוד של G.

זהו אחד הקבועים החשובים בפיזיקה.



א. מבט מהצד ב. מבט מלמעלה

איור 14: תיאור סכמטי של המערכת הניסויית של קבנדיש

לאחר מותו הוריש קבנדיש את רכושו הרב לקרובי משפחתו, אשר התרימו תרומה להקמת "מעבדת קבנדיש" באוניברסיטת קמבריג'. במעבדה זו נערכו תגליות מפתח בתחום מהות החומר כגון: גילוי האלקטרון ב-1897, גילוי חלקיקי α ו-β^- מהתפרקות רדיואקטיבית ב-1898, וגילוי הנויטרון ב-1932. כמו כן, נערך בשנת 1953 מחקר אודות מבנה ה-DNA.

גרסאות משופרות של המערכת הניסויית של קבנדיש משמשות כיום במעבדות הוראה, ובמעבדות מחקר לשם שיפור הדיוק במדידת G. הציוד המודרני כולל בדרך כלל אלומת לייזר המוחזרת ממראה הקשורה לסיב. בשעה שהסיב מתפתל - האלומה המוחזרת סוטה מכיוונה המקורי, ועל-פי מידת סטייתה קובעים בדיוק רב את זווית הפיתול של הסיב.

ב. חישוב מסת הארץ

קבנדיש חישב את מסת הארץ בעזרת הערך של G שהוא מדד, ופירסם את התוצאות במאמר בשם **"על שקילת הארץ"**.

נציב בנוסחה (4) $r = R_E$ (R_E - רדיוס הארץ) ונקבל:

$$g = \frac{GM_E}{R_E^2} \qquad (6)$$

נציב בנוסחה (6) את הערכים:

$$g = 9.81\ \mathrm{m/s^2} \quad ; \quad R_E = 6.371 \cdot 10^6\ \mathrm{m} \quad ; \quad G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/(kg)^2}$$

ונקבל כי מסת הארץ:

$$M_E = 5.97 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$$

את ערכי R_E ו-g רשמנו בחישוב זה ברמת דיוק גבוהה מאשר בחישובים אחרים.

ג. חישוב צפיפותה הממוצעת של הארץ

$$\bar{\rho}_E = \frac{M_E}{V_E} = \frac{M_E}{\frac{4}{3}\pi R_E^3} = \frac{5.97 \cdot 10^{24}}{\frac{4}{3}\pi\left(6.37 \cdot 10^6\right)^3} \approx 5{,}500\ \mathrm{kg/m^3}$$

$$\bar{\rho}_E = 5.5\ \mathrm{g/cm^3}$$

על-פי ערך זה, ועל-פי הערך המתקבל מהערכת הצפיפות הממוצעת של החומרים המהווים את קליפת כדור-הארץ (החומרים השכיחים על פני הארץ הם מים שצפיפותם כ-1 גרם\סמ"ק, אדמה וסלעים שצפיפותם 2 - 4 גרם\סמ"ק), מסיקים שהצפיפות הממוצעת של החומרים המצויים בליבת כדור הארץ היא 10 גרם\סמ"ק בערך. צפיפות זו מתאימה לחומרים כמו ברזל. למסקנה זו יש אישור עקיף ממדידות סייסמיות.

ד. כוחות הכבידה הפועלים בין שני גופים בעלי ממדים "רגילים"

נניח ששני כדורים בני מסה של 1 ק"ג כל אחד, ניצבים במרחק 10 ס"מ זה מזה. נציב בחוק הכבידה העולמי את הערכים האלה ואת הערך של הקבוע G. נקבל, כי כוח המשיכה בין שני הכדורים הוא מסדר גודל של 10^{-8} ניוטון! זהו כוח קטן מאוד. ערך מספרי זה מבהיר מדוע איננו חשים בכוחות משיכה כבידתיים הפועלים בין עצמים "רגילים".

ה. חשיבות הניסוי של קבנדיש

חוק הכבידה הוא גולת הכותרת של עבודתו של ניוטון. ניוטון ידע להעריך את סדר הגודל של G, אולם ערך מדויק לא היה ידוע לו. 132 שנה לאחר שהוא ניסח את חוק הכבידה, קבנדיש הוכיח באופן ניסויי מרשים כי **יש משיכה כבידתית בין גופים רגילים, והוא אף מדד את קבוע הכבידה**. תוצאות הניסוי איפשרו לחשב את מסת הארץ ואת מסותיהם של גרמי שמיים אחרים שיש להם לוויָן, כפי שיפורט בסעיף 4.

ו. דוגמאות לשימוש בחוק הכבידה

נעזר בנתונים הרשומים בטבלאות 1 ו- 2 כדי לפתור את הדוגמאות שלהלן.

דוגמה 2: כוחות הפועלים על הירח

א. חשבו את גודלי כוחות הכבידה המופעלים על הירח על ידי השמש ועל ידי הארץ (הניחו כי המרחק הממוצע של הירח מהשמש שווה למרחק הממוצע של הארץ מהשמש).

ב. איזה מבין שני הכוחות גדול יותר? פי כמה?

פתרון:

א. גודל הכוח שהשמש (S) מפעילה על הירח (M):

$$F_{S\rightarrow M} = \frac{GM_S M_M}{r^2_{M,S}}$$

($R_{M,S}$ - מרחק ממוצע של הירח מהשמש.)

נציב ערכים:

$$F_{S\rightarrow M} = \frac{6.67\cdot 10^{-11}\cdot 2\cdot 10^{30}\cdot 7.3\cdot 10^{22}}{(1.5\cdot 10^{11})^2} \approx 4\cdot 10^{20}\,\text{N}$$

גודל הכוח שהארץ (E) מפעילה על הירח (M):

$$F_{E\rightarrow M} = \frac{GM_E M_M}{r^2_{M,E}}$$

($R_{M,E}$ - מרחק ממוצע של הירח מהארץ.)

$$F_{E\rightarrow M} = \frac{6.67\cdot 10^{-11}\cdot 5.97\cdot 10^{24}\cdot 7.3\cdot 10^{22}}{(3.84\cdot 10^{8})^2} \approx 2\cdot 10^{20}\,\text{N}$$

ב. השמש מפעילה על הירח כוח כפול בקירוב מהכוח שמפעילה עליו הארץ.

דוגמה 3: תאוצת הנפילה החופשית על פני הירח

חשבו את תאוצת הנפילה החופשית על פני הירח. פי כמה היא קטנה מתאוצת הנפילה החופשית על פני הארץ?

פתרון:

אפשר להראות (בדומה לפיתוח נוסחה (6)) כי גודל תאוצת הנפילה החופשית על פני הירח (נסמן ב-$g_{\text{על פני הירח}}$) מבוטא באמצעות:

$$g_{\text{על פני הירח}} = \frac{GM_M}{R^2_M}$$

נציב את נתוני הירח:

$$g_{\text{על פני הירח}} = \frac{6.67\cdot 10^{-11}\cdot 7.3\cdot 10^{22}}{(1.74\cdot 10^{6})^2}$$

לאחר חישוב נקבל:

$$g_{\text{על פני הירח}} = 1.61\ \text{m/s}^2 \approx \frac{9.8\ \text{m/s}^2}{6} = \frac{1}{6}g$$

תאוצת הנפילה החופשית על פני הירח שווה בקירוב לשישית מערך התאוצה על פני הארץ.

3.6 גילוי כוכב הלכת נפטון

עד המחצית השנייה של המאה השמונה-עשׂרה היו ידועים שישה כוכבי לכת בלבד. האסטרוֹנוֹם האנגלי ויליאם הרשל (W. Hershell, 1738 - 1822) גילה באמצעות טלסקופ בשנת 1781 כוכב לכת שביעי, ומדד את מסלולו. כוכב לכת זה נקרא **אוּרוֹן** (**אורנוס** - Uranus) (ראה טבלה 1). מסלולו של אורנוס חושב תאורטית על-פי הכוחות שמפעילים עליו השמש וכוכבי הלכת האחרים שהיו ידועים באותה תקופה. אולם, למרבה ההפתעה, המסלול המחושב לא התלכד עם המסלול הנצפה! האסטרוֹנוֹם האנגלי ג'ון אדמס (J. Adams, 1819 - 1892) והאסטרונום הצרפתי אוּרְבַּן לֶבֶרְיֶה (U. Leverrier, 1811 - 1877) הגיעו שניהם, באופן בלתי תלוי זה בזה, למסקנה כי קיים כוכב לכת נוסף, רחוק יותר מהשמש, אשר מפעיל כוח כבידה על אורנוס, ומשפיע על מסלולו. כל אחד מהם חישב את מסלולו של כוכב לכת זה.

לֶבֶרְיֶה שלח את התוצאות לאסטרוֹנוֹם הגרמני יוהן גָלֶה - (Galle, 1812 - 1910). גָלֶה אכן גילה בשנת 1846 כוכב לכת חדש, בסטייה של מעלה אחת בלבד מהכיוון שלֶבֶרְיֶה חישב עבור מקום כוכב הלכת כפי שיהיה בתאריך התצפית והגילוי! כוכב לכת זה מכונה **רַהַב** (**נפטון** - Neptun) (ראה טבלה 1). גילוי נפטון בעזרת חישובים הנסמכים על חוק הכבידה היה הישׂג מרשים נוסף לתורת ניוטוֹן.

בשנת 1930, בעקבות סטיות של המסלולים הנצפים לעומת המחושבים של אורנוס ונפטון, והחיפוש אחר גרם השמיים ה"אחראי" להן, נתגלה כוכב לכת תשיעי של מערכת השמש, המכונה **פלוטו** (Pluto) (ראה טבלה 1) (בשנת 2007 הוצא פלוטו מרשימת כוכבי הלכת). תחילה חשבו שפלוטוֹ הוא הגורם לסטיות המסלולים של אורנוס ונפטון, וכי הבעיה נפתרה. אולם, התברר כי המסה של פלוטוֹ קטנה מכדי שניתן יהיה לייחס לו את ההפרעות (מסתו של פלוטוֹ קטנה אף ממסת הירח של הארץ).

יש סברה, כי בשולי מערכת השמש נע כוכב לכת נוסף, שטרם נתגלה. כדי לבחון השערה זו הוחלט לעקוב אחר מסלוליהן של שתי החלליות פיוניר 10 ו-11, בשעה ששתיהן נעו אל מחוץ למערכת השמש בכיוונים כמעט מנוגדים. ההנחה היתה כי כוכב לכת שהשפעתו לא נילקחה בחשבון בחישוב מסלולי החלליות תגרום לסטיית החלליות ממסלוליהן. המעקב נמשך כחמש שנים, אך לא התגלו כל סטיות במסלולי החלליות.

יש חוקרים הסבורים כי כוכב הלכת המסתורי משפיע על כוכבי הלכת האחרים רק לעתים רחוקות, כיוןַ שלמישור מסלולו זווית של 30° לפחות עם מישור מסלוליהם המשותף של כוכבי הלכת האחרים, או בגלל שמסלולו אליפטי מאוד, כך שזמן ההקפה שלו ארוך (בין 700 - 1000 שנה).

3.7 השמיים כ"מעבדה" נטולת חיכוך

רק במאה ה-17 הבינו שאם הכוח השקול הפועל על גוף שווה לאפס אז מהירותו אינה משתנה. קשר זה מנוסח בחוק הראשון של ניוטון. תפיסתו של אריסטו הייתה שונה לחלוטין: היא אמרה כי גוף שלא פועלים עליו כוחות יבוא לידי מנוחה. תפיסתו של אריסטו שרדה כ-2,000 שנה.

חוק הכבידה העולמי, שהוא הרבה יותר מורכב- התגלה גם הוא במאה ה-17.

מדוע החוק הראשון של ניוטון, שהוא הרבה יותר פשוט מחוק הכבידה, לא נתגלה **זמן רב לפני** חוק הכבידה?

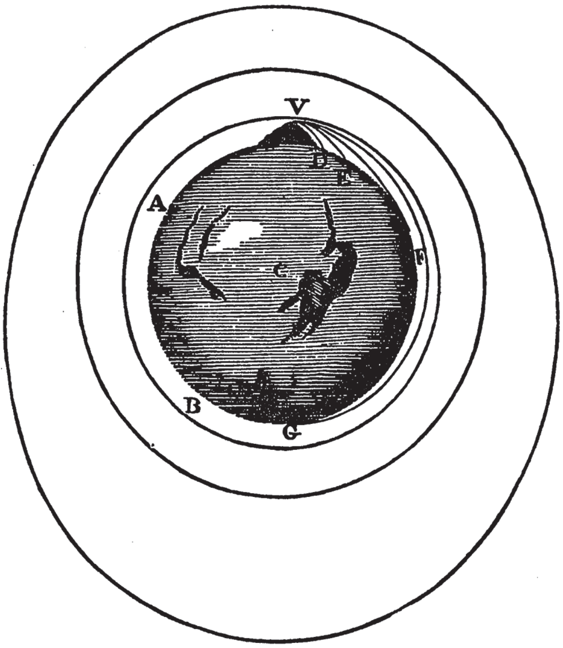
התשובה לכך פשוטה ועמוקה: השמיים מהווים **"מעבדה" נטולת חיכוך**, דבר המקל על מציאת חוקיות. בתרחישים שנצפו על פני האדמה **תמיד פעל חיכוך**, אשר הכביד על חשיפת חוקי המכניקה.

4. תנועת לוויינים במסלולים מעגליים

4.1 תנועת לוויין - ניתוח איכותי

כ- 300 שנה לפני שיגור החללית הראשונה למסלול סביב הארץ, ניוטוֹן הגה ניסוי מחשבתי של שיגור עצם במסלול מעגלי סביב הארץ.

הניסוי המחשבתי: נניח כי מראש הר גבוה משגרים עצם בכיוון אופקי כמה פעמים, כך שבכל פעם מהירות השיגור גדולה מקודמתה (איור 15). כאשר העצם משוחרר ממנוחה - הוא נופל אנכית, כמו תפוח הנושר מעץ. כאשר מעניקים לו מהירות התחלתית אופקית קטנה - כוח הכבידה מטֶה את כיוון תנועתו מהכיוון האופקי, והוא נע לאורך מסלול פרבולי ופוגע בארץ (פרבולה - בקירוב שבו g קבוע בגודלו ובכיוונו; אליפסה - במקרה הכללי). ככל שמגדילים את המהירות ההתחלתית - העצם נע למרחק רב יותר לפני פגיעתו בכדור הארץ. במהירות שיגור מסוימת שיעור סטיית העצם מתנועה לאורך קו ישר יהיה שווה לעקמומיות פני הארץ. במצב זה העצם ינוע **במסלול מעגלי**, יחזור כעבור זמן מה למקומו ההתחלתי, וימשיך לנוע במסלול זה. כך הירח נע במשך שנים רבות סביב הארץ.

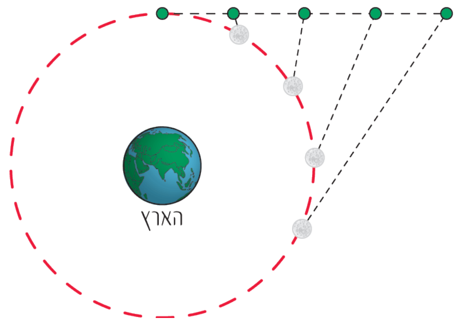


איור 15: ניסוי מחשבתי שניוטון ערך –שיגור עצם במסלול סביב הארץ

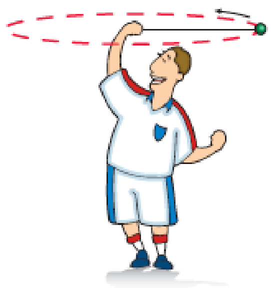
מדוע הירח אינו נופל אל כדור הארץ?

הירח דווקא נופל בכל רגע לעבר הארץ, אך אל חשש! הוא אמנם **נופל** לעבר הארץ, אך **אינו מתקרב** אליה. הירח נופל לעבר הארץ במובן שהוא סוטה מתנועה לאורך קו ישר, וכיוון הסטייה (כיוון השינוי בווקטור המהירות) הוא לעבר מרכז הארץ. בהשפעת כוח הכבידה הירח מתקרב לכדור הארץ ביחס למרחק שהיה לוֹ אילו היה נע לאורך קו ישר (איור 16). הירח מתנהג בדיוק על-פי החוק השני של ניוטוֹן. נזכור שהחוק השני עוסק **בתאוצה**, כלומר **בשינוי גודל וכיוון המהירות**. זה ההבדל בין נקודת הראות של ניוטוֹן ונקודת הראות של אריסטוֹ. השאלה "מדוע הירח אינו מתקרב לארץ?" שייכת לעולם המושׂגים האריסטוטלי. מנקודת ראות ניוטוֹנית השאלה היא "מדוע הירח אינו נע לאורך קו ישר?"; והתשובה

פשוטה: כי פועל עליו כוח שכיוונו אינו בכיוון המהירות. פעולת כוח הכבידה דומה לפעולת כוח המתיחות בחוט שגורם לכדור המתואר באיור 17 לנוע בתנועה מעגלית.



איור 16: נפילת הירח אל הארץ



איור 17: כוח מתיחות בחוט גורם לכדור לנוע במסלול מעגלי

4.2 תנועת לוויין לאורך מסלול מעגלי - ניתוח כמותי

כאשר גוף נע לאורך מסלול סגור בהשפעת כוח כבידה שמפעיל עליו גוף שני, מכנים את הגוף הראשון בשם **לוויין** של השני (כי הוא "מלווה" אותו).

נדון במצב הבא:

לוויָן שמסתו m נע בהשפעת כוח הכבידה שמפעיל עליו גרם שמיים שמסתו M.

אם מסת הלוויָן, m, היא מסדר גודל של M, מתקבלת תנועה מורכבת של **שני** הגופים, וכל אחד מהם הוא לוויָן של משנהו. במסגרת ספר זה, כדי להימנע מהטיפול המורכב הנדרש במצבים כאלה, נניח כי $M >> m$, כלומר מסת הלוויָן קטנה מאוד ממסת גרם השמיים שסביבו הוא נע.

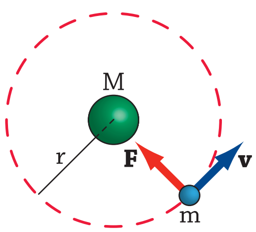
דוגמאות ללוויינים הנעים סביב גוף מסיבי:

א. הארץ היא לוויָן (טבעי) של השמש. הכוחות שהשמש והארץ מפעילים האחד על השני אמנם שווים בגודלם, אולם מסת השמש גדולה מאוד ביחס למסת ארץ, ותאוצתה כתוצאה מהכוח שמפעילה עליה הארץ קטנה מאוד.

ב. לוויָן מלאכותי הסובב את הארץ אינו משפיע על תנועת הארץ.

מסלול תנועתו של לוויָן סביב גרם שמיים מסיבי הוא אליפסה. כדי לפשט עוד יותר את הטיפול המתמטי בתנועת לוויָנים נניח הנחה שנייה: מסלול התנועה הוא אליפסה מיוחדת - מעגל.

נסמן את רדיוס המעגל ב- r, ואת גודל מהירות הלוויין ב- v (איור 18).



איור 18: לוויין במסלול מעגלי.

החוק השני של ניוטון קובע שעל הלוויָן פועל כוח שקול, אשר גודלו מקיים:

$$F = ma = m\frac{v^2}{r} \qquad (א)$$

(לגוף הנע בתנועה מעגלית קצובה יש תאוצה רדיאלית שגודלה v^2/r.)

הכוח הפועל על הלוויָן הוא כוח כבידה שגודלו:

$$F = \frac{GMm}{r^2} \qquad (ב)$$

מ-(א) ו-(ב) נקבל:

$$\boxed{\frac{GMm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}} \qquad (ד)$$

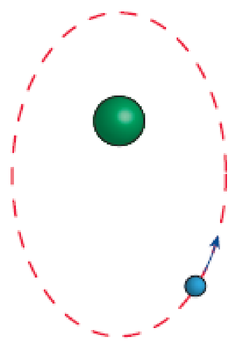
לכן מהירות הלוויָן:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \qquad (ג)$$

מ-(ג) אפשר לראות כי לכל מרחק r יש מהירות אופיינית אשר אינה תלויה במסת הלוויָן; ככל שרדיוס המסלול המעגלי גדול יותר - מהירות הלוויָן קטנה יותר. תנועת לוויין מתנהלת במישור אחד, כי השינויים במהירות מתרחשים במישור הנקבע על ידי וקטורי המהירות והכוח.

4.3 תנועת לוויין לאורך מסלול אליפטי

אם מעניקים לגוף מהירות שגודלה אינו מקיים את נוסחה (ג) או שכיוונה אינו ניצב לקו המקשר את מרכזי שני הגופים - המסלול אינו מעגל; אם הלוויָן יהיה "קשור" לגרם השמימי מסלולו יהיה אליפסה (איור 19).



איור 19: תנועת לוויין במסלול אליפטי

נסכם:

כאשר נמצאים במרחק r מגרם שמיים שמסתו M, ורוצים להכניס גוף **למסלול מעגלי** סביב גרם השמיים, יש להקנות לו מהירות מתאימה: **גודלה:** $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ **וכיוונה:** ניצב לקו המקשר בין מרכזי שני הגופים.

אם מקנים לגוף מהירות אחרת - **מסלולו יהיה אליפטי**, או שהוא יימלט מגרם השמיים (התנאי למילוט יידון בסעיף 7.3 - "גודל מהירות המילוט").

דוגמה 4: חישוב גובה לוויין מעל פני הארץ על-פי משך ההקפה שלו

זמן המחזור של לוויָן המקיף את הארץ במסלול מעגלי הוא 1.5 שעות. חשב את גובה הלוויָן מעל פני הארץ.

פתרון:

לוויָן במסלול מעגלי מקיים: $\frac{GMm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$

נציב בנוסחה דלעיל: $v = \frac{2\pi r}{T}$

ונקבל לאחר כמה פעולות אלגבריות: $r = \sqrt[3]{\frac{GM_E T^2}{4\pi^2}}$

$$r = \sqrt[3]{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.97 \cdot 10^{24} (1.5 \cdot 60 \cdot 60)^2}{4\pi^2}} = 6.65 \cdot 10^6 \text{ m} = 6,650 \text{ km}$$

גובה הלוויָן מעל פני הארץ: $h = r - R_E = 6,650 - 6,370 = 280 \text{ km}$

הלוויָן חג בגובה 280 ק"מ מעל פני הארץ.

הערה: בדוגמה 2 ראינו כי השמש מפעילה על הירח כח כפול מהכוח שמפעילה עליו הארץ. תוצאה זו תקפה לכל לוויין של הארץ, כולל זה שבדוגמה 4 לעיל. **מדוע הכח שהשמש מפעילה על הלוויין לא נלקח בחשבון בפתרון דוגמה 4?** הדיון בשאלה זו יעשה בפרק ד בספר "מערכות ייחוס - מגלילאו גליליי ועד תאורית המפץ הגדול".

4.4 חישוב מסת גרם שמיים על-פי נתוני לוויין שלו

אם לכוכב (או לכוכב לכת) יש לוויָן (טבעי או מלאכותי) הנע סביבו במסלול מעגלי - אפשר לחשב את מסת הכוכב על סמך רדיוס סיבובו וזמן מחזורו של הלוויָן, וזאת על-פי נוסחה (8), המתקבלת מנוסחה (7):

$$\boxed{M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}} \qquad (8)$$

כך מחשבים את מסת השמש לפי תנועת כוכבי הלכת, ואת מסתו של כוכב לכת לפי תנועת ירח שלו (אם יש לו ירח).

פתרון:

א. הירח נע במסלול מעגלי בקירוב סביב הארץ, לכן: $$\frac{GM_E M_M}{r^2} = M_M \frac{v^2}{r}$$

נציב בנוסחה האחרונה: $$v = \frac{2\pi r}{T} \qquad \text{(א)}$$

ונקבל: $$M_E = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2 \cdot (3.84 \cdot 10^8)^3}{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot (27.3 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60)^2} \approx 6 \cdot 10^{24}\ \text{kg}$$

קודם לכן חישבנו את מסת הארץ על פי תאוצת הנפילה החופשית על פני הארץ (סעיף 3.5ב).

ב. זמן המחזור של הארץ סביב השמש הוא שנה (שימשית) אחת, שהיא 365.25 יום, ובשניות:
$$T = 365.25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 3.156 \cdot 10^7\ \text{s}$$

בהנחה שמסלול הארץ הוא מעגלי: $$\frac{GM_S M_E}{r^2} = M_E \frac{v^2}{r}$$

נציב בנוסחה האחרונה את ביטוי (א), לאחר פעולות אלגבריות ספורות נקבל:

$$M_S = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2 \cdot (1.5 \cdot 10^{11})^3}{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot (3.156 \cdot 10^7)^2}$$

$$M_S = 1.989 \cdot 10^{30}\ \text{kg} \approx 2 \cdot 10^{30}\ \text{kg}$$

ג. היחס בין מסת השמש לבין מסת הארץ: $$\frac{M_S}{M_E} = \frac{2 \cdot 10^{30}}{6 \cdot 10^{24}} \approx 3 \cdot 10^5$$

מסת השמש שווה למסתם של כ-300,000 "כדורי ארץ".

4.5 שיגור לוויינים

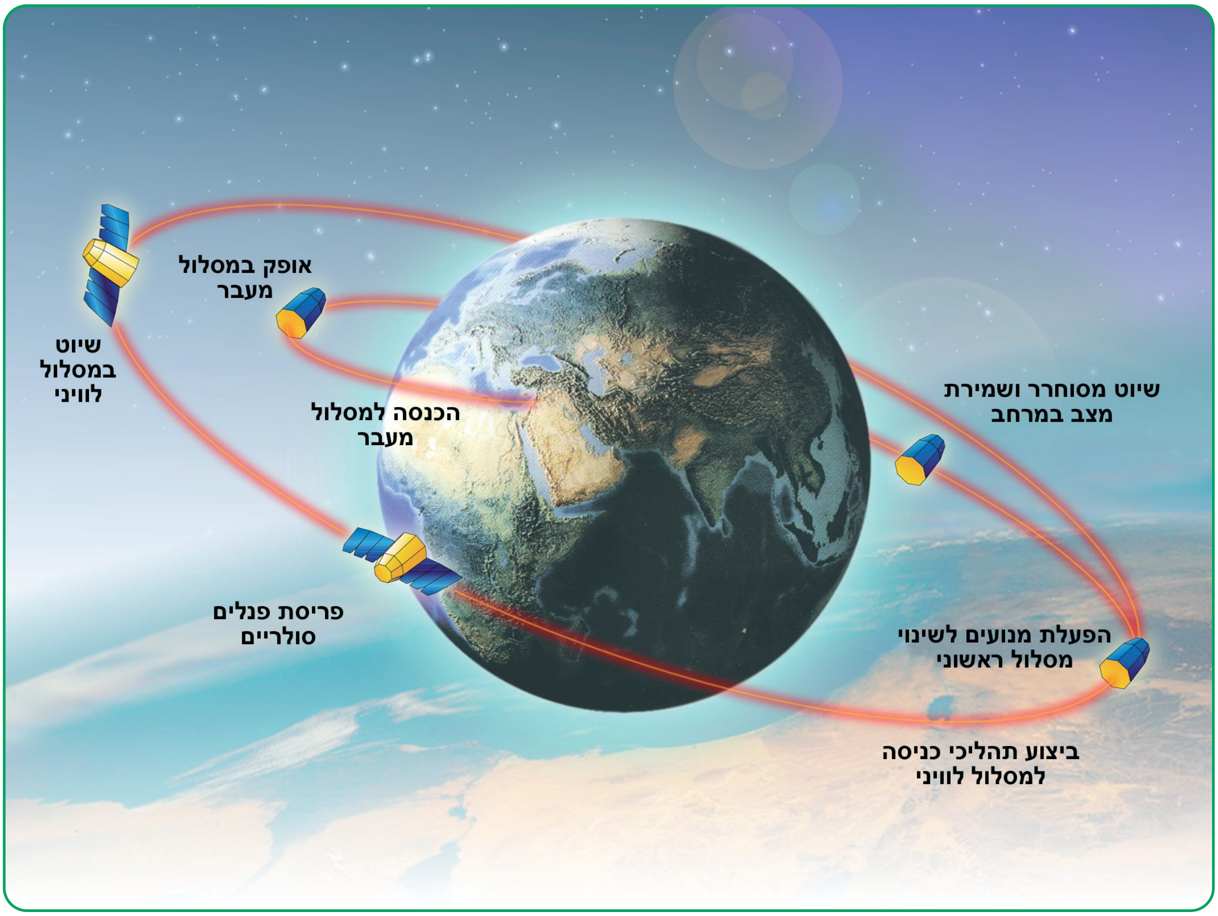
עד אמצע המאה העשרים לערך, היה לכדור הארץ לוויין יחיד – הירח, שהוא הלוויין הטבעי של הארץ. כיום סובבים את כדור-הארץ במסלולים שונים מאות ואלפי לוויינים מעשי יד אדם. הם מבצעים מגוון משימות: ריגול, מחקר ומסייעים לתקשורת רדיו, טלוויזיה וטלפונים ניידים.

כדי לשגר לוויין מפני כדור-הארץ חייבים לספק לו תחילה אנרגיה שתאפשר את הרחקתו מפני כדור-הארץ, ולאחר מכן, אנרגיה שתאפשר את הכנסתו למסלול הקפה מתוכנן. פעולות אלה נעשות בעזרת טיל הנושא את הלוויין. הכנסת הלוויין למסלול מעגלי סביב הארץ נעשית בדרך כלל בשלושה שלבים. בשלב ראשון הטיל מעלה את הלוויין למסלול ראשוני נמוך. לאחר מכן, מנוע מיוחד דוחף את הלוויין למסלול מעבר גבוה יותר; בשלב האחרון, מנוע ניווט מעלה אותו למסלול הסופי המתוכנן. פעולות אלה דורשות אנרגיה רבה, לכן יש לצייד את הלוויין בכמות דלק מתאימה. מסת הדלק באה לעיתים על חשבון הצטיידות הלוויין עצמו.

אפשרות לחסוך מעט דלק טמונה בעובדה שכדור-הארץ מסתובב על צירו. אפשר להיעזר בתנועה סיבובית זו בעת שיגור הלוויין על מנת שיקבל חלק מהאנרגיה הקינטית שלו מכדור-הארץ ולא רק מהמנוע של הטיל. מכאן ברור שכדאי לשגר לוויין לחלל בכיוון הסיבוב העצמי של כדור-הארץ, כלומר ממערב למזרח, מאתר על פני הארץ שמהירותו, בגלל

סיבוב הארץ על צירה, היא הגדולה ביותר. היות וכל נקודה על פני כדור-הארץ משלימה סיבוב אחד ביממה, מהירות התנועה היא גדולה יותר ככל שרדיוס הסיבוב גדול יותר, כלומר ככל שהמשגר ממוקם קרוב יותר לקו המשווה. לכן כל מדינה שמסוגלת לשגר לוויינים לחלל באופן עצמאי תשאף לעשות זאת מהאזור הקרוב ביותר לקו המשווה שעומד לרשותה. זאת הסיבה שאתר השיגור של סוכנות החלל האמריקנית - נאס"א (Nasa) נמצא בקייפ קנוורל (Cape Canaveral) שבפלורידה (דרום ארה"ב).

