

האוניברסיטה הפתוחה
המחלקה לחינוך ולפסיכולוגיה
היחידה להשתלמות עובדי הוראה

משרד החינוך
המזכירות הפדגוגית
האגף לתכנון ולפיתוח תכניות לימודים

תכנון הלימודים במתמטיקה בחטיבה העליונה

**סקירת ספרות
בחמש מדינות נבחרות**

**אב התשס"ט
יולי 2009**

כתבו :

פרופ' אברהם ברמן, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
פרופ' נוח דנא-פיקרד, המכללה הירושלמית לטכנולוגיה
ד"ר שירלי מידז'נסקי, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
ד"ר טלי נחליאלי, מכללת לוויןסקי לחינוך
ד"ר בוריס קויצ'ו, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
ד"ר אנטולי שטרקמן, מכללת לוויןסקי לחינוך

סקירת הספרות בוצעה עבור האגף לתכנון ולפיתוח תכניות לימודים,
המזכירות הפדגוגית, משרד החינוך
לפי מכרז 61/10.06 (מתן שירותים מקצועיים, טכניים ולוגיסטיים
לצורך הערכת תכניות לימודים ועזרי למידה/הוראה)

© כל הזכויות שמורות למשרד החינוך

אין להעתיק או להפיץ פרסום זה או קטעים ממנו בשום צורה ובשום אמצעי
אלקטרוני, אופטי או מכני (לרבות צילום והקלטה)
ללא אישור בכתב ממשרד החינוך

עריכה : אמירה רום
עיצוב עטיפה : נאוה שנקמן

סדר ועריכה במחשב : ההוצאה לאור של האוניברסיטה הפתוחה
נדפס במרכז הדפוס הדיגיטלי של האוניברסיטה הפתוחה

אב התשס"ט
יולי 2009

תוכן עניינים

5	פתח דבר
7	הקדמה
9	רקע תאורטי
19	אנגליה
55	יפן
73	צרפת
107	מישיגן, ארה"ב
143	רוסיה
155	סיכום והמלצות

פתח דבר

סקירת ספרות זו עוסקת בחמש תכניות לימודים להוראת מתמטיקה בכיתות הגבוהות של בית הספר התיכון בחמש מדינות נבחרות: אנגליה, יפן, צרפת, רוסיה ומדינת מישגן בארה"ב.

מטרת העבודה היתה לבחון את הרציונל העומד ביסוד תכניות הלימודים האלה, את התכנים ואת דרכי ההוראה וההערכה הנהוגות בהפעלת התכניות מתוך כוונה כי המידע המובא בדוח זה ישרת את צוותי הפיתוח של תכניות הלימודים העוסקים בכך במערכת החינוך בישראל.

המידע הכלול בסקירת ספרות זאת נאסף ממקורות מגוונים, כגון אתרים רשמיים של רשויות החינוך במדינות הנבחרות, מחקרים ומאמרים, ואף מתוך בחינות הסמכה הנהוגות באותן מדינות. על אף מאמצי החוקרים לתת תשובות מספקות לכל השאלות שהנחו את עבודת הסקירה, בחלק מן המקרים לא עלה בידם, אלא להציג מידע חלקי בלבד. על אף זאת אנו תמימי דעים כי הצגת התכניות בסקירת הספרות תאיר כיוונים חדשים ומעניינים בתכנון הלימודים במקצוע חשוב זה.

מחקר הספרות הוזמן ומומן על ידי האגף לתכנון ולפיתוח תכניות לימודים במשרד החינוך. את המחקר ליוותה ועדה מטעם האגף ועם חבריה נמנו ד"ר צופיה יועד – מ"מ מנהלת האגף, ד"ר נעה אבולעפיה – מרכזת המחקר באגף בחלק ניכר מתקופת המחקר וד"ר חנה פרל, ד"ר נטע עורבי וגב' רבקה עינות – כנציגי תחום הדעת. מטעם האוניברסיטה הפתוחה ליוו את המחקר גב' ציפי יעקב – מנהלת היחידה להשתלמות עובדי הוראה, ד"ר אמירה רום – חוקרת ועורכת אקדמית וד"ר דוד מצר – מרכז המחקר ויועץ מתודולוגי.

אנו מבקשים להודות לחברי הוועדה באגף לתכנון ולפיתוח תכניות לימודים על היוזמה, על ההנחיה ועל ההדרכה שנעשו ברוח ידידותית נעימה ופורה. תודה לראש צוות החוקרים פרופ' אבי ברמן ולחוקרים אשר נענו לעבודה זו.

דוד מצר

אמירה רום

הקדמה

מזה זמן רב אין תכנית לימודים רשמית מעודכנת מטעם האגף לתכניות לימודים במתמטיקה לחטיבה העליונה. הדוח שלפנינו מסכם מחקר ספרות שנועד לשרת את ועדת תכנית הלימודים שמונתה לצורך פיתוח תכנית לימודים חדשה במתמטיקה לחטיבה העליונה.

נתבקשנו לענות על השאלות הבאות:

1. מהן מטרות הוראת המתמטיקה בחטיבה העליונה של בית הספר התיכון במדינות הנבחרות, ועל איזה רציונל הן מבוססות?
2. מהם העקרונות הפסיכולוגיים והדידקטיים שעליהם מושתתות דרכי ההוראה והלמידה של תחום הדעת באותן תכניות?
3. מהם התכנים המתמטיים שנלמדים במדינות השונות ובאילו דרגות כיתה הם נלמדים?
4. כיצד מרכיבים של חשיבה מתמטית באים לידי ביטוי בתכניות הלימודים הנבחרות?
5. כיצד תכנית הלימודים במתמטיקה מופעלת במדינות הנבחרות בקרב אוכלוסיות הטרוגניות?
6. כיצד מתפלגת אוכלוסיית התלמידים ברמות השונות? (שיעור הלומדים ברמה המוגברת, הבינונית והחלשה ועד איזו דרגת כיתה)
7. האם קיימות הקבצות על פי רמות בתכניות הנבדקות (ובאיזה גיל)? מהם הקריטריונים לפיהם נקבעות ההקבצות?
8. מהי "תרבות הלימוד" במתמטיקה כפי שהיא משתקפת בתכניות הלימודים של אותן מדינות (מתמטיקה לכל לעומת מתמטיקה למתמחים)? האם קיימות תכניות לימודים שונות למתמחים במדעים ולשאר התלמידים, ואם כן – במה הן שונות?
9. מה מלמד המחקר החינוכי על איכותן ו/או על הישגיהן של תכניות אלה ועל הוראת המתמטיקה בכלל?
10. כיצד משפיעים מחקרים, ניירות עמדה ודוחות העוסקים בהוראת מתמטיקה בחטיבה העליונה על שינויים בתכנית הלימודים?

בתיאום עם האגף לפיתוח תכניות לימודים במשרד החינוך נבחרו המדינות הבאות: אנגליה, יפן, צרפת, רוסיה ומדינת מישגן בארה"ב. המסמך בנוי בצורה הבאה: לאחר רקע תאורטי שלפיו הוכנו הדוחות על תכניות הלימודים בחמש המדינות, מוצגים הדוחות עצמם ואחריהם מופיע סיכום השוואתי והמלצות. בסוף כל פרק מוצגת רשימת המקורות לפרק, זאת כדי לאפשר לקוראים לראות על אילו מקורות מבוסס הניתוח של כל תכנית.

רקע תאורטי

פרופ' אברהם ברמן וד"ר בוריס קויצ'ו

ההצגה והניתוח ההשוואתי של תכניות הלימודים במחקר נשענים על הנחות היסוד הבאות:

הנחה על האוניברסאליות של המתמטיקה ועל היחסיות של תכניות הלימודים
למתמטיקה כמדע יש אופי אוניברסאלי, אך לתכניות הלימודים של מדינה מסוימת יש אופי יחסי שמשקף את ההיסטוריה, התרבות והצרכים של אותה מדינה. לכן שימוש בארץ בתכניות לימודים של מדינות שונות דורש התייחסות לשוניות בין המדינות. זאת אפילו במקרים של תכניות לימודים של מדינות שמצליחות במבחנים בינלאומיים יותר מאיתנו ומושכות תשומת לב רבה של הציבור הישראלי.

הנחה על השפעת תכניות הלימודים על למידת מתמטיקה
תכנית הלימודים מהווה גורם חשוב שמשפיע על למידת המתמטיקה. גורמים חשובים נוספים הם: פירוש התכנית על ידי אנשי חינוך, ספרי לימוד, עקרונות להקמה ולפעולה של בתי ספר ושל כיתות, הכנת מורים, מעשה הוראה ועוד. לפיכך, כדי להסיק מסקנות מהדוח יהיה צורך להתייחס למקורות מידע מגוונים, כגון: ספרי לימוד, מקורות מידע על שיטות הערכה שהתכנית כוללת, מחקרים כמותיים ואיכותניים על הפעלת התכנית.

הנחה על המהות של למידת המתמטיקה ושל הוראתה
כל תכנית לימודים נשענת על גישה מסוימת להמשגת המושגים "למידה משמעותית" ו"הוראה משמעותית". דוח זה מנתח את תכניות הלימודים הנבחרות בגישה שנחשבת כמובילה בעולם המערבי ומדגישה למידה לקראת הבנה, מתן הזדמנויות ללמידה פעילה והוראה אינטראקטיבית.

הרקע התאורטי של הדוח מאורגן כדיון מפורט בשלוש הנחות היסוד ובדיון על אפשרות להסקת מסקנות על סמך המידע שיוצג.

1. האוניברסאליות של המתמטיקה והיחסיות של תכניות הלימודים

האוניברסאליות של המתמטיקה באה לידי ביטוי בהגדרה הבאה שהוצעה על ידי גרשון הראל (Harel, in press, a):

מתמטיקה מורכבת משתי תת-מערכת משלימות:

- תת-מערכת ראשונה הינה אוסף או מבנה או מבנים מורכבים מאקסיומות, הגדרות, משפטים, הוכחות, בעיות ופתרונות שממוסדים על ידי הקהילייה המתמטית ונחשבו או נחשבים נכונים ובעלי תועלת לפתרון בעיות מתמטיות ומדעיות בהיסטוריה של מתמטיקה ובימינו.
- תת-מערכת שנייה מורכבת מדרכי חשיבה (ways of thinking) שמאפיינים פעילויות מנטאליות שמביאות תוצרים המתייחסים לתת-המערכת הראשונה.

דוגמאות לפעילויות מנטאליות הרלבנטיות להגדרה הנ"ל כוללות המשגה, חיבור ופתרון בעיות מתמטיות ופעילויות המיועדות לשכנוע בנכונות או באי-נכונות של תוצרים מתמטיים. דרכי חשיבה כוללות אסטרטגיות היוריסטיות לפתרון בעיות, סכמות שונות להוכחה/הפרכה ואמונות לגבי מתמטיקה כמדע וכמקצוע לימוד. ההגדרה מתייחסת למתמטיקה כמקצוע חי ומתפתח, ולכן בכל רגע נתון המתמטיקה לא ניתנת לפורמליזציה מלאה באמצעות רשימה מושלמת של תוצרים מתמטיים ודרכי חשיבה של מתמטיקאים ולומדי מתמטיקה. בהגדרה מדובר על התפתחות המתמטיקה באמצעות המשגת מושגים חדשים ומשפטים חדשים ועל כך שהתפתחות המתמטיקה נמשכת גם ביחס לתוצרים מתמטיים קיימים וממוסדים. זאת מכיוון שכל לומד המתמטיקה הינו בעל הבנה פרטית ומתפתחת של התוצרים המתמטיים. האוניברסאליות של המתמטיקה היא פונקציה של רוחב הקהילייה המתמטית שממסדת תוצרים מתמטיים. בעולם המודרני המתמטיקה אוניברסאלית במידה רבה מאוד, ואין מקום לדון על מתמטיקה של מדינה אחת כנבדלת ממתמטיקה של מדינה אחרת. מכאן נובעת המטרה האוניברסאלית של הוראת המתמטיקה: לאפשר לתלמידים לבנות ידע של תוצרים מתמטיים המשתווה עם הידע שממוסד על ידי הקהילייה המתמטית המודרנית, ובו בזמן לעזור להם לרכוש ולהתנסות בדרכי חשיבה שמאפשרות בניית ידע זה.

למרות האוניברסאליות של המתמטיקה כמדע וקיום קריטריונים מקובלים לגבי קביעת תוקף הידע המתמטי, יש הבדלים משמעותיים בין מדינה למדינה ביחס לדגשים בלימוד המתמטיקה, תכנים נלמדים ושיטות ההוראה. בד"כ, דגשים אלה משקפים היסטוריה, תרבות וצרכים של מדינה או חברה מסוימת. ההבדלים הבין תרבותיים שצוינו במחקר (למשל, Haggarty & Pepin, 2002, Parks & King, 2007, Presmeg, 2007) כרלבנטיים ללימוד המתמטיקה כוללים: מידת ההטרוגניות של חברות שונות מבחינה סוציו-אקונומית ומבחינת שפות ומגזרים, צורות שונות של השתתפות

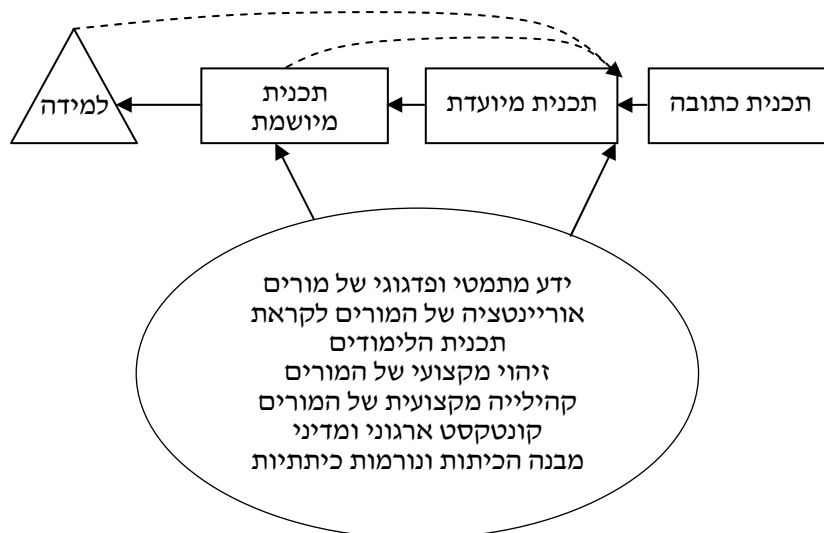
תלמידים בלמידת המתמטיקה, זהויותיהם, נגישות של הזדמנויות לימודיות, נגישות של טכנולוגיות לימודיות, הבנות שונות של המושגים "מתמטיקה יום יומית" ו"מתמטיקה המקושרת לעולם התלמיד".

2. השפעת תכניות הלימודים על למידת המתמטיקה

ההשפעה של תכניות הלימודים על האופן שבו תלמידים לומדים מתמטיקה אינה ישירה (NRC, 2004). סטיין, רמילרד וסמית' (Stein, Remillard & Smith, 2007) מבחינים בין תכנית לימודים שמתוארת במסמכים רשמיים (תכנית כתובה) לבין תכנית לימודים שבאה לידי ביטוי בתכנון ההוראה על ידי המורים (תכנית מיועדת) לבין תכנית לימודים המיושמת בכיתה (תכנית מיושמת)¹.

יחסי הגומלין בין תכניות הלימודים הנ"ל לבין למידת המתמטיקה מתוארים בצורה סכמטית באיור 1. הגורמים שמסבירים את המעברים בין סוגים שונים של תכניות לימודים מופיעים בתחתית האיור.

מטרות המחקר הנוכחי שצוינו בהקדמה מזמנות בעיקר ניתוח של תכניות לימודים כתובות, ובמידה מסוימת של תכניות מיושמות: מטרות 1 ו-2 מזמנות ניתוח של תכניות לימודים כתובות, ומטרה 3 – התייחסות למקורות מידע נוספים שזורקים אור על תכניות לימודים מיושמות. הדוח מספק את המידע הנדרש. יחד עם זאת, יש לציין שהבנה מושלמת של תכניות הלימודים של המדינות הנבחרות דורשת מחקר רחב וממושך יותר שמאפשר התייחסות לכל הגורמים שמופיעים באיור 1.



איור 1. השפעה של תכנית הלימודים על הלמידה (מעובד מתוך Stein, Remillard & Smith, 2007, עמ' 322)

1 הבחנות דומות (אך לא זהות) בין סוגים שונים של ת"ל מופיעות במסגרת התאורטית המתקדמת של TIMSS (ר' Garden et al., 2006).

3. למידת המתמטיקה והוראתה

קיימות פרדיגמות או מטפורות שונות של למידה בהשלכות שונות לתכניות הלימודים ולמעשה ההוראה. כמו כן, לא מעטים המקרים כאשר מטרות ורציונל של תכנית לימודים מסוימת מנוסחים במונחים של פרדיגמה אחת ואילו תכנית הלימודים המיושמת כוללת סימנים של פרדיגמה אחרת.