מכל המדינות בעלות יכולת שיגור לוויינים, ישראל היא היחידה שמשגרת **ממזרח למערב** (איור 20), **נגד כיוון סיבוב כדור-הארץ**. הסיבה לכך נעוצה באי רצונה של ישראל שהטיל יעבור מעל שטחה של מדינה שכנה. שיטה זו דורשת שכמות הדלק שבה יש לצייד את מנוע הטיל תהיה גדולה, והיא גורעת מהיכולת לשגר לוויינים שמסתם גדולה. אילו ישראל היתה משגרת מזרחה, היה אפשר כמעט להכפיל את משקלם של הלוויינים הישראלים, וזאת ללא שינויים במשגר.



איור 20: מסלול תנועתו של הלוויין אופק 9 שישראל שיגרה ב- 22.6.2010, וסדר פעולות תפעול הלוויין לאחר שחרור מהמשגר (באדיבות התעשיה האווירית)

5. תאוצת הנפילה החופשית

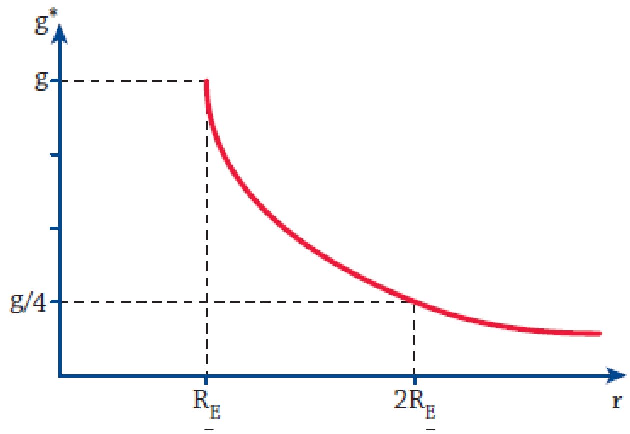
5.1 גודל תאוצת הנפילה החופשית כפונקציה של המרחק ממרכז הארץ

בסעיף 3.4 (נוסחה (4)) הראינו כי אפשר לבטא את גודל תאוצת הנפילה החופשית כך:

$$g^* = \frac{GM_E}{r^2}$$

על פני הארץ $(r = R_E)$ גודל התאוצה מסומן ב- g.

גודל תאוצת הנפילה החופשית של גוף נמצא ביחס הפוך לריבוע מרחקו ממרכז הארץ. באיור 21 מיוצג קשר זה על ידי גרף.



איור 21: גודל תאוצת הנפילה החופשית כפונקציה של המרחק ממרכז הארץ

בטבלה 4 רשומים ערכים של גודל תאוצת הנפילה החופשית בכמה מרחקים מפני הארץ.

גובה מעל פני הארץ h(km)	0	10	100	1,000	5,000	10,000	50,000	100,000	384,000(1)
גודל תאוצת הנפילה החופשית g^* (m/s^2)	9.81	9.78	9.51	7.33	3.08	1.49	$1.3 \cdot 10^{-1}$	$3.1 \cdot 10^{-2}$	$2.7 \cdot 10^{-3}$

(1) רדיוס מסלולו של הירח

טבלה 4: גודל תאוצת הנפילה החופשית (g^*) בגבהים שונים (h) מעל פני הארץ

5.2 שינויים בגודל תאוצת הנפילה החופשית על פני הארץ

מדידות המבוצעות במקומות שונים על פני הארץ מורות כי תאוצת הנפילה החופשית משתנה מעט ממקום למקום, גם אם כל המדידות נערכות בגובה פני הים. שלוש סיבות לשינויים בתאוצה על פני הארץ:

א. **הארץ אינה כדורית אלא פחוסה**: מרחק קו המשווה ממרכז הארץ גדול ממרחק הקטבים מהמרכז. זו תוצאה מסיבוב הארץ על צירה. באיור 22 סורטט כדור הארץ; כדי להדגיש את הפחיסות הוא סורטט עם סטייה רבה מצורת כדור. מתברר כי לפחיסות יש תרומה לשינויים בתאוצה, כך שבקו המשווה היא קטנה מזו שבקטבים.

איור 22: כדור הארץ פחוס בקטבים

ב. **צפיפות כדור הארץ אינה אחידה**: באזור אחד הצפיפות עשׂויה להיות גבוהה בגלל מרבצי ברזל המצויים בו. מעל אזורים אלה תאוצת הנפילה החופשית גדולה מעט מערכה הממוצע. באזור אחר הצפיפות עשׂויה להיות נמוכה בגלל מאגרי נפט הטמונים בקרקע.

ג. **הארץ סובבת על צירה**: לכן נקודות הנמצאות לאורך קווי רוחב שונים של כדור הארץ נעות במהירויות שונות. בקו המשווה המהירות היא מרבית, וככל שמתקדמים לעבר הקטבים המהירות הולכת וקטנה. בקטבים המהירות היא אפס. גוף המסתובב יחד עם הארץ, משוחרר ונופל - תאוצתו מושפעת מסיבוב הארץ.

5.3 חוסר משקל בתוך לווין

אסטרונאוטים בתוך לווין המקיף את הארץ במסלול מעגלי "מרחפים" בחלל הלווין (איור 23).

איור 23: אסטרונאוט מרחף בתוך לוויין

האם האסטרונאוטים "מרחפים" בגלל שלא פועל עליהם כוח כבידה שמקורו במסת הארץ?

האסטרונאוטים, יחד עם הלווין, נעים במסלול מעגלי סביב הארץ. אילו לא היה פועל עליהם כוח כבידה - הם היו נעים לאורך קו ישר, כמתחייב מהחוק הראשון של ניוטון. מכאן שפועל עליהם כוח כבידה. כוח זה אמנם חלש מאשר על פני הארץ, אולם הוא אינו בהכרח זניח. למשל: תאוצתו של לווין הנע בגובה של 100 ק"מ מעל פני הארץ שווה בקירוב ל-9.5 מ'\ש"^{2} (ראה טבלה 4), וכוח הכבידה נופל אך מעט מגודלו על פני הארץ.

אם פועל על האסטרונאוטים כוח כבידה שמקורו בארץ, מדוע הם אינם נצמדים ל"רצפת" הלוויין?

מצבו של אסטרונאוט בתוך לווין דומה לזה של אדם בתוך מעלית הנופלת נפילה חופשית (ראה דוגמה 4 בפרק ד): המעלית, והאדם שבתוכה, נופלים באותה תאוצה. לכן התאוצה היחסית ביניהם שווה לאפס. אם גם מהירויותיהם ההתחלתיות שוות - אין ביניהם תנועה יחסית, כלומר האדם "מרחף" בתוך המעלית.

גם החללית והאסטרונאוטים בתוכה "נופלים" באותה תאוצה, לכן התאוצה היחסית ביניהם שווה לאפס.

6. שׂדה כבידה שמקורו במסה

6.1 המושׂג "שׂדה כבידה שמקורו במסה"

אפשר לתאר את אינטראקציית הכבידה בשתי גישות:

א. בגישה הראשונה האינטראקציה בין שני גופים שאינם במגע היא **ישירה**. היא מופעלת באיזו שהיא דרך מרחוק, למרות שבין הגופים עשוי לשׂרור ריק. הארץ למשל, מפעילה כוח על הירח או על כדור טניס. תיאור כזה מכונה **פעולה מרחוק**. כיצד היא עוברת במרחב? ניוטון לא נתן תשובה פיזיקלית לשאלה זו, והוא שייך אותה לאלוהים.

ב. במאה התשע-עשרה הציע **פָּרָדֵיי** (Michael Faraday, 1791-1867), בלונדון, מודל שמאפשר להתגבר על הקושי להסבר "פעולה מרחוק": פרדיי עסק במטענים חשמליים ובכוחות חשמליים, אך אנו נדון במונחים המקבילים מתחום המכניקה - במסות ובכוחות כבידה. במודל של פרדיי, גוף (למשל הארץ) יוצר סביבו **שׂדה**, הממלא את המרחב. שׂדה זה הוא שמשפיע על גופים אחרים. כלומר נוקטים במהלך דו-שלבי: הגוף האחד יוצר במרחב שסביבו שדה כבידה. שדה הכבידה הוא זה שמפעיל כוח על הגוף האחר.

הגדרת המושג **"שדה כבידה"**:

בנקודה מסוימת במרחב, שׂדה הכבידה, $\mathbf{g}$, שמקורו בגרם שמיים, מוגדר ככוח הכבידה, $\mathbf{F}_g$, שגרם השמיים היה מפעיל על גוף בעל יחידת מסה אחת, אילו גוף כזה היה מוצב בנקודה הנדונה.

אם מציבים גוף שמסתו m, יש לחלק את הכוח ב-m.

בהצגה מתמטית:

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}_g}{m} \qquad (9)$$

הערות:

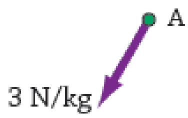
1. גודל שׂדה הכבידה בנקודה נמדד ביחידות SI בניוטון\ק"ג - N/kg.
2. שדה הכבידה, $\mathbf{g}$, הוא גודל וקטורי, כי כוח הכבידה $\mathbf{F}_g$, הוא וקטור.
3. השתמשנו במונח **"שדה כבידה שמקורו במסה"** כדי להבחין בינו לבין המונח **"שדה כבידה אקוויולנטי"** ולבין המונח **"שדה כבידה כולל"**. נושא חשוב ומעניין זה יידון בספר "מערכות ייחוס".
4. שדה הכבידה $\mathbf{g}$ הנוצר על ידי גרם שמיים בנקודה מסוימת, שווה לתאוצת הנפילה החופשית באותה נקודה ביחס לאותו גרם שמיים, כי שני גדלים אלה מוגדרים באמצעות אותה נוסחה (9).

כדי לזהות את קיומו של שדה כבידה, וכדי למדוד את עוצמתו, נשתמש בגוף בוחן שמסתו m התלוי על דינמומטר. נקח את הדינמומטר עם הגוף לנקודות שונות במרחב. בכל נקודה נציב את הדינמומטר במנוחה, ונמדוד את הכיוון שעליו מתייצב הדינמומטר ואת הגודל של הכוח $\mathbf{F}_g$ הפועל על הגוף (כלומר נשקול את הגוף).

אפשר למדוד את שדה הכבידה על ידי תליית גוף שמסתו 1 ק"ג, כמתואר באיור 24.

אחרי שפעם אחת חישבנו (או מדדנו) את שדה הכבידה בנקודה נוכל לחשב בעזרתו את הכוח שיפעל על כל גוף אחר שיוצב באותה נקודה. לדוגמה, אם גודלו של שדה הכבידה בנקודה הוא 5 ניוטון\ק"ג אזי על גוף בן 2 ק"ג - יפעל באותה נקודה כוח בן 10 ניוטון; על 3 ק"ג - יפעל כוח בן 15 ניוטון וכו'. באופן כזה נתאים לכל נקודה במרחב את הכוח שכדור הארץ יפעיל על גוף שמסתו 1 ק"ג שיוצב בה במנוחה. כל הכוחות האלה הם שדה הכבידה של כדור-הארץ.

א. מדידתו



ב. ייצוגו באמצעות וקטור

איור 24: שדה כבידה שמקורו במסה, בנקודה A

נכנה את הדינמומטר בשם **"מד-שׂדה-כבידה"**. נסרטט בספר זה וקטורים של עוצמת שדה כבידה בצבע **סגול**. שדה הכבידה הוא שדה **וקטורי** - לכל נקודה במרחב מיוחס **וקטור** שדה. קיימים גם **שדות סקלריים** כגון שדה טמפרטורה, בו מייחסים לכל נקודה **מספר** (לא וקטור) המייצג את הטמפרטורה באותה נקודה.

דוגמה 6: חישוב עוצמת שׂדה כבידה

א. חשבו את עוצמתו (גודלו) של שׂדה הכבידה של כדור הארץ בגובה 1,000 ק"מ מעל פני כדור הארץ.

ב. חשבו את גודל כוח הכבידה הפועל על גוף שמסתו 100 ק"ג ואשר נמצא בגובה 1,000 ק"מ מעל פני הארץ.

פתרון:

א. על-פי נוסחה (4), עוצמת שׂדה הכבידה של כדור הארץ:

$$g^* = \frac{GM_E}{r^2}$$

$$g = \frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.97 \cdot 10^{24}}{(6.37 \cdot 10^6 + 10^6)^2} \approx 7.3 \text{ N/kg}$$

השׂדה מכוון למרכז הארץ.

ב. על-פי נוסחה (9):

$$F_g = mg^* = 100 \cdot 7.3 = 730 \text{ N}$$

6.2 שׂדה הכבידה של כדור הארץ

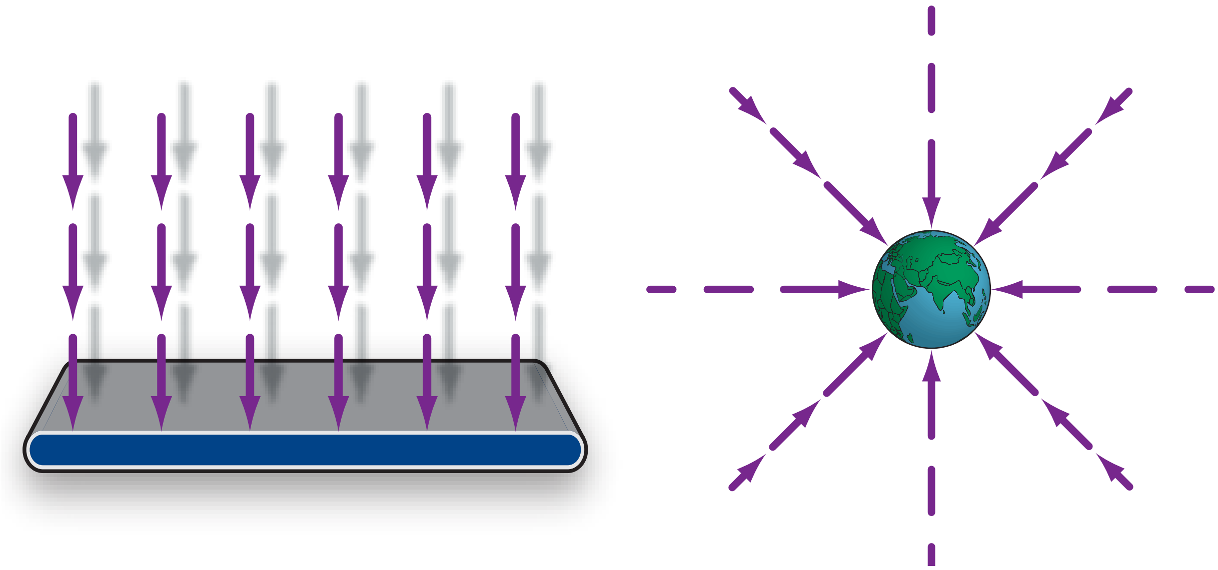
אם לגוף היוצר את השׂדה צורה כדורית, וצפיפותו אחידה, נוכל לפתח **ביטוי מפורש** לעוצמת שׂדה הכבידה שהגוף יוצר: גודל הכוח שהגוף הכדורי מפעיל על גוף נקודתי בעל מסה m ניתן על ידי הביטוי GMm/r^2. לכן, על-פי ההגדרה, עוצמת השׂדה במרחק r ממרכז הגוף היא:

$$\boxed{g = \frac{GM}{r^2}} \qquad (10)$$

כיוון השׂדה הוא לעבר מרכז הגוף (הכדורי) היוצר את השׂדה.

בקנה מידה גדול, עוצמת השׂדה שמקורו בכדור הארץ ניתנת על ידי נוסחה (10). וקטורי השׂדה שונים בגודלם ובכיוונם, אך כולם מכוונים לעבר מרכז הארץ (איור 25א). שׂדה זה מכונה **שׂדה כבידה רדיאלי**.

בתחום קטן של מרחב שדה הכבידה **g** קבוע בקירוב רב, כלומר בקירוב טוב **שׂדה הכבידה אחיד**: וקטורי השׂדה שווים בגודלם וזהים בכיוונם (איור 25ב).



א. בקנה מידה גדול שדה הכבידה הוא רדיאלי

ב. בקנה מידה קטן שדה הכבידה הוא אחיד

איור 25: שדה הכבידה של כדור הארץ

6.3 יתרונות תיאור הכבידה באמצעות שׂדה

בתיאור הכוח הפועל על הירח באמצעות המושׂג "שׂדה" יש סירבול מסוים: אנו אומרים שהארץ יוצרת שׂדה, והירח נמצא באינטראקציה עם השׂדה השׂורר בקרבתו. השׂדה משמש כמתווך בין הארץ לירח.

מהי התועלת של התיאור באמצעות השׂדה?

לתיאור באמצעות השׂדה יש יתרון של נוחות: אם חישבנו פעם אחת את השׂדה בנקודה מסוימת, נוכל לחשב מיד (באמצעות נוסחה (9)) את הכוח הפועל על **כל** גוף שיוצב בנקודה.

אולם, לנקודת הראות של "שׂדה" יש יתרון שני, חשוב יותר: המודל שהירח יכול איכשהו "לדעת" שהארץ נמצאת אי-שם ומושכת אותו - מעורר קושי מושגי. קושי רב יותר מעוררת השאלה מה היה קורה לירח אילו הארץ היתה נעלמת לפתע? האם הירח היה **מיד** מפסיק "להרגיש" בכוח המשיכה, והיה **מיד** מתחיל לנוע בתנועה קצובה לאורך קו ישר, כמתחייב מהחוק השני של ניוטוֹן? כיצד יתכן שמשהו שקורה במקום אחר (כלומר בארץ), ישפיע **באותו רגע** על מה שקורה בתחום בו נמצא הירח? תורת היחסות הפרטית שפותחה על-ידי איינשטיין שוללת את האפשרות של העברת מידע בפרק זמן אפס.

רעיון השׂדה פותר בעיה זוֹ: **הירח מושפע רק מהשׂדה הנמצא בקרבתו המיידית**. אם הארץ מוזזת, השׂדה בקרבת הירח אינו יכול להשתנות באותו רגע; השינוי בשׂדה מתפשט מכדור הארץ במהירות רבה, אך סופית (למעשׂה במהירות האור). הירח "מרגיש" את השינוי רק כעבור איזשהו פרק זמן, אמנם פרק זמן קצר - אך לא באותו רגע. **רק לאחר שהשׂדה השתנה - משתנה הכוח הפועל על הירח**, והשאלה של "באותו רגע" אינה מתעוררת. התיאור באמצעות המושׂג "שׂדה" עומד אפוא בהתאמה לדרישה שמידע אינו יכול לעבור תוך אפס זמן. התיאור באמצעות "פעולה מרחוק" אינו עומד בהתאמה לדרישה זוֹ.

כלומר: כל עוד עוסקים במצבים בהם דבר אינו משתנה - התיאורים באמצעות המושׂגים "שׂדה" ו"פעולה מרחוק" טובים באותה מידה, והבחירה באיזה מביניהם להשתמש היא עניין של נוחות. אך ברגע שהמצבים משתנים, התיאור באמצעות המושׂג שׂדה עשוי להיות נכון.

המושג "שדה" לא היה קיים בתקופתו של ניוטון. הוא פותח בתקופה מאוחרת יותר על ידי מיכאל פָרַדֵי (Michael Faraday, 1791-1867) לצורך האלקטרומגנטיות, ורק לאחר מכן שימש גם ב"כבידה". נקודת ראות זו ל"כבידה" אומצה במסגרת תורת היחסות הכללית.

האם שׂדה הוא דבר ממשי או יישות מתמטית בלבד?

בשלב זה הצגנו את השׂדה כיישות מתמטית, העוזרת לתיאור אינטראקציית הכבידה. בהמשך לימודיכם בפיזיקה, תתוודעו לכוחות אחרים, בפרט חשמליים ומגנטיים, שאותם נוח לתאר באמצעות המושׂג "שׂדה". מושׂג זה יהפך בהדרגה למושׂג כמעט הכרחי, ונייחס לו תכונות נוספות. לדוגמה: נתבונן במערכת של שני גרמי שמיים; נניח שמזיזים את אחד מהם. חולף זמן מסוים עד שגרם השמיים השני "מרגיש" זאת. לאן "נעלמו" במשך זמן זה התנע והאנרגיה? התשובה לכך: הם עברו **לשדה**.

עבור הפיזיקאי, שׂדה הוא דבר ממשי כמו חומר.

7. אנרגיה בשדה כבידה

7.1 אנרגיה פוטנציאלית כבידתית

בפרק ז דנו באנרגיה פוטנציאלית כובדית של מערכת הכוללת את הארץ וגוף נוסף. הנחנו שהגוף נמצא בקרבת הארץ, וכי תנועתו מוגבלת לתחום קטן, בו שׂורר שׂדה כובד **אחיד** בקירוב. בהנחת קירוב זו, הראינו כי שׂדה הכובד משמר, ופיתחנו את הביטוי $U_G = mgy$. בסעיף זה נדון באנרגיה הפוטנציאלית הכבידתית, ללא הנחת הקירוב.

א. שׂדה הכבידה כשׂדה משמר

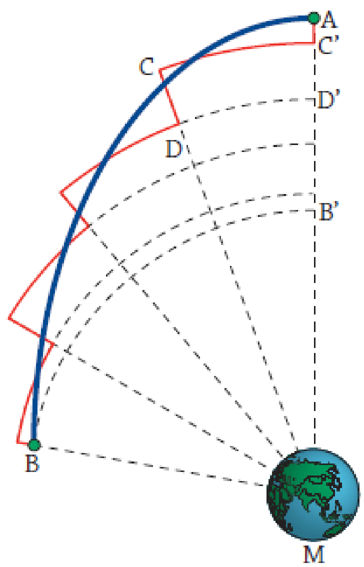
כדי שנוכל להגדיר אנרגיה פוטנציאלית עבור שׂדה כבידה **רדיאלי**, עלינו להראות תחילה כי שׂדה זה **משמר**. נשתמש ברעיון שבעזרתו הראינו (בפרק ז) ששׂדה כבידה **אחיד** הוא משמר.

נדון במצב הבא:

A ו-B הן שתי נקודות בשׂדה כבידה הנוצר על ידי גרם שמיים שמסתו *M*, למשל על ידי הארץ (איור 26).

האם עבודת שׂדה הכבידה הנעשׂית על גוף העובר מ-A ל-B, תלויה במסלול תנועתו?

נבחר מסלול כלשהו המחבר את A עם B - הקו הכחול העבה באיור 25. נבנה מסלול חלופי המורכב מקטעים (המסלול האדום באיור 26): הקטע הראשון הוא 'AC, בכיוון שׂדה הכבידה. את הקטע השני נבנה כך שיחתוך את המסלול ה"אמיתי", ושעבודת השׂדה לאורכו תהיה שווה לאפס; קטע המקיים דרישות אלה הוא קשת 'CC של מעגל שמרכזו במרכז גרם השמיים *M*. כך נמשיך לבנות את המסלול החלופי, עד שנגיע לבסוף לנקודה B. המסלול החלופי מחלק את המסלול האמיתי לחלקים קצרים. ככל שאורכם של חלקים אלה קטן יותר (זה מחייב הגדלת מספר נקודות החיתוך בין שני המסלולים) - צורתו של המסלול החלופי קרובה יותר למסלול ה"אמיתי".



איור 26: שדה הכבידה הרדיאלי משמר

עבודת השׂדה על הגוף המונע לאורך המסלול החלופי: העבודה לאורך כל קשת שווה לאפס (מדוע?). העבודה לאורך כל קטע ישר, שווה לעבודה לאורך הקטע המתאים הנמצא על הקו המחבר את A עם מרכז הגוף M. למשל, העבודה לאורך CD שווה לעבודה לאורך C'D'.

לכן העבודה לאורך כל המסלול החלופי מ-A ל-B שווה לעבודת השׂדה מ-A ל-'B, כאשר 'B היא נקודת החיתוך בין קו המחבר את A עם מרכז הגוף *M*, לבין הקשת של המעגל שמרכזו במרכז הגוף *M*, והעובר ב-B.

המסלול הכחול שבחרנו אינו מיוחד; עבודת שדה הכבידה הרדיאלי לאורך **כל** מסלול המחבר את A עם B שווה לעבודת השדה מ-A ל-'B.

מכאן עולה מסקנה חשובה: העבודות הנעשׂות על-ידי שׂדה הכבידה לאורך כל המסלולים האפשריים המחברים את A עם B שוות ביניהן, הן תלויות רק בנקודת ההתחלה ובנקודת הסיום, ואינן תלויות בנקודות הביניים.

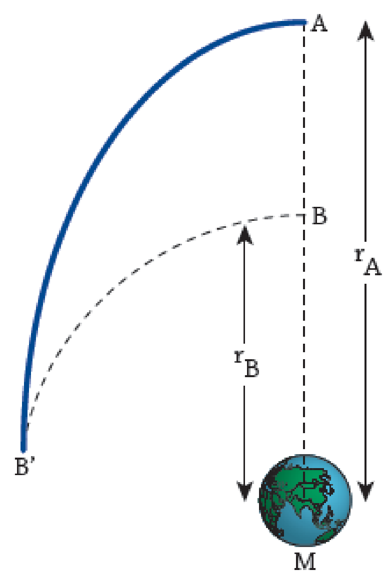
נסכם:

שׂדה הכבידה (הרדיאלי) הוא משמר, לכן אפשר להגדיר עבורו אנרגיה פוטנציאלית כבידתית.

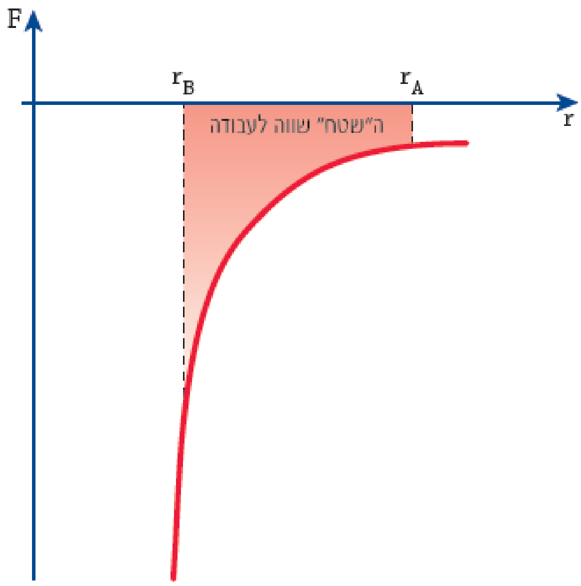
ב. גזירת הביטוי המתמטי לאנרגיה פוטנציאלית כבידתית

באיור 27 מתואר גרם שמיים שמסתו *M*. נניח שגוף שמסתו *m* נע מ-A ל-'B לאורך המסלול המתואר בקו עבה. על-פי האמור בסעיף הקודם, עבודת שׂדה הכבידה על הגוף לאורך המסלול שווה לעבודה שהיתה נעשׂית על הגוף אילו הוא היה נע מ-A ל-B. על-פי הגדרת האנרגיה הפוטנציאלית (נוסחה (18) בפרק ז):

$$U_A - U_B = W_{A \to B}$$



איור 27: עבודת שדה הכבידה מ-A ל-'B שווה לעבודות מ-A ל-B



איור 28: עבודת שדה הכבידה שווה ל"שטח" המסומן בצבע

עבודת שׂדה הכבידה על הגוף מתקבלת מחישוב ה"שטח" התחום בין עקומת כוח-מקום לבין ציר המתאר מקום ביחס למרכז גרם השמיים. נבחר ציר מקום שראשיתו במרכז גרם השמיים, וכיוונו החיובי לעבר הנקודות A ו-B. את מרחקי הנקודות A ו-B ממרכז כדור הארץ נסמן ב- r_A ו-r_B בהתאמה. עקומת כוח-מרחק מתוארת באיור 27. העבודה הנעשׂית על הגוף בעת תנועתו מ-A ל-B שווה ל"שטח" המסומן בצבע באיור 28.

לבקיאים באינטגרלים מוצע **חישוב העבודה באמצעות אינטגרל:**

$$U_A - U_B = W_{A\to B}$$

נחשב את ה"שטח" התָחום בין העקומה לבין הציר r מ-r_A עד r_B.

$$W_{A\to B} = \int_{r_A}^{r_B} F(r)\,dr = \int_{r_A}^{r_B} \left(-\frac{GMm}{r^2}\right) dr = \left[\frac{GMm}{r}\right]_{r_A}^{r_B} = \left(-\frac{GMm}{r_A}\right) - \left(-\frac{GMm}{r_B}\right)$$

נשים לב, שהשטח המסומן באיור 27 הוא חיובי, למרות שהוא נמצא מתחת לציר ה-r, כי גם $\Delta\mathbf{r}$ וגם $\mathbf{F}$ שליליים.

$$U_A - U_B = \left(-\frac{GMm}{r_A}\right) - \left(-\frac{GMm}{r_B}\right) \qquad (11)$$

נוסחה (11) מבטאת את הפרש האנרגיה הפוטנציאלית הכבידתית של מערכת בת שני גופים, כאשר המערכת עוברת ממצב שבו המרחק בין הגופים הוא r_A, למצב שבו המרחק בין הגופים הוא r_B. אם $r_A > r_B$ אזי אגף ימין של נוסחה (11) חיובי (הראה זאת!), לכן $U_A > U_B$. כלומר: כאשר מגדילים את המרחק בין שני גופים - האנרגיה הפוטנציאלית הכבידתית שלהם גדֵלה. מסקנה זו עולה גם מהביטוי $U_G = mgy$ שפיתחנו בפרק ז עבור אנרגיה פוטנציאלית כובדית של מערכת גוף הנמצא בקרבת הארץ.

מהו הביטוי המתמטי לאנרגיה הפוטנציאלית הכבידתית בנקודה כלשהי במרחב? על-פי נוסחה (11), העבודה הנעשׂית על-ידי שׂדה הכבידה שווה לפְחַת בגודל $-GMm/r$, לכן ביטוי זה מתאים לייצג אנרגיה פוטנציאלית כבידתית.

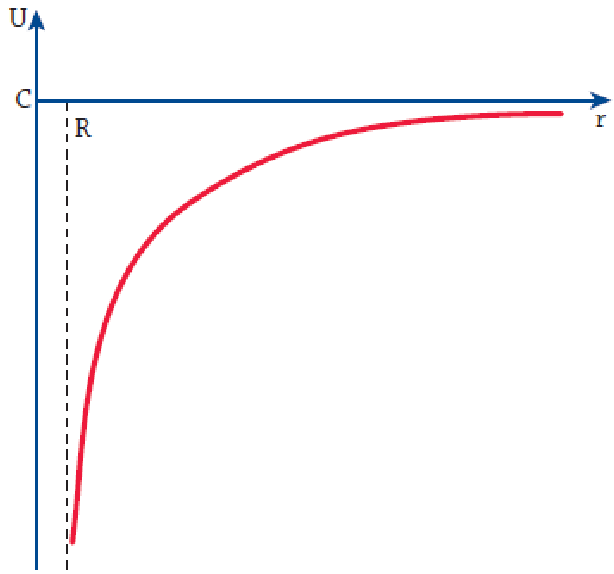
גם הביטוי:

$$U = -\frac{GMm}{r} + C \qquad (12)$$

(כאשר C גודל קבוע כלשהו) מתאים לייצג אנרגיה פוטנציאלית, משום שהעבודה בין שתי נקודות שווה גם להפרש של שני ביטויים כאלה.

קבוע C התקבל גם כאשר פיתחנו את הביטויים לאנרגיות הפוטנציאליות הכובדית והאלסטית (פרק ז), והוא נובע מכך שהאנרגיה הפוטנציאלית אינה מוגדרת באופן חד-ערכי, אלא רק עד כדי קבוע.

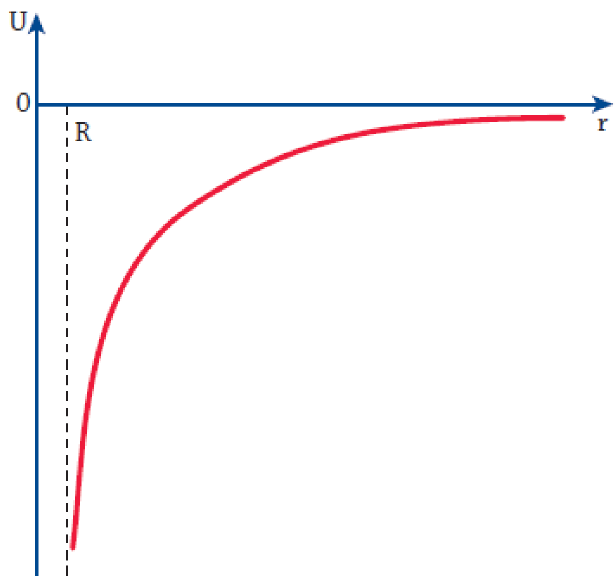
באיור 28 מתוארת (על פי נוסחה (12)) האנרגיה הפוטנציאלית של מערכת גוף וגרם שמיים, כפונקציה של המרחק r ביניהם (לגבי צורת העקומה - ראה תרגיל 24). לא רשמנו רמת אפס על ציר האנרגיה (הציר האנכי) כיוון שעדיין לא בחרנו את מקום רמת הייחוס עבור אנרגיה זו. מהגרף רואים שהאנרגיה הפוטנציאלית הכבידתית הולכת וגדֵלה ככל שהמרחק בין הגופים הולך וגדֵל, והיא שואפת אסימפטוטית לקבוע C כאשר המרחק r בין הגופים שואף לאינסוף.



איור 29: האנרגיה הפוטנציאלית של גוף בשדה הכבידה של גרם שמיים כפונקציה של המרחק ממרכז גרם השמיים; C הוא קבוע כלשהו

ג. בחירת רמת האפס של U באינסוף

לבחירת המיקום של רמת האפס לאנרגיה פוטנציאלית אין משמעות פיזיקלית. השיקול שיינחה אותנו יהיה נוחות מתמטית. הביטוי המתמטי הפשוט ביותר עבור האנרגיה הפוטנציאלית מתקבל כאשר מציבים בנוסחה (12) $C = 0$.
איור 30 מתאר את האנרגיה הפוטנציאלית הכבידתית במקרה זה כפונקציה של מרחק הגוף ממרכז גרם השמים.
בבחירה זו, **רמת האפס של האנרגיה מתקבלת באינסוף**.



איור 30: האנרגיה הפוטנציאלית של גוף בשדה הכבידה של גרם שמיים, רמת האפס של האנרגיה נבחרת באינסוף

האנרגיה הפוטנציאלית הכבידתית של מערכת כדור הארץ וגוף בשדה הכבידה שלו:

האנרגיה הפוטנציאלית הכבידתית של מערכת גוף שמסתו m וכדור הארץ (מסה M_E) ניתנת על ידי הביטוי:

$$\boxed{U_G(r) = -\frac{GM_E m}{r}} \quad (13)$$

כאשר רמת האפס של האנרגיה נבחרה במצב שבו המרחק בין הגופים הוא אינסופי ($U_G(\infty) = 0$).

r הוא המרחק בין מרכזי הגופים.

ראוי להדגיש כי בנוסחה $U_G = mgh$, *h* הוא המרחק בין הגוף **למישור הייחוס**, בעוד שבנוסחה (13) *r* הוא המרחק בין הגוף **למרכז כדור הארץ**, ולא ממשטח הייחוס. יש להיות מודע לכך כדי להימנע מבלבול בין שני המקרים.

ד. בחירת רמת האפס של U על פני הארץ

נפתח עתה ביטוי לאנרגיה הפוטנציאלית הכבידתית בקרבת פני כדור הארץ כאשר משטח הייחוס הוא **פני כדור הארץ**, וזאת כדי להראות את התאמתו לביטוי $U_G = mgh$.

נציב, בנוסחה (12) $U_G = 0$ ו- $r = R_E$, ונקבל:

$$0 = -\frac{GMm}{R_E} + C \qquad \Rightarrow \qquad C = \frac{GMm}{R_E}$$

את הביטוי שקבלנו עבור *C* נציב בנוסחה (12), ונקבל:

$$U = \frac{GMm(r - R_E)}{R_E \cdot r} \quad (14)$$

נציב בנוסחה (14) את ביטויים (א) - (ג) שלהלן:

$$r - R_E = h \quad \text{(א)}$$

$$R_E \cdot r \approx R_E^{\,2} \quad \text{(ב)}$$

$$\frac{GM}{R_E^2} = g \quad \text{(ג)}$$

ונקבל שהאנרגיה הפוטנציאלית הכובדית בקרבת כדור הארץ:

$$U_G = mgh$$

וזוֹ בדיוק הנוסחה שפיתחנו בפרק ז.

7.2 המרות אנרגיה בשָׂדה כבידה

א. אנרגיה מכנית כוללת

האנרגיה המכנית הכוללת של מערכת מבודדת בת שני גופים שמסותיהם M ו-m שווה לסכום של שלוש אנרגיות: האנרגיה הפוטנציאלית ההדדית של שני הגופים והאנרגיות הקינטיות של כל אחד משני הגופים. אם מסתו של אחד הגופים גדולה מאוד ביחס לאחר (נניח כי $M>>m$) גוף זה בקירוב אינו מואץ, ונוכל להזניח את האנרגיה הקינטית שלו.

האנרגיה המכנית הכוללת במקרה זה ניתנת על ידי:

$$E = E_k + U_G = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-\frac{GMm}{r}\right) = \text{Constant} \qquad (15)$$

כאשר Constant מייצג קבוע.

האנרגיה המכנית הכוללת נשמרת במהלך התנועה. מנוסחה (15) נובע כי כאשר r גדֵל - המהירות v חייבת לקטון, ולהפך.

דוגמה 7: פגז נורה כלפי מעלה

באיזה גודל מהירות יש לירות פגז מפני הארץ כלפי מעלה, כדי שיעלה לגובה 500 ק"מ מעל פני כדור-הארץ? הניחו כי כדור-הארץ אינו מסתובב, וכי אין לו אטמוספירה.

פתרון:

האנרגיה המכנית הכוללת של הפגז נשמרת במהלך תנועתו. בפרט, האנרגיה מיד לאחר השיגור שווה לאנרגיה בשיא הגובה.

מיד לאחר השיגור, יש למערכת הפגז וכדור הארץ אנרגיה קינטית ואנרגיה פוטנציאלית כבידתית:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-\frac{GM_E m}{R_E}\right)$$

כאשר: v - גודל מהירות הפגז מיד לאחר השיגור;

m - מסת הפגז.

כיוון שהפגז נע בכיוון רדיאלי כלפי מעלה, מהירותו מתאפסת בשׂיא הגובה. בנקודה זו ׂכל האנרגיה של המערכת הומרה בפוטנציאלית כבידתית:

$$E = -\frac{GM_E m}{r}$$

כאשר: r - מרחק שׂיא המסלול ממרכז כדור-הארץ.

משימור האנרגיה המכנית: $\frac{1}{2}mv^2 + \left(-\frac{GM_E m}{R_E}\right) = -\frac{GM_E m}{r}$

פתרון המשוואה: נחלק את שני אגפי השוויון ב-m. כדי לחסוך בפעולות חישוב, נכפול את המונה ואת המכנה של איבר האנרגיה הפוטנציאלית על פני הארץ ב-R_E, ואת המונה והמכנה של איבר האנרגיה הפוטנציאלית בשׂיא הגובה ב-R_E^2, ונקבל:

$$\frac{1}{2}v^2 - \left(\frac{GM_E}{R_E^2}\right)R_E = -\left(\frac{GM_E}{R_E^2}\right)\frac{R_E^2}{r}$$

בהסתמך על נוסחה (6), אנו רשאים להציב במקום הביטוי שבסוגריים את g (גודל תאוצת הנפילה החופשית על פני הארץ):

$$\frac{1}{2}v^2 - gR_E = -g\frac{R_E^2}{r}$$

נציב: $R_E = 6.37 \cdot 10^6\ \text{m}$; $g = 10\ \text{m/s}^2$; $r = (6.37 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5)\ \text{m} = 6.87 \cdot 10^6\ \text{m}$

ונקבל: $\frac{1}{2}v^2 - 10 \cdot 6.37 \cdot 10^6 = -10\frac{(6.37 \cdot 10^6)^2}{6.87 \cdot 10^6}$

פתרון המשוואה: $v \approx 3.05 \cdot 10^3\ m/s$. כלומר יש לירות את הפגז במהירות שגודלה כ- 3.05 ק"מ לשנייה.

לוּ היינו מחשבים את המהירות באמצעות הנוסחה $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$, היתה מתקבלת מהירות שגודלה כ- 3.16 ק"מ לשנייה. החישוב באמצעות נוסחה זוֹ אינו מדויק, כיוון שהיא מתאימה **לתנועה שוות תאוצה**, ואילו הפגז נע בהשפעת **כוח משתנה**. השתמשנו (בפרקים קודמים) בנוסחה זוֹ עבור גופים שנזרקו לגבהים נמוכים, כך ששׂדה הכבידה בקירוב מצוין לא השתנה. ההפרש בין 3.05 ק"מ לשנייה לבין 3.16 ק"מ לשנייה אמנם אינו גדול, משום שמדובר בתנועה המתנהלת ממרחק 6,400 ק"מ ממרכז הארץ (כלומר מפני הארץ), עד למרחק 6,900 ק"מ ממרכז הארץ, והשינויים בערכי הכוח והתאוצה אינם גדולים. אילו השאלה היתה עוסקת בירי פגז לגובה 10,000 ק"מ למשל, ההפרש היה הרבה יותר גדול.

ב. אנרגיה במסלולים מעגליים

האנרגיה המכנית הכוללת של גוף נע בשׂדה כבידה מיוצגת על-ידי ביטוי (15). במקרה המיוחד של לוויין, יש בידינו מידע נוסף אודות הגוף (נוסחה (7)):

$$\frac{GMm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

נכפול את השוויון האחרון ב-$r/2$ ונקבל:

$$\frac{GMm}{2r} = \frac{mv^2}{2}$$

אגף ימין בשוויון האחרון מבטא את האנרגיה הקינטית. קבלנו איפוא, כי **האנרגיה הקינטית של לוויין במסלול מעגלי:**

$$\boxed{E_k = \frac{GMm}{2r}} \qquad (16)$$

בעזרת קשרים (13) ו- (15) אפשר להראות שהאנרגיה הקינטית של לוויין במסלול מעגלי שווה למחצית הערך הנגדי של האנרגיה הפוטנציאלית במסלול התנועה, כלומר:

$$\boxed{E_k = -\frac{U_G}{2}}$$

נמצא ביטוי לאנרגיה המכנית הכוללת של לוויין במסלול מעגלי. על פי נוסחה (15), האנרגיה של גוף כלשהו הנע בהשפעת כוח כבידה:

$$E = E_k + U_G = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-\frac{GMm}{r}\right)$$

כאשר מדובר בלווין, אנו רשאים להציב באיבר האנרגיה הקינטית שבנוסחה האחרונה את (16), ונקבל:

$$E = \frac{GMm}{2r} + \left(-\frac{GMm}{r}\right)$$

לכן:

האנרגיה המכנית הכוללת של לוויין במסלול מעגלי:

$$\boxed{E = -\frac{GMm}{2r}} \qquad (17)$$

דוגמה 8: העברת חללית מהארץ למסלול מעגלי

משגרים חללית שמסתה *m* מפני כדור הארץ למסלול מעגלי שרדיוסו *r* סביב הארץ. בטא באמצעות נתוני השאלה את האנרגיה הדרושה לשם כך.

פתרון:

האנרגיה המכנית הכוללת של החללית, כשהיא עדיין נחה על פני הארץ:

$$E_1 = -\frac{GM_E m}{R_E}$$

האנרגיה במסלול המעגלי:

$$E_2 = -\frac{GM_E m}{2r}$$

תוספת האנרגיה, ΔE, הדרושה להכנסת החללית למסלול מעגלי:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \left(-\frac{GM_E m}{2r}\right) - \left(-\frac{GM_E m}{R_E}\right) = GM_E m\left(\frac{1}{R_E} - \frac{1}{2r}\right)$$

דוגמה 9: העברת לוויין ממסלול מעגלי אחד למשנהו

לוויָן מקיף את כדור הארץ במסלול מעגלי שרדיוסו r_1. מהי האנרגיה הדרושה כדי להעביר את הלוויָן למסלול מעגלי שרדיוסו r_2, כאשר $r_2 > r_1$?

פתרון:

האנרגיה המכנית הכוללת של הלוויָן בתנועתו במסלול הראשון:

$$E_1 = -\frac{GM_E m}{2r_1}$$

האנרגיה במסלול השני:

$$E_2 = -\frac{GM_E m}{2r_2}$$

תוספת האנרגיה ΔE הדרושה להעברת הלוויָן:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \left(-\frac{GM_E m}{2r_2}\right) - \left(-\frac{GM_E m}{2r_1}\right) = \frac{GM_E m}{2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

7.3 גודל מהירות המילוט

הגדרת המושג **"אנרגיית קשר** (binding energy) **כבידתית"**:

אנרגיית הקשר הכבידתית של גוף הנמצא בשדה הכבידה של גרם שמיים זו האנרגיה המינימלית שיש להוסיף לגוף כדי שיגיע למקום שבו כוח הכבידה הפועל עליו שווה לאפס, כלומר לאינסוף, עם אנרגיה קינטית אפס.

האם אפשר לירות גוף במהירות כה רבה, עד שהוא כל הזמן ילך ויתרחק מכדור הארץ?

אנרגיית הקשר, E_B, של גוף המונח על פני הארץ, אם מתעלמים מסיבוב הארץ על צירה ומהשפעת גרמי שמיים אחרים, היא סופית וגודלה

$$\boxed{E_B = \frac{GM_E m}{R_E}} \qquad (18)$$

(B - קיצור של binding - קשר).

האנרגיה המינימלית שיש להוסיף לגוף הנמצא במרחק סופי ממרכז גרם שמיים היא האנרגיה הקינטית הנחוצה כדי שהוא יגיע לאינסוף, אך עם אנרגיה קינטית אפס. האנרגיה המכנית הכוללת שלו באינסוף תהיה שווה במקרה זה לאפס (כי גם האנרגיה הפוטנציאלית באינסוף שווה לאפס).

על-פי עקרון שימור האנרגיה, האנרגיה של הגוף צריכה להיות שווה לאפס בכל נקודה על מסלולו:

$$E_k + U_G = 0 \qquad (א)$$

הגודל המינימלי של המהירות שיש להעניק לגוף כדי שיימלט מכוח המשיכה של גרם שמיימי כלומר ילך ויתרחק ממנו מכונה **גודל מהירות המילוט**, ומסמנים אותו ב-v_e (באנגלית **e**scape speed; מכאן הציון e בגודל המהירות).

אם הגוף משוגר מפני כדור הארץ, אזי נוסחה (א) תירשם כך:

$$\frac{1}{2}mv_e^2 + \left(-\frac{GM_E m}{R_E}\right) = 0 \qquad (ב)$$

לאחר חילוק המשוואה ב-m, וביצוע פעולות אלגבריות פשוטות נקבל:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_E}{R_E}} \qquad (ג)$$

כדי לפשט את הביטוי, נכפול את המונה ואת המכנה של הביטוי שבשורש ב- R_E, נציב במקום GM_E / R_E^2 את גודל תאוצת הנפילה החופשית g על פני הארץ, ונקבל:

$$\boxed{v_e = \sqrt{2gR_E}} \qquad (19)$$

נציב ב-(19): $g = 9.8\ m/s^2$ ו-$R_E = 6.37 \cdot 10^6\ m$ ונקבל כי גודל מהירות המילוט מפני הארץ:

$$v_e \approx 11.2\ km/s$$

כלומר: אילו לאטמוספירה לא היתה השפעה, ואילו היינו מתעלמים מסיבוב הארץ על צירה ומהשפעת גרמי שמיים אחרים כגון השמש, אזי גוף שהיה נורה במהירות שגודלה 11.2 ק"מ לשנייה (או במהירות גדולה ממנה) היה נמלט מכדור הארץ, ולא שב אליו לעולם. מהירותו אמנם תלך ותקטן בהשפעת שׂדה הכבידה של הארץ המשׂתרע עד אינסוף,

אולם תמיד תשאר לגוף מהירות מספקת להתרחק יותר ויותר מהארץ. הערך 11.2 ק"מ לשנייה הוא גם גודל המהירות שבו גוף פוגע בארץ, אם הוא משוחרר מאינסוף עם מהירות מינימלית לעבור הארץ, ונופל לארץ, כי קשר (ב) תקף גם למקרה זה, אלא שבמקום v_e יש להציב את מהירות הפגיעה בארץ.

נוסחה (19) מבטאת את **גודל** מהירות המילוט; ל**כיוון** מהירות המילוט בה הגוף משוגר אין חשיבות (אם אנו מתעלמים מסיבוב הארץ על צירה).

נוסחה (19) מתאימה לשיגור מפני הארץ. אם מדובר בגוף הנמצא במרחק r ממרכזו של גרם שמיימי שמסתו M, אזי גודל מהירות המילוט של הגוף תינתן על-ידי:

$$\boxed{v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}}} \qquad (20)$$

(הסבירו!).

כדי להכניס חללית למסלול סביב הארץ דרושה מהירות קטנה ממהירות המילוט; גודלה תלוי בנתוני המסלול.

לחלליות המיועדות להקיף את הירח ניתנות מהירויות נמוכות ממהירות המילוט, כך שאם משהו משתבש (כפי שאמנם קרה לחללית אפולו 13) החללית תוכל לחזור לארץ.

לחלליות שיעדן כוכבי לכת אחרים ניתנות מהירויות גדולות ממהירות המילוט. החלליות פיוניר (Pioneer) וויג'ר (Voyager) שיועדו לכוכבי הלכת החיצוניים של מערכת השמש שוגרו במהירות שגודלה 14 ק"מ לשנייה.

בקנה מידה הרבה יותר גדול, המושׂג "גודל מהירות המילוט" מתייחס ליקום בכללותו: על-פי תאוריה מקובלת, היקום הולך ומתרחב. שאלה מעניינת היא **אם ההתרחבות תמשיך לעד, או שבסופו של דבר תיפסק, והיקום יתחיל להתכווץ**. ניתוח מפורט של שאלה זו יש לעשׂות במסגרת תורת היחסות הכללית. אולם באופן בסיסי, השאלה היא אם גודל מהירות ההתרחבות של היקום מגיע או שאינו מגיע לגודל מהירות המילוט, והיא קשורה עם המשיכה הכבידתית של כל החומר ביקום.

8. תורת הכבידה של ניוטון אינה סוף פסוק

על-פי אריסטו, בעולם העל-ירחי ובעולם התת-ירחי שולטים חוקי טבע שונים. ניוטון "איחד שמיים וארץ": הוא הראה כי אותו חוק טבע מסביר תופעות המתרחשות על פני הארץ כגון נפילה חופשית, גיאות ושפל וגם תופעות טבע המתרחשות בשמיים: תנועת כוכבי הלכת.

מאז עבודתו של ניוטון על חוק הכבידה, נבדק החוק על-ידי חישובים מדוקדקים ביותר של תנועות כוכבי הלכת וירחיהם (כדי לחשב במדויק את מסלולו של כוכב לכת יש לקחת בחשבון לא רק את הכוח שמפעילה עליו השמש, אלא גם את הכוחות שמפעילים עליו כוכבי הלכת האחרים). בכל המקרים נמצאה התאמה לתצפיות (או לערכים הנמדדים). היוצא מהכלל היחידי הוא **סטייה קטנה של כוכב חמה** (כוכב הלכת הקרוב ביותר לשמש) מן המסלול שחישובו מתבסס על חוק הכבידה. אף כי הסטייה קטנה מאוד, היה צורך בתאוריה חדשה על מנת להסבירה. תאוריה זו היא **תורת היחסות הכללית** שאיינשטיין פיתח, ופירסם בשנת 1916. תורת איינשטיין נותנת את כל התוצאות של תורת ניוטון, אך בנוסף היא מסבירה דברים שאינם נובעים מתורת ניוטון. ברוב המקרים ההבדלים בין ניבויי תורתו של איינשטיין לניבויי תורתו של ניוטון הם כה קטנים עד שאינם ניתנים למדידה, אלא במקרים יוצאים מן הכלל, כגון המסלול של הכוכב חמה. כאן תורת איינשטיין נותנת התאמה מלאה בין ניסוי וחישוב.

עיקרי הדברים - פרק ט

1. התפתחות תאוריית הכבידה

א. העובדות שהיו ידועות לפני פיתוח תאוריית הכבידה:

(1) תוצאות תצפיות בכוכבי הלכת: חמה, נוגה, מאדים, צדק ושבתאי (טיכו ברהה).

(2) תיאור תנועת כוכבי הלכת באמצעות שלושה חוקים (יוהן קפלר).

(3) גודל תאוצת גופים המשוחררים בקרבת הארץ הוא $9.8\ m/s^2$.

(4) גודל תאוצת הירח הוא $2.7 \cdot 10^{-3}\ m/s^2$.

(5) תופעת הגיאות ושפל.

ב. תאוריית הכבידה (אייזיק ניוטון)

בין כל שני חלקיקים בתבל פועל כוח משיכה גרביטציוני, שהתבנית המתמטית של גודלו: $F = G\frac{Mm}{r^2}$.

ג. התמודדות תאוריית הכבידה עם העובדות שהיו ידועות לפני פיתוח תאוריית הכבידה:

תאוריית הכבידה מצליחה להסביר את כל העובדות (1) - (5) **שהיו ידועות לפני פיתוח תאוריית הכבידה**.

ד. ניבויי תאוריית הכבידה

(1) פועל כוח משיכה בין כל שני גופים, אף אם הם קטנים (אייזיק ניוטון).

(2) יש כוכב-לכת שטרם נתגלה, אשר משפיע על מסלול תנועתו של כוכב הלכת אורנוס (ג'ון אדמס ואורבן לֶבֶרְיֶה).

(3) יש אפשרות עקרונית לשגר גוף במסלול מעגלי סביב הארץ (אייזיק ניוטון).

ה. האם ניבויי תאוריית הכבידה התגשמו?

(1) קבנדיש מגלה שאכן פועל כוח כבידה בין גופים בעלי ממדים רגילים, כפי שניוטון ניבא.

(2) גָלֶה מגלה את כוכב הלכת נפטון שמשפיע על מסלולו של אורנוס.

(3) אלפי לוויָנים מלאכותיים מקיפים כיום את הארץ.

ו. עובדות חדשות

תאוריית הכבידה של ניוטון **אינה** מצליחה לחשב **במדויק** את מסלול תנועתו של כוכב-הלכת חמה . . .

2. חוקי קפלר

א. **החוק הראשון:** מסלול תנועתו של כל כוכב לכת הוא אליפסה; השמש נמצאת באחד ממוקדי האליפסה.

ב. **החוק השני:** הקו המחבר את השמש עם כוכב לכת "מכסה" שטחים שווים בפרקי זמן שווים.

ג. **החוק השלישי:** ריבוע זמן המחזור של כוכב לכת פרופורציוני לחזקה השלישית של רדיוס מסלולו:

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{\bar{r}_1}{\bar{r}_2}\right)^3$$

3. **חוק הכבידה העולמי:** כל שני חלקיקי חומר מושכים האחד את האחר בכוח שגודלו:

$$F = \frac{Gm_1 m_2}{r^2}$$

חוק הכבידה בצורתו הזו תקף עבור חלקיקים נקודתיים, כדורים אחידים וקליפות כדוריות אחידות.

4. **לוויין** של גרם שמיים הוא גוף הנע במסלול אליפטי בהשפעת כוח כבידה שמפעיל גרם השמיים.

אם מסלול הלוויין הוא מעגלי, אזי מתקיימת המשוואה: $\frac{GMm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$

5. גודל תאוצת הנפילה החופשית משתנה ממקום למקום על פני הארץ בגלל שלוש סיבות:

א. הארץ אינה הומוגנית.

ב. הארץ אינה כדורית, אלא פחוסה.

ג. הארץ סובבת על צירה.

6. **עוצמת שׂדה הכבידה** של גרם שמיים בנקודה מסוימת היא הכוח שהיה פועל על יחידת מסה, אילו מסה (קטנה) היתה מוצבת בנקודה:

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}_g}{m}$$

7. **שׂדה הכבידה משמר**, לכן ניתן להגדיר אנרגיה פוטנציאלית כבידתית.

8. **האנרגיה הפוטנציאלית הכבידתית** מבוטאת על-ידי: $U_G = -\frac{GMm}{r}$

כאשר רמת האפס של האנרגיה נבחרה באינסוף.

9. האנרגיה של לוויין במסלול מעגלי:

קינטית: $E_k = \frac{GMm}{2r}$ כוללת: $E = -\frac{GMm}{2r}$

10. **גודל מהירות המילוט** הוא הגודל המינימלי של מהירות שיש להעניק לגוף כדי שילך ויתרחק מגרם שמיים.

אם הגוף נמצא במרחק r ממרכזו של גרם שמיים שמסתו M אזי גודל מהירות המילוט מבוטא על-ידי:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

שאלות, תרגילים ובעיות

לצורך פתרון התרגילים השתמשו, במידת הצורך, בקבועים המופיעים בטבלאות שבסעיף 2 של הפרק.
הניחו שלכוכבים ולפלנטות אין אטמוספירות, או שניתן להתעלם מהשפעותיהן.

I. תרגילים מותאמים לסעיפי הפרק

תרגילים 1 - 34 ממויינים על-פי סעיפי הפרק והם נועדו בעיקר לתרגול החומר המופיע באותם סעיפים. תרגילי סיכום אינטגרטיביים מופיעים אחרי תרגילים אלה.

סעיף 2: שלושת חוקי קפלר

1. הראו, בעזרת גרף, כי זמני המחזור של תשעת גרמי השמיים שנתוניהם מופיעים בטבלה 1, והרדיוסים הממוצעים של מסלוליהם, מקיימים את החוק השלישי של קפלר. מומלץ להשתמש בגיליון אלקטרוני לשם סרטוט הגרף.

2. לו נתגלה כוכב לכת חדש אשר רדיוס מסלולו גדול פי שישה-עשר מזה של הארץ, מה היה זמן מחזור תנועתו סביב השמש?

3. התנועה של הארץ סביב השמש היא המהירה ביותר בחודש ינואר, והאיטית ביותר בחודש יוני. מתי מרחק הארץ מהשמש הוא הקצר ביותר? נמקו.

סעיף 3: חוק הכבידה העולמי

4. במהלך הפרק הוצגה הנוסחה: $F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$.

א. איזה גודל פיזיקלי מייצג כל סמל המופיע בנוסחה?

ב. מהי יחידת המדידה ב- S.I. של כל אחד מהגדלים המופיעים בנוסחה?

ג. לאילו מצבים ובאילו תנאים תקפה הנוסחה?

ד. נסחו במילים את החוק המיוצג על ידי הנוסחה.

ה. המסות m_1 ו- m_2 מופיעות בנוסחה באופן סימטרי. מה משמעות הדבר?

5. א. חשבו את הכוח שמפעיל כדור-הארץ על הירח.

ב. האם הירח מפעיל כוח על כדור-הארץ? אם כן, מהו גודלו?

6. פי כמה קטֵן כוח הכובד שמפעילה הארץ על גוף המועבר מפני כדור-הארץ לגובה $2R_E$ מעל פני כדור-הארץ? (R_E - רדיוס כדור הארץ.)

7. כוח הכבידה שהארץ מפעילה על גופים פרופורציוני למסותיהם. מדוע, אם כן, גוף שמסתו גדולה אינו נופל מהר יותר מגוף שמסתו קטנה?

8. באיזה גובה מעל פני כדור-הארץ שווה תאוצת הנפילה החופשית למחצית ערכה שעל פני כדור-הארץ?

9. רדיוסו של מאדים הוא 0.53 מרדיוסו של כדור-הארץ, ומסתו היא 0.11 ממסת כדור-הארץ.

א. בטאו באמצעות g_E (תאוצת הנפילה החופשית על פני הארץ) את תאוצת הנפילה החופשית על פני מאדים.

ב. חשבו את משקלו של אדם על פני מאדים, אם משקלו על-פני הארץ הוא 800 ניוטון.

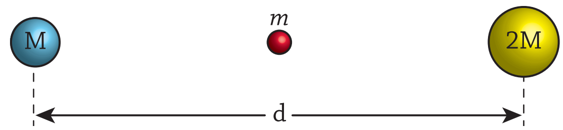
10. כוכב שרדיוסו כרדיוס השמש קורס (מתכווץ), מבלי לאבד מסה, לכוכב שרדיוסו 7 ק"מ (במצב זה הוא מכונה **כוכב נויטרונים**).
פי כמה גדולה תאוצת הנפילה החופשית על פניו של כוכב הנויטרונים מזו שהיתה על פני הכוכב המקורי?

11. כאשר הינכם עומדים על הארץ, המרחק בינכם לבין הארץ הוא אפס. מדוע, אם כן, כוח הכבידה הפועל עליכם אינו אינסופי?

12. חשבו את גודלו של כוח הכבידה שכל אחד משני כדורי עופרת מפעיל על משנהו, אם רדיוסי הכדורים הם 2.5 cm ו-25 cm, והמרחק בין מרכזיהם 30 cm. צפיפות העופרת $11.3\ g/cm^3$.

13. שני כוכבים כדוריים ואחידים, שמסותיהם M ו- 2M, ממוקמים כך שהמרחק בין מרכזיהם הוא d.

אסטרואיד כדורי קטן שמסתו m ממוקם כך שמרכזו נמצא באמצע הקטע המחבר את מרכזי שני הכוכבים.



בטאו באמצעות נתוני השאלה את גודל כוח הכבידה השקול הפועל על האסטרואיד, וציינו את כיוונו.

סעיף 4: תנועת לוויינים במסלולים מעגליים

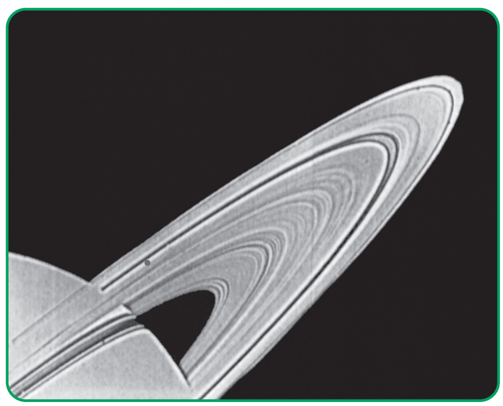
14. לוויָן חג סביב כדור הארץ בגובה 3,000 ק"מ מעל פניו.