במאמרה המפורסם מ-1998 מבחינה אנה ספרד בין שתי המטפורות העיקריות ללמידה: למידה כרכישה (acquisition metaphor or AM) ולמידה כשיתוף (Participation Metaphor or PM). ספרד מסבירה את ההבדלים בין המטפורות כדלהלן:

While the AM stresses the individual mind and what goes "into it," the PM shifts the focus to the evolving bonds between the individual and others. While AM emphasizes the inward movement of the object known as knowledge, PM gives prominence to the aspect of mutuality characteristic of the part-whole relation.

(Sfard, 1998, p. 6)

טבלה 1 מתארת מיפוי השוואתי של שתי המטפורות.

טבלה 1. מיפוי המטפורות של הלמידה (עובד מתוך Sfard, 1998, p. 7)

למידה כרכישה	למידה כשיתוף
העשרה אישית	בנייה של קהיליית הלומדים
רכישה של משהו	הפיכה לשותף
מי שמקבל, צרכן	משתתף שולי, חניך, משתתף טירוני
מספק, מקדם,	משתתף מומחה, משמר פעילות/שיחה
מתווך	
רכוש, בעלות,	היבט של ניסיון/שיחה/פעילות
סחורה	
תהליך רכישה,	תהליך הפיכה לשותף
קבלת בעלות	בפעילות/שיחה/ניסיון

לאורך אלפי שנים, טוענת ספרד, הבנת הלמידה כרכישה הייתה נפוצה ושימושית ביותר ונתפסה כמנגנון אמיתי של הלמידה. ב-30 שנים האחרונות מתרחש בהדרגה מעבר להבנת הלמידה כשיתוף. זאת בגלל אי שביעות רצון מתוצרים של למידה כרכישה. בתפיסת הלמידה כרכישה מובנית דילמה בלתי פתירה, הידועה כפרדוקס הלמידה של פלטו: כיצד אנו יכולים לרצות לרכוש ידע חדש של משהו שאנחנו עדיין לא

יודעים עליו דבר הרי אם ידע מסוים לא שייך לאוסף הדברים שאנחנו יודעים עליהם, אין אנו יכולים לשאול על כך! והמסקנה מכך היא כי למידה של דברים חדשים אינה אפשרית. כמובן, פרדוקס הלמידה נשען על ההנחה שלמידה אינה אפשרית ללא שאילת שאלות או במילים אחרות – כדי ללמוד צריך לרצות ללמוד.

פרדוקס הלמידה אינו פתיר במסגרת של למידה כרכישה, ולא קיים כלל במסגרת של למידה כשיתוף. למידה כשיתוף מתחברת היטב לגישה הקונסטרוקטיביסטית שנשענת על המורשת המדעית של פיאז'ה. הגישה הקונסטרוקטיביסטית מניחה שלמידה של ידע חדש מתרחשת על בסיס המושגים שידועים ללומד כאשר הוא מפעיל אותם על ידי השוואה ביניהם, על ידי צירוף שלהם, ועל ידי בניית קשרים ביניהם (למשל, Von Glasersfeld, 1991). גישה זו פותרת את פרדוקס הלמידה, אך מעוררת דילמה אחרת: כיצד ניתן להסביר את העובדה שאנשים מצליחים לבנות ידע שנראה זהה לידע של אחרים? דילמה זו נחשבת בלתי פתירה במסגרת של למידה כשיתוף, אך לא קיימת כלל במסגרת של למידה כרכישה. על סמך ניתוח זה מסיקה ספרד את המסקנה שבשלב הנוכחי של התפתחות מדעי הלמידה מסוכן להסתפק אחת בכיוון אחד בלבד כדי לבנות תכניות לימודים ושיטות הוראה מתאימות.

היקף מחקר הספרות הנוכחי לא מאפשר סקר רחב של תאוריות הלמידה המודרניות. בין התאוריות השונות נתמקד כאן במסגרת תאורטית אחת שנראית לנו מאוזנת ומשרתת היטב את מטרות המחקר. גישה זו הוצגה לאחרונה על ידי גרשון הראל ונקראת "מסגרת מבוססת על עקרונות DNR לפיתוח תכניות לימודים".

הראל (Harel, in press, b) מבחין בין הנחות יסוד לבין עקרונות להוראה שנובעים מהנחות היסוד. לצרכינו דיי לציין ארבע מתוך שמונה הנחות היסוד של המסגרת. שתי ההנחות הראשונות נשענות על התאוריה של פיאז'ה, ההנחה השלישית – על התאוריה של ויגוצקי, ואילו הרביעית מקושרת להגדרת המתמטיקה שצוטטה לעיל (בסעיף על האוניברסאליות של המתמטיקה).

1. הנחת הסובייקטיביות: כל הבחנה שאנשים עושים היא תוצאה של ייחוס המבנים המנטאליים שלהם לסביבה.
2. הנחת התפתחות הידע: תהליך של התפתחות ידע מתרחש תוך מתח מתמשך בין הטמעה והתאמה².
3. הנחת ההוראה: הבניית ידע מדעי אינה ספונטאנית. תמיד יהיה הבדל בין מה שלומד יכול לעשות בהנחיה של מומחה או בשיתוף פעולה עם עמיתים יותר מוכשרים לבין מה שהוא יכול לעשות לבד.

2 *הטמעה והתאמה* הינן מושגי יסוד בתיאוריית פיאז'ה. *הטמעה* (assimilation) היא קליטת אובייקט או רעיון לתוך סכימת הפעולה או האופרציה הקיימת. *התאמה* (accommodation) היא התהליך המשלים של ההטמעה – כאשר בן אדם משנה ומתאים את עצמו אל הסביבה (זיי, 1980).

4. הנחה על המהות של המתמטיקה: ידע של מתמטיקה מורכב מתוצרים מתמטיים ומדרכי חשיבה שהתפתחו בהיסטוריה של המתמטיקה.

הנחות יסוד אלה מהוות בסיס להמשגת למידה אישית כשרשרת מצבים מנטאליים של חוסר שיווי משקל – שיווי משקל – חוסר שיווי משקל חדש וכדומה. במילים אחרות, למידה מתקיימת באמצעות פתרון בעיות בעלות משמעות ללומדים, שעוסקים בהן על מנת לספק הן את הצרכים האינטלקטואליים שלהם (למשל, לספק את הסקרנות) והן צרכים אחרים (למשל, להצליח במבחן). גישה זאת נראית קרובה לקונסטרוקטיביזם, ופרדוקס הלמידה לא מתעורר בה כתוצאה מהשימוש בהנחות שמבוססות על תאורית פיזיקלית. גם הדילמה העיקרית של קונסטרוקטיביזם אינה מתעוררת ב-DNR. זאת מכיוון שעקרונות ה-DNR עוקפים את המושג "ידע שנראה זהה". ואכן ההגדרה הדו-ממדית של המתמטיקה (ראו גם את ההנחה הרביעית של DNR) כוללת התייחסות הן לתוצרים מתמטיים והן לדרכי חשיבה שאינן יכולות להיות זהות אצל בני אדם שונים. עם זאת, ההגדרה מזמנת את הכיוון הרצוי של התפתחות ידע: מהבנות פרטיות של הלומדים להבנות התואמות את הידע הממוסד של הקהילה המתמטית המודרנית.

מהנחות היסוד נובעים שלושה עקרונות הוראה³ שראשי התיבות שלהם באנגלית מהווים את שם המסגרת – DNR (עקרון הדואליות – Duality principle, עקרון הנחיצות – Necessity principle ועקרון החשיבה החוזרת – Repeated reasoning principle).

עקרון הדואליות: לומדים מפתחים דרכי חשיבה רק דרך בניית תוצרים מתמטיים, והתוצרים המתמטיים שהם מייצרים מוגדרים באמצעות דרכי החשיבה שלהם.

במילים אחרות – שינוי בדרכי חשיבה מוביל לשינוי בתוצרים המתמטיים שהלומד יכול לבנות, ולהיפך. מעקרון הדואליות נובע, למשל, שפעילות הוראתית של הטפה או מתן ייעוץ לגבי אסטרטגיות היוריסטיות יעילות לפתרון בעיות אינם משפיעים על איכות הפתרונות שהתלמידים מייצרים. עם זאת, ניתן לעזור לתלמידים ללמוד אסטרטגיות היוריסטיות לפתרון בעיות באמצעות התנסות בפתרון בעיות שמזמנות את האסטרטגיות ובאמצעות חשיבה רפלקטיבית על הפתרונות.

בעקבות עקרון הדואליות, בניתוח השוואתי של תכניות הלימודים נשאלת השאלה, אם בתכנית יש התייחסות לא רק לתוצרים מתמטיים, אלא גם לדרכי חשיבה, ואם כן, באיזו מידה ובאילו דרכים מקשרת התכנית דרכי חשיבה לתוצרים.

3 הראל מגדיר עקרון הוראה כתפיסה לגבי השפעת פעילות מורה על התפתחות ידע של התלמידים.

עקרון הנחיצות: כדי לגרום לתלמידים ללמוד ידע שאנחנו רוצים ללמד, הידע צריך להיות נחוץ ללומדים; נחוץ במשמעות של סיפוק הצרכים האינטלקטואליים שלהם יותר מאשר של סיפוק הצרכים החברתיים או הכלכליים.

בכל שלב ושלב של הוראת המתמטיקה דורש עקרון הנחיצות לחפש תשובה על השאלה, מהו הצורך בתוצר המתמטי (מושג, משפט, בעיה וכדומה) שאנחנו רוצים ללמד. אם התשובה העיקרית על השאלה היא "כי התוצר צריך להופיע במבחן", אזי ההוראה מתקיימת בניגוד לעקרון הנחיצות. הראל טוען שבמקרה זה למידת המתמטיקה הופכת להיות חסרת משמעות אפילו לתלמידים שרוצים להצליח. יתר על כן, למידה ללא נחיצות אינטלקטואלית בדרך כלל אינה יעילה.

עקרון הנחיצות מתקיים כאשר הוראת תוצר מתמטי חדש מופיעה אחרי בעיה משמעותית שקשה או בלתי אפשרי לפתור אותה ללא שימוש בתוצר זה. אדרבא, העיקרון אינו מתקיים כאשר המורה מתחיל מהגדרה פורמאלית של מושג חדש או מניסוח של משפט מתמטי חדש ואחר כך מסביר כיצד להשתמש בהם באמצעות תרגילים טכניים בלבד. לדוגמה, על פי עקרון הנחיצות, להוראת המושג 'נגזרת' עדיף להקדים דיון בבעיות ההיסטוריות שהביאו את ניוטון ואת לייבניץ להגדרות של 'נגזרת', ורק אחר כך להגדיר 'נגזרת' בצורה פורמאלית, ולא להיפך. דוגמה אחרת: ידע מתמטי חדש עשוי להיות נחוץ מבחינה אינטלקטואלית, כאשר הוא עוזר לתלמידים לבחור בין שתי אופציות סותרות לפתרון בעיה.

חשוב לציין כאן שהוראת המתמטיקה בדגש על "בעיות מעולמו של התלמיד" יכולה להיות אחת הדרכים של מימוש של עקרון הנחיצות, אך לא היחידה. לא מעטים המקרים שבהם קשה להצדיק נחיצות של ידע מתמטי מסוים באמצעות בעיות של תוכן יום יומי, אך טבעי יותר ליצור נחיצות של הידע באמצעות שיקולים מתמטיים טהורים. דוגמה בולטת לכך היא הוראת מספרים מכוונים. כידוע, מספרים מכוונים הוכנסו למתמטיקה רק במאה ה-17 על מנת לתת משמעות לפתרונות של משוואות ממעלה השלישית (ראו למשל: Hefendehl-Hebeker, 1991).

בעקבות עקרון הנחיצות אנו שואלים בדוח זה, אם בתכנית לימודים מסוימת יש התייחסות לתוצרים מתמטיים בזיקה לבעיות משמעותיות שניתן לפתור באמצעותם. השאלה ניתנת לתשובה במחקר בעיקר באמצעות התבוננות בדוגמאות שמלוות את תכניות הלימודים הכתובות.

עקרון החשיבה החוזרת: לומדים צריכים להתאמן בחשיבה על מנת להפנים, לארגן ולשמור תוצרים מתמטיים ודרכי חשיבה נלמדים.

אפילו כאשר הוראה של תוצר מתמטי מתממשת תוך התחשבות בדרכי חשיבה ובצרכים אינטלקטואליים של הלומדים, עדיין נשארת השאלה כיצד להבטיח הפנמה, ארגון ושמירה של הידע הנלמד. עקרון החשיבה החוזרת מציע לספק לתלמידים הזדמנויות חוזרות להתנסות בדרכי חשיבה ובבנייה ובשימוש בתוצרים מתמטיים נלמדים.

השלכות פרקטיות של העיקרון הן בנכונות לזמן חשיבה חוזרת ולא בסתם תרגול של טכניקות נלמדות. בנוסף לכך, העיקרון מצדיק ארגון ספיראלי של התוכן המתמטי של תכניות הלימודים כאשר שימוש בידע שנלמד בעבר נמשך בלימוד נושאים חדשים. ניתוח תכניות הלימודים מנקודת ראות של עקרון החשיבה החוזרת עוסק בעיקר בהיבט זה.

4. ניתוח השוואתי של תכניות הלימודים

לאור הרקע התאורטי מאורגן הניתוח ההשוואתי של התכניות סביב הנקודות הבאות:

1. הרקע להתפתחות תכניות הלימודים ;
2. רציונל התכניות, העקרונות הפסיכולוגיים והדידקטיים שעליהם מושתתות דרכי ההוראה והלמידה בתכניות, והאופן שבו עקרונות אלה משתלבים עם העקרונות של DNR ;
3. מטרות התכניות ;
4. מבנה התכניות (חלוקה ליחידות לימוד, לרמות ולמגמות, הערכת הישגים וכדומה) ;
5. התכנים העיקריים של התכניות ;
6. מה ידוע על דרכי ההפעלה של התכניות ועל הערכתן.

בהקדמה הוזכרו עשר שאלות שנתבקשנו לדון בהן. בטבלה הבאה מוצגות השאלות שכל אחת משש הנקודות שצוינו לעיל עוסקת בהן.

נקודות	1	2	3	4	5	6
שאלות	10, 8	1, 2, 4	1, 5	3, 5, 7, 8	3, 4	6, 9, 10

רשימת מקורות

זיו, א. (1980). פסיכולוגיה בחינוך. יחידה 4: גורמים הכרתיים הכיתה (א), מבנה ההכרה והתפתחותה. תל אביב, ישראל: האוניברסיטה הפתוחה.

Harel, G. (in press, a). What is mathematics? A pedagogical answer to a philosophical question. In R. B. Gold & R. Simons (Eds.), *Current Issues in the Philosophy of Mathematics from the Perspective of Mathematicians*, Mathematical American Association. Retrieved on June 21, 2008.

Harel, G. (in press, b). *DNR Perspective on mathematics curriculum and instruction*, Part II. *Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematik*.

National Research Council (2004). *On evaluating curricular effectiveness: Judging the quality of K-12 mathematics evaluations*. Washington, DC: National Academic Press.

Garden, R., Lie, S., Robitaille, D. Angell, C., Martin, M., Mullis, I., Foy, P. Arora, A. (2006). TIMSS advanced 2008 assessment framework. TIMSS & PIRLS International Study Center, MA: Boston. Retrieved June 24 2008 from http://timss.bc.edu/PDF/TIMSS_Advanced_AF.pdf

Stein M., Remillard J. & Smith, M. (2007). How curriculum influences student learning. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 319-368). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Presmeg, N. (2007). The role of culture in teaching and learning mathematics. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 435-458). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Parks, R. & King, C. (2007). Culture, race, power, and mathematics education. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 405-433). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Haggarty, L. & Pepin, B. (2002). An investigation of mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: Who get an opportunity to learn what? *British Educational Research Journal*, 28(4), 567-590.

- Sfard, A. (1998). On two metaphors for learning and the danger of choosing just one, *Educational Researcher*, 27(2), 4-13.
- Von Glasersfeld, E. (1991). *Radical constructivism in mathematics education*. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer.
- Hefendehl-Hebeker, L. (1991). Negative numbers: Obstacles in their evolution from intuitive to intellectual constructs. *For the Learning of Mathematics*, 11(1), 26-32.

אנגליה

ד"ר טלי נחליאלי וד"ר שירלי מידז'נסקי

1. הרקע להתפתחות תכנית הלימודים

בחלק זה יתואר הרקע לשינוי בתכנית הלימודים הלאומית של אנגליה בשנים האחרונות.

בשנת 2003 ניסחה ממשלת אנגליה מסמך הנקרא "Every Child Matters". מסמך זה נכתב בעקבות מקרים שונים של התעללות בילדים ומטרתו היתה לחזק את התמיכה במשפחות באמצעות שירותי מניעה, להבטיח מעורבות מתאימה במקרה הצורך ולהתייחס לבעיות של אחריות ושל אינטגרציה אשר זוהו כקריטיות. בנובמבר 2004 הממשלה ניסחה מסמך נוסף: "Every Child Matters: Change for Children" שמטרתו היתה להגביר את הזדמנויות הלמידה של ילדים וצעירים ולהפחית את הסיכונים שהם חשופים אליהם. כמו כן הועבר חוק (The Children Act 2004) המספק בסיס חוקתי לפיתוח שירותים נגשים ויעילים יותר המתמקדים בצרכי הילד, בצעירים ובמשפחות.

חמשת התוצרים אשר זוהו כמרכזיים לרווחת הילד הם: (1) להיות בריא, (2) להיות בטוח, (3) הנאה והישגים, (4) מתן תרומה חיובית, ו-(5) השגת רווחה כלכלית.

בעקבות השינוי אשר מסמכים אלה החלו לעורר במדינה ועל בסיס חמשת התוצרים שזוהו, נוסחו מחדש מטרות תכנית הלימודים בחינוך העל יסודי ובעקבותיהן שונתה תכנית הלימודים כולה.

חוק חינוך חובה באנגליה נקבע ל 11 שנים לבני 5-16. תכנית הלימודים במתמטיקה על פי ה- National Curriculum מורכבת מ-4 שלבים בהתאם לכיתות הלימוד (פירוט בסעיף 3). החינוך היסודי כולל למידה משנת הלימודים הראשונה ועד לשישית (גיל 5 עד 11) והחינוך העל יסודי כולל למידה בשנות הלימודים מהשביעית ועד לאחת עשרה (גיל 11 עד 16). במושגים ישראליים המשמעות היא כי הגיל בשנת הלימודים האחת עשרה מקביל לגיל תלמידי כיתה י' בישראל.

עם תום שנת הלימודים האחת עשרה התלמידים רשאים לעבור ללמוד בבתי ספר מקצועיים או טכניים או להמשיך ללמוד מתמטיקה במשך שנתיים נוספות ברמות מתקדמות יותר – AS ו-AL (כמפורט בסעיף 5). דבר זה מהווה תנאי לקבלה ללימודים אקדמיים האפשריים החל מגיל 18 לאחר 13 שנות לימוד.

תכנית הלימודים כפי שהיא מוגדרת בחוק החינוך (1996, חלק 353b) מציינת מה צריך ללמד בכל מקצוע בכל אחד מארבעת השלבים, והיא מהווה בסיס לתכנית הלימודים שקובע כל בית ספר. דרישות ההוראה בכל מקצוע מתייחסות לארבעה נושאים: שימוש בשפה, שימוש בכלים טכנולוגיים, בריאות, ביטחון והכלה.

חוק החינוך מפרט גם את הידע, המיומנויות וההבנה שמצפים מתלמידים בעלי יכולות שונות וברמת בגרות שונה בסוף כל שלב.

תכנית הלימודים לשלבים 3 ו-4 פורסמה לראשונה בשנת 2007 והתחילו ללמד לפיה בספטמבר 2008.

מטרות העל של תכנית הלימודית הלאומית הכללית הן:

- להעלות את ההישגים של הלומדים בכל המקצועות, במיוחד באנגלית ובמתמטיקה.
- לצייד את הלומדים במיומנויות אישיות ובמיומנויות חשיבה ולמידה שיידרשו להם כדי להצליח בחינוך, בחיים ובעבודה.
- להגביר את המוטיבציה ואת המעורבות של הלומדים.
- לאפשר מעבר חלק מבית הספר היסודי לעל יסודי ואחריו.
- לעודד צעירים רבים יותר להמשיך ללימודים מתקדמים.
- לאפשר לבתי הספר את הגמישות הנדרשת כדי להתאים למידה לצרכים אינדיבידואליים וכלליים.
- להבטיח כי ההערכה שבה משתמשים במערכת החינוך תתמוך בהוראה ובלמידה יעילות.
- לספק יותר הזדמנויות לתמיכה ממוקדת ולאתגר במקומות הנדרשים לכך.

תכנית הלימודים הלאומית חלה על כל התלמידים בגיל החובה. מקצועות החובה שעל כל התלמידים ללמוד הם אמנות, אזרחות, אנגלית, גיאוגרפיה, מדעים, היסטוריה, חינוך גופני, טכנולוגיה, טכנולוגיות תקשורת ומידע, מוסיקה, מתמטיקה ושפות זרות מודרניות.

השינויים שנקבעו בתכנית הלימודים במתמטיקה נוסחו במטרה לטפל בבעיה שקיימת כיום באנגליה – מחסור במתמטיקאים טובים באוניברסיטאות ובבעלי השכלה מתמטית בתעשייה. מתברר כי מערכת החינוך לא מצליחה לטפח אזרחים בעלי השכלה מתמטית טובה, ולכן בוגריה נמנעים מלימודים גבוהים שיש בהם דרישה לידע מתמטי רחב (Kounine, Marks & Truss, 2008). במאמר (The Value of Mathematics, ibid.) (2008) עולה הטענה כי הכלכלה והתעשייה של אנגליה נמצאות בסכנה של ניוון שכן פחות ופחות תלמידים לומדים מתמטיקה וההישגים במתמטיקה יורדים. נראה כי

שורש הבעיה נעוץ ברמת הקושי של מבחני הסיום במתמטיקה (O-level/GCSE), שירדה מאוד בשנים האחרונות. בנוסף לכך, במהלך לימודי התיכון התלמידים לומדים נושאים רבים מידיי במתמטיקה, דבר הגורם ללמידה רדודה מאוד.

כדי לבדוק טענות אלה בחנה קבוצה של מתמטיקאים שבע בחינות גמר שונות שנערכו בין השנים 1951 ו-2006. המתמטיקאים זיהו שלושה שלבים שבהם חלה התדרדרות במבחני הסיכום:

1. בשנים 1951 עד 1970. בשנים אלה השאלות במבחני הסיום התמקדו באלגברה, אריתמטיקה וגיאומטריה. השאלות שנשאלו היו מורכבות, ורובן דרשו יותר משלב אחד כדי להגיע לפתרון. התלמידים נדרשו ללמוד את הנושאים הללו לעומק כדי להצליח בבחינות.
2. בשנת 1980. השאלות עדיין עסקו באותם נושאים כבעבר, אך הדגש כאן היה על יישומים פרקטיים יותר ועל מתמטיקה בהקשר. הייתה ירידה משמעותית ברמת הקושי של השאלות. תכנית הלימודים נשארה כשהייתה.
3. בשנים 1990-2006. חלה ירידה משמעותית בסטנדרטים. תכנית הלימודים הפכה רחבה יותר ורדודה יותר (Gardiner, 2006). השאלות דרשו יותר שימוש בכללים ופחות הוכחות, השאלות עצמן הובילו את התלמיד לפתרון ולא נדרשה הבנה מעמיקה של המושגים.

כדי להתמודד עם הבעיה של למידת תכנים בצורה רדודה, תכנית הלימודים החדשה כוללת פחות תכנים, אך הדרישה היא שהלמידה תהיה מעמיקה יותר.

2. רציונל התכנית, העקרונות הפסיכולוגיים והדידקטיים

בחלק זה יידון הקשר שבין תכנית הלימודים של אנגליה לבין הרעיונות של DNR שמתוארים ברקע התאורטי.

עקרון הדואליות. האם בתכנית יש התייחסות לא רק לתוצרים מתמטיים אלא גם לדרכי חשיבה? אם כן, באיזו מידה ובאילו דרכים מקשרת התכנית בין דרכי חשיבה לתוצרים?

תכנית הלימודים הלאומית החדשה של אנגליה מאורגנת סביב מושגים מרכזיים ותהליכים מרכזיים בכל אחת מהדיסציפלינות ובכל אחד מהנושאים בתוך הדיסציפלינה. הנושאים המרכזיים אליהם מתייחסת התכנית הם: יכולת, יצירתיות, יישומים והשלכות של המתמטיקה והבנה ביקורתית.

התכנית מאורגנת סביב המיומנויות שהתלמידים צריכים לרכוש כדי להצליח. בתכנית מופיעים מושגים הקשורים לפתרון בעיות: ייצוג, ניתוח הכולל שימוש בהנמקה מתמטית ושימוש בפרוצדורות מתמטיות מתאימות, פרשנות והערכה, תקשורת ורפלקציה (ראו איור 1).

השינויים בתכנית הלימודים נעשו מתוך מטרה להתאים את הלמידה לצרכיהם של הלומדים. לפיכך תכנית הלימודים הפחיתה את כמות התכנים ההכרחיים ובלבד שהתלמידים ילמדו את תחומי הידע החיוניים. יש איזון בין ידע תוכן לבין המושגים המרכזיים והתהליכים אשר עומדים בבסיסה של כל דיסציפלינה.

חשיבה מתמטית חשובה לכל בני החברה המודרנית כהרגלי חשיבה לשימוש במקום העבודה, בעסקים ובכלכלה וכן לקבלת החלטות. המתמטיקה הכרחית לשגשוג באמצעות מתן כלים להבנת מדעים, הנדסה, טכנולוגיה וכלכלה. היא חיונית בקבלת החלטות והכרחית להשתתפות בכלכלת הידע.

ההתייחסות למושגים המרכזיים ולתהליכים המרכזיים האלה וכן החשיבות שהתכנית מקנה לפתרון בעיות בהקשרים שונים (מתמטיים ושאינם מתמטיים) מדגישות את הדואליות של התכנית מבחינת הקשר שבין תוצרים מתמטיים ותהליכי חשיבה. למשל, בפירוט המושג המרכזי 'יצירתיות', נכתב כי התלמידים אמורים לשלב הבנה, התנסות, דמיון והנמקה כדי לבנות ידע חדש, וכן כי עליהם להשתמש בידע מתמטי קיים כדי ליצור פתרונות לבעיות שאינן מוכרות. לאורך כל התכנית מודגש הצורך בלמידה של דרכים שונות לפתרון בעיות שונות ובכך שהתלמידים אמורים לבקר את הדרכים השונות כדי לזהות את האסטרטגיות המתאימות ביותר לפתרון בעיה מסוימת בהקשר נתון. למשל, בפירוט התהליכים המרכזיים בתכנית הלימודים בתהליך 'פרשנות והערכה' מצוין כי על התלמידים לבקר אסטרטגיות שונות שאומצו לפתרון בעיה. ביקורת זו אמורה לכלול בחינה של אלגנטיות הפתרון ושל העוצמה שיש לעדויות ולנתונים בטיעונים שהם עצמם ניסחו או שנוסחו על ידי אחרים. התהליך 'תקשורת ורפלקציה' מתייחס לרפלקציה של הלומדים לגבי גישות שונות להתמודדות ולפתרון בעיות.

היעדים המוגדרים בתכנית מדגישים אף הם את הדואליות שבין תוצרים מתמטיים לתהליכי חשיבה. התלמידים אמורים ללמוד ולהכיר ייצוגים שונים, פרוצדורות שונות, דרכים שונות לפתרון, ועליהם לערוך השוואות מושכלות ביניהם כדי לבחון אילו דרכים מתאימות להקשרים ספציפיים. הם אמורים להצדיק את הבחירה של ייצוג מסוים שנבחר או של פרוצדורה או של שיטת פתרון מסוימת בהקשר ספציפי. כלומר, התלמידים אמורים ללמוד ידע חדש ולהתייחס באופן רפלקטיבי לידע זה מתוך מטרה לבנות ידע נוסף.

מעבר לכך, במסמך שנכתב על ידי ועדת תכנית הלימודים במטרה לעזור למורה לארגן את תכנית הלימודים הבית ספרית על סמך התכנית הלאומית (Mathematics at Key Stage 4: developing your scheme of work Handbook – Rich Tasks). בחלק זה מדגישים למורים את החשיבות שיש במציאת דרכים שונות במטרה לעודד חשיבה ולעורר דיונים מתמטיים. הם מציעים למורים פעילויות עשירות שונות שאפשר לשלב במסגרת הוראה של נושאים שונים. כותבי התכנית אימצו שמונה עקרונות להוראה אשר מטרתן המקורית הייתה לשפר את הוראת המתמטיקה במסגרות על תוכניות.

להלן שלושה מבין עקרונות אלה, המדגישים את הצורך בפיתוח החשיבה לעומת התייחסות לתוצר הסופי בלבד:

(1) **שאלות שאלות יעילות.** ממחקרים שונים עולה כי מרבית השאלות הנשאלות על ידי המורים בשיעורי מתמטיקה מעודדות שלילה מהזיכרון או ביצוע פרוצדורות. יש לעודד גם שאלות המכוונות לחשיבה רפלקטיבית ברמה גבוהה, כמו שאלות הדורשות הסבר ויישום. יתר על כן, יש לאפשר לתלמידים מרווח זמן כדי לחשוב על התשובות לפני שמציעים להם עזרה או פונים לתלמיד שכבר פתר במהירות את המשימה.

(2) **דגש על שיטות ולא על תשובות.** המורים והתלמידים צריכים להתייחס למשימות הניתנות בכיתה כאל הזדמנות לפתח רעיון ולא כאל פתרון של תרגיל. חשוב שתלמידים יעבדו על משימות לעומק ויבינו את המושגים, את התהליכים ואת הרעיונות הקשורים בפתרון המשימה, גם אם זה כרוך בפתרון מספר קטן יותר של משימות.

(3) **שימוש במשימות עשירות משותפות.** משימות עשירות הן משימות המאפשרות ללומדים לקבל החלטות, מערבות את הלומדים בתהליכים של הוכחות, של הסבר, של רפלקציה ושל פרשנות, מעודדות דיון ותקשורת, מעודדות מקוריות והמצאה, מעודדות שאלות של "מה אם...?", "מה אם לא?". נמצא כי תלמידים רבים פותרים שאלות פשוטות בדרכים אינטואיטיביות שלא בהכרח עוזרות להם להתמודד עם בעיות מורכבות יותר, וכי שאלות פשוטות אינן מעודדות את הצורך ללמוד. משימות עשירות מאפשרות לכל הלומדים למצוא משהו מאתגר ברמה שהם יכולים להתמודד איתה. חשוב שבמהלך הלמידה התלמידים יתמודדו עם בעיות עשירות כאלה.

עקרון הנחיצות. השאלה שנשאלה בפרק הרקע התאורטי היא: האם בתכנית לימודים מסוימת יש התייחסות לתוצרים מתמטיים בזיקה לבעיות משמעותיות שניתן לפתור באמצעותם? השאלה ניתנת לתשובה במחקר בעיקר באמצעות התבוננות בדוגמאות שמלוות את תכניות הלימודים הכתובות.

אחד השינויים המרכזיים בתכנית הלימודים החדשה באנגליה הוא ההכרה בצורך שבהתייחסות להיבטים שימושיים של המתמטיקה, הצורך בכך שתלמידים יישמו הבנות שלהם לגבי המתמטיקה בהקשרים שונים בכיתה ומחוצה לה. הדבר כולל זיהוי ההיבטים המתמטיים של סיטואציה או של בעיה, פישוט של סיטואציה או של בעיה כדי לייצג אותה באופן מתמטי תוך שימוש בסמלים, במשתנים, בתרשימים ובמודלים, תוך זיהוי דפוסים וקשרים, תוך העלאת השערות והצדקתן ועוד.

בתכנית מצוין במפורש כי כדי לזמן ללומדים הזדמנויות לפתח מיומנויות פונקציונאליות צריך לוודא שהתלמידים יודעים שהם לומדים מיומנויות שאותן יצטרכו ליישם בהקשרים שונים, שניתנת להם האפשרות לבחור את המיומנויות והכלים (כולל כלים טכנולוגיים) שהם צריכים כדי למלא משימה מסוימת, ושניתנת להם ההזדמנות ליישם את המיומנויות שפיתחו למטרות אמיתיות ולהקשרים מחוץ לכיתה.

שיעורים לדוגמה אשר מוצגים לצד תכנית הלימודים כוללים שימוש במתמטיקה לשם פתרון בעיות הן מתחום המתמטיקה והן מתחומים אחרים. אחת הדוגמאות מתייחסת לפרויקט שבמסגרתו תלמידי כיתה י' התבקשו לתכנן פרויקט העוסק בקשרים שבין מתמטיקה למוסיקה. לתלמידים ניתנו חודשיים כדי להגדיר את הבעיה המעניינת אותם, להחליט מהם הנתונים הרלבנטיים הנדרשים כדי להתמודד עם הבעיה וכיצד הם יכולים לאסוף נתונים כאלה, למצוא מקורות מידע, לשקול כיצד לנתח את הנתונים ולנתח אותם בפועל וכן ליישם מיומנויות מתמטיות שונות. לאחר חודשיים הציגו התלמידים את הפרויקט, את הממצאים והמסקנות שלהם. התלמידים שאלו שאלות מגוונות, כמו אילו פונקציות יכולות לשמש מודל לגלי הקול, ומהם הקשרים בין סדרת פיבונאצ'י והסדר בו מאורגנים הקלידים באורגנית.