א. חשבו את זמן מחזור התנועה.

ב. חשבו את גודל מהירות הלוויָן.

ג. כמה סיבובים משלים הלוויָן בעת שכדור הארץ משלים סיבוב אחד על צירו?

15. לכוכב הלכת שבתאי שמונה טבעות המקיפות אותו והנעות סביבו. ממדידות התברר כי נקודה פנימית של טבעת (נקודה קרובה לשבתאי) נעה במהירות (קווית) גדולה מנקודה חיצונית של אותה טבעת.

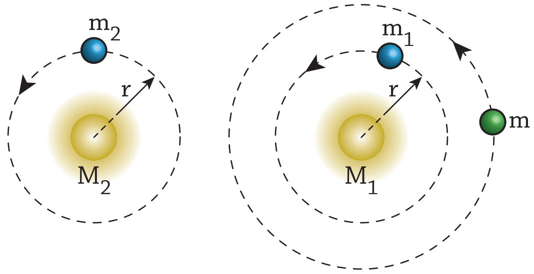


איזה משני ההגדים שלפניכם הוא הנכון לנוכח הממצא? נמקו.

(1) טבעת עשויה מגוש אחד של חומר מוצק;

(2) טבעת מורכבת מאוסף לוויָנים.

16. סביב שני כוכבים שמסותיהם M_1 ו-M_2 חגים שני לוויָנים קטנים שמסותיהם m_1 ו-m_2 בהתאמה. המסלולים הם מעגלים שרדיוסם r.

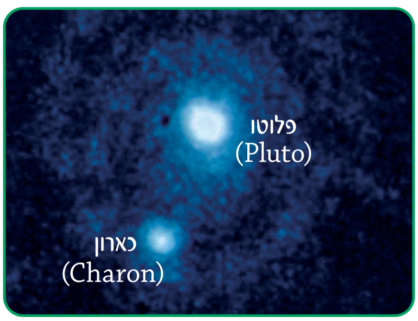


זמן המחזור של m_1 גדול פי שניים מזה של m_2.

א. חשבו את יחס המסות M_1/M_2.

ב. אחרי גילוי לוויָן חדש שמסתו m החג סביב הכוכב שמסתו M_1, נמצא שמחזורו גדול פי 8 מזה של m_1. בטאו באמצעות r את רדיוס מסלולו.

17. מסתו של פלוטו לא היתה ידועה עד שנת 1978, שבה נתגלה ירח שלו. לירח ניתן השם כארון Charon.



כיצד עזר גילוי כארון לקביעת מסתו של פלוטו?

מקור התצלום הוא באתר אינטרנט של סוכנות החלל האמריקאית - NASA. התמונה צולמה מטלסקופ החלל הבל (Hubble).

18. לוויָן מקיף פלנטה סמוך לפניה. משך ההקפה של הלוויָן T, וצפיפותה הממוצעת של הפלנטה היא ρ.

הוכיחו כי ρT^2 קבוע עולמי (כלומר אינו תלוי בנתוני הפלנטה או בנתוני הלוויין). מהו ערכו של הקבוע?

19. אסטרונאוטים בלוויָן המקיף את כדור הארץ נמצאים במצב של חוסר משקל כי:
(1) הלוויָן נופל בתאוצת הנפילה החופשית.
(2) בגבהים בהם נעים לוויָנים כוח הכבידה שמקורו בארץ, הפועל על אסטרונאוט שווה בקירוב לאפס.
(3) כוחות הכבידה שמפעילים כוכבים על אסטרונאוט מאזנים את כוח הכבידה שמפעיל עליו כדור הארץ.
(4) הלוויין נע בחלל, ובחלל אין לגופים משקל.

סעיף 6: שדה כבידה שמקורו במסה

20. א. חשבו את עוצמת שדה הכבידה של הארץ בנקודה הנמצאת בגובה 6,600 ק"מ מעל פני הארץ.
ב. חשבו את הכוחות שמפעיל שדה הכבידה על גופים שמסתם 1 ק"ג, 2 ק"ג ו-3 ק"ג שיוצבו בנקודה זו בזה אחר זה.

21. מסתו של אסטרונאוט היא 80 ק"ג. מצאו, בכל אחד מהמצבים א-ה את גודלו של כוח הכבידה שהארץ מפעילה על האסטרונאוט, ואת משקל האסטרונאוט ביחס לחללית.
א. החללית מואצת כלפי מעלה על ידי טיל בתאוצה שגודלה 5 מ'\ש'^{2} -
(1) כאשר היא נמצאת עדיין בגובה נמוך מעל פני הארץ.
(2) כאשר היא נמצאת בגובה 3,600 ק"מ מעל פני הארץ.
ב. מנועי הטיל כבו. הטיל (עם החללית), נעים כלפי מעלה, וגובהם מעל פני הארץ הוא 5,600 ק"מ.
ג. מנועי הטיל כבויים, הטיל עם החללית הגיעו לגובה מרבי של 10,000 ק"מ מעל פני הארץ.
ד. מנועי הטיל כבויים, הטיל (עם החללית) נעים כלפי מטה; גובהם מעל פני הארץ הוא 5,600 ק"מ.
ה. החללית הוכנסה למסלול מעגלי סביב הארץ, בגובה 1,600 ק"מ מעל פני הארץ.
ו. ברוב התרחישים שדנו בהם במהלך לימוד המכניקה הניוטונית, משקלם של גופים היה שווה לכוחות הכובד שהפעילה עליהם הארץ. לעומת זאת בכמה מקרים בתרגיל זה, הדבר אינו מתקיים. ציינו מה מאפיין את המצבים שבהם המשקל של גוף **שונה** מכוח הכובד שמפעילה עליו הארץ.

22. משקלו של תפוח הוא 2 ניוטון. מהו משקלה של הארץ בשדה הכבידה של התפוח?

תת-סעיף 7.1: אנרגיה פוטנציאלית כבידתית

23. במהלך הפרק הוצגה הנוסחה $U_G = -\dfrac{GM_E m}{r}$.
א. איזה גודל פיזיקלי מייצג כל סמל המופיע בנוסחה?
ב. מהי יחידת המדידה ב- .S.I של כל אחד מהגדלים המיוצגים בנוסחה?
ג. לאילו מצבים ובאילו תנאים הנוסחה תקפה?

24. האנרגיה הפוטנציאלית הכבידתית של מערכת המורכבת מגוף שמסתו m וכדור הארץ היא:

$$U_G = -\frac{GM_E m}{r}$$

כאשר רמת האפס של האנרגיה נבחרה באינסוף. בנו בעזרת גיליון אלקטרוני גרף המתאר את האנרגיה הפוטנציאלית של מערכת גוף שמסתו m וכדור הארץ, כפונקציה של המרחק r בין הגוף לבין מרכז כדור-הארץ, כאשר r מבוטא ביחידות של רדיוס כדור הארץ, R_E: $r = x \cdot R_E$. בנו את הגרף בשלבים:
א. הציבו בנוסחה של U_G: את הביטוי ל-r, $m = 1\ kg$, ואת ערכיהם המספריים של G, R_E ו-M_E.
ב. סרטטו גרף של U_G כפונקציה של x, החל מ-$x = 1$ עד $x = 20$, בקפיצות של 1.

תת-סעיף 7.2: המרות אנרגיה בשדה כבידה

25. יורים טיל מפני כדור-הארץ במהירות התחלתית שגודלה 4 km/s, וכיוונה אנכי.
א. לאיזה גובה מרבי מפני כדור-הארץ מגיע הטיל?
ב. חשבו את גודל מהירות הטיל בגובה 300 ק"מ מעל פני הארץ.

26. מסתו של הלוויָן ווסטוק 1 (Vostok I), שנשׂא לחלל את הקוסמונאוט הרוסי יורי גָגָרין (Gagarin) בשנת 1961, היה 4,725 ק"ג (כולל המסה של גגרין). רדיוס מסלולו היה בקירוב 6,690 ק"מ. חשבו את:
א. גודל מהירות הלוויָן.
ב. האנרגיה המכנית הכוללת (יחסית לאינסוף) של הלוויָן בתנועתו סביב הארץ.

27. משגרים טיל מפניו של כוכב לכת. הנח כי הטיל אינו נמלט מכוכב הלכת. באיזו זווית ביחס לכיוון האופקי יש לירות את הטיל על מנת שיגיע לגובה מרבי מעל פני כוכב הלכת? נמקו.

28. חשבו את האנרגיה המינימלית הדרושה כדי להעלות חללית שמסתה 1000 ק"ג מכן השיגור למסלול מעגלי סביב הארץ, בגובה 300 ק"מ מעל פני הארץ.

29. מעלים חללית שמסתה m מכַּן שיגור הנמצא על פני הארץ, למסלול מעגלי סביב הארץ. משך ההקפה של החללית הוא T.

בטאו באמצעות: R_E (רדיוס הארץ), M_E (מסת הארץ), m, T ו-G (קבוע הכבידה העולמי) את -

א. רדיוס המסלול המעגלי של החללית;

ב. גודל מהירות החללית במסלולה המעגלי;

ג. האנרגיה הדרושה להעלות את החללית מכַּן השיגור למסלול המעגלי.

30. לוויָן שמסתו m חג סביב כדור-הארץ במסלול מעגלי שרדיוסו r_1. בעזרת רקטות מועבר הלוויָן למסלול מעגלי בעל רדיוס גדול יותר r_2. בטאו את האנרגיה הדרושה להעברה באמצעות: R_E (רדיוס הארץ), m, g (גודל תאוצת הנפילה החופשית על פני כדור הארץ), r_1 ו-r_2.

31. לוויין שמסתו 1,000 ק"ג מקיף את כדור הארץ במסלול מעגלי שרדיוסו 6,700 ק"מ. חשבו את:

א. גודל מהירות הלוויין.

ב. מהירותו הזוויתית של הלוויין.

ג. גודל תאוצתו של הלוויין.

ד. גודל תאוצת הנפילה החופשית בגובה בו נע הלוויין.

ה. גודל כוח הכבידה שהארץ מפעילה על הלוויין.

ו. העבודה שמבצע כוח הכבידה על הלוויין במהלך שליש סיבוב.

ז. האנרגיה המכנית הכוללת של הלוויין.

תת-סעיף 7.3: גודל מהירות המילוט

32. חשבו את אנרגיית הקשר של אדם שמסתו 70 ק"ג אל כדור-הארץ. הזניחו את תנועת כדור-הארץ.

33. אסטרונאוט נוחת על כוכב לכת ומבצע מדידות: הוא זורק חפץ אנכית כלפי מעלה; החפץ מגיע לגובה מרבי של 2.5 m כעבור שנייה אחת. האסטרונאוט משגר טילים אנכית כלפי מעלה, ומגלה כי טילים המשוגרים במהירות שגודלה 10^4 m/s ומעלה אינם חוזרים, בעוד שטילים המשוגרים במהירויות קטנות יותר שבִים ונוחתים בנקודת המוצא. חשבו את:

א. גודל תאוצת הנפילה החופשית על פני הכוכב.

ב. רדיוס כוכב הלכת.

ג. מסת כוכב הלכת.

ד. צפיפות כוכב הלכת.

34. מסתו של כוכב נויטרונים גדולה בערך פי 1.4 ממסת השמש, וקוטרו כ-30 ק"מ.

א. חשבו את צפיפותו הממוצעת של הכוכב.

ב. חשבו את צפיפותו הממוצעת של נויטרון; (פרוטונים ונויטרונים הם מרכיבי גרעין האטום). מסת נויטרון היא בקירוב $1.67 \cdot 10^{-27}$ kg; הניחו כי "רדיוס" הנויטרון הוא מסדר גודל 10^{-13} ס"מ, והשוו את תוצאת החישוב עם תשובתכם ל-א.

ג. בטאו באמצעות גודל מהירות האור בריק, c, את גודל מהירות המילוט מפניו של כוכב הנויטרונים.

II. תרגילי סיכום

תרגילים 35 - 54 נועדו לתרגול אינטגרטיבי וכהכנה לבחינה מסכמת.

35. הקוטר של האסטרואיד Ceres הוא 975 ק"מ, ומסתו היא בקירוב $9.46 \cdot 10^{20}$ ק"ג.

א. חשבו את גודל תאוצת הנפילה החופשית על פניו.

ב. חשבו את משקלכם על פניו.

36. תלמידים התבקשו לחשב בעזרת החוק השלישי של קפלר את זמן המחזור של לוויין שנע סביב הארץ במסלול מעגלי שרדיוסו 10,000 ק"מ, במישור קו המשווה.

פתרונו של התלמיד א:

לגבי הלוויין: $T_1 = ?\ ;\ r_1 = 10{,}000\ \text{km}$

לגבי עצם נח על קו המשווה:

$T_2 = 24\ \text{h}\ \ ;\ \ r_2 = 6{,}370\ \text{km}$ (משך סיבוב הארץ על צירה).

החוק השלישי של קפלר: $\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3$

לאחר הצבה: $\left(\frac{T_1}{24}\right)^2 = \left(\frac{10{,}000}{6{,}370}\right)^3$

פתרון המשוואה: $T_1 = 47.2\ \text{h}$.

פתרונו של תלמיד ב:

לגבי הלוויין: $T_1 = ?\ ;\ r_1 = 10{,}000\ \text{km}$

לגבי הירח: $T_2 = 27.3\ \text{d}\ \ ;\ \ r_2 = 3.84 \cdot 10^5\ \text{km}$

החוק השלישי של קפלר: $\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3$

לאחר הצבה: $\left(\frac{T_1}{27.3}\right)^2 = \left(\frac{10{,}000}{3.84 \cdot 10^5}\right)^3$

פתרון המשוואה: $T_1 \approx 0.115\ \text{d} \approx 2.75\ \text{h}$

פתרונו של תלמיד ג:

לגבי הלוויין: $T_1 = ?\ \ ;\ \ r_1 = 10{,}000\ \text{km}$

לגבי כוכב הלכת מאדים:

$T_2 = 1.88\ \text{y}\ \ ;\ \ r_2 = 228 \cdot 10^6\ \text{km}$

החוק השלישי של קפלר: $\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3$

לאחר הצבה: $\left(\frac{T_1}{1.88}\right)^2 = \left(\frac{10{,}000}{228 \cdot 10^6}\right)^3$

$T_1 \approx 5.23 \cdot 10^{-7}\ \text{y} \approx 4.6 \cdot 10^{-3}\ \text{h}$

פתרונו של איזה תלמיד הוא הנכון? מהן השגיאות בפתרונות האחרים?

37. גוף שמסתו m נופל ממנוחה מגובה h מעל פני כוכב לכת שרדיוסו R אל כוכב הלכת.

א. כאשר $h > R$:

(1) מהו סוג התנועה של הגוף? (שוות מהירות, שוות תאוצה, אחרת).

(2) פתחו נוסחה לחישוב גודל מהירות הפגיעה v של הגוף בפני כוכב הלכת. בטאו תשובתכם באמצעות h, R ו-g (גודל תאוצת הנפילה החופשית על פני כוכב הלכת).

ב. כאשר $h << R$:

(1) מהו סוג התנועה של הגוף?

(2) הראו כי הנוסחה שפיתחת בסעיף א(2) ניתנת בקירוב כך: $v \approx \sqrt{2gh}$.

38. לוויָן נע במהירות שגודלה v במסלול מעגלי סביב כוכב. לוויָן אחר נע סביב אותו כוכב במסלול מעגלי במהירות שגודלה 2v.

א. לאיזה מן הלוויָנים רדיוס סיבוב גדול יותר? פי כמה?

ב. לאיזה מן הלוויָנים זמן סיבוב גדול יותר? פי כמה?

ג. מטאוריד פגע בלוויָן הראשון בכיוון תנועתו, וגרם להכפלת מהירות הלוויָן. האם יינתק הלוויָן מן הכוכב?

הערה: **מטאורידים** הם עצמים קטנים המצויים במערכת השמש. הם מתגלים לעינינו רק כאשר הם חודרים לאטמוספירה, ואז הם מתחממים, מתאדים וזוהרים ("כוכבים נופלים"). רק מעטים מהם מצליחים לפגוע בכדור-הארץ ואז הם נקראים "**מטאוריטים**".

39. מדוע משגרים לוויינים כך שהם נעים מזרחה במהלך ההקפה של כדור-הארץ?

40. לוויָן שמסתו 1,000 ק"ג נע סביב הארץ במסלול מעגלי, במהירות שגודלה 7 ק"מ לשנייה. מטאוריד שמסתו 100 ק"ג ומהירותו 20 ק"מ\שנייה מתנגש בלוויין. רגע לפני ההתנגשות, המטאוריד נע בכיוון תנועת הלוויין, לאחר ההתנגשות הוא נעצר רגעית, ולאחר מכן נופל.

א. באיזו מהירות פוגע המטאוריד בכדור-הארץ?

ב. חשבו את מהירות הלוויין לאחר ההתנגשות.

ג. האם הלוויין יינתק מכדור-הארץ?

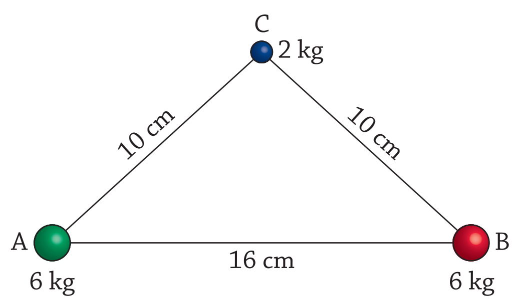
ד. מה תהיה צורת מסלול תנועתו של הלוויין לאחר ההתנגשות?

41. א. תחנת חלל המשמשת לוויָן תקשורת, מקיפה את כדור-הארץ במישורו של קו המשווה, ונשארת תמיד מעל אותה נקודה שעל פני הארץ. באיזה גובה מעל פני כדור הארץ נמצאת תחנת החלל?

ב. האם אפשר לקבוע לוויָן תקשורת שיישאר תמיד מעל הקוטב הצפוני? נמקו.

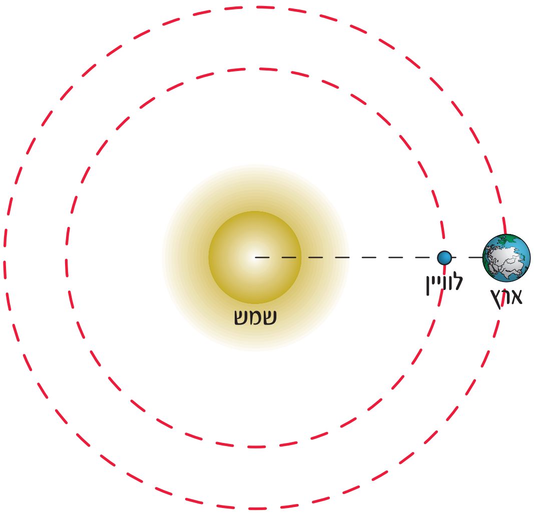
42. הראו כי ארבעת הירחים של כוכב הלכת צדק (ראו תמונה) שנתוניהם מפורטים בטבלה 3 שבגוף הפרק מקיימים את החוק השלישי של קפלר.

43. ABC הוא משולש שווה שוקיים. בקודקודיו נמצאים שלושה כדורים. ממדי המשולש ומסות הכדורים רשומים בתרשים.



חשבו את כוח הכבידה השקול המופעל על הכדור ב-C על-ידי שני הכדורים הנמצאים בנקודות A ו-B.

44. לוויין שכינויו SOHO נבנה לצורך תצפיות על השמש. הלוויין נע במסלול מעגלי סביב השמש, והוא נמצא כל הזמן על הקו המחבר את השמש לארץ, כמתואר בתרשים. הנח שגם המסלול של כדור הארץ סביב השמש הוא מעגל, לכן מרחק הלוויין מכדור הארץ קבוע.



א. זמן המחזור של הלוויין בתנועתו סביב השמש הוא שנה אחת.

כדור הארץ והלוויין נעים בזמני מחזור זהים, אך רדיוסי המסלולים שלהם שונים. מכאן נובע שהלוויין **אינו** מקיים (ביחס לשמש) את החוק השלישי של קפלר למסלולים מעגליים.

מהי הסיבה הפיזיקלית לאי קיום חוק זה?

ב. רשמו את החוק השני של ניוטון עבור תנועת הלוויין, באמצעות חמשת הגדלים שלפניכם:

r - הרדיוס של מסלול התנועה של כדור הארץ סביב השמש.

ω - המהירות הזוויתית של תנועת כדור הארץ סביב השמש.

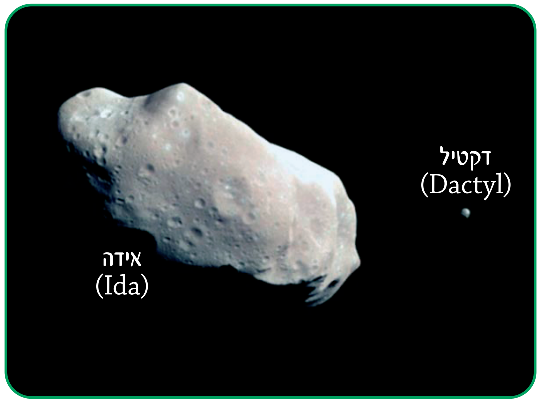
M_s - מסת השמש

M_E - מסת כדור הארץ

x - המרחק בין הלוויין לארץ.

אינכם נדרשים לפתור את המשוואה.

45. בתצלום מוצג האסטרואיד אידה (Ida). רדיוס מסלולו הממוצע סביב השמש הוא 430 מיליון ק"מ.



א. חשבו את זמן המחזור (בשנים) של תנועת האסטרואיד סביב השמש.

ב. את האסטרואיד מקיף ירח בשם דקטיל (Dactyl) (ראה תצלום). איזה מבין ההיגדים שלפניכם הוא הנכון?

(1) דקטיל יכול להיקרא כוכב לכת של אידה.
(2) דקטיל יכול להיקרא כוכב שביט של אידה.
(3) דקטיל יכול להיקרא לוויין של אידה.
(4) דקטיל יכול להיקרא כוכב של אידה.

46. א. הראו, כי הרדיוס המינימלי של כוכב שמסתו M, ושגודל מהירות המילוט ממנו שווה למהירות האור, c, הוא:

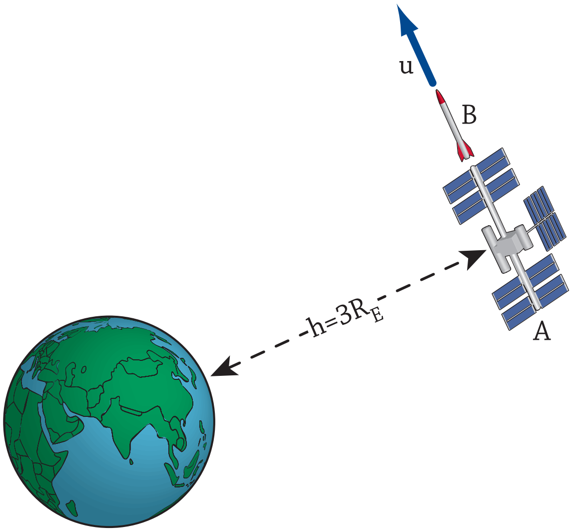
$$R_S = \frac{2GM}{c^2}$$

הערה: מהירות האור היא כידוע המהירות המרבית האפשרית. לכן מכוכב שרדיוסו $R \le R_S$ (R_S מכונה **רדיוס שוורצשילד**) שום גוף ואף אור, אינם יכולים להימלט, לכן כוכב כזה מכונה **חור שחור**. פיתוח הביטוי לרדיוס שוורצשילד נעשית במסגרת תורת היחסות הכללית. בתיאור "הניוטוני" יש כמה טעויות, אך מתברר כי טעויות אלה מקזזות האחת את האחרת, והתוצאה הסופית היא בכל זאת נכונה.

ב. חשבו את רדיוס שוורצשילד של כוכב שמסתו גדולה פי עשרה ממסת השמש.

ג. מה היתה צפיפותו הממוצעת של הכוכב אם החומר המצוי בכוכב היה "כלוא" בכדור שרדיוסו רדיוס שוורצשילד שחישבת.

47. רוצים להכניס תחנת חלל A לתנועה במסלול מעגלי סביב הארץ בשני שלבים. בשלב הראשון משגרים אותה בכיוון רדיאלי באמצעות טיל, עד שהיא מגיעה לגובה מרבי $h = 3R_E$ מעל פני הארץ.



לפני שתחנת החלל מגיעה לגובה המרבי, היא נפרדת מהטיל שנשא אותה. כאשר היא מגיעה לגובה המרבי, משגרים מתוכה טיל משני, B, במהירות שגודלה u, כמתואר בתרשים. כתוצאה משיגור הטיל המשני נכנסת תחנת החלל לתנועה מעגלית סביב הארץ בגובה $h = 3R_E$ מעל פניו.

נתון כי מסת תחנת החלל עם הטיל המשני שהיה בתוכה היא m, ומסת הטיל המשני היא m/3.

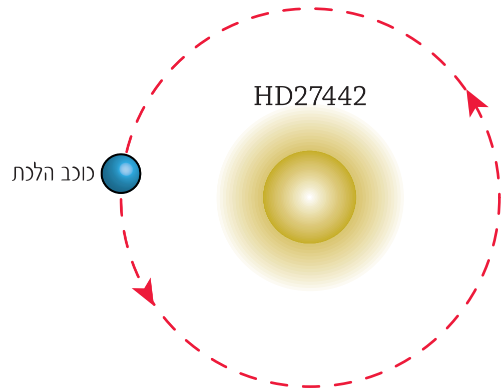
א. חשבו את גודל מהירות תחנת החלל בתנועתה סביב הארץ.

ב. חשבו את זמן המחזור של תחנת החלל בתנועתה סביב הארץ.

ג. מצאו את המהירות u (גודל וכיוון) שבה שוגר הטיל המשני.

ד. אסטרואיד נופל לעבר כדור הארץ. גודל תאוצתו של איזה גוף גדול יותר - של תחנת החלל או של האסטרואיד ברגע שהאסטרואיד נמצא בגובה $3R_E$ מעל פני הארץ בדרכו לעבר הארץ? נמקו.

48. בתחילת המאה העשרים ואחת התגלה שסביב הכוכב HD27442 נע כוכב לכת במסלול מעגלי.



א. בטאו את זמן המחזור, T, של כוכב הלכת סביב הכוכב באמצעות רדיוס מסלולו, r, ומסת הכוכב, M.

מצאו כי מסת הכוכב היא $M = 2.4 \cdot 10^{30}$ kg, וכי כוכב הלכת משלים סיבוב מעגלי אחד במשך 420 יממות.

ב. חשבו את מרחקו של כוכב הלכת מן הכוכב.

חוקרים מעריכים כי מסת כוכב הלכת היא $m = 2.4 \cdot 10^{27}$ kg. בגלל מסתו הגדולה, החוקרים מניחים כי הרכבו, ולכן גם צפיפותו של הכוכב, דומים לאלו של צדק. צפיפותו של צדק היא $\rho = 1250$ kg/m^3.

ג. (1) חשבו את רדיוסו של כוכב הלכת בהנחה שצפיפותו שווה לזו של צדק.

(2) חשבו את גודל תאוצת הנפילה החופשית על פניו של כוכב הלכת.

49. בניסוי המחשבתי של ניוטון (ראו איור 15 בגוף הפרק) הוא ניבא שאם יידו אבן מפסגת הר במהירות מתאימה, האבן תנוע במסלול מעגלי סביב הארץ, ובהזנחת התנגדות האוויר היא תנוע לנצח.

גודל תאוצת האבן בתנאים אלה יהיה:

(1) אפס, כי האבן תנוע בתנועה מעגלית קצובה.

(2) קטן מאוד לעומת g, כי האבן לעולם לא תפגע בקרקע.

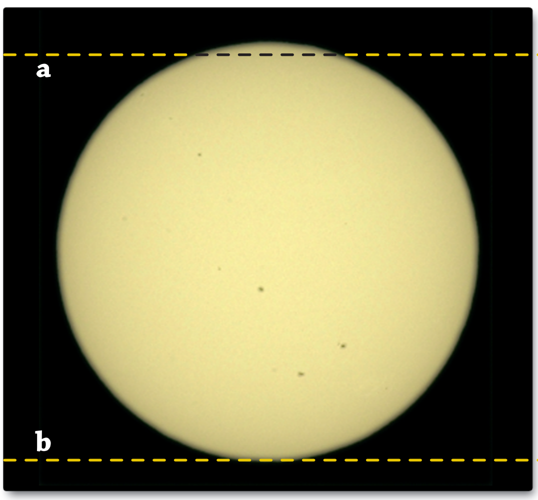
(3) שווה בקירוב ל-g, כי גודל תאוצת הנפילה החופשית בפסגת ההר הוא בקירוב g.

(4) הרבה יותר גדול מ-g, כי האבן תנוע במהירות עצומה.

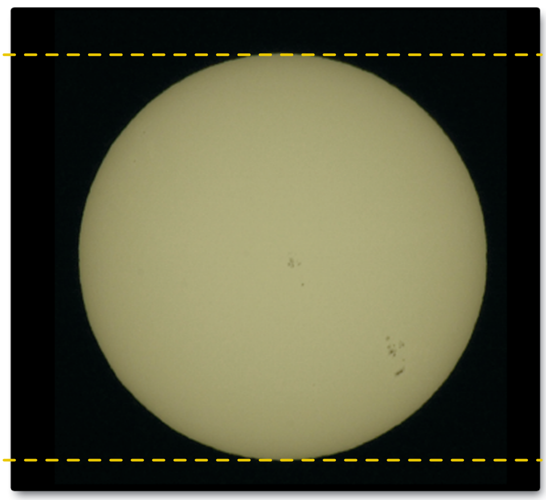
50. בתחתית העמוד מופיעים שני תצלומים של השמש שבוצעו מגן המדע שבמכון ויצמן למדע (שים לב, האתר ממוקם, כמובן, בחצי הצפוני של כדור הארץ): תצלום א נעשה ביום 14 ביולי 2003, ותצלום ב ביום 14 בינואר 2003.

א. קבעו, על-פי הגדלים של תמונות השמש, מתי הארץ רחוקה יותר מן השמש - בקיץ או בחורף? נמקו. שימו לב לשני הקווים המקבילים a ו-b שנוספו לתמונות (התעלם מהצבעים השונים של השמש בשני התצלומים).

ב. באיזה חודש, ינואר או יולי, מהירות הארץ בתנועתה סביב השמש גדולה יותר? נמקו.



ב. בחורף



א. בקיץ

51. משגרים לוויין למסלול מעגלי סביב כדור הארץ. גובה הלוויין מעל פני כדור הארץ שווה לרדיוס כדור הארץ.

א. חשבו את גודל מהירות הלוויין במסלול תנועתו.

ב. חשבו את זמן המחזור של הלוויין בתנועתו סביב הארץ.

ג. חשבו את גודל תאוצת הנפילה החופשית בגובה הלוויין.

ד. סרטטו גרף מקורב של גודל תאוצת הנפילה החופשית כפונקציה של הגובה מעל פני הארץ, החל מגובה 0 עד לגובה שבו נע הלוויין.