בפרויקט אחר התבקשו תלמידי כיתה י' להמליץ למנהלי בתי ספר על שיטה לבחירת מועמדים למועצת בית הספר. התלמידים בחנו שיטות הנהוגות בפוליטיקה, כמו למשל שיטות של ייצוג יחסי. הם אספו נתונים לגבי שיטות הצבעה שונות וערכו סימולציה של תהליך בחירה, כך שיוכלו להציג המלצה ברורה הכוללת הצדקה.

עקרון החשיבה החוזרת. האם התכנית מקצה זמן לחשיבה חוזרת ולא רק לתרגול של טכניקות נלמדות? האם התכנית מדגישה למידה ספיראלית של תכנים מתמטיים כאשר שימוש בידע שנלמד בעבר נמשך בלימוד נושאים חדשים?

בביקורת שכתב גרדינר (Gardiner, 2006) על תכנית הלימודים הקודמת במתמטיקה באנגליה הוא מתייחס לזילות שבשימוש במושג "למידה ספיראלית" שהיה נהוג בהוראת המתמטיקה. גרדינר טען כי מושגים שונים מוצגים ללומד בשלבים מוקדמים

מידיי ובצורה מלאכותית מידיי, ואז מידי שנה בשנה נוגעים במושגים אלה שוב מבלי לאפשר תהליך למידה משמעותי של המושגים.

בתכנית הלימודים החדשה מודגש כי בכל אחד מהשלבים התלמידים ימשיכו לסמוך על הידע, על המיומנויות ועל ההבנות שהם פיתחו בשלבים הקודמים דרך המושגים והתהליכים המרכזיים ויישמו אותם בתחום רחב יותר של הקשרים תוך שימוש בתכנים מתמטיים רבים יותר.

במסמך המנחה את המורים כיצד לתכנן את ההוראה שלהם, (Mathematics at key stage 4: Developing your scheme of work. Planning handbook. Summer, 2007), ישנה התייחסות לעקרונות שתכנית הלימודים מתבססת עליהם. העיקרון הראשון המצוין הוא בנייה על הידע של הלומדים. הטענה היא שהוראה יעילה מתבססת על ההנחה שהלומדים הם אנשים חושבים בעלי מגוון רחב של מושגים ושל מיומנויות ושההוראה תהיה יעילה יותר אם תתבסס על ידע זה של הלומדים. ההצעה למורים היא ללמוד מהו הידע של הלומדים באמצעות הצגת שאלות ובעיות מתאימות ולהשתמש בתגובות התלמידים כנקודת פתיחה לדיון (Swan, 2005). יחידות הלימוד ברמות המתקדמות (AS/A) אכן בנויות על בסיס למידה ספיראלית (ראה טבלה 2).

3. מטרות התכנית

בעקבות השינוי אשר המסמך "Every child matters: Change for children" החל לעורר במדינה ועל בסיס התוצרים המוצגים בו נוסחו מחדש מטרות תכנית הלימודים בחינוך העל יסודי ובעקבותיהן שונתה תכנית הלימודים.

תכנית הלימודים (בכל המקצועות) אמורה לאפשר לכל הצעירים להיות:

1. לומדים מצליחים הנהנים מלמידה, מתקדמים ומגיעים להישגים. באשר למתמטיקה, מדובר בפיתוח לומדים מצליחים שהם יצירתיים, חוקרים ומסוגלים לפתור בעיות. התכנית מספקת ללומד הזדמנויות להתמודד עם בעיות בדרכים שונות, לפתור בעיות פתוחות, להתייחס לשגיאות ולתפיסות שגויות אשר עשויות לעזור להם ללמוד לגבי הלמידה שלהם עצמם, וכן ללמוד מהטעויות שלהם. תקשורת והבנה ביקורתית עוזרות ללומד לנמק ולהעריך באופן עצמאי ובשיתוף עם אחרים.
2. יחידים בעלי ביטחון אשר יכולים להיות חיים בטוחים, בריאים ומספקים. התכנית במתמטיקה מספקת ללומדים הזדמנויות לבטא את הרעיונות שלהם תוך שימוש באסטרטגיות שהם מכירים אותן ובטוחים בהן. דבר זה אמור לעזור להם לפתח ביטחון עצמי ולהאמין בעצמם. התכנית מעודדת תלמידים ליהנות מהאתגר שיש בניסיון לפתור בעיות שאינן מוכרות.

3. אזרחים אחראים התורמים תרומה חיובית לחברה. התכנית תורמת לפיתוח המיומנויות ליכולות פיננסיות, אשר יכינו את הלומדים לחיים בטוחים, אחראים ובריאם. הדגש של התכנית על ניתוח סיטואציות מתמטיות ועל הצדקת מסקנות עוזר להכין את התלמיד לנקוט בגישה ביקורתית בסיטואציות של החיים האמיתיים.

כמו התכנית הקודמת, גם תכנית הלימודים החדשה ממשיכה להכיר בחשיבות התכנים תוך מתן דגש על פיתוח מיומנויות הנדרשות לחיים ולעבודה. תכנית הלימודים של כלל המקצועות, וביניהם המתמטיקה, מתמקדת בהכשרת התלמידים כחוקרים עצמאיים, כחושבים יצירתיים, כעובדים בצוותים, כמנהלים עצמאיים, כמשתתפים יעילים וכלומדים רפלקטיביים.

התייחסות רצינית למטרות אלה אמורה להבטיח כי לבוגרי בתי הספר התיכוניים יהיו הידע, המיומנויות והגישות הנדרשים כדי להתמודד עם מציאות החיים והעבודה של המאה ה-21. כדי להבטיח את ההשתלבות בשוק העבודה, מיומנויות פונקציונאליות במקצועות אנגלית, מתמטיקה וטכנולוגיה (ICT) הפכו לחלק בלתי נפרד מהתכנית. מיומנויות אלה מתמקדות ביכולת לפתור בעיות ולקבל החלטות.

מרכיבי התכניות (חלוקה ליחידות לימוד, לרמות, למגמות, הערכת הישגים וכדומה)
תכנית הלימודים באנגליה מחולקת לארבעה שלבים, על פי כיתות הלימוד:

1. Key stage 1: up to age seven (Years 1 and 2)
2. Key stage 2: age seven to eleven (Years 3, 4, 5 and 6)
3. Key stage 3: age eleven to fourteen (Years 7, 8 and 9)
4. Key stage 4: age fourteen to sixteen (Years 10 and 11 – preparation for academic and equivalent vocational qualifications)

בכל אחד מהשלבים הלומדים יכולים להגיע לרמות שונות. בתכנית מפורטות תשע רמות לימוד כאשר בשלב הרביעי מדובר על למידה לרמות 6, 7, 8, ו-EP (Exceptional Performance). בכל אחד מהתחומים במתמטיקה מפורטים ההישגים הנדרשים כדי שתלמיד ייחשב כמי שמילא את דרישות הרמה בהצלחה. דוגמאות להישגים אלה ניתן לראות בטבלה 1.

טבלה 1. ההישגים הנדרשים מתלמיד הלומד ברמות 6, 7, 8 ו-EP

רמה	ההישגים הנדרשים
6	התלמידים יבצעו משימות באופן משמעותי ויפתרו בעיות מורכבות באופן עצמאי ועקבי תוך פירוקן ליחידות קטנות יותר. התלמידים יפרשו את המידע, ידונו בו ויערכו סינתזה של מידע המוצג במגוון צורות מתמטיות בהתייחס לממצאים של ההקשר המקורי. השפה הכתובה והדבורה שלהם תסביר את השימוש שלהם בדיאגרמות. התלמידים ידעו לתת הנמקות מתמטיות, יבצעו קשרים בין מצב נתון למצבים שהתנסו בהם בעבר.
7	בעקבות בעיות ונושאים המוצגים לתלמידים, התלמידים יידעו לחקור מודלים וייצוגי מידע, יוכלו לעבוד עם מחשב או בלעדיו. התלמידים ידעו לספק סיבות והסבר לבחירה שלהם לגבי ייצוג מתמטי. התלמידים ינמקו טיעונים, הכללות או פתרונות.
8	התלמידים יפתחו גישות אלטרנטיביות. התלמידים ישוו ויעריכו ייצוגים של מצב, יציגו ויערכו שימוש של טכניקות מתמטיות, ידעו לערוך רפלקציה על תהליך החקר שלהם כאשר הם מבצעים משימות מתמטיות. התלמידים יבחנו הכללות או פתרונות אליהן הגיעו בפעילות ויבצעו התקדמות נוספת בפעילות כתוצאה מכך. התלמידים ידעו להגיב באופן מובנה על ההבנה, על הלוגיקה, על התהליך ועל התוצאות שנרכשו.
Exceptional performance	התלמידים יבחנו באופן ביקורתי אסטרטגיות שאומצו כאשר הם חוקרים מתמטיקה או כאשר עורכים שימוש מתמטי לניתוח משימות. התלמידים יסבירו מדוע נערך שימוש באסטרטגיות שונות, ייקחו בחשבון את האלגנטיות ואת היעילות של חקר ושל מהלכים. הם יישמו את המתמטיקה שהם מכירים בהקשרים מוכרים ושאינם מוכרים. התלמידים יערכו שימוש יעיל בשפה ובסמלים מתמטיים בבואם להציג טיעון מנומק ומשכנע. הדוחות שלהם יכללו הנמקות מתמטיות, הבחנה בין ראיה להוכחה והסבר לפתרונות עבור בעיות הכוללות מספר משתנים.

4. מבנה התכנית

תכנית הלימודים במתמטיקה מאורגנת סביב ארבעה נושאים: (1) מושגים מרכזיים, (2) תהליכים מרכזיים, (3) תוכן ו-(4) הזדמנויות.

(1) מושגים מרכזיים. ההתייחסות היא למושגים מרכזיים אשר יאפשרו ללומדים להעמיק ולהרחיב את ידיעותיהם, את המיומנויות שלהם ואת ההבנה שלהם בנושא. מושגים אלה כוללים: יכולת, יצירתיות, יישומים, השלכות מתמטיות והבנה ביקורתית.

יכולת. שליטה בטכניקות מתמטיות וכן בתהליכים מתמטיים הניתנים ליישום בהקשרים מוכרים ושאינם מוכרים, כולל ניהול כספים, הערכת סיכונים, פתרון בעיות וקבלת החלטות הן בשיעורי המתמטיקה והן מחוץ לבית הספר. התלמידים צריכים להכיר את הסימונים והמוסכמות במתמטיקה אשר יאפשרו להם לתקשר במתמטיקה בביטחון בעל פה ובכתב. הם גם אמורים להיות מסוגלים להבין מתמטיקה המוצגת בדרכים שונות ולפרש אותה. התלמידים צריכים להכיר כלים ואמצעים שונים, כמו מחשבוני גרפים, גיאומטריה דינאמית וגיליונות אלקטרוניים אשר יאפשרו להם לבחור את הכלים המתאימים ואת השיטות המתאימות.

יצירתיות. התלמידים אמורים לשלב בין הבנה להתנסות, לדמיון ולהנמקה כדי לבנות ידע חדש. עליהם להשתמש בידע מתמטי קיים כדי ליצור פתרון לבעיות שאינן מוכרות. מעבר לכך, התלמידים צריכים לאמץ גישה של שאילת שאלות ושל פיתוח נימוקים משכנעים.

יישומים והשלכות של המתמטיקה. התלמידים צריכים לדעת שהמתמטיקה היא דיסציפלינה מדויקת ועקבית, וכן להבין שאפשר להשתמש במתמטיקה ככלי בהקשרים שונים. כך למשל, בקבלת החלטות פיננסיות בחיים הפרטיים, בפתרון בעיות בבנייה, בהנדסה ובגיאוגרפיה; חשוב להכיר את השורשים התרבותיים וההיסטוריים של המתמטיקה – למתמטיקה יש היסטוריה עשירה ומרתקת. חשוב שהתלמידים יכירו בעיות שמתמטיקאים התמודדו עמן בעבר, אשר הובילו להתפתחותם של שטחים שונים במתמטיקה. חשוב שיבינו שלעיתים ממצאים ממתמטיקה טהורה מובילים ליישומים פרקטיים ושהמתמטיקה ממשיכה להתפתח.

הבנה ביקורתית. ידיעה שהמתמטיקה היא מופשטת ביסודה ושאפשר להשתמש בה כדי לפרש או לייצג סיטואציות. הכרה במגבלות ובטווח של מודל או של ייצוג.

(2) תהליכים מרכזיים. המיומנויות והתהליכים המרכזיים אשר התלמידים צריכים ללמוד אותם כדי להצליח. התהליכים שכוללת התכנית הם אלה המתקשרים לתהליך של פתרון בעיות. התהליכים המרכזיים כוללים ייצוג, ניתוח הכולל נימוקים מתמטיים ושימוש בפרוצדורות מתמטיות מתאימות, פרשנות והערכה, תקשורת ורפלקציה.

ייצוג. התלמידים צריכים להיות מסוגלים לזהות את ההיבטים המתמטיים של סיטואציה או של בעיה. הם אמורים להשוות ולהעריך ייצוגים שונים של סיטואציה לפני הבחירה, לפשט את הסיטואציה או את הבעיה כדי לייצג אותה בצורה מתמטית תוך שימוש במשתנים, סמלים ותרשימים מתאימים. בחירת המידע, השיטות, הכלים והמודלים המתמטיים הרלבנטיים.

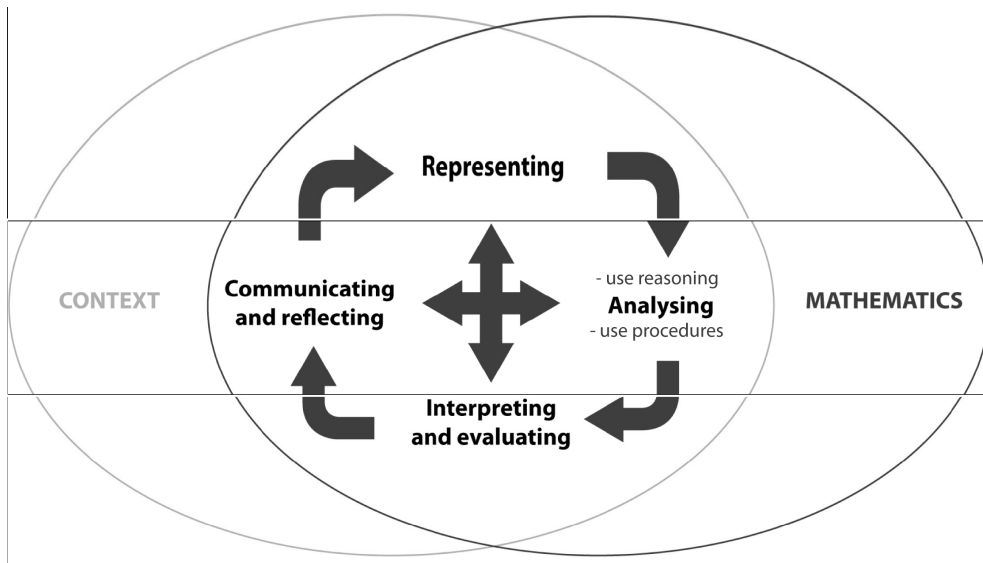
ניתוח – שימוש בהנמקה מתמטית. התלמידים אמורים להיות מסוגלים לקשר בין נושאים מתמטיים, למשל להכיר בכך שמשוואה, טבלת ערכים וקו על גרף עשויים כולם לייצג אותו הדבר ולהשתמש בידע בבעיות קשורות. הם אמורים להיות מסוגלים לדמיין וכן לעבוד עם תמונות דינאמיות, לזהות ולסווג דפוסים, להעלות השערות ולהצדיק אותן, להכליל תוך התייחסות למקרים מיוחדים ובאמצעות שימוש בדוגמאות נגדיות, להתייחס למשובים וללמוד מטעויות, לעבוד באופן לוגי כדי להגיע לפתרון, לזהות מגוון טכניקות אפשריות כדי לפתור בעיה ולהבין שייתכן שיש צורך ביותר מטכניקה אחת, לנמק באופן אינדוקטיבי (כולל שימוש בדוגמאות כדי להציע הכללה), להסיק מסקנות ולהוכיח.

ניתוח – שימוש בפרוצדורות מתמטיות מתאימות. תלמידים אמורים לשרטט דיאגרמות, גרפים וכן בניות מתמטיות מדויקות על נייר ועל מסך, לחשב חישובים מדויקים אם בראש ואם בעזרת כלי חישוב מתאימים, לבצע מניפולציות על מספרים, על ביטויים אלגבריים ועל משוואות וליישם רוטינות אלגוריתמיות, להשתמש בסימונים מדויקים, לתעד תהליכים ושיטות, פתרונות ומסקנות ולהעריך ולבחון את עבודתם.

פרשנות והערכה. התלמידים אמורים לבנות טיעונים משכנעים כדי להצדיק ממצאים והצהרות כלליות, לשקול השערות שהועלו, לבחון את ההתאמה ואת הדיוק של התוצאות והמסקנות, להעריך את עוצמתה של עדות אמפירית ולהבחין בין עדות להוכחה, להתבונן בנתונים כדי לזהות דפוסים ומקרים יוצאי דופן, לקשר ממצאים לשאלה או להשערה המקורית, להבין ממצאים שמצאו אחרים ולבקר את הערך שלהם לנוכח העדויות שהם מציגים, לבקר את האסטרטגיות הנבחרות.

תקשורת ורפלקציה. התלמידים אמורים להשתמש במגוון של תצורות כדי לקשר ממצאים לקהלים שונים, להיות מעורבים בדיונים לגבי תוצאות ולעשות רפלקציה לגבי גישות שונות. כמו כן הם אמורים לחפש שקילות לגבי גישות שונות לבעיה ובעיות שונות עם מבנה דומה, וכן לתת דוגמאות להקשרים דומים המוכרים להם ולזהות בסיטואציה הנוכחית אילו מביניהם דומים ואילו שונים ובמה, ואיך ומדוע השתמשו באסטרטגיות שונות או דומות. יתר על כן, התלמידים אמורים להתייחס לאלגנטיות וליעילות של פתרונות חלופיים.

הקשר בין התהליכים השונים מתואר באמצעות תרשים 1.



תרשים 1. הקשר בין המתמטיקה, ההקשר והתהליכים המרכזיים בלמידת מתמטיקה.

ההקשר והמתמטיקה הרלבנטית להקשר קובעים את אופי מיומנויות תהליכי העיבוד שהלומדים נדרשים אליהן. באופן כללי, תהליכי עיבוד אלה אמורים להיות משולבים בלמידה של כל אחד מהתכנים המתמטיים.

(3) תוכן. למידת המתמטיקה אמורה לאפשר לתלמידים ליישם את הידע, את המיומנויות ואת ההבנה שלהם לסיטואציות מהעולם האמיתי. למידת המתמטיקה כוללת נושאים שונים הקשורים במספרים, באלגברה, בגיאומטריה ובמדידות ובסטטיסטיקה (פירוט בסעיף 4). כל אחד מהתכנים האלה מפורט בתכנית על פי תהליכי העיבוד המרכזיים הרלבנטיים (ייצוג, ניתוח, פרשנות והערכה, תקשורת ורפלקציה).

(4) הזדמנויות שהתכנית אמורה לספק לתלמידים:

- א. פיתוח הביטחון העצמי של הלומד לגבי שימוש בטכניקות ובשיטות מגוונות.
- ב. עבודה על רצף של משימות הדורשות התייחסות מתמטית דומה כאשר ההבדלים ביניהם הם ברמת הקושי או מעבר להקשרים לא מוכרים.
- ג. עבודה על משימות פתוחות וסגורות בהקשרים יומיומיים ועל הקשרים מופשטים אשר בהם התלמידים ידרשו לבחור את המתמטיקה המתאימה עבורם.
- ד. עבודה על בעיות המתעוררות בתחומי תוכן אחרים או בהקשרים מחוץ לבית הספר.
- ה. עבודה על משימות המתייחסות למגוון מושגים, תהליכים ותכנים מתמטיים.

1. עבודה בשיתוף כמו גם עבודה ביחידים בהקשרים מגוונים. העבודה המשותפת צריכה לכלול דיון מתמטי, הערכה של עבודת המשתתפים השונים, פתרון בעיות בזוגות או בקבוצות קטנות והצגת רעיונות לקבוצה גדולה יותר.
2. היכרות עם מגוון משאבים, כולל עם כלים טכנולוגיים שונים כדי שיוכלו לבחור את המתאימים ביותר לכל סיטואציה.

5. התייחסות לקבוצות לומדים מיוחדות

תכנית הלימודים הבית ספרית אמורה להתבסס על תכנית הלימודים הלאומית, אך עליה להתאים לקבוצות לומדים שונות, כמו המוכשרים, המתקשים, בעלי צרכים מיוחדים ובעלי לקויות למידה, תלמידים אשר עבורם אנגלית אינה השפה הטבעית וכן להתאים לצרכי מגדר שונים.

תלמידי בית הספר מגיעים מתרבויות ומרקעים שונים ולכל אחד מהם רקע קודם שונה. תכנית הלימודים הבית ספרית אמורה להיות רלבנטית לכל קבוצות התלמידים, לאתגר את הלומדים השונים ולענות לצרכיהם המגוונים ולאפשר לכולם הזדמנויות למידה תואמות כדי לממש הישגים גבוהים בלימודים.

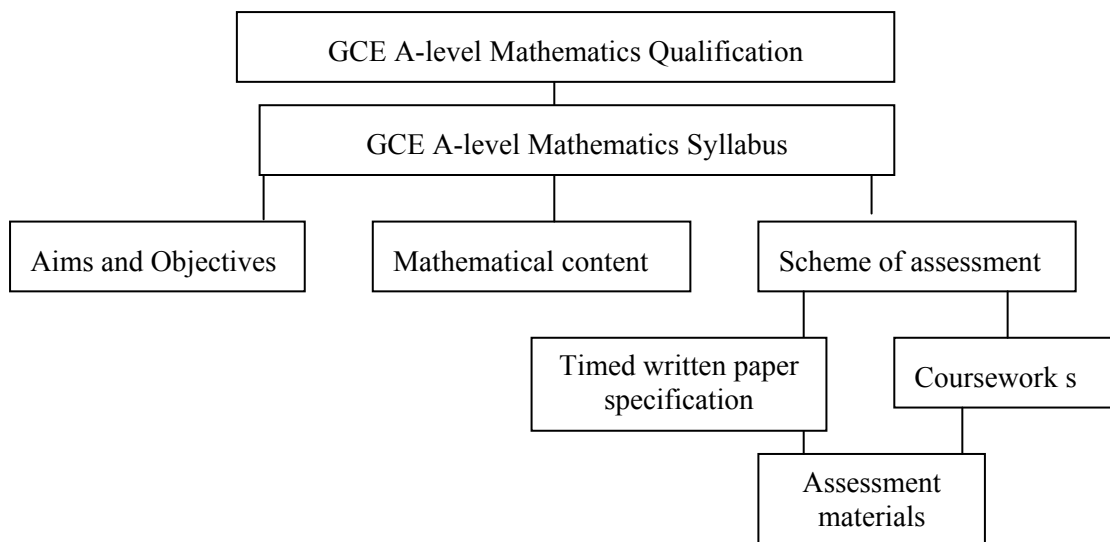
בתכנית הלימודים קיים פירוט כללי בלבד כיצד על בתי הספר להתמודד עם לומדים בעלי צרכים מיוחדים. למעשה, הבחירה היא בידי בתי הספר. עם זאת, מצוין כי על המורים ליצור סביבות למידה יעילות ומאתגרות, לאפשר ללומדים המתאימים הרחבה והעמקה בחומר הנלמד, להגביר את המוטיבציה ואת הריכוז בקרב התלמידים, לשים דגש על מתן שוויון הזדמנויות וליישם גישות הערכה מתאימות. המורים יכולים לאמץ תכניות שונות המתמקדות בקבוצות שונות, כמו בתלמידים לקויי למידה, בתלמידים מוכשרים ועוד. באופן זה המורים יכולים לבחור ללמד את הידע ואת המיומנויות משלבים מוקדמים או מתקדמים יותר (למשל מ-3 stage או מ-A levels), כך שהתלמיד היחיד יהיה מסוגל להתקדם בלמידתו ולהצביע על הישגיו.

6. בחינות הגמר ורמות למידה מתקדמות

הבחינות מפותחות על ידי גופים הממונים על כך. באנגליה קיימים חמישה גופים: GCE A-level, OCR, AQA, Edexcel, WJEC, CCEA. הסילבוסים מגדירים את הרכיבים הבאים: (א) מטרות ההערכה והיעדים, (ב) התוכן המתמטי, ו-ג) מערך ההערכה. כלי ההערכה כוללים ביצוע בחינה בצירוף עם עבודה או ללא עבודה. העבודות נקבעות על ידי המורה או הגוף הבוחן והן נעשות כחלק מהתכנית בבית התלמיד או בכיתה. עבודות אלו משתנות בהיקפן ומאפשרות בחינת היבטים שקשה לבחון במבחן רגיל (למשל מידול מתמטי, מיומנויות חקר או שימוש במחשבים).

הכלי הנוסף הוא הבחינה. הגופים הממונים מפרסמים את חומרי ההערכה, כולל בחינות שניתנו בעבר והנחיות למורים.

תרשים 2 מציג את מערך הבחינה הציבורית. יש לציין, כי גופים אלו מבוקרים על ידי גוף ממשלתי ה-QCA (Qualifications and Curriculum Authority).



תרשים 2. מערך הבחינה הציבורית באנגליה (Based on Little & Jones, 2008)

החוקרים ליטל וג'ונס (Little and Jones, 2008) בוחנים את ההתפתחויות שחלו במהלך השנים 1951-2001 בבחינות GCE A-level אשר משמשות גם כתנאי קבלה לאוניברסיטאות באנגליה. הם מציינים כי מעבר לשינויים חברתיים, טכנולוגיים וכלכליים, קיימות דרישות ומופעים לחצים על מערך בחינות הגמר מצד בעלי עניין שונים הכוללים את התלמידים עצמם, הורי התלמידים, המורים, הגופים הבוחנים, הממשלה, אוניברסיטאות ומעסיקים שונים. תלמידים והורים שואפים להשגת ציונים גבוהים, המורים מעוניינים בסילבוס שיאפשר לתלמידיהם סיכויי הצלחה גבוהים יותר, האוניברסיטאות מעוניינות ברוב של לומדים ברמה גבוהה, הממשלה אחראית על הסטנדרטים ועל התאמה בין הסילבוסים וקשובה ללחצים מקבוצות עניין שונות, והמעסיקים מעוניינים, במיוחד בשנים האחרונות, בבוגרי מערכת חינוך בעלי הכשרה מתמטית גבוהה.

לאחר חמש שנות חינוך על יסודי (משנת הלימודים השביעית עד לשנה האחת עשרה) התלמידים נבחנים במקצועות שונים. מבחן הסיכום נקרא General Certificate of Secondary Education (GCSE). רוב התלמידים נבחנים בכ-10 מקצועות, אך אין גבול עליון או תחתון למספר הבחינות שבהן ניתן להיבחן. שיעורי ההצלחה (ציונים בין A ל-C; D נחשב לציון גבולי) הכלליים במבחן לשנת 2006 היו 62.4% ואילו במתמטיקה שיעורי ההצלחה הגיעו ל-54.3%. שני מדדים אלה היו במגמת שיפור יחסית לשנים

קודמות. כאמור, לאחר בחינות אלה התלמידים יכולים לעבור ללמוד בבתי ספר מקצועיים או טכניים, או שהם יכולים להמשיך ללמוד ולהיבחן ברמה גבוהה יותר. לדוגמה: בשנת 2005 (על פי הצהרת שרת החינוך בפרלמנט בתאריך 27.2.2006) נבחנו ב-5 מקצועות ברמה הגבוהה 56.3% מהתלמידים, אך רק 44.3% נבחנו ב-5 מקצועות הכוללים גם מתמטיקה ברמה הגבוהה.

לאחר שנת לימודים אחת נוספת אחרי מבחני ה-GCSE הם יכולים להיבחן ברמת AS (Advanced Subsidiary Level). בשלב זה יכולים התלמידים לסיים את לימודיהם ולהצטרף לשוק העבודה. ראוי לציין כי כיום גם התעשייה מעדיפה בוגרים בעלי השכלה נוספת.

הרמה הנדרשת בבחינת AS היא זו המצופה ממועמדים הלומדים כבר כמחצית מתכנית הלימודים המתקדמת המלאה (AL). לאחר שנת לימודים נוספת התלמידים יכולים להיבחן ברמה מתקדמת יותר.

הבחינה ברמת AL כוללת שני חלקים:

1) AS = המהווה 50% מסך המודולות.

2) בחינה שנייה שנקראת A2 ומהווה את 50% הנותרים.

רוב התכניות ברמות המתקדמות (AS, AL) הן מודולאריות. AS מורכבת משלוש יחידות ו-A2 מורכבת משלוש יחידות נוספות. לכל יחידה נלווית יחידת הערכה.

AS ניתנת לביצוע בסוף שנה אחת ו-A2 בסוף השנה השנייה. לחילופין, AS ו-A2 ניתנים לביצוע בסיום של אותה שנה. בחינות ברמת GCE (A levels) נדרשות כאחד התנאים לקבלה לאוניברסיטה באנגליה. הן כוללות את היחידות AS ו-A2.

טבלה 2 וטבלה 3 מציגות התפלגות ציונים במתמטיקה על פי מגדר לשנת 2005 (רמות AS ו-AL בהתאמה, על פי ה-EducationGuardian, 2005). טבלה 2 מתארת את התפלגות הציונים במבחנים לרמה AS על פי המגדר לשנת 2005. כך למשל ברמת AS נבחנו 68,178 תלמידים מכלל התלמידים שנבחנו במתמטיקה באותה שנה. מתוך אלה שנבחנו, 29.7% הצליחו בציון A, 15.9% הצליחו בציון B ו-14.0% הצליחו בציון C. שיעור ההצלחה הכללי ברמה AS הוא אפוא 59.6%, ללא הרמה הגבולית. באופן זה ניתן לחשב את שיעורי ההצלחה בכל קבוצת מגדר. כך גם ניתן לקבל נתונים מבוקשים מתוך טבלה 3 המתארת את התפלגות הציונים במבחנים לרמה AL על פי המגדר לשנת 2005. חשוב לציין, כי שיעור ההצלחה בשלוש דרגות הציון בקרב נבחני ה-AL מגיע ל-78%.

טבלה 2. התפלגות ציונים במתמטיקה (רמת AS) על פי מגדר לשנת 2005

Subject	Gender	Number sat	Percentages by grade					
			A	B	C	D	E	U
Mathematics	Male	40920	28.1	14.8	13.7	12.7	11.2	19.5
	Female	27258	32.2	17.3	14.6	11.8	9.9	14.2
	All	68178	29.7	15.9	14.0	12.3	10.7	17.4
Mathematics (Further)	Male	3357	51.3	15.8	12.0	9.8	5.4	5.7
	Female	1697	51.1	18.6	12.2	8.1	5.3	4.7
	All	5054	51.2	16.8	12.0	9.3	5.4	5.3

טבלה 3. התפלגות ציונים במתמטיקה (רמת AL) על פי מגדר לשנת 2005

Subject	Gender	Number sat	Percentages by grade					
			A	B	C	D	E	U
Mathematics	Male	32719	39.0	20.8	16.1	11.8	7.5	4.8
	Female	20178	43.6	22.4	15.3	10.3	5.5	2.9
	All	52897	40.7	21.5	15.7	11.3	6.7	4.1
Mathematics (Further)	Male	4238	57.2	17.5	11.0	7.4	3.9	3.0
	Female	1695	60.2	17.6	11.0	4.9	3.7	2.6
	All	5933	58.0	17.6	11.0	6.7	3.8	2.9

6.1 מטרותיה של תכנית הלימודים ברמות המתקדמות

מטרותיה של תכנית הלימודים הן:

- לפתח בקרב התלמידים הבנה של המתמטיקה ושל תהליכים מתמטיים באופן שיגביר את הביטחון העצמי ואת ההנאה שלהם;
- לפתח יכולות הנמקה לוגיות, זיהוי טיעונים שגויים, יכולת הכללה ובנייה של הוכחות מתמטיות;
- להרחיב את המיומנויות והטכניקות המתמטיות ולערוך שימוש בהן בבעיות מורכבות;
- לפתח את ההבנה של הקוהרנטיות במתמטיקה ואת ההבנה כיצד תחומים שונים של מתמטיקה קשורים אלה לאלה;

- ה. להכיר כיצד סיטואציה עשויה להיות מוצגת באופן מתמטי ולהבין את הקשרים שבין בעיות מחיי היום יום למודלים מתמטיים ואת האופן שבו ניתן לשפרם ;
- ו. לערוך שימוש במתמטיקה כאמצעי יעיל של תקשורת ;
- ז. להיות מסוגל לקרוא טיעונים מתמטיים ומאמרים הנוגעים ליישומים במתמטיקה ;
- ח. לרכוש מיומנויות שימוש במחשבון ובמחשב ולדעת מתי שימוש זה אינו מתאים ומהן המגבלות ;
- ט. לפתח מודעות לגבי הרלבנטיות של המתמטיקה למקצועות אחרים, לעולם העבודה ולחברה באופן כללי ;
- י. להעביר ללומד את האחריות ללמידה ולהערכת התפתחות תהליך הלמידה שלו.