ה. בתוך הלוויין שוקלים גוף באמצעות דינמומטר. לפני שיגור הלוויין מכן השיגור, הדינמומטר מורה על 50 ניוטון. מהי הוריית הדינמומטר בכל אחד מהמצבים הבאים:

(1) בתחילת השיגור, קרוב לפני הארץ, כאשר טיל השיגור עולה בתאוצה קבועה של $2\ m/s^2$?

(2) במהלך תנועת הלוויין סביב הארץ? הסבר.

52. רדיוס המסלול של אסטרואיד הנע במסלול מעגלי סביב השמש הוא $r = 4 \cdot 10^{11}\ m$.

א. חשבו, בעזרת החוק השלישי של קפלר, את זמן המחזור של האסטרואיד.

ב. (1) הגדירו את המושג "מהירות זוויתית".

(2) חשבו את המהירות הזוויתית של האסטרואיד.

ג. חשבו את גודל המהירות של האסטרואיד.

ד. (1) האם האסטרואיד מואץ? אם כן – חשבו את גודלה של התאוצה. אם לא – הסבירו מדוע.

(2) האם פועל כוח על האסטרואיד? אם כן – ציינו איזה סוג כוח זה, ומה מפעיל אותו. אם לא – הסבירו מדוע.

53. נניח כי אדם ניצב על פני הירח, באזור הפונה אל כדור הארץ, ועורך תצפית על כדור הארץ במשך כמה שבועות. כיצד הוא יתאר, על סמך תצפיות בלבד, את תנועת הארץ?

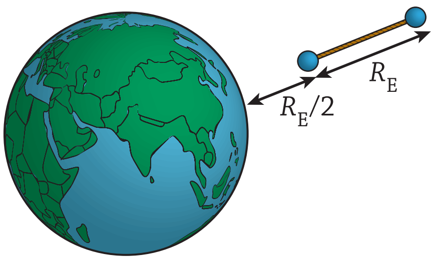
54. א. מולקולת גז נמצאת במרחק r ממרכז הארץ. בטאו באמצעות r, R_E ו-g את גודל מהירות המילוט של המולקולה.

ב. חשבו את גודל מהירות המילוט למולקולה הנמצאת בגובה 1000 ק"מ מפני (1) הארץ; (2) הירח; (3) השמש.

III. תרגילי העמקה

תרגילים 55 - 61 נועדו להעמקה.

55. שני כדורים, בעלי מסה m כל אחד, קשורים זה לזה באמצעות חוט דמיוני שאורכו שווה ל- R_E (רדיוס הארץ), ומסתו ניתנת להזנחה. מערכת שני הכדורים הקשורים נופלת לעבר הארץ.



א. הסבירו מדוע מתיחות החוט אינה אפס.

ב. הראו כי מתיחות החוט ברגע שבו הכדור הקרוב לארץ נמצא במרחק $R_E/2$ מפני הארץ, היא

$$T = \frac{32}{225}\ mg$$

כאשר g - גודל תאוצת הנפילה החופשית על פני הארץ.

56. גוף שמסתו 100 ק"ג נופל ממנוחה מנקודה A אל כוכב לכת שגודל תאוצת הנפילה החופשית על פניו היא 10 מ'\ש'². המרחק מהנקודה A עד פני הכוכב הוא 10^7 מטר. רדיוס כוכב הלכת הוא 10^7 מטר.

א. חשבו את גודל תאוצת הנפילה החופשית בנקודה A.

ב. סרטטו גרף המתאר את גודל תאוצת הגוף כפונקציה של מרחקו ממרכז כוכב הלכת, בתנועתו מ-A עד פני כוכב הלכת.

★ג. העריכו את משך נפילת הגוף מרגע שחרורו עד רגע פגיעתו בפני כוכב הלכת, באמצעות קביעת גבול עליון וגבול תחתון עבור משך הנפילה.

57. אסטרונאוט הנע סביב כדור-הארץ במסלול מעגלי, רוצה להכניס את ספינת החלל שלו למסלול מעגלי אחר בעל רדיוס גדול יותר. אֵילו הוראות הייתם נותנים לו כדי לבצע זאת?

58. מסת הירח קטנה בקירוב פי 81 ממסת כדור הארץ, והמרחק d בין מרכז כדור-הארץ לבין מרכז הירח הוא בקירוב $60R_E$ (R_E - רדיוס הארץ). על הישר המקשר את מרכזי כדור-הארץ והירח נמצאת נקודה O אשר גוף שיוצב בה במנוחה יישאר במנוחה.

א. בטאו באמצעות R_E בלבד את מרחק הנקודה O ממרכז כדור-הארץ.

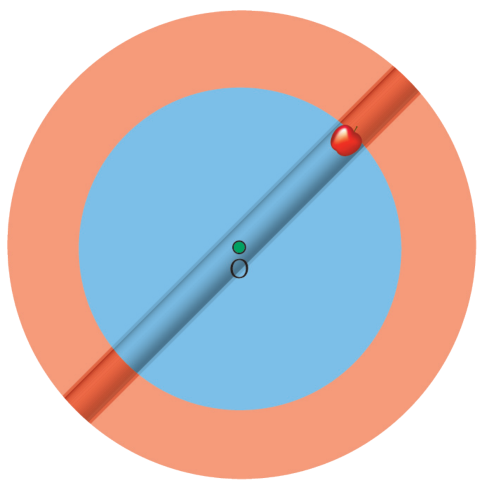
ב. משגרים לירח חללית שמסתה m מכַן שיגור הנמצא על כדור-הארץ, לאורך הישר המחבר את מרכז הירח עם מרכז כדור-הארץ. בטאו באמצעות m, R_E ו-g את האנרגיה המינימלית, E, שיש להעניק לחללית כדי להעלות אותה לנקודה O.

התחשבו בהשפעות כדור-הארץ והירח על החללית, והזניחו את סיבוב כדור-הארץ על צירו.

59. במצב דמיוני, קודחים מנהרה דרך כדור-הארץ, שעוברת דרך מרכז כדור הארץ, O. הנח שהארץ היא כדורית, וכי צפיפותה אחידה.

משחררים תפוח מאחד משני פתחי המנהרה. הוכיחו שתנועת התפוח היא הרמונית פשוטה.

הנחיה: הסתמכו על כך שבמהלך תנועת התפוח, בכל נקודה שבה הוא נמצא, הכוח השקול שמפעילה עליו הקליפה החיצונית של כדור הארץ, זו שרדיוסה הפנימי שווה למרחק התפוח ממרכז הכדור (ראו צבע כתום באיור), שווה לאפס.



60. על-פי אחת התאוריות, המקור של סוג מסוים של מטאוריטים שנמצאו על פני הארץ הוא בהתפרצויות געש על פני הירח.

א. חשבו את הגודל המִזערי של המהירות שבה היה צריך להיפלט מטאוריט מפני הירח, כדי להגיע לכדור-הארץ.

ב. חשבו את גודל המהירות בה פגע מטאוריט בכדור-הארץ.

הנחיה: המרחק ממרכז הארץ למרכז הירח שווה בקירוב ל-$60R_E$. על-פי תרגיל 58, על המטאוריט להגיע במהירות אפס לנקודה הנמצאת בין הירח וכדור-הארץ, שבה כוחות המשיכה של כדור-הארץ והירח שווים בגודלם. נקודה זו נמצאת במרחק $6R_E$ ממרכז הירח. התחשבו, בתרגיל זה, בהשפעות הירח והארץ על אנרגיית המטאוריט.

מכתש במדינת אריזונה בארה"ב. קוטר המכתש 1,186 מ', עומקו כ-175 מ' והוא נוצר לפני כ-49,000 שנה כתוצאה מפגיעת מטאוריט שגודלו היה כ- 50 מ'. בעקבות הפגיעה של מטאוריט הטמפרטורה עלתה במידה רבה מאוד, עד כי הסלעים באתר ההתנגשות ניתכו.

מקור התצלום הוא באתר אינטרנט של סוכנות החלל האמריקאית - NASA.

אין בהכרח קשר בין המכתש המתואר בתצלום לבין התאוריה המוזכרת בתרגיל 60.

61. מדוע מיקמו בארה"ב את אתר השיגור של לוויינים **בדרום** המדינה (בקייפ קנוורל, Cape Canaveral, שבפלורידה)?

תשובות

1. הנחיה: סרטטו גרף של T^2 כפונקציה של r^3.

2. 64 שנות ארץ

3. בינואר, כי ...

4. ה. הסימטריה קשורה לחוק השלישי של ניוטון ...

5. א. $\approx 2 \cdot 10^{20}$ N

ב. כן, על פי ... וגודלו ...

6. פי 9

7. מצד אחד על הגוף שמסתו גדולה יותר פועל כוח כבידה גדול יותר, אך מצד שני ...

8. 2640 km

9. א. $0.39g_E$

ב. 312 N

10. בערך פי 10^{10}

11. אבל המרחק בין ... לבין ... אינו אפס.

12. $\approx 4.06 \cdot 10^{-7}$ N

13. $\frac{4GMm}{d^2}$ ימינה

14. א. 9037 s

ב. ≈ 6515 m/s

ג. 9.6 סבובים בקירוב

15. ההיגד הנכון הוא (2), כי ...

16. א. 0.25

ב. 4r

17. הנחיה: אפשר למדוד את זמן המחזור של הירח ואת רדיוס מסלולו.

18. $3\pi/G$

19. ההיגד הנכון הוא (1), כי ...

20. א. ≈ 2.4 N/kg

ב. ≈ 7.2 N ; ≈ 4.8 N ; ≈ 2.4 N

21. א. (1) כוח כבידה: 800 N; משקל: 1200 N

(2) כוח כבידה: ≈ 320 N; משקל: ≈ 720 N

ב. כוח כבידה: ≈ 222 N; משקל: 0

ג. כוח כבידה: ≈ 114 N; משקל: 0

ד. כוח כבידה: ≈ 222 N; משקל: 0

ה. כוח כבידה: ≈ 498 N; משקל: 0

ו. המשקל של גוף שווה לכוח הכבידה של הארץ הפועל עליו כאשר לגוף אין תאוצה ביחס לארץ.

22. 2 N

25. א. ≈ 900 km

ב. ≈ 3.2 km/s

26. א. ≈ 7.72 km/s

ב. $\approx -1.4 \cdot 10^{11}$ J

27. 90°

28. $\approx 3.3 \cdot 10^{10}$ J

29. א. $r = \sqrt[3]{\frac{GM_E T^2}{4\pi^2}}$

ב. $v = \sqrt[3]{\frac{2\pi GM_E}{T}}$

ג. $GM_E m\left(\frac{1}{R_E} - \sqrt[3]{\frac{\pi^2}{2GM_E T^2}}\right)$

30. $\frac{gmR_E^2}{2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$

31. א. ≈ 7710 m/s

ב. $1.15 \cdot 10^{-3}\ s^{-1}$

ג. $\approx 8.87\ m/s^2$

ה. ≈ 8870 N

ו. אפס

ז. $\approx -3 \cdot 10^{10}$ J

32. $\approx 4.46 \cdot 10^9$ J

33. א. $5\ m/s^2$

ב. 10,000 km

ג. $7.5 \cdot 10^{24}$ kg

ד. $1.8\ gr/cm^3$

34. א. $\approx 2 \cdot 10^{14}\ gr/cm^3$

ב. $\approx 4 \cdot 10^{14}\ gr/cm^3$

ג. $\approx 1.578 \cdot 10^8\ m/s \approx 0.526c$

35. א. $\approx 0.27\ m/s^2$

36. פתרונו של תלמיד ב הוא הנכון.

37. א. (1) שונת תאוצה; התאוצה הולכת וגדלה.

(2) $\sqrt{\frac{2gRh}{R+h}}$

ב. (1) שוות תאוצה.

38. א. ללוויין הראשון רדיוס גדול פי ארבעה.

ב. ללוויין הראשון זמן סיבוב גדול פי שמונה.

ג. כן.

39. הדבר קשור למגמת הסיבוב של הארץ סביב צירה.

40. א. $\approx 5.2\ \text{km/s}$

ב. $\approx 9\ \text{km/s}$

ג. לא

ד. מסלול אליפטי.

41. א. $\approx 35{,}800\ \text{km}$ (הנחיה: זמן מחזור של הלוויין צריך להיות שווה ליממה).

43. $\approx 9.6\cdot10^{-8}\ \text{N}$ לעבר אמצע בסיס המשולש.

44. א. הנחיה: חוקי קפלר תקפים לגבי גופים הנעים בהשפעת שדה כבידה של אותו גרם שמיים יחיד.

45. א. בערך 4.85 שנים

ב. ההיגד הנכון הוא (3).

46. ב. $\approx 29.6\ \text{km}$

ג. $\approx 1.84\cdot10^{14}\ \text{gr/cm}^3$

47. א. $4{,}000\ \text{m/s}$

ב. $\approx 11.11\ \text{h}$

ג. $8{,}000\ \text{m/s}$

ד. $g/16$ לשנייה

48. א. $T = 2\pi r\sqrt{\dfrac{r}{GM}}$

ב. $r \approx 1.75\cdot10^{11}\ \text{m}$

ג. (1) $R \approx 7.71\cdot10^{7}\ \text{m}$

(2) $g_{\text{על פני כוכב הלכת}} \approx 26.9\ \text{m/s}^2$

49. ההיגד הנכון הוא (3).

50. א. בקיץ, כי ...

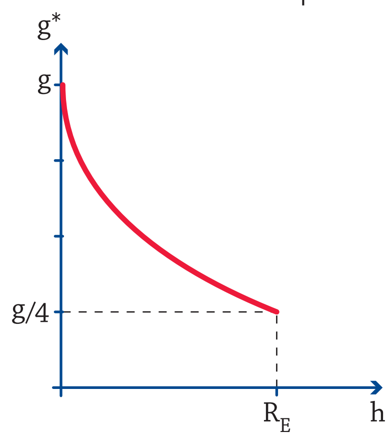
ב. בינואר, כי ...

51. א. $v \approx 5.64\ \text{km/s}$

ב. $T_{\text{לוויין}} \approx 3.94\ \text{h}$

ג. $g/4$

ד. הגרף:



ה. (1) $60\ \text{N}$

(2) 0

52. א. $T_{\text{אסטרואיד}} \approx 4.35\ \text{y}$

ב. (2) $\omega_{\text{אסטרואיד}} \approx 4.59\cdot10^{-8}\ \text{s}^{-1}$

ג. $v_{\text{אסטרואיד}} \approx 18.4\ \text{km/s}$

ד. (1) $a_{\text{אסטרואיד}} \approx 8.38\cdot10^{-4}\ \text{m/s}^2$

(2) כן - כוח כבידה המופעל על ידי השמש

53. הוא יאמר שכדור הארץ מסתובב סביב צירו.

54. א. $R_E\sqrt{\dfrac{2g}{r}}$

ב. (1) $10.4\ \text{km/s}$

(2) $1.9\ \text{km/s}$

(3) $620\ \text{km/s}$

55. א. הנחיה: רשמו את החוק השני של ניוטון עבור כל אחד משני הכדורים.

56. א. $2.5\ \text{m/s}^2$

ג. $1414\ \text{s} < t < 2828\ \text{s}$

הנחיה: תאוצת הנפילה משתנה מ-$2.5\ \text{m/s}^2$ עד $10\ \text{m/s}^2$. לכן, משך הנפילה נמצא בין משך הנפילה שהיה מתקבל אילו התאוצה היתה קבועה ושווה ל- $2.5\ \text{m/s}^2$ לבין משך הנפילה אילו התאוצה היתה קבועה ושווה ל- $10\ \text{m/s}^2$.

58. א. $54R_E$

ב. $\approx 0.9796\ mgR_E$

59. הנחיה: כאשר התפוח נמצא במרחק r ממרכז הארץ, אז המסה M של החלק הפנימי של הארץ, המושך את התפוח, היא: $M = \rho\cdot\dfrac{4}{3}\pi r^3$

60. א. $\approx 2.26\ \text{km/s}$

ב. $\approx 11.07\ \text{km/s}$

61. כדי לנצל את סיבוב הארץ סביב צירה.

נספח א: ניתוח כמותי של תנועת רקטה

נדון במצב הבא:

רקטה מואצת באמצעות מנוע סילון. נניח כי מלבד הכוח שהגז הנפלט מהמנוע מפעיל על הרקטה, לא פועלים עליה כוחות חיצוניים (כגון התנגדות אוויר או כוח כובד). מהירות הגז ביחס לציר y^* הצמוד לרקטה, ואשר וכיוונו זהה לכיוון תנועתה היא קבועה, וערכה u (גודל שלילי). ציר y הוא ציר של מערכת ייחוס אינרציאלית, המקביל לציר y^*. ברגע שיסומן כ- $t = 0$ מהירות הרקטה ביחס לציר y היא v_0, ומסת הרקטה ברגע זה היא m_0.

בטא את מהירות הרקטה כפונקציה של הזמן.

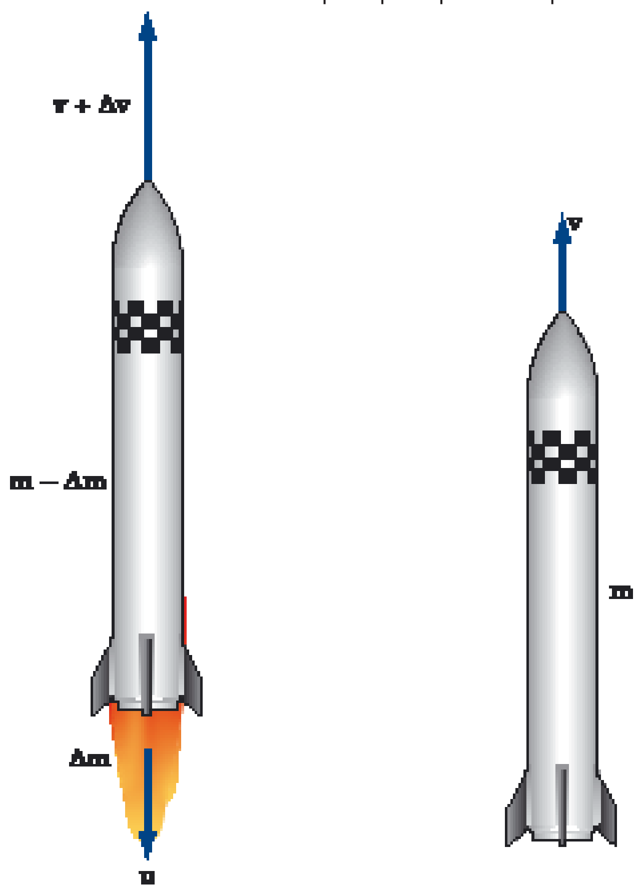
מכלל הטרנספורמציה של גלילאו עבור מהירויות נובע כי מהירות הגז ביחס לציר y היא $v + u$ (v חיובי ו- u שלילי).

נבחן את תנועת הרקטה בפרק זמן Δt (איור 1).

נסמן: v - מהירות הרקטה ביחס לציר y בתחילת פרק הזמן Δt.

Δm - הפחת במסת הרקטה במהלך פרק הזמן Δt (גודל חיובי).

Δv – השינוי במהירות הרקטה במהלך פרק הזמן Δt.



ב. בתום פרק הזמן Δt א. בתחילת פרק בזמן Δt

איור 1: הרקטה בשני רגעים

נרשום את התנע ההתחלתי, p_i בתחילת פרק הזמן Δt, ואת התנע הסופי, p_f בסוף פרק הזמן Δt; את שני הביטויים נרשום ביחס לציר האינרציאלי y:

התנע ההתחלתי:
$$p_i = mv$$

(הגז שנפלט מהרקטה עד תחילת פרק הזמן Δt אינו חלק מהמערכת שלגביה אנו מיישמים את חוק שימור התנע)

התנע הסופי של מערכת של הרקטה והגז שנפלט ממנה במהלך פרק הזמן Δt:
$$p_f = (m - \Delta m)(v + \Delta v) + \Delta m(v + u)$$

על מערכת הרקטה והגז שנפלט ממנה במהלך פרק הזמן Δt, לא פועל מתקף חיצוני, לכן התנע של המערכת נשמר:
$$(m - \Delta m)(v + \Delta v) + \Delta m(v + u) = mv$$

אחרי חילוק שני אגפי המשוואה ב- Δt, וארגון האברים נקבל:
$$(m - \Delta m)\frac{\Delta v}{\Delta t} + \frac{\Delta m}{\Delta t}u = 0$$

עבור פרקי זמן קצרים (ושואפים לאפס) אפשר להזניח את Δm לעומת m, ואז מתקבל:
$$m\frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{\Delta m}{\Delta t}u$$

המשוואה קושרת את קצב פליטת בגז, $(\Delta m/\Delta t)$ עם קצב שינוי מהירות הרקטה (התאוצה $\Delta v/\Delta t$).

אפשר לרשום את המשוואה כך:
$$-\frac{\Delta m}{\Delta t}u = ma \qquad (\text{א})$$

משוואה זו נראית כמשוואת התנועה $F = ma$,

כאשר הכוח F הוא:
$$F = -\frac{\Delta m}{\Delta t}u$$

שימו לב: u שלילי.

כוח זה מכונה **כוח הדחף (thrust)** של הרקטה; הוא שווה למכפלת קצב פליטת הגז במהירות הפליטה שלו יחסית לרקטה.

משוואת התנועה (א) אינה דומה למשוואות התנועה שהכרנו עד כה, כי היא אינה מתייחסת לגוף בעל מסה מוגדרת. m היא מסתו של חלק הרקטה שנותר באותו רגע, והיא משתנה מרגע לרגע. מהירותו של הגוף המשתנה הזה מתקבלת מתוך פתרונה של משוואה (א). לא נציג את אופן הפתרון אלא רק את התוצאה הסופית.

גודל מהירותה של רקטה:
$$v = v_0 + u \cdot \ell n\frac{m_0}{m}$$

כאשר m היא המסה המשתנה כפונקציה של הזמן.

נוסחה זו נקראת **נוסחת צליולקובסקי** לכבודו של המדען שפיתח אותה- קונסטנטין צליולקובסקי (Konstantin Tsiolkovsky, 1857 - 1935).

הערה: אם פועלים על הרקטה כוחות חיצוניים (התנגדות אוויר, כוח כובד) יש לקחת בחשבון גם את השפעתם על תנועת הרקטה.

נספח ב: קבוע המופע בתנועה הרמונית פשוטה

בנספח זה נדון בחישוב ערכיהם של הקבועים A ו-ϕ המופיעים בפתרון הכללי של משוואת התנועה ההרמונית.

משוואת התנועה של גוף שמסתו m הנע בהשפעת כוח שקול שהביטוי המתמטי שלו $F = -cx$, היא (ראה פרק ח, משוואה (6)):

$$\ddot{x}(t) = -\frac{c}{m}x(t) \qquad (1)$$

הפתרון הכללי של המשוואה (ראו פרק ח, משוואה (7))

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \qquad (2)$$

כלומר הגוף מתנודד בתדירות זוויתית $\omega = \sqrt{c/m}$ סביב נקודת שיווי משקל. אם נדע את ערכיהם המספריים של m ו- c, נוכל לחשב את התדירות הזוויתית ω, אך לא את A ו- ϕ. פתרון (2) יקיים את משוואת התנועה (1) עבור כל ערך שנבחר באופן שרירותי ל- A ו-ϕ. **כדי לקבוע את הערכים המספריים של A ו-ϕ המתאימים מבחינה פיסיקלית לתנועה מסויימת, דרוש מידע נוסף**. אם נשחרר את הגוף למשל ממנוחה ממרחק 50 ס"מ מנקודת שיווי המשקל, אז A יהיה שווה ל- 50 ס"מ. ϕ לעומת זאת, נקבע על ידי בחירת הראשית של ציר הזמן: אם נבחר את $t = 0$ למשל ברגע שבו הגוף נמצא בנקודה הרחוקה ביותר מימין לנקודת שיווי המשקל ($x = A$), אז מקום הגוף כפונקציה של הזמן יתואר על-ידי $x = A\cos\omega t$ ואז $\phi = 0$ (ראו גם הסבר בסעיף 3.1).

חישוב שני קבועים אלה מצריך כאמור מידע נוסף על התנועה, שבעזרתו נוכל לרשום שתי משוואות בלתי תלויות. אם נדע למשל את $x(3)$ (מיקום הגוף ברגע $t = 3$ s) ואת $x(7)$ נוכל להציב נתונים אלה במשוואה (2) ונקבל שתי משוואות, שמהן נוכל לחשב את שני הנעלמים A ו- ϕ.

מידע אחר שבאמצעותו נוכל לחשב את הקבועים הוא המקום והמהירות ברגעים מסוימים. נבהיר זאת: נוסחת מהירות-זמן היא:

$$v(t) = -\omega A\sin(\omega t + \phi) \qquad (3)$$

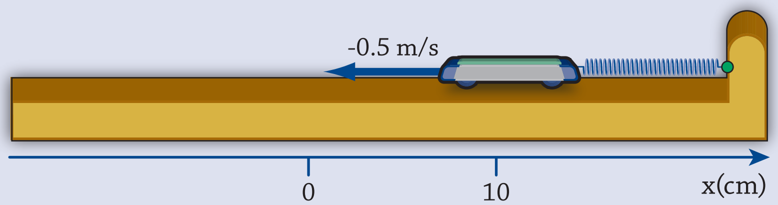
אם נדע למשל את $x(3)$ ואת $v(5)$, נוכל להציב את $x(3)$ במשוואה (2) ואת $v(5)$ במשוואה (3), ושוב נקבל שתי משוואות עם אותם שני נעלמים.

המידע הנוסף שלו אנו זקוקים כדי לקבוע את הערכים המספריים של A ו- ϕ ניתן בצורה נוחה על ידי המיקום והמהירות ברגע $t = 0$, כלומר על ידי **תנאֵי התחלה**. אין במשוואות התנועה די כדי לקבוע את המסלול המדויק; יש צורך גם בידיעת תנאֵי התחלה - מיקום ומהירות התחלתיים, או שני פרמטרים שקולים להם.

למעשה, כאשר מוצאים ערך מסוים ל- ϕ המקיים את המשוואות, אזי כל המספרים $\phi + 2\pi k$ כאשר $k = 0, \pm1, \pm2,...$ מקיימים אותן (מדוע?). נוכל לבחור ערך כלשהו מבין אינסוף ערכים אלה. מאחר ומחזור הפונקציה קוסינוס הוא 2π, ניתן לבחור את ϕ מתוך תחום שרוחבו 2π. נחליט (באופן שרירותי) שהתחום ממנו נבחר את ϕ הוא $-\pi < \phi \le \pi$.

דוגמה 1

קרונית שמסתה 0.2 kg מונחת על משטח אופקי חסר חיכוך, בנקודה ששיעורה $x = 0$, וקשורה לקפיץ אופקי בעל קבוע 20 N/m. מכווצים את הקפיץ בשיעור של 10 cm ומעניקים לקרונית מהירות התחלתית שגודלה 0.5 m/s לעבר נקודת שיווי המשקל (ראו איור 1). מהי נוסחת מקום-זמן של תנודות הקרונית?



איור 1: איור דוגמה 1

פתרון:

התדירות הזוויתית של התנודות: $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{20}{0.2}} = 10s^{-1}$

נוסחת מקום-זמן $x(t) = A\cos(10t + \phi)$

נוסחת מהירות-זמן $v(t) = -10A\sin(10t + \phi)$

תנאֵי ההתחלה: ברגע $t = 0$ הגוף בנקודה ששיעורה $x(0) = 0.1$ m ומהירותו $v_0 = -0.5$ m/s.

נציב בנוסחת מקום-זמן $t = 0$ ו- $x(0) = 0.1$ m ונקבל:

$$0.1 = A\cos(10 \cdot 0 + \phi) \qquad (\text{א})$$

נציב בנוסחת מהירות-זמן $t = 0$ ו- $v_0 = -0.5$ m/s ונקבל:

$$-0.5 = -10A\sin(10 \cdot 0 + \phi) \qquad (\text{ב})$$

נחלק את שתי המשוואות האחרונות האחת בשנייה ונקבל:

$$\frac{0.1}{0.5} = \frac{\cos\phi}{10\sin\phi} \quad \Rightarrow \quad \tan\phi = 0.5$$

פתרון המשוואה הטריגונומטרית האחרונה בתחום $-\pi < \phi \le \pi$ הוא $\phi \approx 0.46$ rad (או $\phi = 26.6°$).

נציב במשוואה (א) $\phi = 0.46$:

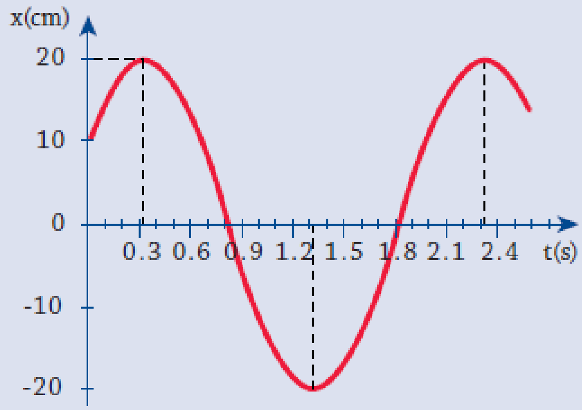
$$0.1 = A\cos(0.46)$$

ומכאן: $A \approx 0.11$ m

לסיכום, נוסחת מקום-זמן של הגוף המתנודד היא $x(t) = 0.11\cos(10t + 0.46)$, כאשר t ו-x נמדדים ביחידות SI.

דוגמה 2

באיור 2 מוצג גרף מקום-זמן של אוסצילטור הרמוני.



איור 2

מצאו את משרעת התנודות, התדירות הזוויתית, קבוע המופע ורשמו את נוסחת מקום-זמן.

פתרון:

המשרעת היא המרחק המרבי של הגוף מנקודת שיווי המשקל. על פי האיור, משרעת התנודה היא 20 ס"מ.

המרחק בין שתי הנקודות בהן העקומה חותכת את ציר הזמן הוא מחצית זמן המחזור. מרחק זה, ככל שניתן לדייק בקריאת נתון זה מהאיור, הוא שנייה אחת, ולפיכך זמן המחזור הוא 2 ש'.

התדירות הזוויתית של התנודות:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi \ s^{-1}$$

נוסחת מקום-זמן של התנועה ההרמונית (כאשר מקום נמדד בס"מ) היא:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) = 20\cos(\pi t + \phi)$$

נציב את תנאי ההתחלה: $t = 0$ ו-$x(0) = 10$ cm ונקבל: $10 = 20\cos\phi$

פתרונות המשוואה הטריגונומטרית בתחום $-\pi < \phi \le \pi$ הם: $\phi = \pm\pi/3$

איזה משני פתרונות אלה הוא קבוע המופע? נוסחת מהירות-זמן היא:

$$v(t) = -\omega A\sin(\omega t + \phi) = -20\pi\sin(\pi t + \phi)$$

וברגע $t = 0$: $v(0) = -20\pi\sin\phi$

$v(0) > 0$, כי בתחילת התנועה הגוף נע מנקודה ששיעורה 10 ס"מ לנקודה ששיעורה 20 ס"מ (או: שיפוע הגרף $x(t)$ הוא חיובי). לפיכך הסימן האלגברי של $\sin\phi$ צריך להיות שלילי, לכן מבין שתי האפשרויות, קבוע המופע הוא $\phi = -\pi/3$.