6.2 התכנים העיקריים של התכנית והמטרות האופרטיביות

התכנים בהם עוסקת תכנית הלימודים הם : מספרים, אלגברה, גיאומטריה ומדידות וסטטיסטיקה. (Mathematics program of study for key stage 4, 2007)

6.2.1 פירוט התכנים ברמה הכללית (שלב הלימודים האחרון במתמטיקה לפני הלימודים המתקדמים)

(1) מספרים ואלגברה

- א. מספרים ממשיים, תכונות וייצוגים שונים ;
- ב. יישום של כללי האריתמטיקה (פעולות ופעולות הפוכות) לחישובים ומניפולציות על מספרים ממשיים ;
- ג. הנמקה פרופורציונית, יחס ישר ויחס הפוך, שינוי פרופורציוני ושינוי מעריכי ;
- ד. חסם עליון וחסם תחתון ;
- ה. משוואות וביטויים מהמעלה הראשונה והשנייה ;
- ו. גרפים של פונקציות מעריכיות וטריגונומטריות ;
- ז. טרנספורמציות של פונקציות.

(2) גיאומטריה ומדידות

- א. תכונות ומדידה של צורות דו ממדיות וגופים תלת ממדיים. כולל שימוש בתכונות כדי לבנות צורות וגופים. מדידות כוללות חישוב שטח של משולש תוך שימוש בנוסחה טריגונומטרית, וכן מדידות שונות לגבי הגופים : חרוט, פירמידה וכדור ;
- ב. משפטים הקשורים למעגל ולעיגול ;
- ג. קשרים טריגונומטריים ;
- ד. תכונות וצורפים של טרנספורמציות. הטרנספורמציות כוללות הגדלה בגורם שלילי ושימוש בכלים טכנולוגיים להגדלה ;

- ה. מערכת קואורדינטות תלת ממדית, וקטורים במערכת דו-ממדית;
ו. המרות בין יחידות מידה שונות.

(3) סטטיסטיקה

- א. מחזור עבודה עם הנתונים – מחזור זה כולל זיהוי הבעיה ותכנון (ייצוג), איסוף נתונים (ייצוג וניתוח), עיבוד הנתונים והצגתם (ניתוח) ופרשנות ודיון לגבי התוצאות (פרשנות והערכה);
ב. ייצוג וניתוח של אוסף גדול של נתונים מקובצים ושאינם מקובצים כולל תרשימים, קופסה והיסטוגרמות;
ג. מדידה של נטייה מרכזית והתפשטות כולל שימוש בממוצע ובטווח כדי להשוות בין התפלגויות;
ד. הסתברויות תיאורטיות ומעשיות של מאורעות יחידים ומשולבים.

6.2.1.1 מטרות אופרטיביות

פירוט המטרות האופרטיביות לכל נושא מנוסח הן כמטרות למידה (במסמך – the framework for secondary mathematics: overview and learning objectives) והן תוך מיקוד בתהליכי העיבוד המרכזיים הרלבנטיים לכל אחד מהנושאים (Key processes in number, algebra, geometry and measurement, statistics).

המטרות כוללות מטרות הממוקדות בידע שהתלמידים אמורים לפתח (למשל ידע לגבי חזקות ולגבי שקילות של ייצוגים שונים למספר, ידע של חוקים, ידיעת עובדות מתמטיות חדשות כולל משפטים גיאומטריים שונים, פשוט ביטויים אלגבריים וביטויים ריבועיים, פתירת משוואות שונות) והן מטרות הממוקדות במיומנויות שונות. לכל מטרה הקשורה לידע הנדרש מצוינות מטרות הקשורות למיומנויות שונות ולתהליכי חשיבה, בעיקר ברמה של פרשנות והערכה, תקשורת ורפלקציה. בכל נושא התלמידים נדרשים לבחון באופן ביקורתי אסטרטגיות פתרון שונות, ליצור טיעונים ולנמקם לשם הצדקת ממצאים והצהרות, לקשר ממצאים ולהשתתף בדיונים מתמטיים, לזהות אסטרטגיות פתרון רלבנטיות, אלגנטיות ויעילות לבעיות ספציפיות, לקשר בין ייצוגים שונים, לפתור בעיות רב שלביות תוך שימוש בתכונות ובמשפטים שלמדו ולהיות מסוגלים לערוך שימוש במגוון דרכים על מנת להציג ממצאיהם לקהלי יעד שונים.

אחת הדוגמאות לקשר בין פיתוח חשיבה ומיומנויות בנייה לבין ידע היא בגיאומטריה. בנושא של בניית גיאומטריות ומקומות גיאומטריים מצוינת בתכנית אחת המטרות לתלמידי כיתה י: "להבין מניסיון בבנייה שמשולשים שעבורם נתונים צלע, צלע, צלע או צלע, זווית, צלע או זווית, צלע, זווית או זווית ישרה, יתר וניצב, הם מוגדרים היטב, ואילו אלה הנבנים על סמך זווית, זווית, זווית או צלע, צלע, זווית אינם מוגדרים

היטב. כלומר, הנושא של חפיפת משולשים אינו נבנה על סמך הכרת המשפטים ויישומם בלבד, אלא הבנייה מאפשרת ללומד להבין מדוע המשפטים נכונים, מדוע מתייחסים רק למשפטים אלה ולא לאחרים. מטרה זו מתבססת על ידע שלמדו בכיתה ט לגבי מהי בנייה גיאומטרית וכן כיצד בונים משולשים בהינתן נתונים שונים.

6.2.2 פירוט תכנים ברמות AS ו-A

סעיף זה כולל את היחידות ברמות למידה AS/A, את הצירופים האפשריים של היחידות השונות ואת פירוט התכנים ברמות אלו. רשימת יחידות ברמות למידה AS/A מפורטת בטבלה 2. מלבד הבחינות החיצוניות, ניתן לבצע עבודה (coursework), למשל עבודת חקר, כתיבת מאמר או ניסוי כחלק מהציון הכללי. יחידה אחת בסטטיסטיקה ואחת בפיזיקה נויטוניות מאפשרות ביצוע עבודה מסוג זה. יחידות Pure Core, Further Core וקבלת החלטות במתמטיקה אינן כוללות coursework. ביחידות הכוללות ביצוע עבודה, העבודה היא 25% מהציון והמבחן 75% מהציון הכללי. מבחנים ללא עבודה אורכים כשעה וחצי ומבחנים עם עבודה אורכים שעה ורבע.

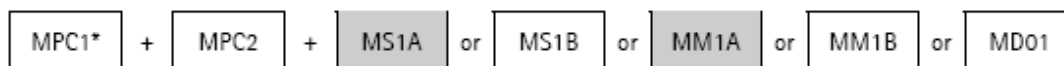
תרשים 3 מציג את הצירופים האפשריים של יחידות אלו, ובטבלה 4 מוצג פירוט לגבי התכנים בכל יחידה.

טבלה 4. יחידות ברמות למידה AS/A

Pure Core 1	MPC1	AS
Pure Core 2	MPC2	AS
Pure Core 3	MPC3	A2
Pure Core 4	MPC4	A2
Statistics 1A	MS1A	AS with coursework
Statistics 1B	MS1B	AS without coursework
Statistics 2B	MS2B	A2
Mechanics 1A	MM1A	AS with coursework
Mechanics 1B	MM1B	AS without coursework
Mechanics 2B	MM2B	A2
Decision 1	MD01	AS
Decision 2	MD02	A2

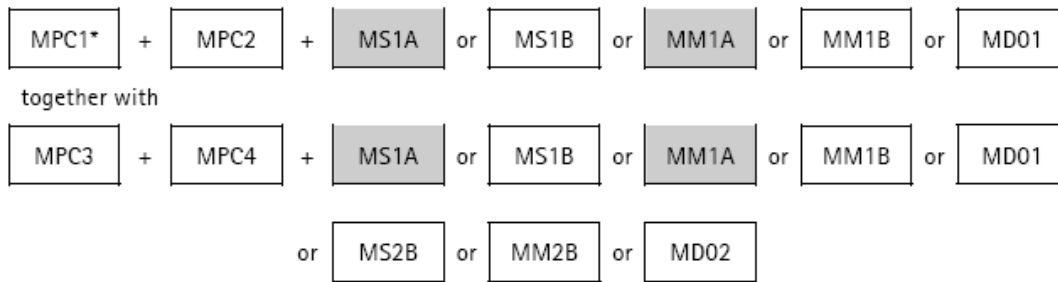
AS Mathematics

Comprises 3 AS units. Two units are compulsory.



A Level Mathematics

Comprises 6 units, of which 3 or 4 are AS units. Four units are compulsory.



* [אין להשתמש במחשבון]

תרשים 3. צירופים אפשריים של יחידות הלימוד ברמות AS/A

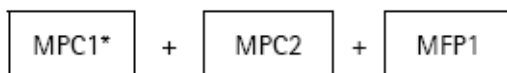
כפי שעולה מתרשים 3, ברמה AS נכללות שלוש יחידות כאשר שתיים הן חובה וברמה A – 6 יחידות כאשר 3 או 4 מתוכן הן יחידות AS וארבע יחידות הן חובה. היחידות ברמה AS/L – Pure Mathematics – מוצגות בטבלה 5. תרשים 4 מציג את הצירופים האפשריים עבור יחידות אלו.

טבלה 5. יחידות ברמות למידה AS/A

Pure Core 1	MPC1	AS
Pure Core 2	MPC2	AS
Pure Core 3	MPC3	A2
Pure Core 4	MPC4	A2
Further Pure	MFP1	AS
Further Pure	MFP2	A2
Further Pure	MFP3	A2
Further Pure	MFP4	A2

AS Pure Mathematics

Comprises 3 compulsory AS units.



A Level Pure Mathematics

Comprises 3 AS units and 3 A2 units. Five are compulsory.



* [אין להשתמש במחשבון]

תרשים 4. צירופים אפשריים של יחידות הלימוד ברמות AS/A

AS and A level – Further Mathematics (מתמטיקה מתקדמת) : מספר רב של צירופים מורשה עבור רמה זו. ארבע יחידות (Further Pure) נוספות קיימות (שימוש ביחידות Pure Core אינו מקובל ברמות אלו). יחידות יישומיות מתוך רמות AS and A level ניתנות ללמידה ברמה זו (מתמטיקה מתקדמת) וכן יחידות נוספות בסטטיסטיקה ובמכניקה המותאמות במיוחד עבור רמה זו. חלק מהיחידות הנלמדות ברמת מתמטיקה מתקדמת משותפות לרמות AS/A Mathematics ו-Pure Mathematics. יש לציין כי קיימות מגבלות על צירופים שונים בין היחידות השונות. ניתן להעמיק במסמך המפרט (עמ' 13 סעיף 3.4) הנמצא בקישור :

<http://store.aqa.org.uk/qual/pdf/AQA-6360-W-SP-10.PDF>

טבלה 6 מציג את רשימת יחידות הלימוד ברמות AS/A במתמטיקה מתקדמת. (Further Mathematics) :

טבלה 6. יחידות לימוד במתמטיקה מתקדמת

Further Pure 1	MFP1	AS
Further Pure 2	MFP2	A2
Further Pure 3	MFP3	A2
Further Pure 4	MFP4	A2
Statistics 1A	MS1A	AS with coursework
Statistics 1B	MS1B	AS without coursework
Statistics 2B	MS2B	A2
Statistics 3	MS03	A2
Statistics 4	MS04	A2
Mechanics 1A	MM1A	AS with coursework
Mechanics 1B	MM1B	AS without coursework
Mechanics 2B	MM2B	A2
Mechanics 3	MM03	A2
Mechanics 4	MM04	A2
Mechanics 5	MM05	A2
Decision 1	MD01	AS
Decision 2	MD02	A2

יש לציין כי רק יחידה אחת מבין MS1A ו-MS1B יכולה להיכלל ב-AS או ב-A level – Further Mathematics. כך גם לגבי אחת מתוך יחידות MM1A ו-MM1B. יחידות MFP2, MFP3, MFP4 הן יחידות עצמאיות שאינן תלויות אחת בשנייה ויכולות להילמד בכל סדר. כך גם לגבי יחידות MS03 ו-MS04. יחידות MM03, MM04, MM05 אינן תלויות אחת בשנייה ויכולות גם כן להילמד בכל סדר.

טבלה 4. מודולות ופירוט תכנים ברמות AS, A2

מודולות		AS		A2	
Pure Core		Pure Core 1(MPC1)		Pure Core 3 (MPC3)	
		אלגברה: משואה ריבועית, נוסחת השורשים, חוקי שורשים, פירוק לגורמים, חילוק רב איבר בפולינום ממעלה ראשונה.		אלגברה ופונקציות: תחום וטווח, פונקציות מורכבות (טרנספורמציות וגרפים), פונקציות הפוכות, ערך מוחלט.	
		הנדסה אנליטית: משוואת מעגל כללית וקנונית, משוואת ישר בצורה מפורשת ולא מפורשת.		טריגונומטריה: פונקציות טריגונומטריות הפוכות, פונקציות $\sec$, $\csc$ והזהויות $\cot^{-1} \tan$.	
		חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי: נגזרות ואינטגרלים של פונקציות פולינום ומציאת שטח באמצעות אינטגרל מסוים.		לוגריתמים חזקות ומעריכים: חקירת פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות בסיסיות כולל סקיצה.	
				חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי: נגזרות ואינטגרלים של פונקציות מעריכיות, לוגריתמיות, טריגונומטריות, נגזרת ואינטגרל של פונקציה מורכבת, אינטגרל בשיטת ההצבה, נגזרת מכפלת פונקציות. מציאת נפחים באמצעות אינטגרל סביב ציר X וסביב ציר Y.	
				$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$	
				אנליזה נומרית כולל חוק סימפסון, שיטת החציה.	
		Pure Core 2 (MPC2)		Pure Core 4 (MPC4)	
		אלגברה ופונקציות: טרנספורמציות בפונקציה מורכבת (פונקצית $\cos$ שפועלת על פונקציה של קו ישר).		אלגברה ופונקציות: פירוק לגורמים, צמצום שברים אלגבריים, חילוק רב איבר ברב איבר plane in (x,y): הצגת מקור ותמונה באמצעות גורם מתווך (פרמטר, קרטזי) לחלן:	

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$$\text{e.g. } x = t^2, y = 2t; \quad x = a \cos \theta, y = b \sin \theta;$$

$$x = \frac{1}{t}, y = 3t; \quad x = t + \frac{1}{t}, y = t - \frac{1}{t} \Rightarrow (x+y)(x-y) = 4.$$

טורים וסדרות: הבנום של ניוטון עבור כל מערך רציונאלי.

טריגונומטריה: זהויות טריגונומטריות של זווית כפולה, סכום זוויות, פתרון משוואות טריגונומטריות בתחום נתון.

לוגריתמים חזקות ומעריכים: גדילה ודעיכה מעריכית

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי: משוואות דיפרנציאליות פשוטות ושילוב בשאלות הלקוחות מחיי היום יום (בעיות מצאיותיות), משיק ונורמל (כולל פרמטרים), אינטגרלים תוך שימוש בשברים חלקיים.

וקטורים: רמה בסיסית של וקטורים בדו ותלת מימד, אורך וקטור, חיבור וחיסור וקטורים ומכפלה בסקלר, מרחק בין שתי נקודות, הצגה פרמטרית של ישר, חישוב זווית בין שני ישרים.

Further Pure 2 (MFP2)

פתרונות של פולינומים: הקשר בין פתרונות למקדמי משוואה פולינומאלית (גם בהקשר שורשים מרוכבים).

מספרים מורכבים: הצגת קרטזית ופולארית של מספר מורכב, ייצוג מספר מורכב על מישור גאוס, מיקום גיאומטרי במספרים מורכבים.

משפט דה-מואבר:

(א) **עבור אינטגרל n:**

$$\int \sin^5 \theta d\theta.$$

(ב) שורש n-י של שורשי יחידה

סדרות הנדסיות אינסופיות והבנום של ניוטון.

טריגונומטריה: משפט הסינוס, שטח משולש תלוי זווית, זהויות טריגונומטריות ומשוואות טריגונומטריות בסיסיות.

חוקי לוגריתמים וחזקות: פונקציות חזקה ולוגריתמיות כפונקציות הפוכות במובן האלגברי (לא גרפי).

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי: גזרות של פונקציות פולינום, אינטגרלים של פונקציות פולינום ושורשים. מציאת שטח באמצעות אינטגרל מסוים.

Further Pure 1 (MFP1)

אלגברה וגרפים: גרפים של פונקציות רציונאליות, אסימפטוטות מקבילות לצירים, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים, גרפים של פרבולות, אליפטות והיפרבולות.

מספרים מורכבים: פתרון משוואות ריבועיות, חיבור

וחיסור מספרים מורכבים.

שורשים ומקדמים של משוואה ריבועית

סדרות: שימוש בנוסחאות לחישוב סכומים של טורים

ג) הצגה אקספוננציאלית למספר מורכב

אינדוקציה: הוכחות אינדוקציה

סדרות סופיות: סכום טורים סופיים בשיטות שונות, כמו אינדוקציה, שברים

חלקיים.

חז"א של פונקציות טריגונומטריות הפוכות

פונקציה היפרבולית

Arc length and Area of surface of revolution about the x-axis

Calculation of the arc length of a curve and the area of a surface of revolution using Cartesian or parametric coordinates.

Use of the following formulae will be expected:

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx = \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dt$$

$$S = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dt$$

Further Pure 3 (MFP3)

סדרות וגבולות

קואורדינטות פולאריות

משוואות דיפרנציאליות (כולל ממעלה ראשונה ושנייה)

שונים, למשל:

$$\sum_{r=1}^n r^2(r+2) \text{ or } \sum_{r=1}^n (r^2 - r + 1).$$

Calculus: קירוב ליניארי ואינטגרלים של פונקציות

חזקה עם מעריך רציונאלי

אנליזה נומרית הכוללת פתרון משוואות על ידי:

interval bisection, linear interpolation and the Newton-Raphson method.

פתרון משוואות דיפרנציאליות

טריגונומטריה: פתרון כללי למשוואות

טריגונומטריות

מטריצות וטרנספורמציות: מטריצות 2x1, 2x2, חיבור

וחיסור, מכפלה בסקלר, מכפלת מטריצות, מטריצת

יחידה, טרנספורמציות של נקודות על מישור x - y

לייצוג מטריצת 2x2.

Further Pure 4 (MFP4)

וקטורים בתלת מימד
מטריצות 2×2 , 3×3 , מטריצות הפוכות
משוואות ליניאריות (3 משוואות עם שלושה נעלמים כולל משמעות גיאומטרית)
דטרמיננטות
אי תלות ליניארית וחלות של וקטורים

Statistics 1

Discrete Random Variables
Poisson Distribution
Continuous Random Variables
Estimation
Hypothesis Testing
Chi-Square (χ^2) Contingency Table Tests

Numerical Measures
Probability
Binomial Distribution
Normal Distribution
Estimation
Correlation and Regression

Statistics 3

Further Probability
Linear Combinations of Random Variables
Distributional Approximations
Estimation
Hypothesis Testing

Statistics 4

Geometric and Exponential Distributions
Estimators
Estimation
Hypothesis Testing
Chi-Squared (χ^2) Goodness of Fit Tests

Mechanics 1	Mechanics 2	Mechanics 3	Mechanics 4	Mechanics 5
Mathematical Modelling Kinematics in One and Two Dimensions Statics and Forces Momentum Newton's Laws of Motion Connected Particles Projectiles	Mathematical Modelling Moments and Centres of Mass Kinematics Newton's Laws of Motion Application of Differential Equations Uniform Circular Motion Work and Energy Vertical Circular Motion	Relative Motion Dimensional Analysis Collisions in one dimension Collisions in two dimensions Further Projectiles Projectiles on Inclined Planes	Moments Frameworks Vector Product and Moments Centres of mass by Integration for Uniform Bodies Moments of Inertia Motion of a Rigid Body about a Fixed Axis	Simple Harmonic Motion Forced and Damped Harmonic Motion Stability Variable Mass Problems Motion in a Plane using Polar Coordinates

Decision 2	Decision 1	Decision*
- Critical Path Analysis - Allocation - Dynamic Programming - Network Flows - Linear Programming - Game Theory for Zero Sum Games - Mathematical Modelling	- Simple Ideas of Algorithms - Graphs and Networks - Spanning Tree Problems - Matchings - Shortest Paths in Networks - Route Inspection Problem - Travelling Salesperson Problem - Linear Programming - Mathematical Modelling	

* לשם העמקה בפירוט תכני היחידות Decision ,Mechanics ,Statistics ניתן לפנות למסמך המפרט הקיים בקישור :
<http://store.aqa.org.uk/qual/pdf/AQA-6360-W-SP-10.PDF>

7. דרכי ההפעלה וההערכה של התכנית

בסעיף זה נציג דוגמה לאחת מדרכי ההפעלה (תת סעיף 6.1) של התכנית הכוללת ביצוע פרויקטים במתמטיקה בהקשרים שונים, מערך הערכה של הרמות המתקדמות הכולל את החלק היחסי של ציון היחידה מתוך הציון הכללי (תת סעיף 6.2) ודוגמאות לשאלות מתוך בחינות גמר (סעיף 6.3). הפניות למבחנים לדוגמה מוצגות בתת סעיף 6.4. תת סעיף 6.5 עוסק באופן בו נעשית ההערכה של ביצועי התלמידים במבחנים השונים. יצוין כי קיימות בחינות מותאמות עבור לומדים בעלי נכויות או בעלי נסיבות בריאותיות קשות (למעוניינים, נא עיינו בקישור: www.aqa.org.uk).

7.1 דוגמה לפרויקט מייצג

הפעלת התכנית החדשה החלה בשנה האחרונה (2007). התכנית מלווה בדוגמאות של שיעורים לדוגמה במתמטיקה אשר נלמדו בבתי ספר שונים. מרבית הדוגמאות האלה כוללות התייחסות לפרויקטים שהלומדים נטלו בהם חלק והתבקשו לקשר בין המתמטיקה לתחומים בית ספריים או יומיומיים אחרים.

אחד הפרויקטים המוצגים עוסק בקשר בין המתמטיקה לבין האירוע ההיסטורי קרב טראפאלגאר (קרב ימי בין כוחות בריטיים וצרפתיים, 1805). הפרויקט נפתח בסיכום הקרב ובהתייחסות לטקטיקה של נלסון שהייתה לחלק, להביס וליצור קבוצות מחדש. כל זה הוביל למשימות מתמטיות רבות שהתבססו על הקרב. התלמידים השתמשו בכדורי פלסטיק לייצג כדורי תותח וסידרו אותם בפרמידות ריבועיות. הם זיהו את דפוס המספרים לגבי מספר הכדורים בערמה והשתמשו בממצאים שלהם כדי לחשב את מספר כדורי התותח בתמונה שניתנה להם.

הלומדים קיבלו נתונים לגבי מספר הגברים, הרובים והחללים וכך הם השוו את שני הכוחות במערכה. הם הכינו דוחות כדי לדווח למלך גורג השלישי לגבי הציים, תוך שימוש בשיטות שונות כדי לפרש, כדי להעריך וכדי לייצג את הנתונים. חלק מהתלמידים הכינו דוחות בצורת מגילה.

הם עברו לחקור את הצי הבריטי שהיה תחת ירי. הם סרטטו את המיקום הגיאומטרי של כדורי תותח ספרדיים וצרפתיים והשתמשו בגיאומטריה כדי ליצור סרגלים מקבילים שבעזרתם מדדו את הכיוון של חלק מהאוויות. הם גם העריכו את המשקל של כדורי תותח שונים, למדו על המטבע שהיה מקובל באותם זמנים והמירו אותו לפי ערך המטבע של היום.

המורים והתלמידים אשר לקחו חלק בפרויקט טענו כי העבודה עוררה בכולם עניין רב וכי ההשתתפות בפרויקט זימנה לתלמידים את האפשרות לקשר בין היבטים מסוימים של המתמטיקה להיבטים שונים של המוסיקה.

7.2 המבנה המודולארי של מערך ההערכה Mathematics Advanced Level (AS+A2)

מערך ההערכה הינו בעל מבנה מודולארי. כאמור, רמה A מורכבת מארבע יחידות ליבה שהן חובה, יחידת בחירה אחת אופציונאלית מתוך AS ויחידה בחירה אחת או מתוך AS או A2.

בדוח זה מובא לדוגמה מערך ההערכה עבור Mathematics Advanced Level (AS+A2) בלבד. מבנה דומה קיים במערך ההערכה של Further Mathematics⁴. טבלה 7 מציגה את המרכיבים הבאים: מערך ההערכה, חלק הציון, הזמן הנדרש והניקוד הניתן ואת אפשרות שימוש במחשבון.

טבלה 7. מערך ההערכה ומשקל כל יחידה

AS compulsory assessment units	Unit MPC1 16% of the total A level marks	Written Paper	1 hour 30 minutes 75 marks
Core 1 All questions are compulsory. Calculators are not permitted			
	Unit MPC2 16% of the total A level marks	Written Paper	1 hour 30 minutes 75 marks
Core 2 All questions are compulsory. A graphics calculator may be used.			
AS optional assessment units	Unit MS1A 16% of the total A level marks	Written Paper + Coursework	1 hour 15 minutes 60 marks
Statistics 1A The written paper comprises 12.5% of the A level marks. All questions are compulsory. A graphics calculator may be used. The coursework comprises 4.1667% of the A level Marks. One task is required.			
	Unit MS1B 16% of the total A level marks	Written Paper	1 hour 30 minutes 75 marks
Statistics 1B All questions are compulsory. A graphics calculator may be used			
	Unit MM1A 16% of the total A level marks	Written Paper + Coursework	1 hour 15 minutes 60 marks
Mechanics 1A The written paper comprises 12.5% of the A level marks. All questions are compulsory. A graphics calculator may be used. The coursework comprises 4.1667% of the A level Marks. One task is required.			
	Unit MM1B 16% of the total A level marks	Written Paper	1 hour 30 minutes 75 marks

4 לשם העמקה ניתן לפנות למסמך המפרט הקיים בקישור :
<http://store.aqa.org.uk/qual/pdf/AQA-6360-W-SP-10.PDF>

Mechanics 1B

All questions are compulsory. A graphics calculator may be used.

Unit MD01	Written Paper	1 hour 30 minutes
16% of the total		75 marks
A level marks		

Decision 1

All questions are compulsory. A graphics calculator may be used.

A2 compulsory	Unit MPC3	Written Paper	1 hour 30 minutes
assessment units	16% of the total		75 marks
	A level marks		

Core 3

All questions are compulsory. A graphics calculator may be used.

Unit MPC4	Written Paper	1 hour 30 minutes
16% of the total		75 marks
A level marks		

Core 4

All questions are compulsory. A graphics calculator may be used.

A2 optional	Unit MS2B	Written Paper	1 hour 30 minutes
assessment units	16% of the total		75 marks
	A level marks		

Statistics 2

All questions are compulsory. A graphics calculator may be used.

Unit MM2B	Written Paper	1 hour 30 minutes
16% of the total		75 marks
A level marks		

Mechanics 2

All questions are compulsory. A graphics calculator may be used.

Unit MD02	Written Paper	1 hour 30 minutes
16% of the total		75 marks
A level marks		

Decision 2

All questions are compulsory. A graphics calculator may be used.

בנוסף לכך, קיים עוד מרכיב הערכה (שמהווה לפחות 20% מהציון הכולל ברמה A) המתייחס להבנה של הלומדים לגבי קשרים בין אלמנטים שונים של אותו נושא, ליכולת שלהם לערוך קישור לנושאים קודמים שנלמדו וליישם שימושים של שיטות וגישות שנלמדו בשלבים קודמים עבור פתרון בעיות.

7.3 שאלות לדוגמה מבחינת גמר

בחינות הסיום של התלמידים בסוף כיתה יא כוללות גם חלק העוסק במתמטיקה שימושית. בחלק זה ניתנות שאלות במתמטיקה העוסקות בהקשרים שונים ובתחומי מתמטיקה שונים.

להלן שלוש שאלות (מתוך 6) אשר ניתנו ביוני, 2007 (חלק זה של המבחן כלל 6 שאלות, ארך שעה אחת והציון המרבי האפשרי בו היה 30 נקודות):

Question 2

A siren on a police car has a frequency of 1100 Hz. Sound travels through air at approximately 330ms^{-1} .

- (a) Find the wavelength of the sound waves if both the police car and observer are stationary. (2 marks)
- (b) If the observer is stationary and the police car is moving towards the observer at a speed of 30ms^{-1} , find:
 - (i) the apparent wavelength of the sound waves; (2 marks)
 - (ii) the apparent frequency of the sound waves; (2 marks)
 - (iii) the difference between the frequency of the transmitted wave and that received by the observer. (1 mark)

Question 5

Because speed cameras are positioned to the side of the road, the speed of a car as measured by the camera is a fraction of its actual speed given by $v_{\text{car}} = v_{\text{actual}} \cos\theta$. The positioning of the camera affects $\cos\theta$.

A camera is positioned so that the point on which it is focused is 10 metres away along the line of travel of the car and the sideways displacement of the camera is 2.5 metres.

- (a) Show that $\frac{v_{\text{car}}}{v_{\text{actual}}} = 0.970$. (2 marks)
- (b) For this camera position find the angle θ . (2 marks)

Question 6

- (a) Sketch a graph of $y = \cos \theta$ for $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$.
Show clearly intercepts with both axes. (2 marks)
- (b) Use your sketch to explain why the "cosine error" is always to the advantage of the motorist. (2 marks)

השאלות עוסקות בתכנים מתמטיים ופיסיקליים שונים. התלמידים צריכים לנתח את הסיטואציה ולבחון מהי המתמטיקה הרלבנטית כדי להסביר אותה. שאלה 2 מתייחסת הן לאורכי גל והן לתדירות ועל התלמידים להכיר את המושגים, את יחידות המידה הרלבנטיות וכן את הפרוצדורות הרלבנטיות לפתרון הבעיה. שאלה 5 גם היא חישובית בלבד ומתבססת על הכרה ועל זיהוי של המושגים ושל הפרוצדורות הרלבנטיות. בשאלה 6 התלמידים נדרשים לסרטט גרף של פונקציה טריגונומטרית ולהסביר את הסיטואציה תוך התייחסות לגרף שסרטטו.

המחווה של המבחן כולל מתן ציון על הדרך ולא רק על תוצאות סופיות. בשאלה 2 - 3 נקודות מתוך ה-7 ניתנות על הדרך ו-4 נקודות ניתנות על דיוק בחישוב, בשאלה 5 - 2 נקודות הן על הדרך ו-2 נקודות על החישוב ובשאלה 6 - 4 הנקודות ניתנות הן על הדרך והן על הדיוק (השאלה אינה כוללת חישובים).

את המחווה אפשר למצוא בעזרת הקישור הבא :

<http://www.aqa.org.uk/qual/gceasonly/qp-ms/AQA-UOM41-W-MS-JUN07.PDF>

7.4 דוגמאות למבחנים ברמות מתמטיקה מתקדמות

בדוח זה מובאות לדוגמה שתי בחינות : בנספח 1, עבור רמות AS, A2 (Pure Core 1-4) ובנספח 2, עבור רמה Further Pure 3.

דוגמאות למבחנים במכניקה ובסטטיסטיקה ניתן למצוא בקישורים הבאים בהתאמה :

<http://www.examsolutions.co.uk/alevel-maths-papers/Edexcel/Mechanics/Mechanics-M1/M1-Papers.php>

<http://www.examsolutions.co.uk/alevel-maths-papers/Edexcel/Statistics/Statistics-S1/S1-Papers.php>

7.5 ההערכה של ביצועי התלמידים במבחנים השונים

הערכה זו נעשית על ידי אחד מהגופים שצוינו בסעיף 5 בדוח. לדוגמה, ה-AQA (Assessment and Qualifications Alliance) מבצע הערכה על ידי הוצאת דוח על כל בחינה שנעשתה ביחידות הלימוד השונות. הפניות לדוחות לדוגמה מובאות בטבלה 8. תוצאות סטטיסטיות מבחנים שנעשית על ידי גוף זה ניתן למצוא בקישור :

http://www.aqa.org.uk/over/stat_nat.php

טבלה 8. הפניות לדוחות אחר בחינה

דוחות לדוגמה	קיים בהפניה
דוח על בחינה (שנת 2007) – קבלת החלטות במתמטיקה (Decision 1-MD01, AS)	http://store.aqa.org.uk/qual/pdf/AQA-MD01-WRE-JUN07.PDF
דוח על בחינה (שנת 2007) – מתמטיקה מתקדמת (Further Pure 1-MFP1, AS)	http://store.aqa.org.uk/qual/pdf/AQA-MFP1-WRE-JUN07.PDF
דוח על בחינה (שנת 2008) – מתמטיקה מתקדמת (Further Pure 3-MFP3, A2)	http://store.aqa.org.uk/qual/pdf/AQA-MFP3-WRE-JAN08.PDF
דוח על בחינה (שנת 2007) – סטטיסטיקה (Statistics 1A – MS1A, AS)	http://store.aqa.org.uk/qual/pdf/AQA-MSSS1A-WRE-JUN07.PDF
דוח על בחינה (שנת 2007) – מכניקה – (Mechanics 5- MM05, A2)	http://store.aqa.org.uk/qual/pdf/AQA-MM05-WRE-JUN07.PDF

סיכום

תכנית הלימודים הלאומית של אנגליה מדגישה את הצורך במתמטיקה לשם פתרון בעיות בהקשרים שונים – מתמטיים וחופץ מתמטיים, בית ספריים ושאינם בית ספריים. התכנית מאורגנת סביב מושגים מרכזיים (יכולת, יצירתיות, יישומים והשלכות של המתמטיקה והבנה ביקורתית), וכן סביב תהליכים מרכזיים (ייצוג, ניתוח – שימוש בהנמקה מתמטית ושימוש בפרוצדורות מתמטיות מתאימות, פרשנות והערכה, תקשורת ורפלקציה).