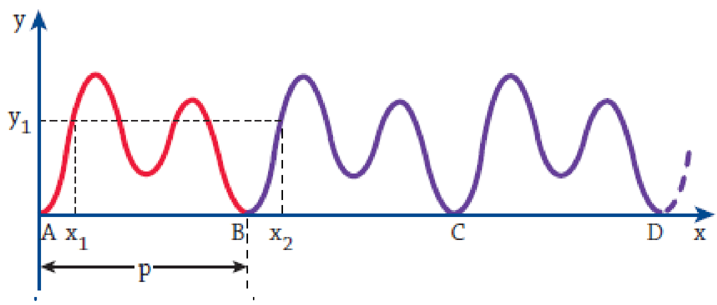
נוסחת מקום-זמן של האוסצילטור ההרמוני היא $x(t) = 0.2\cos(\pi t - \pi/3)$, כאשר t ו-x מבוטאים ביחידות SI.

נספח ג: פונקציות מחזוריות

1. המושג "פונקציה מחזורית"

איור 1 מציג גרף מחזורי. מהתבוננות בגרף רואים כי נוכל לסרטט את העקומה בכל תחום הגדרתה, אם נכיר רק את צורתו של חלק העקומה המוגדר בתחום AB. נעשה זאת כך: נסרטט את חלק העקומה בתחום AB, לאחר מכן נחזור ונסרטט את אותו חלק עקומה בתחום BC, וכך הלאה.

בניסוח אחר: אם נבחר נקודה כלשהי על ציר ה- x (לדוגמה x_1 באיור 1) בה ערך הפונקציה הוא y_1, ו"נזוז" לאורך ציר x לנקודה x_2 (ראו איור 1) שמרחקה מ- x_1 שווה לאורך הקטע AB, אז ערך הפונקציה בנקודה x_2 יהיה אף הוא y_1. תכונה זו אינה אופיינית רק ל- x_1 אלא לכל נקודה. ערך הפונקציה בנקודה כלשהי שווה לערך הפונקציה בנקודה הנמצאת במרחק AB ממנה. המרחק AB מכונה מחזור הפונקציה, אותו נסמן באות p.



איור 1: גרף מחזורי

הגדרת המושגים "פונקציה מחזורית" ו"מחזור של פונקציה":

פונקציה $f(x)$ היא מחזורית, אם קיים מספר p השונה מאפס, כך שלכל x מתקיים:

$$f(x) = f(x + p) \qquad (1)$$

אם קיים מספר אחד p המקיים את שוויון (1), אזי אינסוף הערכים ... ,2p, 3p מקיימים אותו.

המספר החיובי p הקטן ביותר המקיים את שוויון (1) נקרא **מחזור הפונקציה**.

שאלה: מהתבוננות בגרף הפונקציה $f(x) = x^2$ אפשר לראות שפונקציה זו **אינה** מחזורית. עם זאת, עבור $p = 6$ מתקיים $f(-3) = f(-3 + p)$, כך שלכאורה פונקציה זו היא מחזורית. כיצד תיישבו 'סתירה' זו?

2. הפונקציה $y = A\cos(ax)$

האם הפונקציה $y = A\cos(ax)$ היא מחזורית? אם כן, מהו המחזור שלה?

נבדוק אם קיים מספר p (שונה מאפס) כך שלכל x מתקיים שוויון (1), כלומר:

$$A\cos(ax) = A\cos[a(x+p)] \quad (2)$$

פתרונות משוואה טריגונומטרית זו מקיימים:

$$ax = a(x+p) + 2\pi k \quad (\text{א})$$

או:

$$ax = -a(x+p) + 2\pi k \quad (\text{ב})$$

כאשר $k = 0, \pm1, \pm2, ...$

נבחן תחילה את סדרת פתרונות (ב):

אחרי ארגון מחדש של אברי משוואה (ב) נקבל:

$$p = -2x + \frac{2\pi k}{a} \quad (\text{ג})$$

כל ערך p בסדרה (ג) תלוי ב- x. כלומר לכל x, קיים p **אחר** המקיים את שוויון (2), לכן אף אחד מערכי p הנתונים ב- (ג) אינו מהווה מחזור הפונקציה.

נבחן את סדרת פתרונות (א):

אחרי ארגון מחדש של אברי משוואה (א) נקבל:

$$p = -\frac{2\pi k}{a} \quad (\text{ד})$$

הפעם, התקבלה סדרה אינסופית של ערכי p, **שאינם תלויים ב- x**, וכל אחד מערכים אלה מקיים את תנאי (2), לכן הפונקציה $y = A\cos(ax)$ היא מחזורית.

מחזור הפונקציה הוא כאמור המספר החיובי **הקטן ביותר** המקיים את שוויון (2). המספר החיובי הקטן ביותר בסדרת ערכי p הנתונים בביטוי (ד) מתקבל עבור $k=-1$, והוא $p = \frac{2\pi}{a}$. לכן:

המחזור, p, של הפונקציה $y = A\cos(ax)$ הוא:

$$\boxed{p = \frac{2\pi}{a}} \quad (3)$$

תרגיל: סרטטו, באמצעות גיליון אלקטרוני, את הגרפים של הפונקציות הרשומות להלן. לכל פונקציה קבעו, בעזרת הגיליון האלקטרוני, את המחזור שלה, והשוו אותו עם תוצאת החישוב המתקבלת מנוסחה (3).

הפונקציות הן:

$y = \cos(2x)$

$y = 2\cos(3x)$

$y = 3\cos(0.5x)$

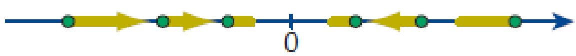
נספח ד: ניתוח תנועה הרמונית פשוטה באמצעות תנועה מעגלית

בסעיף 3.1 שבפרק ח פותחו הנוסחאות הבסיסיות של התנועה ההרמונית באמצעות חשבון דיפרנציאלי. נספח זה מציע דרך חלופית לפיתוח נוסחאות אלה, ללא שימוש בחשבון דיפרנציאלי.

כאשר גוף שמסתו m נע בתנועה הרמונית פשוטה, תאוצתו מקיימת:

$$a(t) = -\frac{c}{m}x(t) \qquad (1)$$

כאשר $x(t)$ מקום הגוף ביחס לציר שראשיתו בנקודת שיווי המשקל (ראה נוסחה (3) בפרק ח). כלומר, התאוצה מכוונת לעבר נקודת שיווי המשקל, וגודלה משתנה ביחס ישר למרחק הגוף מנקודה זו (איור 1).

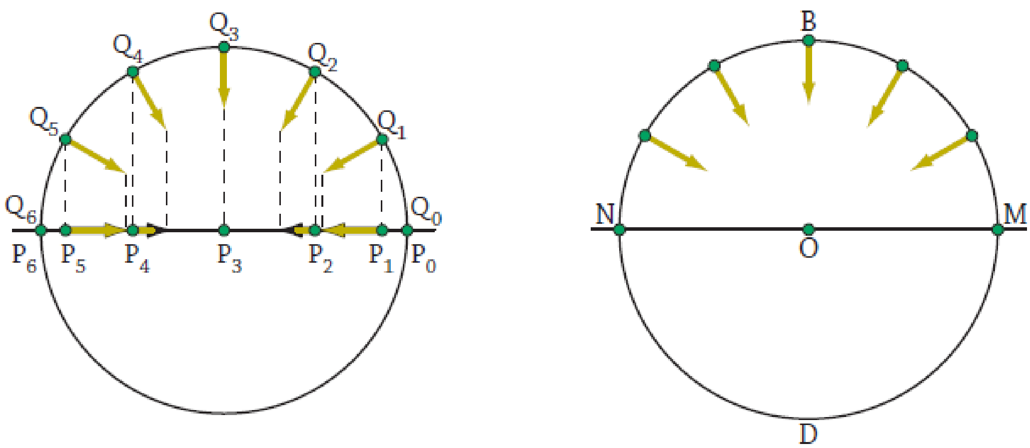


איור 1: כיווני התאוצה של הגוף בתנועה הרמונית פשוטה

אילו פונקציות $x(t)$, $v(t)$ ו-$a(t)$ מתארות את התנועה ההרמונית?

כדי לענות על שאלה זו, נשווה תחילה את התאוצה בתנועה הרמונית פשוטה לתאוצה בתנועה מעגלית קצובה: בשתי התנועות התאוצה מכוונת בכל רגע לעבר נקודה אחת (איורים 1 ו- 2א). אך בניגוד לתנועה ההרמונית, התנועה המעגלית הקצובה אינה מתנהלת לאורך קו ישר, ובנוסף לכך התאוצה קבועה בגודלה.

נצעד צעד נוסף, ונשווה את התאוצה בתנועה הרמונית פשוטה, לא עם תאוצתו של גוף הנע בתנועה מעגלית קצובה, אלא עם **התאוצה של היטל הגוף על אחד הקטרים של המעגל**. כאשר הגוף נע לאורך מסלול מעגלי, נע היטלו הלוך ושוב בין קצות הקוטר האופקי. כאשר גוף Q משלים מחזור אחד לאורך המעגל, לדוגמה מ- M←D←N←B←M (איור 2א) ינוע היטלו, P, לאורך הקוטר מ-M ל-N וחזרה ל- M.



ב. של היטל הגוף על הקוטר האופקי

א. של גוף בתנועה מעגלית קצובה

איור 2: כיווני התאוצה

אם נסתכל על תאוצת ההיטל (השווה לרכיב האופקי של תאוצת הגוף), נראה (איור 2ב) שבקצה הקוטר גודל תאוצת ההיטל הוא מרבי. כאשר ההיטל מתקרב אל מרכז המעגל תאוצתו הולכת וקטנה, עד שהיא מתאפסת ב- O. תאוצת ההיטל בכל רגע מכוונת לנקודה O. יתכן (ואת זאת נבחן בהמשך), שתאוצת ההיטל לא רק שהיא מכוונת בכל נקודה לעבר נקודת שיווי המשקל, אלא גם מתקיים שגודלה נמצא ביחס ישר למרחק ההיטל מנקודת שיווי המשקל. אם כך יהיו פני הדברים, נסיק שההיטל נע בתנועה הרמונית פשוטה.

הפונקציות $x(t)$, $v(t)$ ו-$a(t)$ המתארות את תנועת ההיטל

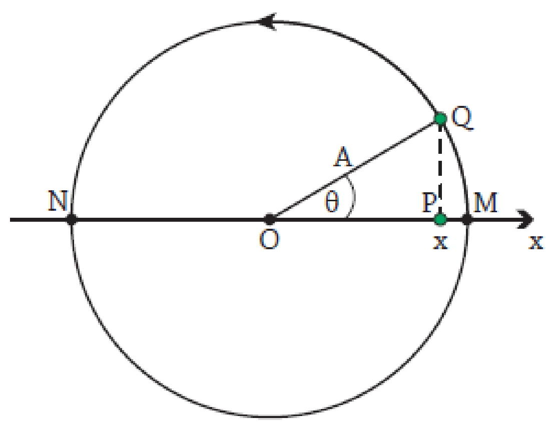
נתבונן בגוף הנע לאורך מעגל שרדיוסו A, במהירות זוויתית קבועה ω. סימנו ב-Q את הנקודה שבה הגוף נמצא, וב-P את היטל הגוף על הקוטר האופקי, אשר ישמש גם ציר מקום שראשיתו במרכז המעגל. P היא אמנם נקודה גאומטרית ולא חומרית, אך יש משמעות למקומה, למהירותה ולתאוצתה כפונקציות של הזמן. פונקציות אלה נקבעות על ידי תנועתו המעגלית של הגוף החומרי, ועל ידי תנאֵי ההתחלה, כלומר על-ידי החלטתנו היכן ייִמצא ההיטל ברגע שיוגדר כאפס. נבחר את $t_0 = 0$ כרגע שבו הגוף נמצא בדיוק בקצה הימני, M, של הקוטר.

פונקציית מקום-זמן של ההיטל

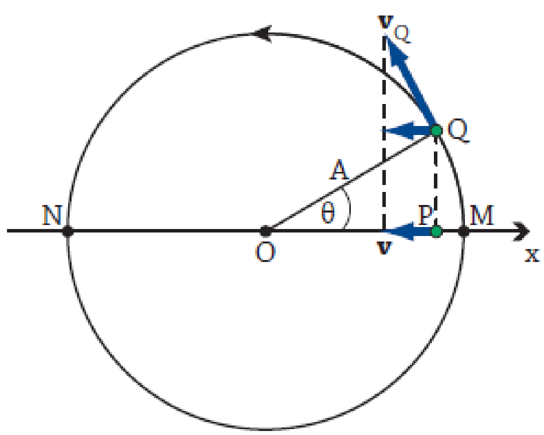
ברגע t כלשהו הגוף נמצא בנקודה Q על המעגל, ושיעור ההיטל P הוא x כמתואר באיור 3. את ציר ה- y לא סרטטנו. הרדיוס OQ יוצר עם הציר x זווית θ, שביטויה $\theta = \omega t$. מהתבוננות במשולש OQP מתברר כי $x = A\cos\theta$. משתי הנוסחאות האחרונות נקבל:

$$x = A\cos\omega t \qquad (2)$$

באמצעות נוסחה (2) אפשר לחשב את מקומה של P לאורך ציר ה- x בכל רגע.



איור 3: מקום ההיטל ברגע t



איור 4: מהירות ההיטל ברגע t

פונקציית מהירות-זמן של ההיטל

וקטור מהירות הגוף משיק בכל נקודה למעגל, וגודלו $v_Q = \omega A$. מאחר ו-P היא היטלה של Q על הציר x, גודל מהירותה v חייב להיות שווה בכל רגע לגודל רכיב ה-x של מהירות הגוף הנע במעגל. מאיור 4 עולה כי גודל המהירות של P:

$$v = v_Q \sin\theta = \omega A \sin\omega t$$

מהירותה של P:

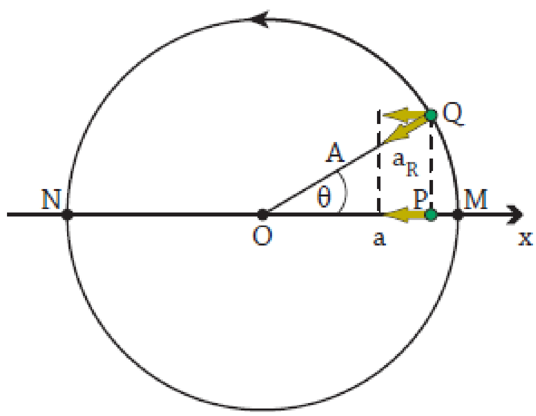
$$v = -\omega A\sin\omega t \qquad (3)$$

הוספנו את הסימן האלגברי מינוס, כי כאשר ההיטל נע שמאלה - הסימן האלגברי של המהירות צריך להיות שלילי. ואמנם, במצב זה הגוף נע לאורך המחצית העליונה של המעגל, לכן $\sin \omega t > 0$ וסימן המהירות לפי נוסחה (3) אכן שלילי. כאשר ההיטל נע ימינה, הסימן האלגברי של המהירות צריך להיות חיובי, וגם הפעם הסימן הנכון מתקבל מנוסחה (3) (מדוע?).

פונקציית תאוצה-זמן של ההיטל

שוב נסתמך על כך שהנקודה P נמצאת בכל רגע בדיוק מתחת לגוף Q הנע לאורך מעגל או מעליו, לכן תאוצתה חייבת להיות שווה לרכיב ה-x של תאוצת הגוף. לגוף תאוצה רדיאלית שגודלה:

$$a_R = \omega^2 A$$



איור 5: תאוצת ההיטל ברגע t

מאיור 5 רואים כי גודל היטל התאוצה בכיוון x הוא

$$a = a_R \cos\theta = \omega^2 A \cos\theta$$

ותאוצת P:

$$a = -\omega^2 A \cos \omega t \qquad (4)$$

שוב הוספנו את הסימן האלגברי מינוס לפני הביטוי לגודל התאוצה: כאשר ההיטל נמצא מימין למרכז המעגל, מכוונת התאוצה שמאלה, לכן עליה להיות שלילית, ואכן במצב זה $\cos \omega t > 0$. כאשר ההיטל משמאל למרכז המעגל, מכוונת התאוצה ימינה, לכן עליה להיות חיובית, ואמנם במצב זה $\cos \omega t < 0$.

הקשר בין תנועת ההיטל לבין תנועה הרמונית פשוטה

ממשוואות (2) ו- (4) מקבלים כי ההיטל נע בתאוצה המקיימת:

$$a = -\omega^2 x \qquad (5)$$

הראינו שנוסחאות מקום-זמן, מהירות-זמן ותאוצה-זמן המתאימות לתנועה שתאוצתה $a = -\omega^2 x$ הן הנוסחאות (2), (3) ו- (4) בהתאמה.

בתנועה ההרמונית הפשוטה, הקשר בין התאוצה a למקום x מבוטא על-ידי קשר (1), הדומה לקשר (5). לכן פונקציות מקום-זמן, מהירות-זמן ותאוצה-זמן בתנועה הרמונית פשוטה צריכות להיות דומות לאלה של תנועת ההיטל, אלא שבמקום ω בתנועת ההיטל, יהיה עלינו לרשום $\sqrt{c/m}$ כדי לקבל את הנוסחאות בתנועה הרמונית פשוטה. לכן נוסחת מקום-זמן בתנועה הרמונית פשוטה היא:

$$x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}}\,t\right) \qquad (6)$$

המחזור של פונקציה זו הוא (ראו נספח ב):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}} \qquad (7)$$

מחזור הפונקציה (T) הוא גם **זמן המחזור של התנועה ההרמונית**.

מנוסחה (7) עולה מסקנה מפתיעה: זמן המחזור אינו תלוי במשרעת אלא רק במסת האוסצילטור ובקבוע הכוח. אפילו נגדיל את המתיחה ההתחלתית פי עשרה, ישלים האוסצילטור מחזור אחד (ויעבור דרך ארוכה פי עשרה) במשך אותו פרק זמן.

שאלה: הסבירו, באמצעות שיקולים קינמטיים איכותיים, מדוע מתקבל על הדעת שזמן המחזור אינו תלוי במשרעת.

T הוא זמן המחזור ו-f היא תדירות התנודה.

נגדיר גודל פיזיקלי שהוא פרופורציוני לתדירות תנודות הגוף:

הגדרת המושג **"תדירות זוויתית"**:

התדירות הזוויתית, ω, של גוף הנע בתנועה מחזורית מוגדרת על ידי:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{c}{m}} \qquad (8)$$

ביחידות SI התדירות הזוויתית נמדדת ברדיאנים\שנייה. מאחר שרדיאנים הם חסרי ממדים, יחידת התדירות הזוויתית היא s^{-1}.

מאחר שתדירות התנועה המעגלית שווה לתדירות התנועה ההרמונית, גם המהירות הזוויתית של התנועה המעגלית שווה לתדירות הזוויתית של התנועה ההרמונית של ההיטל, ואף סימנו אותן באותה אות. עם זאת, עלינו לשים לב שהגדרתה של התדירות הזוויתית בלתי תלויה במהירות הזוויתית, ולגודל פיזיקלי זה יש משמעות בתנועה הרמונית של גוף חומרי, ולא רק בתנועה של היטל גוף הנע במעגל על אחד הקטרים.

נוסחאות (2), (3) ו- (4), הן פונקציות מקום-זמן מהירות-זמן ותאוצה-זמן של תנועה הרמונית פשוטה, כאשר ω היא התדירות הזוויתית של התנועה ההרמונית, המוגדרת באמצעות (8).

$$x(t) = A\cos\omega t \qquad (9)$$

$$v(t) = -\omega A\sin\omega t \qquad (10)$$

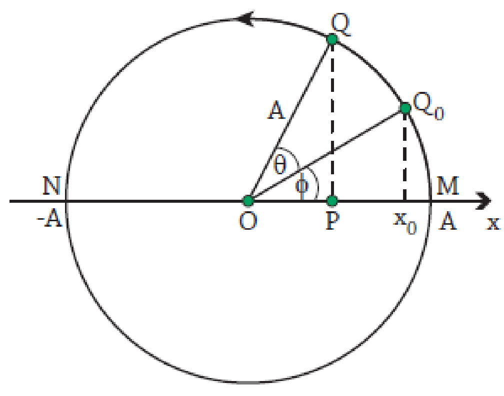
$$a(t) = -\omega^2 A\cos\omega t \qquad (11)$$

נזכור שפונקציות אלה מתאימות לתנאי ההתחלה שבחרנו.

הנוסחאות שפיתחנו מתאימות לבחירה מסוימת של רגע האפס: מהירות הגוף ברגע זה היא אפס ($v_0 = 0$), והוא נמצא במרחק מסוים מנקודת שיווי המשקל (מרחק זה הוא משרעת התנודה) בצד החיובי של ציר המקום, כלומר $x_0 = A$.

אם בוחרים את הרגע $t_0 = 0$ במצב אחר - כאשר הגוף נמצא במרחק מסוים x_0 מנקודת שיווי המשקל, ומהירותו ברגע

זה אינה אפס - יש לתקן את הנוסחאות (נשים לב שבמקרה זה x_0 אינו משרעת התנודה). לצורך פיתוח הנוסחאות במקרה כללי זה נתבונן בגוף שנע במעגל בתנועה קצובה, ונבחר כרגע $t_0 = 0$ את הרגע שבו הגוף עובר בנקודה Q_0 אשר אינה נמצאת בקצה הקוטר האופקי. מיקומה של הנקודה Q_0 נתון באמצעות הזווית ϕ (איור 6). אם מסתכלים עתה על תנועת ההיטל - רואים כי ברגע $t_0 = 0$ הוא אינו נמצא בקצה הקוטר, ומהירותו (שהיא המהירות האופקית של הגוף החג במעגל) אינה אפס. ברגע t כלשהו הגוף נמצא על המעגל בנקודה Q, והקו המחבר בינה לבין מרכז המעגל O יוצר עם הציר x זווית $\omega t + \phi$. פיתוח הנוסחאות דומה לפיתוח במקרה הקודם (שבו ברגע אפס מהירות הגוף שווה לאפס), אלא שהארגומנט של נוסחאות (9), (10) ו- (11) הוא $\omega t + \phi$ ולא ωt. הביטוי $\omega t + \phi$ נקרא **מופע (פאזה)**. את ϕ, ערך המופע ברגע $t_0 = 0$, מכנים **מופע התחלתי** או **קבוע המופע**.



איור 6: קבוע המופע ϕ השונה מאפס

נספח ה: המודל הגאוצנטרי והמודל ההליוצנטרי - סקירה היסטורית

הקדמה

נספח זה מרחיב את הרקע ההיסטורי המוצג בקצרה בפרק ט. הוא מתמקד במחלוקת שנמשכה כ- 2000 שנה לגבי השאלה איזה משני המודלים הגדולים של מבנה היקום - **המודל הגאוצנטרי** או **המודל ההליוצנטרי** הוא הנכון.

1. עובדות שהיו ידועות בעת העתיקה על סמך תצפיות בעין גלוייה בכוכבים ובכוכבי לכת

עובדה מספר 1: **המרחקים היחסיים בין הכוכבים הם קבועים**. לכן כינו אותם בעבר בשם **כוכבי שבת**. לדוגמה, המרחקים היחסיים בין הכוכבים המרכיבים את "הדובה הגדולה" (כינוי של קבוצת כוכבים המכונה גם "העגלה הגדולה") אינם משתנים. ה"דובה" אינה משנה את צורתה.

עובדה מספר 2: אחד מכוכבי-השבת, המכונה **כוכב הצפון** אינו משנה את הזווית שבה הוא נצפה מכדור הארץ. **שאר כוכבי השבת חגים סביבו במסלולים מעגליים** (כך שהמרחקים בין הכוכבים, כאמור, אינם משתנים).

אפשר להבחין בתנועות מעגליות אלה כאשר מפנים בלילה מצלמה (המוצבת על כדור הארץ) לעבר השמיים במצב שבו צמצם המצלמה נשאר פתוח למשך זמן רב. תמונה כזו מתוארת באיור 1.

עובדה מספר 3: בנוסף לכוכבי השבת הרבים, אפשר להבחין בחמישה גרמי-שמיים נוספים המכונים **כוכבי לכת** או **פלנטות** (מהמילה היוונית שפרושה "נודדים"). כוכבי לכת שהיו ידועים בעת העתיקה הם: כוכב חמה, נוגה, מאדים צדק ושבתאי. בהירותו של כוכב הלכת נוגה כמעט ואינה משתנה במהלך של שנה.

עובדה מספר 4: כוכבי הלכת כוכב-חמה ונוגה אינם מתרחקים מבחינה זוויתית יתר על המידה מהשמש - הזווית בין כוכב-חמה לבין השמש אינה עולה על 28°, ובין נוגה לבין השמש אינה עולה על 45°.

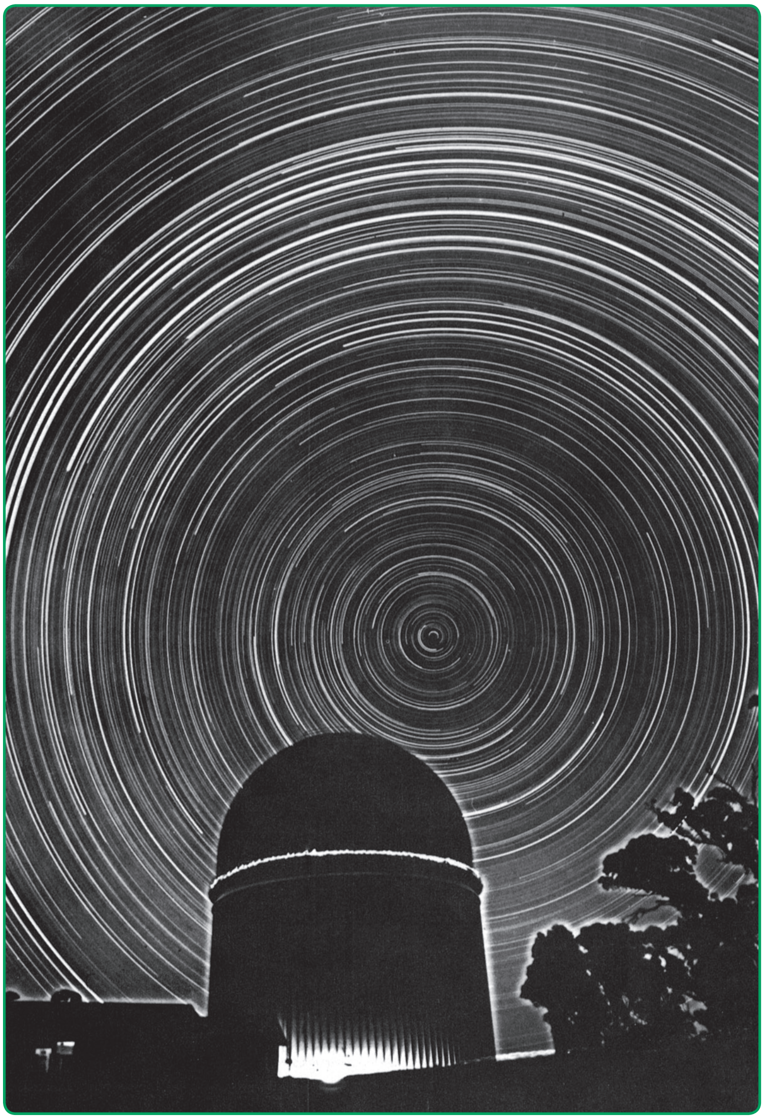
עובדה מספר 5: **תנועתם של כוכבי הלכת אינה סדירה**; הם אינם נעים כל הזמן מזרחה - לחלקם יש "תנועת נסיגה" - הם נעים מזרחה, לאחר מכן הם נעים במשך זמן קצר יותר מערבה (תנועת ה"נסיגה"), ושוב מזרחה. באיור 2 מתואר מסלולו של כוכב הלכת מאדים, כפי שנצפה מהארץ.

2. התפתחות המודל הגאוצנטרי בתקופה היוונית

נציג בקצרה כמה הוגי-דעות ואסטרונומים בני התקופה היוונית:

פיתגורס (Pythagoras, 589 bce - 475 bce) מהאי סאמוס, היה אחד מגדולי המתמטיקאים והפילוסופים של התרבות היוונית ומייסד האסכולה הפיתגוראית. שמו מוכר בזכות המשפט בגאומטריה הקרוי על שמו. פיתגורס הגה את הרעיון ש**הארץ היא המרכז הנייח של היקום**. מודל זה של היקום מכונה **מודל גאוצנטרי** (מיוונית: גֶה - ארץ, צֶנטרון - מרכז).

ההשקפה הגאוצנטרית נסמכת בראש ובראשונה על העובדה הפשוטה שהאדמה שעליה אנחנו עומדים יציבה, ומכאן נובע, כביכול, שהיא אינה נעה. לפי המודל הגאוצנטרי גרמי השמיים ובכללם השמש, הירח, כוכבי הלכת ושאר הכוכבים סובבים את הארץ, העומדת במקומה במרכז היקום.



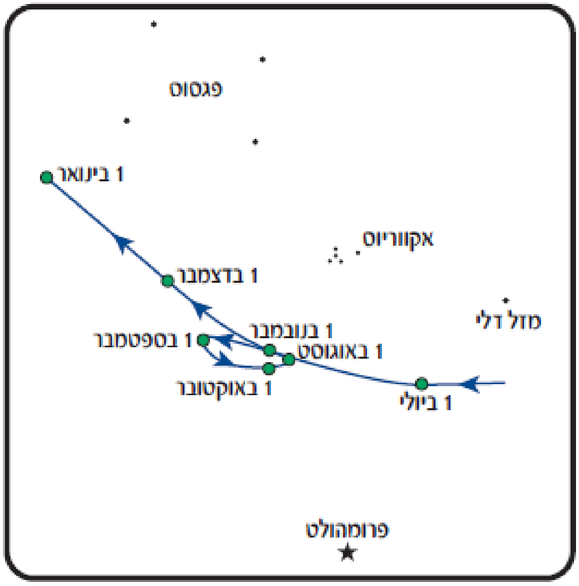
איור 1: תצלום של השמיים שהתקבל במצלמה שסרט הצילום שלה היה חשוף לאור הכוכבים במשך לילה שלם.

אמפדוקלס (Empedocles, 490 bce - 435 bce) היה פילוסוף ומשורר יווני. הוא הניח כי החומר בעולם בנוי מארבעה יסודות: **אדמה, מים, אוויר ואש**.

אפלטון (Aplaton, 427 bce - 347 bce) היה פילוסוף יווני דגול שחי באתונה. הוא הוסיף לארבעת יסודות החומר של אמפדוקלס יסוד חמישי שאותו הוא כינה **אֶתֶר**, שממנו בנויים גרמי השמיים.

אפלטון הציג את השאלה: "כוכבי השבת נעים במסלולים מעגליים. כיצד אפשר לבנות את המסלול של כוכב לכת, כפי שהוא נצפה מהארץ, מצירוף של מעגלים?"

המעגל נחשב בתקופה הקדומה לעקומה המשוכללת ביותר. אופן הצגת השאלה מעיד שמשום כך רק הוא נתפס כראוי לתיאור תנועותיהם של גרמי השמיים. מאמצים רבים של האסטרוֹנוֹמים במשך כאלפיים שנה הופנו לחיפושׂ אחר תשובה לשאלה שהציג אפלטון. הם לא העלו על דעתם שתיתכן צורה גאומטרית אחרת.



איור 2: תנועה לא סדירה של כוכב הלכת מאדים, כפי שנצפית מהארץ

אריסטו (Aristoteles, 384 bce - 322 bce) היה תלמיד של אפלטון במשך כ- 20 שנה. אריסטו ואפלטון נחשבים לשני הפילוסופים הגדולים בעת העתיקה. רעיונותיו של אריסטו שלטו במשך כ- 2000 שנה. משנתו מקיפה את כלל היקום. על-פי תפיסת עולמו, העולם מחולק לשניים:

א. **עולם תת-ירחי** בו הגופים מורכבים, ביחסים כאלה או אחרים, מארבעה היסודות שאמפדוקלס הגה: אדמה, מים, אש ואוויר. אריסטו הבחין שיש עצמים קלים יותר, ואחרים כבדים יותר. הוא ייחס את תכונת הכובד או הקלות של גוף ליחס בין כמויות היסודות השונים המרכיבים את הגוף. אדמה "טבעה" שהיא כבדה, האש "טבעה" שהיא קלה, ואילו המים והאוויר עומדים בין שני קצוות אלה.

אריסטו גרס שתנועתו ה"טבעית" של גוף כבד היא מטה, ותנועתו ה"טבעית" של גוף קל היא מעלה. עשן מתמר אנכית מעלה כל עוד רוח אינה נושבת. ואילו אבן נופלת אנכית מטה לאחר שמרפים ממנה. על פי התפיסה של אריסטו **התנועה "הטבעית"** של גופים ארציים היא במסלול אנכי מעלה או אנכי מטה.

יש כמובן תנועות שחורגות מהתנועה ה"טבעית". למשל חץ הנורה בכיוון אופקי מקשת נע לאורך מסלול עקום. אבן הקשורה לקצה חוט נעה לאורך מסלול מעגלי כאשר מסובבים את החוט. אבן הנזרקת כלפי מעלה נעה במסלול אנכי, אבל מעלה ולא בתנועתה ה"טבעית" כלפי מטה. אריסטו כינה תנועות כאלה בשם **תנועות "מאולצות"**, שהן מנוגדות לתנועתם ה"טבעית" של הגופים, **ואין להן קיום בלא כוח הפועל על הגופים ומאלץ אותם לנוע בצורה הנוגדת את "טבעם"**. אפשר להרים אבן כלפי מעלה, וכך לגרום לה לנוע בתנועה "מאולצת", אולם ברגע שמרפים ממנה האבן נופלת מטה בתנועתה ה"טבעית".

ב. **עולם על-ירחי** הכולל את כוכבי השבת, כוכבי הלכת והשמש. אריסטו אימץ את השקפתו של אפלטון שגרמי השמיים אינם מורכבים מארבעת היסודות כמו הגופים הארציים, אלא מהיסוד החמישי שהוא ה**"אתר"**. על-פי אותה תאוריה, תנועתו הטבעית של האתר היא מעגלית, לפיכך מסלולו הטבעי של גרם שמיים הוא מעגל.

אריסטו הניח תכונה נוספת לגבי האתר: הוא הניח שזהו חומר שאינו ניתן לשינוי. לכן **בעולם העל-ירחי לא מתרחשים שינויים**, בניגוד לעולם התת-ירחי בו מתרחשות תופעות של התהוות וכלייה, לידה ומיתה. בשמיים הכל הווה ויהיה כפי שהיה. תכונות הכוכבים והשמש אינן משתנות. הם תוארו ככדורים מושלמים.

על פי אריסטו, הירח נמצא בין הארץ לבין השמיים. הוא מהווה נקודת תפנית בין שני העולמות, לכן יש בו אי-שלמות מסוימת, אך בניגוד לארץ, הירח הוא כדור כמעט מושלם.

אריסטו קיבל את התאוריה של קודמיו שהארץ שרויה במנוחה. בספרו **"על השמיים"** הוא כותב:

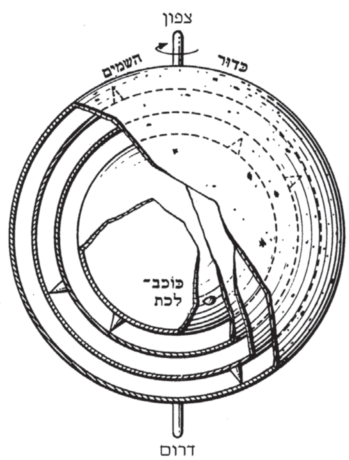
> "יש הטוענים שהארץ נחה, ויש האומרים שהיא נעה. אולם יש סיבות רבות לאי-יכולה של הארץ לנוע: כדי שתסתובב על ציר, כל אחד מחלקיה צריך לנוע בתנועה מעגלית, אולם התנועה הארצית הטבעית היא לאורך קו ישר, לעבר מרכז הארץ. תנועה מעגלית על פני הארץ אינה יכולה להיות נצחית כי היא מאולצת ובלתי טבעית, בעוד שסדרו של העולם הוא נצחי".

אריסטו הניח אם כן חוקיות שונה בשני העולמות. העולם העל-ירחי נשלט על-ידי חוקים שונים מאלה שבעולם התת-ירחי.

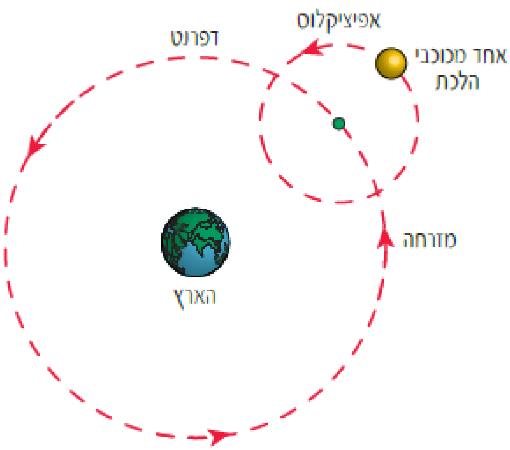
כיוון שצורתו של הצל שהארץ מטילה על הירח בשעת ליקוי לבנה הוא מעגלי בקירוב, קבע אריסטו ש**הארץ היא בקירוב כדורית**.

אאודוֹקסוֹס (Eudoxus, 410 bce - 355 bce) היה תלמידו של אפלטון. הוא שיכלל את המודל הגאוצנטרי. הוא הניח שהארץ מוקפת על ידי סדרה של כדורים גדולי ממדים, וכל כוכב לכת מוצמד לכדור. הכדור הראשון סובב על ציר בתנועה קצובה. קצות הציר נעוצים בכדור שני, גדול יותר, אשר אף הוא מסתובב בתנועה קצובה. באופן כזה, כוכב הלכת המוצמד לכדור הראשון משתתף בתנועה הקצובה של הכדור שאליו הוא מוצמד, ובתנועת הכדור הזה הנגרמת מתנועת הכדור השני, אשר מחזיק את קצות הציר של הכדור הראשון (איור 3). קצות הציר של הכדור השני נעוצים בכדור שלישי, וכך הלאה. המבנה כלל 72 כדורים, אשר תנועתם הכתיבה את תנועת כוכבי הלכת.

אסטרוֹנוֹמים אחרים שיכללו את מודל הכדורים של אאודוֹקסוֹס על ידי הוספת כדורים. הכדורים הנוספים הקטינו מצד אחד את הפערים בין הערכים שחושבו באמצעות המודל לבין הערכים שנצפו, אולם מצד שני התקבל מודל מסובך מאוד. באחת הגרסאות של מודל זה נדרשו שלושה-עשר כדורים עבור תיאור תנועתו של כוכב-חמה בלבד.



איור 3: המודל הגאוצנטרי של אאדוקסוס



איור 4: המודל הגאוצנטרי של אפולוניוס

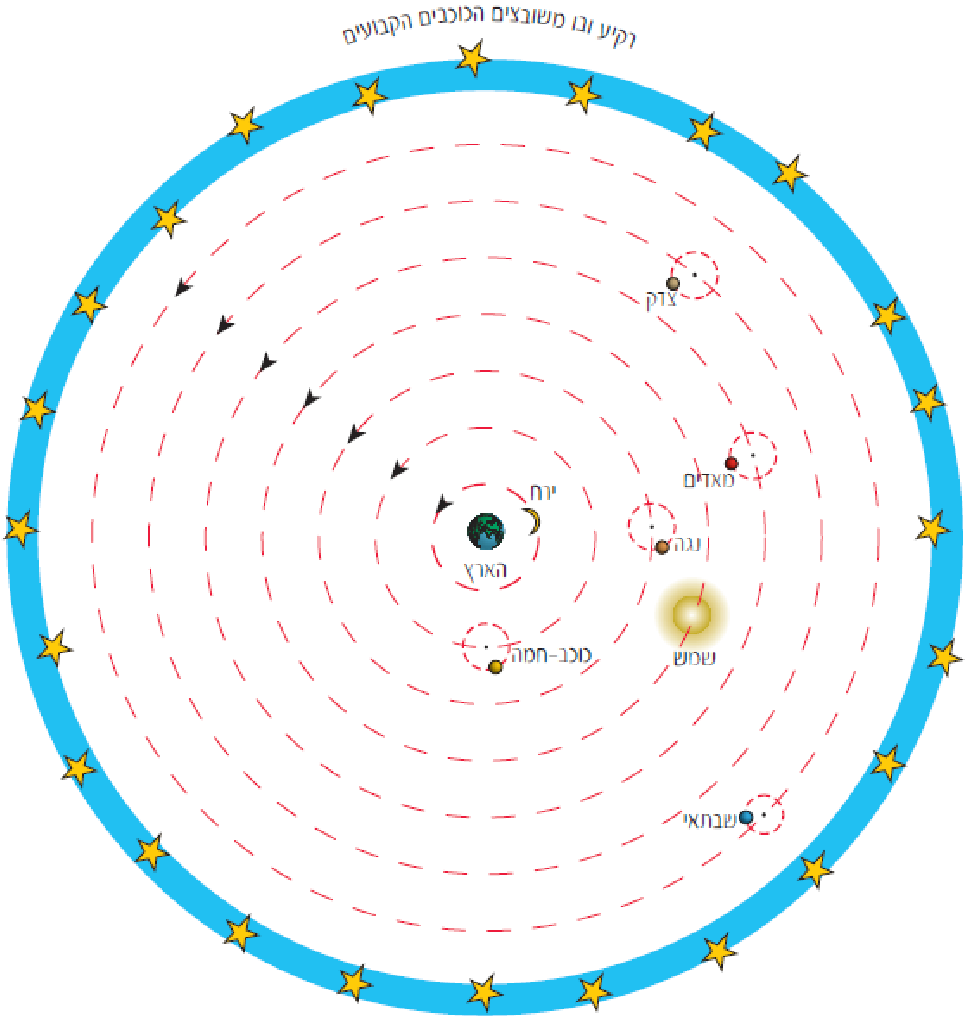
אריסטרכוס (Aristarchus, 320 bce - 250 bce) היה אסטרוֹנוֹם ומתמטיקאי יווני אשר נודע כאדם הראשון שטען כי הארץ ושאר כוכבי הלכת נעים סביב השמש. מערכת פלנטרית שבה השמש נחה במרכזה מכונה מערכת **הליוצנטרית** (מיוונית: הֶליוֹס - שמש, צנטרון - מרכז). אריסטרכוס הסביר כי היום והלילה מתרחשים עקב סיבוב הארץ על צירה.

המודל ההליוצנטרי של אריסטרכוס לא התקבל, ואף הושׂם ללעג, כיוון ש"אפשר פשוט לראות שהארץ נחה".

אַפּולוֹניוֹס (Apollonius, 292 bce - 190 bce) היה מתמטיקאי יווני אשר פיתח את אחת הגרסאות של המודל הגאוצנטרי. הוא הציע להוסיף מעגל מִשני - אפיציקלוס - שמרכזו נע על מעגל ראשי (דפרנט), שבמרכזו נמצאת הארץ (איור 4).

היפרכוס (Hipparchus, 180? bce - 125? bce) היה אסטרוֹנוֹם יווני שהמציא מכשירים אסטרונומיים, יצר את מפת הכוכבים הראשונה הידועה לנו, ביסס את המודל הגאוצנטרי, וערך קטלוג של מאות אחדות של כוכבי שבת.

קלאודיוס פטוֹלמיאוס (Claudius Ptolemaeus, 90 - 168), המכונה במקורות עבריים בשם **תלמי**, היה אחד מאחרוני האסטרוֹנוֹמים היווניים הקדמונים. תַלְמַי ערך תצפיות רבות בכוכבים, ורשם בספרו **"אלמג'סט"** (Almagest) את מיקומם. המודל של תלמי מבוסס על הרעיון של אפולוניוס כי כל כוכב לכת נע על מעגל משני (אפיציקלוס), שמרכזו נע על מעגל ראשי (דפרנט) שבמרכזו נחה הארץ (איור 5).



איור 5: המודל הגאוצנטרי של תלמי

תלמי דחה את הרעיון ההליוצנטרי בטענה: "אילו הארץ היתה נעה היינו צריכים לראות את העננים נעים בכיוון מנוגד לתנועת הארץ".

בספרו מתואר מודל משוכלל של התאוריה הגאוצנטרית, וחישוב תנועת גרמי השמיים. תנועת כוכבי הלכת על-פי מודל זה תאמה את התצפיות בצורה טובה. אולם, המסלולים של כוכבי הלכת היו מסובכים, ועוררו תלונות רבות אצל אלה שלמדו תאוריה זו. בשנת 1200 הטיח אלפוֹנסוֹ העשירי מלך קסטיליה, כי אילו התייעצו בו בשעת בריאת העולם, הוא היה בורא את העולם לפי תכנית פשוטה וטובה יותר.

תורתו של תלמי היתה מוצלחת מאוד לזמנו, והיתה מקובלת על רובם המכריע של הוגי הדעות עד ימי קופרניקוס, קפלר וגלילאו.

3. התפתחות המודל ההליוצנטרי במאות ה- 16 וה- 17

3.1 ניקולס קופרניקוס (Nicolaus Copernicus, 1473 - 1543)

א. פניית האפיפיור לקופרניקוס

בתחילת המאה ה-16 פנה האפיפיור אל האסטרונום הפוֹלני קוֹפֶּרניקוס (איור 6), והטיל עליו לתקן את לוח השנה. התאוריה המתמטית של תלמי לא היתה מספיק מדויקת; אי-דיוקים, שכמעט ולא הורגשו במהלך של שנים אחדות, הלכו והצטברו במשך דורות, והפכו משמעותיים.

קופרניקוס עמד על כך שתחילה יש לשפר את הידע האסטרונומי. המערכת של תלמי נראתה לו סבוכה מדי; היו בה יותר מדי הסברים, היא ביטאה חוסר הרמוניה וחוסר אחידות. האסטרונומיה צריכה לתאר אחדות ופשטות שקיימת בעולם, ומשהו פשוט צריך להיות פשוט מבחינה מתמטית, כי "המתמטיקה היא הכלי המתאים לתיאור העולם". קופרניקוס חיפש אחר מודל אסטטי יותר.

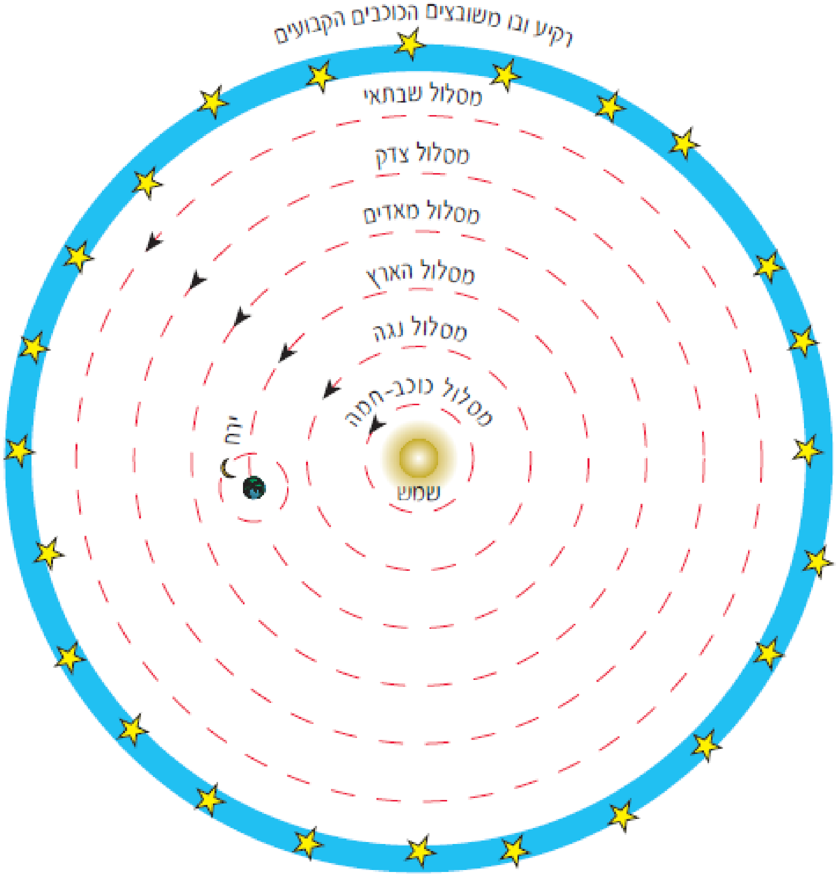
איור 6: ניקולס קופרניקוס

ב. המודל של קופרניקוס

קופרניקוס הגיע לכלל הכרה שאת תנועת כוכבי השבת אפשר להסביר לא רק על ידי מודל שבו הארץ נחה והכוכבים נעים, אלא גם על ידי מודל המניח שכוכבי-השבת נעוצים על פני כדור גדול הנמצא במנוחה, ואילו הארץ היא זו הסובבת על ציר דמיוני, וכוכב הצפון נמצא לאורך ציר זה.

במונחים מודרניים נוכל להשוות את מצבו של צופה מהארץ המסתובבת ומביט בכוכבים למצבו של טייס החג בלילה עם מטוסו סביב עיר, ומביט בפנסי הרחובות; אלה נראים לו כאילו הם סובבים במעגלים.

קופרניקוס מצא כי מסלולי כוכבי הלכת ייראו פשוטים יותר אם השמש, ולא הארץ, תבחר כמרכז המערכת הפלנטרית. זהו המודל **ההליוצנטרי** שהוצע בתקופה היוונית, ולא התקבל. על-פי מודל זה כוכבי הלכת חגים סביב השמש. הארץ אינה מרכז היקום ואינה נחה, אלא חגה סביב השמש, בדומה לכוכבי הלכת האחרים. הירח חג סביב הארץ. איור 7 מתאר את המערכת הפלנטרית על-פי קופרניקוס.



איור 7: המודל ההליוצנטרי של קופרניקוס

3.2 השוואה בין המודל הגאוצנטרי של תלמי לבין המודל ההליוצנטרי של קופרניקוס

א. שיקולים התומכים במודל הגאוצנטרי:

א. בעייתיות רעיון תנועת הארץ -

(1) ההנחה שהארץ נחה מושרשת **בחוויה היום-יומית**. תנועת הארץ נתפסה כבלתי הגיונית.

(2) תפיסת העולם בתקופה היוונית ובימי הביניים היתה מבוססת על ההשקפה שהארץ נמצאת במרכז היקום. בבסיס תפיסה זו מונחת ההכרה **שהאדם הוא לב הבריאה**, ולכן מתבקש שהארץ (שהאדם חי עליה) היא מרכז הבריאה. בתאוריה של קופרניקוס לעומת זאת, אין לאדם כל יחודיות. רוב בני האדם אינם יכולים לשנות את תפיסתם מהתאוריה של תלמי לזו של קופרניקוס מבלי שתמונת העולם שלהם תזדעזע.

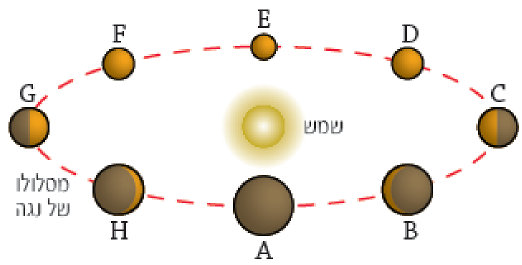
(3) ההנחה שהארץ נעה מעוררת את השאלה מהם **חוקי התנועה** על פני הארץ, שבעזרתם אפשר להסביר תנועות המתרחשות על פני הארץ. למשל: מדוע חץ הנורה בכיוון תנועת הארץ אינו נע לאחור? מדוע איננו חשים ברוחות חזקות עקב תנועת הארץ? מדוע כדור המשוחרר מראש מגדל פוגע לרגלי המגדל?

ב. התאוריה של קופרניקוס לא התבססה על מכונת הכדורים של אאודוקסוס, ואז התעוררה השאלה מהן **הסיבות** לתנועה של כוכבי הלכת, ומהו ה"דבק" של העולם, כלומר מהי הדינמיקה של כוכבי הלכת. חוקי תנועת גרמי השמיים של אריסטו לא התיישבו עם התאוריה של קופרניקוס.

ג. לגבי עובדה מספר 3 (בעמוד הראשון של נספח זה):

בעזרת המודל של תלמי אפשר להסביר את אי השתנות הבהירות של כוכב הלכת נוגה: הדבר נובע מכך שנוגה חגה סביב הארץ במרחק קבוע ממנה.

לעומת זאת לפי המודל של קופרניקוס, המרחק המינימלי בין נוגה והארץ צריך להיות קטן פי ארבעה מהמרחק המקסימלי ביניהם. לכן כוכב הלכת נוגה צריך להראות בהיר פי ארבעה כאשר המרחק ביניהם מינימלי, לעומת בהירותו כשהמרחק ביניהם מקסימלי.

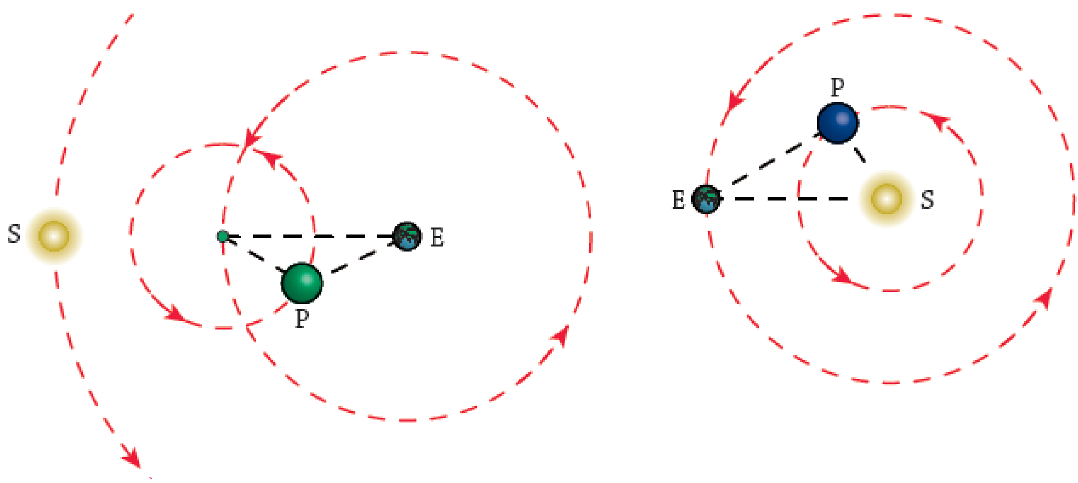


איור 8: מופעי כוכב הלכת נוגה

קופרניקוס הסביר שבהירותו של כוכב הלכת נוגה כמעט ואינה משתנה כך: חציו של כוכב הלכת נוגה מואר על ידי השמש, אולם מכדור הארץ אפשר לראות רק חלק מהאזור המואר. גודלו של חלק זה תלוי במיקום היחסי של השמש, נוגה והארץ (בדומה למופעי הירח התלויים במיקום היחסי של הארץ הירח והשמש): כאשר כוכב הלכת נוגה קרוב לארץ (מצב B באיור 8), רק חלק קטן מהאזור המואר פונה אל כדור הארץ (כוכב הלכת נוגה אמור להראות מכדור הארץ בצורת "בננה", כמו שהירח נראה בתחילת חודש עברי או בסופו). לעומת זאת, כאשר כוכב הלכת נוגה רחוק מכדור הארץ (מצב E באיור 8) כל חלקו המואר פונה אל כדור הארץ (כפי שהירח נראה באמצע חודש עברי). שתי התופעות מקזזות האחת את השנייה, לכן בהירותו בקירוב אינה משתנה. בעין בלתי מזויינת אי אפשר להבחין במופעים של נוגה, אך **קופרניקוס ניבא** מופעים אלה.

ב. שיקולים התומכים במודל ההליוצנטרי

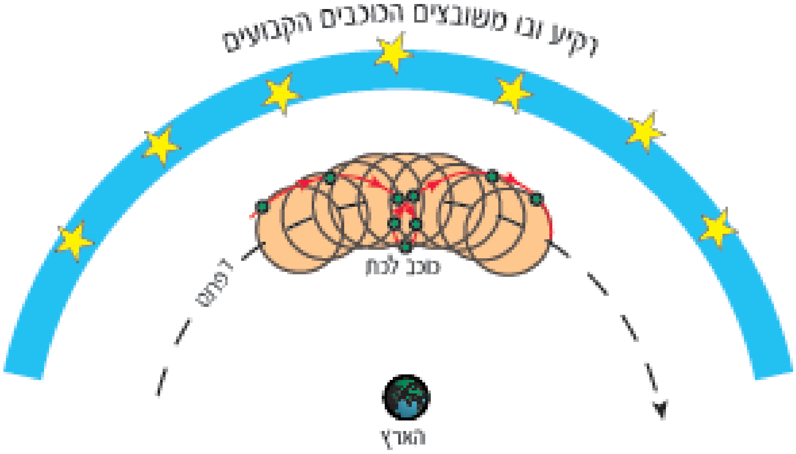
א. לגבי עובדה מספר 4 (בעמוד הראשון של נספח זה): בתאוריה הקופרניקית ההסבר של עובדה זו נובע ישירות מהגאומטריה הפשוטה (ראה איור 9: S - השמש, P - כוכב חמה ו-E - הארץ).



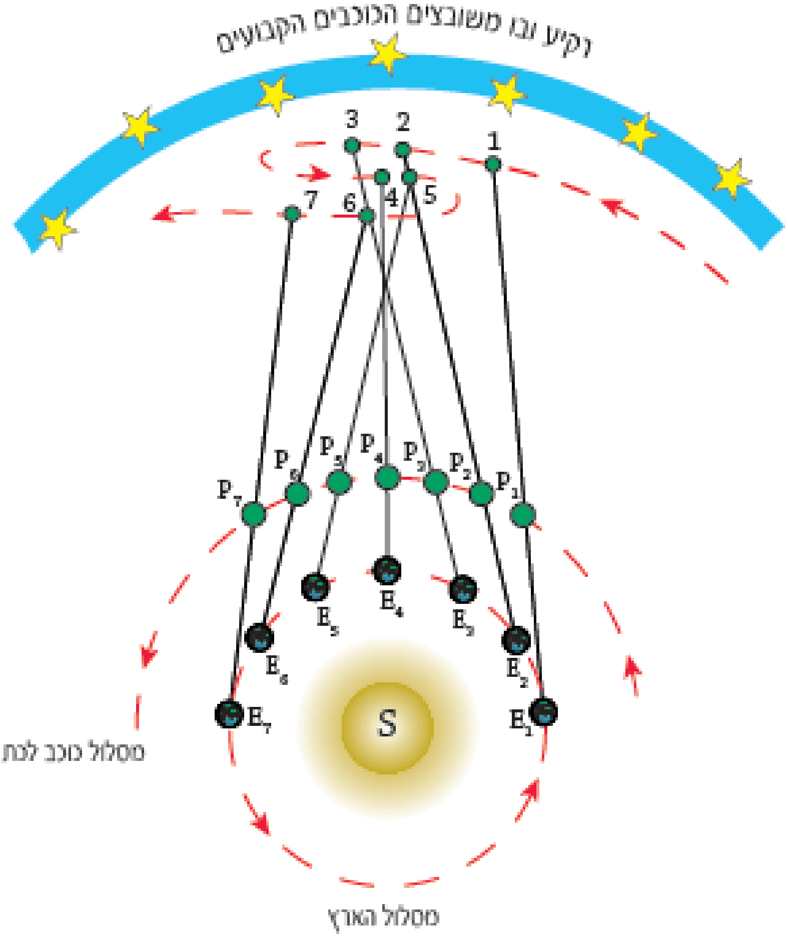
א. על-פי המודל ההליוצנטרי

ב. על-פי המודל הגאוצנטרי

איור 9: הסבר העובדה שהזווית בין נוגה לבין השמש אינה עולה על 45˚



א. על פי המודל הגאוצנטרי



איור 10: הסבר "תנועת הנסיגה" של כוכבי לכת

במסגרת התאוריה של תלמי היה צורך בהנחות גאומטריות נוספות (ראה איור 9ב) שכל תפקידן היה להסביר את העובדה. להנחות אלה לא היה כל תפקיד נוסף בתאוריה. הנחה בתאוריה (כלשהי) שנועדה לתת הסבר רק לעובדה מסוימת, ואשר אין לה תפקיד נוסף בתאוריה, מכונה **הנחה אד הוֹק**.

ב. גם ההסבר לעובדהׂ מספר 5 נובע ישירות מהתאוריה של קופרניקוס. איור 10ב מתאר כיצד תנועתו של כוכב לכת סביב השמש נראית לאדם הנמצא על הארץ, אשר בעצמה סובבת את השמש במסלול מעגלי.

היוונים לעומת זאת, נאלצו להשתמש באפיציקלים כדי להסביר את "תנועת הנסיגה". מסילה מפושטת של כוכב לכת על-פי התאוריה של תַּלְמַי מתוארת באיור 10א.

ג. המודל ההליוצנטרי פחות "מפלצתי". יש בסיס להנחה שתאוריה פשוטה יותר מבחינה מתמטית, עשׂויה להיות קרובה יותר למציאות. פול דיראק (Paul A.M., Dirac, 1902-1984), אחד מגדולי הפיסיקאים במאה העשרים, אמר: "אני מתרשם יותר מיופי הנוסחאות, מאשר מהתאמתן לתוצאות ניסויים".

3.3 טיכו ברהה (Tycho Brahe, 1546 - 1601)

א. התצפיות של טיכו ברהה

טיכו בְּרָהֶה היה אסטרוֹנוֹם דֶני, בן למשפחת אצולה, שרכש השׂכלה רחבה בגיל צעיר, ונמשך אחר האסטרונומיה, בה עסק רוב ימיו.

הוא תכנן ובנה מכשירים אסטרונומיים גדולים ומדוייקים. הממדים הגדולים של המכשירים נועדו לאפשר עריכת מדידות מדויקות. נניח למשל שרוצים למדוד את הזווית בין קו הראייה לכוכב לכת מסוים לבין קו הראייה לכוכב-שבת מסוים; אפשר להשתמש במכשיר המורכב מזוג מוטות, הקשורים באחד מקצותיהם באמצעות ציר; מכוונים מוט אחד לעבר כוכב השבת, ואת משנהו אל כוכב הלכת; אי הדיוק במדידת הזווית בין שני המוטות יהיה גדול יותר ככל שהמוט קצר יותר.

טיכו ערך במהלך חייו תצפיות על גרמי השמיים בדיוק ובהיקף חסרי תקדים, לכן הוא נחשבו לגדול האסטרונומים שצפו בשמיים בעין בלתי מזויינת. הוא רשם את מצבם של יותר מאלף כוכבים בדיוק רב, ובמדידות שערך במשך עשרים שנה אין טעות העולה על '1 (דקה אחת, שהיא החלק השישים של המעלה). הצורך בנתונים תצפיתיים מדויקים ורבים נבע, בין השאר, מרצונו להכריע על בסיס תצפיתי בין שני המודלים המתחרים - זה של תַּלְמַי מחד גיסא, וזה של קוֹפֶּרניקוס מאידך-גיסא.

שני ארועים שמיימיים מיוחדים ניצפו על-ידי טיכו ברהה:

א. הופעתו של כוכב חדש בשנת 1572. ברהה כינה תופעה זוׂ בשם **"כוכב חדש"** (Nova). בהירותו של כוכב זה בתחילה הלכה וגדלה, ולאחר מכן הלכה ופחתה. תצפיותיו על כוכב זה ערכו כשנתיים, עד שהכוכב לא נראה יותר. (התופעה שברהה צפה היתה התפוצצות של כוכב, המכונה כיום סופר-נובה).

ב. בשנת 1579 ברהה צפה בהופעתו של **כוכב שביט**, ותיעד כיצד בהירותו, צבעו, ואורך זנבו משתנים במשך הזמן.

ב. מודל היקום של טיכו ברהה

טיכו התנגד במידה מסוימת לתבנית ההליוצנטרית הקופרניקית של מערכת השמש, על אף פשטותה. אולם, תצפיותיו חיזקו דווקא את התאוריה הקופרניקית: שתי התופעות בהן צפה התרחשו בעולם **העל-ירחי**, ובזאת עירערו במשהו את האמונה בתאוריה האריסטוטלית שעל פיה השמיים אינם משתנים, וכי רק בארץ ובסביבותיה (העולם התת-ירחי)

מתחוללים שינויים. תנועת השביט ללא קושי דרך כל הכדורים, העמידה סימן שאלה נוסף לגבי תפיסת העולם של יוון העתיקה.

באשר לשאלת ההכרעה בין המודל הגאוצנטרי של תלמי לבין המודל של קופרניקוס: למרות כל גילויו, ואולי בגלל אופיו השמרני, טיכו הציע מודל פשרה שעל פיו חמישה כוכבי לכת חגים סביב השמש, אך השמש (יחד עם כוכבי לכת אלה) נעה סביב כדור הארץ הנייח. בכך אימץ מצד אחד על היתרונות של המערכת הקופרניקית, ומצד שני לא היה צריך להתמודד עם הבעייתיות של ארץ נעה, אשר אינה מרכז היקום. המודל של טיכו ברהה ננטש מייד לאחר מותו.

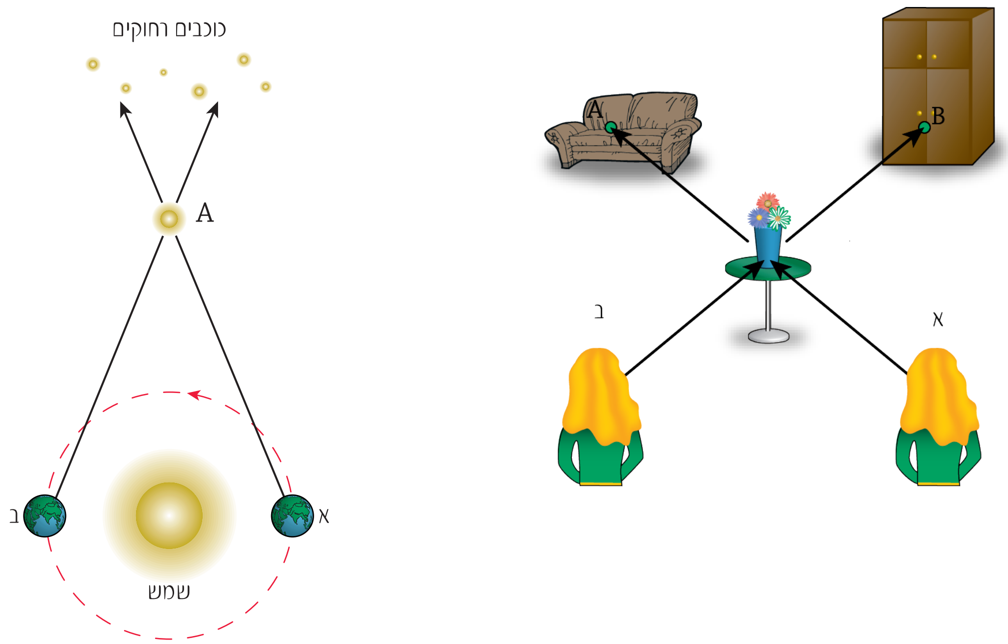
3.4 גלילאוֹ גליליי (Galileo Galilei, 1564 - 1642)

א. תגליותיו של גלילאו באסטרונומיה

בפרק ג (בכרך א) סקרנו מעט את עבודתו של גָלִילֵאוֹ כפיסיקאי. נסקור כאן כמה מתגליותיו כאסטרוֹנוֹם. בשנת 1604 צפה גָלִילֵאוֹ בכוכב חדש, תופעה דומה לזוֹ שנצפתה 32 שנה לפני כן על ידי טיכו ברהה. גלילאו הראה כי לכוכב החדש אין פרלקסה הניתנת למדידה (הסבר למונח "פרלקסה" מופיע מיד להלן), ומזה הסיק כי הכוכב נמצא בתחום העל-ירחי, רחוק מאוד מכדור הארץ. זוֹ היתה רְאָיָה נוספת כי ייתכנו שינויים גם בשמיים, בניגוד לתאוריה של אריסטו.

המונח **"פרלקסה"**:

כאשר הנערה שבאיור 11א צופה ממקום א בפרחים שבאגרטל, הפרחים נראים לה על רקע הספה. הישר העובר בין עיני הנערה לבין הפרחים חותך את משענת הספה בנקודה A. כאשר היא מסתכלת בהם ממקום ב - הם נראים על רקע הארון (נקודה B). הנקודה שבה הישר שמקשר את הנערה עם האגרטל וחותך את הרקע זזה מ-A ל-B. תזוזה זו מכונה פרלקסה, שפרושה המילולי "הזזה".



א. של פרחים הניצפים על ידי הנערה

ב. של כוכב A הנצפה מהארץ

איור 11: פרלקסה

נניח עתה שהמרחק בין הפרחים לבין הרקע קטֵן מאוד (למשל לכדי ס"מ אחד), ומרחק הנערה מהפרחים גדול (למשל 20 מטר). כאשר הנערה זזה בתנאים אלה ממקום א למקום ב - תזוזת הפרחים ביחס לרקע קטנה מאוד, ואולי אף אינה מורגשת. במקרה זה אומרים ש"הפרחים ניצפים ללא פרלקסה הניתנת למדידה".

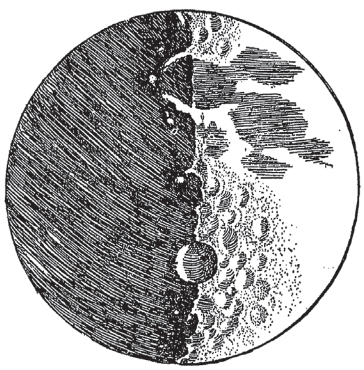
רעיון הפרלקסה משמש בתצפיות אסטרונומיות: צופים בכוכב A (איור 11ב) מכדור הארץ פעם כאשר כדור הארץ במקום א ופעם כאשר הוא במקום ב (במרווח זמן של חצי שנה). אם הכוכב נראה במקום שונה על רקע כוכבי שבת רחוקים, מסיקים שמרחקו מכדור הארץ קטן בהשוואה למרחק כוכבי השבת מהארץ. לעומת זאת, אם אין מבחינים בתזוזת הכוכב ביחס לרקע של כוכבי שבת רחוקים - מסיקים שמרחקו של הכוכב A מכדור הארץ אינו שונה מאוד ממרחק כוכבי השבת הרחוקים מהארץ.

בשנת 1609, בעת שגלילאו כיהן כפרופסור באוניברסיטת פָּדוּאָה שבאיטליה, מישהו סיפר לו על טלסקופ שנבנה בהולנד. על סמך תיאור כללי בלבד של טלסקופ זה, גלילאו בנה מיד טלסקופ משלו, והיה בין הראשונים שחקרו את השמיים באמצעות מכשיר זה. לא ברור מתי הטלסקופ הומצא, אך ככל הנראה הוא הומצא מחדש בהולנד, בשנת 1608. כאשר גלילאו הביט באמצעות הטלסקופ לכיוון השמיים, התפרצה מבעד עדשת הטלסקופ תמונה עשירה ומרשימה מזו שהיתה מוכרת מתצפיות בעין בלתי מזויינת. המראות גרמו לו התרגשות רבה. בשנה זו נפתח עידן חדש באסטרונומיה.

תגליותיו של גלילאו באמצעות הטלסקופ:

פני הירח: גלילאו גילה כי פני הירח דומים לנוף הארץ; אמנם לא נראו עליו חיים, אך נצפו הרים עמקים, אוקיינוסים וימים. כיום יודעים את מה שגלילאו גילה מאוחר יותר, שאין מים על פני הירח; ה"אוקיינוסים" וה"ימים" אינם אמיתיים. למרות זאת, אזורים אלה מכונים עד היום בשם "ימוֹת".

גלילאו הבחין שהגבול בין חלקו המואר של הירח וחלקו המוצל אינו חד, וכי קיימים בחלקו המוצל אתרים בהירים המופרדים מהאזור המואר (איור 12). במהלך תצפית, האתרים המוארים גדְלו, ולאחר כשעה עד שעתיים התלכדו עם החלק המואר של פני הירח. במקביל, צצו באזור האפל אתרים מוארים חדשים. גלילאו הכיר תופעה דומה על פני הארץ: בשעת הזריחה, מוארים תחילה פסגות ההרים, ורק לאחר מכן מוארים האזורים הנמוכים. מכאן הסיק ש**פני הירח מבותרים מאוד**.



איור 12: תמונת תחריט של פני הירח על-פי רישום של גלילאו משנת 1609

הקדמונים סברו שפני הירח הם משטח כדורי כמעט מושלם, ורק לכדור הארץ צורה ייחודית ושונה מכל שאר גרמי השמיים. גלילאו מצא כי **כדור הארץ אינו יחיד מסוגו**.

כוכבי השבת: באמצעות הטלסקופ נראו **כוכבי שבת רבים** מאשר בצפייה ללא טלסקופ. גלילאו גילה כי "שביל החלב" הינו מצבור עצום של כוכבים.

כוכבי הלכת נראו באמצעות טלסקופ כשהם תחומים על ידי קו מעגלי ברור, בעוד שכוכבי השבת נראו גם בטלסקופ כנקודות אור מנצנצות. מכך הסיק, שמרחק כוכבי השבת מהארץ גדול מאוד בהשוואה למרחק כוכבי הלכת ממנה.

ירחי צדק: גלילאו גילה ארבעה יְרֵחים של כוכב הלכת צדק (כיום ידועים 16 ירחים).

אחד הטיעונים שהועלו על-ידי חסידי תלמי כנגד קופרניקוס היה: "אילו כדור הארץ אכן נע סביב השמש, הרי הירח צריך לחוג סביב שני מרכזים (סביב כדור הארץ, אשר בעצמו חג סביב השמש), ומבנה כזה של יקום אינו אפשרי".

אחרי גילוי ארבעת ירחיו של צדק, פעל טיעון זה נגד אלה שהשמיעו אותו: על פי מודל תלמי, ארבעת ירחי צדק משתתפים בעת ובעונה אחת בתנועה סביב צדק, ובתנועת צדק סביב הארץ.

מופעי נוגה: גלילאו גילה באמצעות הטלסקופ כי לכוכב הלכת נוגה אכן יש מופעים הדומים לאלה של הירח (ראה איור 8) כפי שקופרניקוס ניבא. הצלחת הניבוי הגבירה את האימון במודל הקופרניקי.

ההתרגשות שאחזה בגלילאו במהלך הגילויים בשנת 1609 הדביקה את כלל הציבור באיטליה. התגליות (ואיתן גלילאו) זכו לתגובות חמות של אנשי תרבות ואמנות, וגרמו לשינוי בהתייחסות של אנשי מדע ופילוסופים אחדים לרעיונות של קופרניקוס. גלילאו תיאר את תגליותיו בסיפרו **"שליח הכוכבים"** שפורסם בשנת 1610.

ב. הכרעת גלילאוֹ לטובת המודל הקופרניקי

במהלך עבודתו, הפך גלילאו חסיד של תורת קופרניקוס. בשנת 1613 הוא הוציא לאור ספר בשם **"מכתבים על כתמי השמש"** ובו הצהיר שהוא תומך בתורת קופרניקוס. הספר עורר את זעמה של הכנסיה הקתולית, שהאמינה בתורת תלמי, וחייבה את הנוצרים להאמין בה. הכנסיה הכריזה בשנת 1616 כי הרעיון של אי-מרכזיות הארץ סותר את כתבי הקודש ומנוגד לשֹכל הישר. גלילאו נצטווה לא להטיף לתורת קופרניקוס, והוא אכן התחייב לכך.

בשנת 1632 גלילאוֹ פירסם ספר נוסף בשם **"דיאלוג על שתי מערכות העולם העיקריות"**. למרות התחייבותו לכנסיה, הוא הציג בספר זה ראיות התומכות בצורה ברורה בתורה הקופרניקית. הוא כתב את ספרו בשׂפה האיטלקית המובנת לכל, ולא כמקובל דאז בשׂפה הלטינית, שהיתה מובנת לקומץ משׂכילים בלבד. הספר זכה להתעניינות רבה בקרב הציבור הרחב, דבר שהגביר את זעמה של הכנסיה.

גלילאוֹ הובא למשפט האינקוויזיציה והואשם בהפרת התחייבותו להמנע מהפצתה של תורת קופרניקוס. דינו נחרץ למאסר עולם (שהתבטאו בפועל במאסר בית). באמצעות איומים, השׂיגה האינקוויזיציה מפיו הצהרה כי הוא חוזר בו מדעותיו. עם זאת, נפוצה ברחבי איטליה שמועה כי לאחר התכחשותו לתנועת כדור הארץ, הוא לחש את המשפט המפורסם: "Eppur si muove" כלומר "ואף על פי כן נוע תנוע" אשר ביטא את עמדתו האמיתית לגבי שאלת תנועת הארץ. גלילאו נפטר בשנת 1642. בחג המולד שלאחר מותו, נולד אייזיק ניוטוֹן.

שלוש מאות וחמישים שנה אחרי מותו של גלילאו, ב-31 באוקטובר 1992, הוכרו התאוריות שלו באופן רשמי על ידי הכנסיה הקתולית.

3.5 יוהן קפלר (Johannes Kepler, 1571 - 1630)

א. אודות קפלר


איור 13: יוהן קפלר

יוהן קפלר (איור 13) היה אסטרונום גרמני, בן תקופתו של גלילאו. הוא היה דמות מרתקת שאחדים ממאפייניה היו דמיון פרוע, דחפים מיסטיים ומשמעת מתמטית.

בהיותו בן 29, קפלר התקבל כעוזרו הראשי של טיכו ברהה. כישוריו של קפלר כאסטרונוֹם היו שונים מאלו של טיכו: טיכו היה נסיין מחונן, בעל כושר עצום בתחום המכני, אך כמעט ולא התעניין בהיבטים המתמטיים. קפלר היה נסיין גרוע, אשר הוקסם מכוחן של המתמטיקה והגאומטריה.

ב. פתרון בעיית המאדים

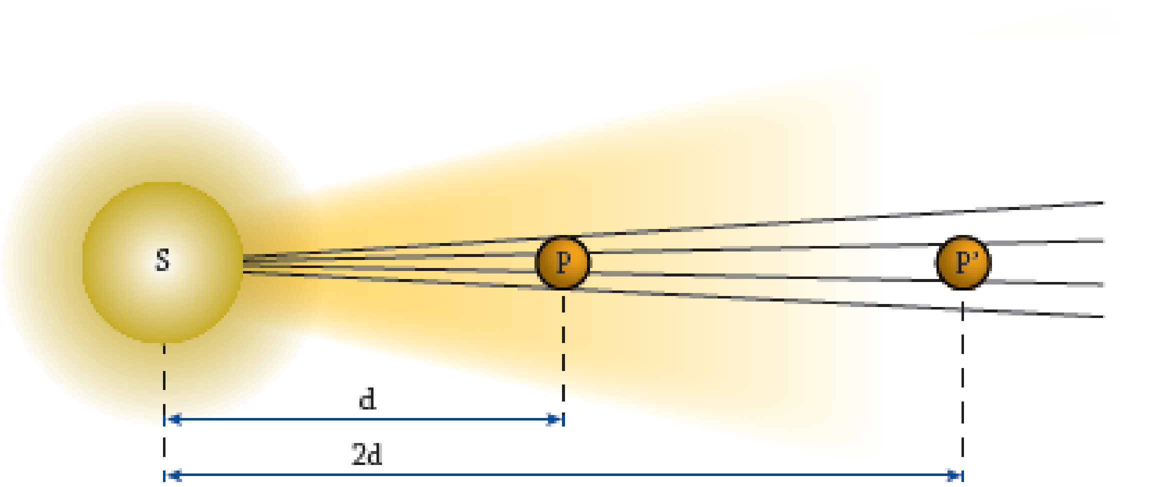
טיכו הטיל על קפלר לפתור את בעיית המאדים: היה פער בין החישובים שנערכו על בסיס התאוריות הקיימות לגבי מסלולו של כוכב לכת זה לבין הערכים שנמדדו על ידי טיכו. פער זה היה גדול מאי הדיוק של המדידות. קפלר התמודד עם בעיית המאדים כשבעים פעם במשך שמונה שנים, ותמיד נכשל. הפער בין תוצאות חישוביו שהתבססו על מודלים שפיתח, לבין הערכים שניצפו, היה '8 המעלה בלבד! (8 דקות המעלה; זווית בת 60 דקות המעלה שווה לזווית בת מעלה אחת). למרות זאת, קפלר לא אמר נואש. הוא האמין בכוחן ובדיוקן של התצפיות שטיכו ערך, וכי אפשר למצוא מודל לתנועת כוכבי הלכת, שיתאים לתצפיות.

בהתמודדות האחרונה עם בעיית המאדים הגיע קפלר למסקנה שמסלול המאדים אינו מעגל או צירוף של מעגלים אלא **אליפסה**. רעיון זה גרם לתפנית בחקר מערכת השמש. פריצת הדרך של קפלר התאפשרה ברגע שהוא נטש את ההנחה הבסיסית שהיתה מקובלת עוד מתקופת היוונים, כי התנועה הטבעית בעולם העל-ירחי היא מעגלית. קפלר הצליח לגלות קשרים מתמטיים בין אין-ספור המספרים שהותיר טיכו, ולנסח אותם בשלושה חוקים אמפיריים, המכונים "שלושת חוקי קפלר" כמפורט בסעיף 3 בפרק י. שלושת חוקי קפלר מתארים את תנועת כוכבי הלכת, ובזכותם נכנס קפלר להיסטוריה.

ג. נסיונו של קפלר להסביר את החוקים שמצא

קפלר לא הסתפק בתיאור תנועתם של כוכבי הלכת, אלא חיפש **הסבר** לחוקים אלה. הוא הבין כי לשמש יש תפקיד מכריע כ"דבק השמימי" שמחזיק את מערכת כוכבי הלכת; העובדה כי לכוכב לכת יש מהירויות שונות במרחקים שונים מהשמש (מסקנה הנובעת מהחוק השני של קפלר, כמפורט בסעיף 3 שבפרק י), הביאה את קפלר למחשבה שיש כוח ש"יוצא מהשמש"; הכוח חזק כאשר כוכב הלכת קרוב לשמש וחלש כאשר כוכב הלכת רחוק ממנה. קפלר דמיין "קרני כוח" היוצאות מהשמש במישור התנועה של הכוכב. כיוון שמספר הקרניים הפוגעות בכוכב לכת P הנמצא במרחק d כפול ממספר הקרניים הפוגעות בכוכב לכת 'P הנמצא במרחק 2d מהשמש (איור 14) הוא הסיק שעוצמת הכוח שהשמש מפעילה על כוכב לכת פרופורציונית הפוך למרחק כוכב הלכת מהשמש.

הדינמיקה של קפלר התבררה כשגויה, אולם על בסיס שלושת החוקים שבאמצעותם קפלר תיאר את תנועת כוכבי הלכת, גילה ניוטוֹן במחצית השנייה של המאה ה-17 את הדינמיקה הנכונה של כוכבי הלכת (סעיף 4 בפרק י).



איור 14: "קרני כוח" היוצאות מהשמש

4. תנועת הארץ מנקודת מבט מודרנית

אז מי מסתובב סביב מי – הארץ סביב השמש או השמש סביב הארץ?

במילים אחרות:

איזה משני המודלים תואם להשקפות של היום – המודל הגאוצנטרי או המודל ההליוצנטרי?

נניח לשם פשטות שמערכת השמש כוללת רק את השמש ואת כדור הארץ. כפי שיודעים מניתוח מערכות דו-גופיות כאלה, מערכת הייחוס הנוחה ביותר לתיאור התנועות היא זו ה"צמודה" למרכז המסה של מערכת הארץ והשמש. מרכז המסה של מערכת זו נמצא קרוב מאוד למרכזה של השמש. ביחס למרכז מסה זה הן השמש והן הארץ נעים בתנועה אלפטית מדוייקת (אליפסה הקרובה למעגל). במקום לומר שהארץ נעה במסלול של אליפסה מדוייקת סביב מרכז המסה המשותף לה ולשמש, אפשר לומר כי בקירוב מצויין הארץ נעה בתנועה אליפטית סביב השמש.

בנוסף לכך נזכיר כי תנועה היא מושג יחסי. במערכת ייחוס ה"צמודה" לארץ (או כמו שנוהגים לעתים קרובות לומר – "מנקודת מבט של הארץ") – השמש באמת נעה סביב הארץ. לכן אפשר לנווט בעזרת תנועת גרמי השמיים כפי שהיא ניצפית מהארץ. במערכת ייחוס ה"צמודה" לשמש – הארץ נעה סביב השמש.

אי אפשר לומר שהארץ נחה או שהשמש נחה. כפי שהדגשנו בעמוד 78 בכרך א, אין הבדל בין תנועה לבין מנוחה; גוף נח במערכת ייחוס אחת נע ביחס למערכת אחרת, וכל מערכות הייחוס הן שוות מעמד. כאשר יש לבחור מערכת ייחוס אחת מתוך אין ספור מערכות הייחוס האפשריות – כדאי לבחור את זו הנוחה ביותר לגבי המצב הנדון.

נעיר כי את "כוכבי-השבת" אין מכנים כיום בשם זה, אלא בשם "כוכבים"; בעבר הרחוק חשבו שכוכבי השבת "יושבים" במקומות קבועים. כיום יודעים שהם נעים - אחת התנועות שלהם היא ביטוי להתפשטות היקום.

אבני דרך בהתפתחות המכניקה והאסטרונומיה

פיתגורס הגה את הרעיון שהארץ היא המרכז הנייח של היקום - **המודל הגאוצנטרי**.

אריסטו קבע כי: "הגוף הנע יבוא לידי מנוחה, כשהכוח המניע אותו לא יפעל עליו עוד להניעו".
אריסטו מפרסם את ספרו **"על השמיים"**.
אפלטון מציג את השאלה: "כוכבי השבת נעים במסלולים מעגליים. מהם הצרופים של מסלולים מעגליים, אשר לאורכם נעים כוכבי הלכת?".

אריסטרכוס העלה השערה שהארץ סובבת סביב השמש - **המודל ההליוצנטרי**.

קלאודיוס פתולמיאוס (תלמי), אסטרונום שחי באלכסנדריה, **מבסס את המודל הגאוצנטרי**, ומפרסם את ספרו "אלמג'סט".

ניקולס קופרניקוס, אסטרונום פולני, מפרסם ספר בשם "על הסיבובים של גרמי השמיים" בו הוא מציע את **המודל ההליוצנטרי** שעל-פיו הארץ וחמשת כוכבי הלכת האחרים שהיו ידועים בתקופתו, נעים סביב השמש.

טיכו ברהה, אסטרונום דני, צפה בתופעה שאותה הוא כינה "כוכב חדש" (נובה). **תופעה זו עמדה בסתירה לתורת אריסטו**, שעל פיה לא מתרחשים שינויים בעולם העל-ירחי.

גלילאו גליליי, פיזיקאי איטלקי, מנסח את **חוק ההתמדה**, החוק פורסם רק 35 שנה לאחר שנכתב. חוק ההתמדה שנוסח על ידי גלילאו גליליי אינו מדויק, כי הוא טוען שללא השפעת כוחות, תנועתו של הגוף תהיה אופקית, כלומר הגוף ינוע סביב הארץ.

יוהן קפלר, אסטרונום גרמני, מתאר על סמך התצפיות שערך טיכו ברהה, את **המסלולים של כוכבי הלכת**.

1609
גלילאו גליליי, בונה **טלסקופ** על-סמך תיאור כללי של טלסקופ שניבנה בהולנד.

1610
גלילאו מגלה באמצעות הטלסקופ שבנה כי פני הירח מבותרים, שביל החלב הוא מצבור עצום של כוכבים, לכוכב הלכת צדק יש ארבעה ירחים, ולכוכב הלכת נוגה יש מופעים בדומה למופעי הירח של הארץ. התגליות מוצגות בסיפרו **"שליח הכוכבים"**.

1616
גלילאו ניצטווה על-ידי הכנסיה לא להטיף לתורת קופרניקוס.

1632
גלילאו מפרסם ספר בשם **"דיאלוג על שתי מערכות העולם העיקריות"** שבו הוא מציג ראיות התומכות במודל ההליוצנטרי. גלילאו מובא למשפט האינקוויזיציה ודינו נחרץ למאסר בית עד סוף ימיו.

בערך 1640
רנה דקארט מתקן את הניסוח של גלילאו גליליי **לחוק ההתמדה**, וטוען שאם על גוף לא פועלים כוחות חיצוניים, אז הגוף נח או נע לאורך קו ישר במהירות קבועה (במקום לומר שהגוף נע "בכיוון אופקי", כפי שטען גלילאו גליליי).

1687
אייזיק ניוטון מפרסם את ספרו **"עקרונות מתמטיים של פילוסופיית הטבע"**. הספר הוא יצירת מופת ששינתה את פני המדע.

1681
ויליאם הרשל, אסטרונום אנגלי, מגלה את כוכב הלכת **אורון (אורנוס)** באמצעות טלסקופ.

1798
הנרי קבנדיש, פיזיקאי בריטי, מראה באמצעות ניסוי **כי השערתו של ניוטון בדבר קיומו של כוח משיכה כובדי, מתגשמת לגבי גופים מסדר גודל מעבדתי.** הוא גם מדד את ערכו של קבוע הכבידה, G.

1845
ג'ון אדמס, אסטרונום אנגלי, ואורבן לבריה, אסטרונום צרפתי, מנבאים, על בסיס תאוריית הכבידה של ניוטון, כי קיים כוכב לכת נוסף, מעבר לכוכב הלכת אורון (אורנוס) ומשפיע על תנועתו של אורון.

יוהן גלה, אסטרונום גרמני, מגלה על סמך התחזית של אדמס ולבריה כוכב לכת חדש - **רהב (נפטון)** בכיוון שחושב על-סמך תאוריית הכבידה של ניוטון.

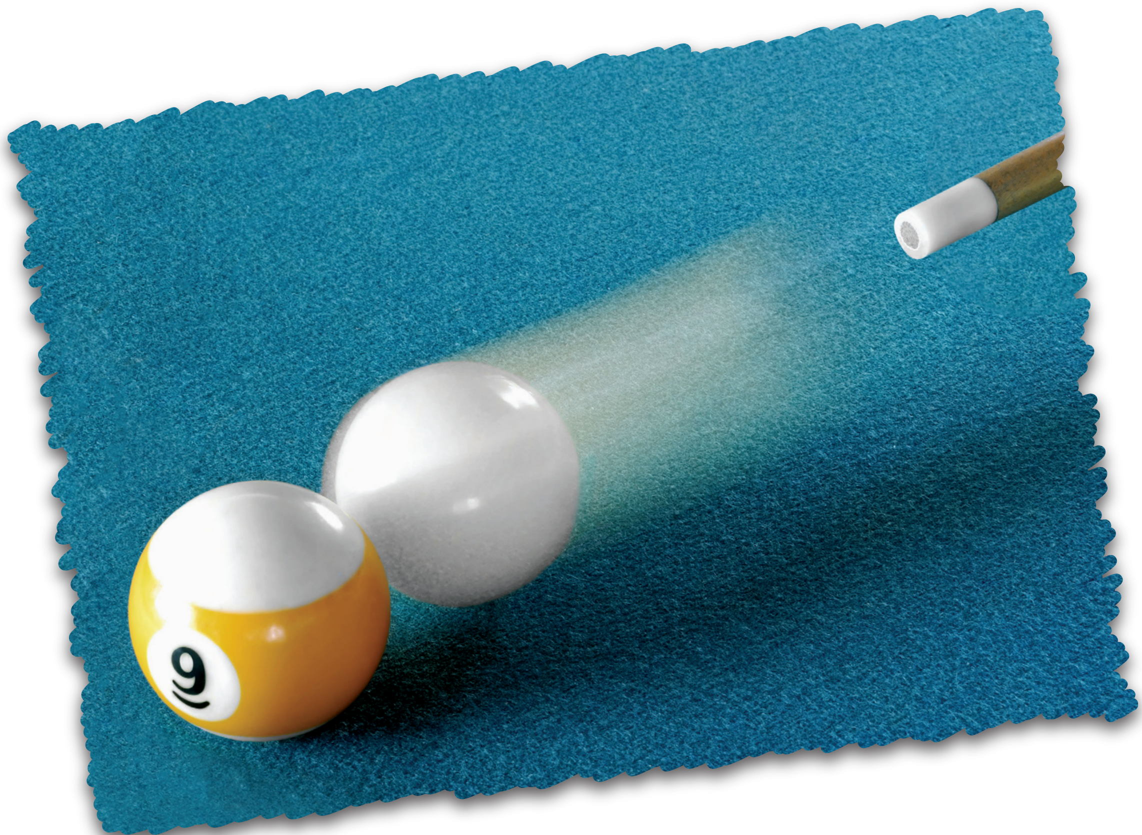
ברית המועצות משגרת את **החללית הראשונה** "ספוטניק", למסלול סביב הארץ. ניבויו של ניוטון בדבר אפשרות תנועה סביב הארץ מתגשם.

המודל ההליוצנטרי הוכר באופן רשמי על ידי הכנסיה הקתולית.

מפתח העניינים – כרך ב

Newtonian Mechanics

Vol. B



Adi Rosen

Out of the sea with a drop from me...