התכנית מפרטת את היעדים ללמידה לגבי מספר תחומים מתמטיים: מספרים, אלגברה, גיאומטריה ומדידות וסטטיסטיקה. אחד השינויים בתכנית הלימודים זו הוא בהפחתת מספר הנושאים ובהוראה מעמיקה יותר בכל נושא.

שלושת עקרונות ה-DNR באים לידי ביטוי בתכנית וביחידות הלימוד המתקדמות. מטרות התכנית מדגישות את הצורך בלמידה של דרכים שונות לפתרון בעיות שונות וכן את הצורך בבחינה ביקורתית של התלמידים לגבי הדרכים השונות, תהליך אשר יאפשר להם לזהות את האסטרטגיות המתאימות ביותר לפתרון בעיה מסוימת בהקשר נתון (עקרון הדואליות) ולבחון פתרונות חלופיים.

עקרון הנחיצות בא לידי ביטוי בתכנית המתרכזת בהיבטים שימושיים של המתמטיקה, בצורך שתלמידים יישמו את ההבנות שלהם לגבי המתמטיקה בהקשרים שונים בכיתה ומחוצה לה. צורך זה אינו רק צורך חיוני לעולם שמחוץ למתמטיקה, אלא מתייחס גם למתמטיקה עצמה – לתוצרים מתמטיים הנדרשים כדי לפתור בעיות אחרות במתמטיקה.

התפתחות תכנית הלימודים לאורך שנות הלימוד השונות מדגישה את עקרון החשיבה החוזרת הכוללת התייחסות לידע ולמיומנויות שנרכשו בשלבים מוקדמים כדי להעמיק בהם וכדי לקשר אותם להקשרים רחבים יותר, וכן לצורך הלמידה של מושגים ושל תהליכים חדשים על בסיס אלה שכבר נלמדו. עקרון זה בולט במיוחד ביחידות הלימוד ברמות AS/A.

רשימת מקורות

- AL and AS levels results by subject (2005). Retrieved February 18, 2009 from <http://education.guardian.co.uk/alevel/page/0,,1551646,00.html>
- Children Act (2004). Retrieved July 20, 2008 from http://www.opsi.gov.uk/acts/acts2004/ukpga_20040031_en_1
- Curriculum in Action (2008). Retrieved July 20, 2008 from <http://curriculum.qca.org.uk/key-stages-3-and-4/curriculum-in-action/index.aspx?fldKeyword1=Mathematics>
- Every child matters. Change for children. Aims and outcomes, (2005). Retrieved July 20, 2008 from <http://www.everychildmatters.gov.uk/aims/>
- Gardiner, T., (2006). Beyond the soup kitchen: Thoughts on revising the Mathematics "strategies/framework" for England. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*. Retrieved July 20, 2008 from <http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/gardiner.pdf>
- Kounine, L., Marks, J., & Truss, E., (2008). The value of mathematics. Retrieved July 20, 2008 from <http://www.reform.co.uk/documents/The%20value%20of%20mathematics.pdf>
- Little, C., & Jones, K. (2008). Assessment of university-entrance level mathematics in England: an analysis of key influences on the evolution of the qualification during the period 1951-2001. Paper presented at the 11th International Congress on Mathematical Education (ICME-11), Monterrey, Mexico, 6-13 July 2008.
- Mathematics at key stage 4: developing your scheme of work. Planning Handbook. (2007). Retrieved July 20, 2008 from http://www.standards.dfes.gov.uk/secondary/framework/files/downloads/pdf/mathematics_at_KS4_planning_handbook.pdf
- National Curriculum. Attainment targets for mathematics (2008). Retrieved July 20, 2008 from http://curriculum.qca.org.uk/key-stages-3-and-4/subjects/mathematics/keystage4/Copy_of_index.aspx?return=/key-stages-3-and-4/subjects/mathematics/keystage4/index.aspx

National Curriculum. Mathematics Programme of study. Key stage 4. (2007).

Retrieved July 20, 2008 from

http://curriculum.qca.org.uk/uploads/QCA-07-3339-p_Maths_4_tcm8-404.pdf?return=/key-stages-3-and-4/subjects/mathematics/keystage4/index.aspx%3Freturn%3D/key-stages-3-and-4/subjects/index.aspx

The National Strategies. The framework for secondary mathematics. (2007).

Retrieved July 20, 2008 from

<http://www.standards.dcsf.gov.uk/secondary/framework/maths/fwsm/>

Office of the Qualifications and Examinations Regulator

<http://www.ofqual.gov.uk/191.aspx>

יפן

ד"ר אנטולי שטרקמן

1. הרקע להתפתחות תכניות הלימודים

יפן היא המדינה השישית בעולם מבחינה תעשייתית והמדינה השלישית מבחינת עוצמתה הכלכלית. מבחינת אוכלוסייה היא נמצאת במקום העשירי בעולם, קרוב ל-128 מיליון נפש. החברה היפנית היא הומוגנית מבחינה אתנית ולשונית וכוללת מיעוטים קטנים של קוריאנים (מיליון), אוקינאוים (1.5 מיליון), סינים וטייוואנים (0.5 מיליון), פיליפינים (0.5 מיליון), וברזילאים (כרבע מיליון). התרבות היפנית השתנתה מאוד במשך השנים ומשולבות בה השפעות אסיאתיות, אירופאיות ואמריקניות. מאמצע המאה ה-19 ואילך, ההשפעות האירופאיות היו החזקות ביותר, כשההשפעה האמריקאית גברה מאוד לאחר מלחמת העולם השנייה. השפעות אלו ניכרות בתרבות היפנית של היום. גם מערכת החינוך ביפן החל מאמצע המאה ה-19 הושפעה מאוד על-ידי רעיונות ממערכות חינוך מערביות. לאחר מלחמת העולם השנייה הייתה תקופה מסוימת של הכנסת שיטות ורעיונות מארצות הברית וכך זה נמשך כמעט עד 1980. מאז התחילו שינויים משמעותיים במערכת החינוך היפנית בכלל ובהשכלה המתמטית בפרט. היום מערכת ההשכלה היפנית היא אחת החשובות בעולם. חשוב לציין כי כ-96% ממסיימי התיכון ביפן ממשיכים לימודים באוניברסיטאות, בקולגים או במוסדות אחרים להשכלה גבוהה.

2. רציונל התכנית, העקרונות הפסיכולוגיים והדידקטיים

על אף ההישגים הגבוהים של מערכת החינוך היפנית כפי שבאו לידי ביטוי במבחני השוואה בינלאומיים (מקום חמישי בתחום מדעים ומתמטיקה ב-1998), הייתה ביקורת רצינית על תכניות הלימודים, על שיטות ההוראה, על התכנים, על ניהול בתי הספר ועל דרך תפעולם.

חוקרים ממרכז המחקר הלאומי בטוקיו העלו את הסיבות העיקריות לכך:

- בתכנית הלימודים הקיימת הושם דגש יתר על למידת עובדות ועל שינון ונעדר דפוס של למידה עצמית ושל חשיבה ביקורתית.
- התכנית הקיימת אינה מעודדת תהליכי חקר וגילוי וחשיפת ידע בדרך לימוד עצמי.
- התכנית מתבססת בעיקר על מבנה דיסציפלינארי ללא אפשרות ללימודים אינטגרטיביים או ללימודי בחירה.
- התכנית הקיימת מתעלמת מהצורך של בית הספר להתאים את תכנית הלימודים לצורכי התלמידים, הקהילה והסביבה.
- התכנית אינה מתייחסת לשימוש בסביבות הלימוד הממוחשבות.

לקראת שנת 2002 הוגדרו מטרות והנחיות לפיתוח תכניות לימודים חדשות:

- לעודד ולחזק את יכולת התלמידים לחשוב וללמוד באופן עצמאי.
- לפתח סביבת למידה נוחה אשר מצליחה לצייד את התלמיד בידע ומיומנויות
- חיוניות, כמו גם לפתח את אישיות היחיד.
- לעודד כל בית ספר להגדיר מחדש את ייחודו ולהתאים לכך את אופי פעולתו.
- לעודד ולפתח את חברת התלמידים כאנשים התורמים לקהילה. בית הספר יארגן את תכנית הלימודים שלו בהתאמה לצורכי תלמידיו וקהילתו.
- ליצור בכיתות סביבת עבודה המבוססת על הסביבות הממוחשבות ללמידה יחידנית.
- לעבור להוראה של 20 תלמידים בכיתה במקצועות נבחרים.

תכנית הרפורמה בחינוך קבעה כי החל משנת 2002 יתקיימו הלימודים במתכונת של חמישה ימים בשבוע. הפעילות הלא פורמאלית הבית ספרית ביום השישי בשבוע תתקיים אחת לשבועיים בלבד.

מתוך מבנה ארגון הלימודים החדש ניתן להסיק כי מערכת החינוך היפנית מכוונת את עצמה לתפיסה של "הילד במרכז". על פי תפיסה זו, תכנית הלימודים מתאימה עצמה לצורכי הילד. המורה מתרכז יותר בילד, בסקרנותו, בצרכיו, במגבלותיו ובקצב התפתחותו.

אחת מההחלטות המרכזיות במדינות המתועשות, ובכללן יפן, היא להשקיע באופן משמעותי בהעמקה ובהרחבה של תכנית המחשוב בבתי הספר. לפיכך החליט משרד החינוך היפני כי יש לפתח את היכולת של כל ילד לעשות שימוש מושכל בידע באמצעות המדיה הדיגיטאלית. כמו כן נקבע כי בחטיבות (חטיבת ביניים וחטיבה עליונה) ייעשה שימוש מוגבר בהוראה ובלמידה בעזרת מחשב בלימודי מתמטיקה, מדעים וכלכלת בית. ההוראה והלמידה בחטיבה העליונה יתבצעו בעזרת מחשב בשורה ארוכה יותר של מקצועות, בדגש על מתמטיקה ועל מדעים. לשם יישום התכנית נקבע כי בחינוך היסודי תהיה לכל שני תלמידים עמדת מחשב אחת ואילו בחטיבות ביניים, בחטיבה העליונה ובחינוך המיוחד יהיה מחשב לכל תלמיד. כמו כן, המורים יעברו הכשרה בתחום יישומי המחשב ובשילוב כלים טכנולוגיים בהוראה ובלמידה.

גישה זו של המדינה מבקשת להיטיב עם מערכת החינוך מנקודת המבט של תכנון המשק הלאומי. תפיסת תכנון לאומי המתקיימת כיום בשורה של מדינות אומרת כי הכלכלה החדשה ומגמות הגלובליזציה של הכלכלה העולמית יוצרות תחרות חריפה בין מדינות. המענה המרכזי והכמעט בלעדי של מדינה בהתמודדות עם המגמה המתוארת תלוי ביכולת אזרחיה להתמודד עם המציאות המשתנה של "חברת הידע". על כן, השקעה בפיתוח יכולתם של הצעירים להשתלב ולשלוט במדיה הדיגיטאלית מהווה כיום מפתח ליכולתה של מדינה להיות מובילה בקרב המשקים העולמיים. יפן רואה

בהשקעה בחינוך, ובעיקר בפיתוח יכולתו של כל צעיר להיות בעל ידע ובר-אורייין בתחום שימושי המחשב המגוונים, השקעה אסטרטגית ולאומית. ההנחה היא כי התשואה שתבוא בגין השקעות אלה תניב פירות ותאפשר לשמור על מקומה של יפן בשורת המדינות המובילות בעולם.

3. מטרות התכנית

במבחני TIMSS במקצועות המתמטיקה והמדעים לשנת 2000 הגיעה יפן למקום החמישי. אף על פי כן נוצרה דאגה לנוכח הנתון כי רק 48% מהתלמידים הוגדרו במבחני ההשוואה כ"אוהבי מתמטיקה", בעוד שהמדד הבין-לאומי של המדינות המצטיינות עמד על 72%. עוד נמצא, כי רמת הידע וההישגים במתמטיקה של הלומדים במוסדות להשכלה גבוהה נמצאת בנסיגה. הנתונים האלה היו בין הגורמים שהניעו את משרד החינוך היפני לארגן מחדש את תכנית הלימודים, על מנת להגביר את העניין של התלמידים במתמטיקה ובמדעים.

לפיכך הוחלט לבצע רפורמה במבנה תכנית הלימודים החל משנת 2002. השינוי המרכזי ממוקד במעבר ל"פעילות מתמטית" אשר מטרתה ליצור הנאה ועניין בלימודי מתמטיקה. המשמעות המרכזית של השינוי היא לעבור משינון לחשיבה לוגית, לחשיבה יצירתית, לתצפיות, למדידות וללמידה עצמית. במסמך המדיניות שנקבע לשנות האלפיים הוכרז כי:

"In the new Courses of Study, zest of living is emphasized in all subjects of and spontaneous problem solving is emphasized in Mathematics in all levels of Mathematics, mathematical activities are introduced in the objectives for the first time. Enjoyment of Mathematics is described in upper secondary levels." (Mathematics program in Japan Elementary, Lower Secondary and Upper Secondary Schools, 2000)

ניתן להגדיר את מטרות השינויים והרפורמות בתכנית הלימודים בחינוך העל יסודי באופן הבא :

- לעבור מדגש על שינון חומר הלימוד לדגש על לימוד תוך פיתוח חשיבה ביקורתית ויצירתית;
- לעבור להוראה של עד 20 תלמידים בכיתה במתמטיקה (ובמספר מקצועות נוספים).
- ליצור סביבת עבודה אשר מבוססת על טכנולוגיה דיגיטאלית, תוך ניצול גובר והולך של סביבה ממוחשבת ללמידה יחידנית;
- להטמיע את הערכת ההישגים הפנים בית ספרית (self-evaluation system);
- לעודד את מעורבות ההורים;
- ליצור סוג חדש של בתי ספר ולאפשר להם מרחב פעולה גמיש. גמישות משמעותה התאמת דפוסי העבודה של בית הספר לצורכי התלמידים והקהילה.

אחד מהצעדים הנוספים של הרפורמה הוא עידוד המורים למתמטיקה לבצע מחקר עצמי בהיבטים השונים של ההוראה, ופרסום ממצאי המחקר בכתב-עת הנקרא "חינוך למתמטיקה". איסוף הנתונים והכתיבה יבוצעו על ידי המורים בסיוע אנשי אקדמיה.

4. מבנה התכנית

תכנית הלימודים במתמטיקה מורכבת משני חלקים :

חלק I: תכנית לימודים במתמטיקה כללית (Mathematical Program for General Students)

חלק II: תכנית לימודים במתמטיקה מדעית (Program in the Science-Mathematics Course of the Upper Secondary School)

חלק I : תכנית לימודים במתמטיקה כללית

חלק I מכיל את הקורסים הבאים :

- מתמטיקה 1 – 140 שיעורים (שיעור נמשך ביפן 50 דקות);
- מתמטיקה 2 – 105 שיעורים;
- אלגברה וגיאומטריה אנליטית – 105 שיעורים;
- מבוא לאנליזה – 105 שיעורים;
- חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי – 105 שיעורים;
- ההסתברות וסטטיסטיקה – 105 שיעורים.

מתמטיקה 1:

(חלק מהנושאים מהווים הרחבה והשלמה למה שנלמד בחטיבת הביניים)
 דרישות כלליות: לדעת תכונות ומשפטים עם הוכחות, שליטה במונחים כמו תנאי הכרחי ומספיק. מספרים וביטויים אלגבריים: מספרים טבעיים, רציונאליים, ממשיים, קבוצות, ביטוי אלגברי, פולינומים, שברים אלגבריים.
 משוואות ואי-שוויונים: משוואות ממעלה ראשונה, משוואות ריבועיות, משוואות ממעלה שלישית ורביעית הניתנות לפירוק לגורמים, מערכות משוואות ממעלה ראשונה ושנייה, אי-שוויונים ממעלה ראשונה ושנייה, מערכות אי-שוויונים.
 פונקציות: פונקציות ממעלה ראשונה, פונקציות ממעלה שנייה, פונקציות רציונאליות, פונקציות אי רציונאליות, אלגברה של הפונקציות.
 טריגונומטריה של המישור: יחסים טריגונומטריים- סינוס, קוסינוס, טנגנס, משפט הסינוסים, משפט הקוסינוסים, משוואות טריגונומטריות, שימושים שונים ופתרון בעיות.

מתמטיקה 2:

הסתברות וסטטיסטיקה: ניסויים אקראיים, מרחב המדגם, מושג ההסתברות, חוקי ההסתברות, חישובי ההסתברות במקרים שונים, מדדים מרכזיים, מדדי פיזור, שימושים שונים ופתרון בעיות.
 תורת הווקטורים: גישה גיאומטרית ואלגברית במישור ובמרחב. תלות ואי תלות ליניארית, שימושים שונים בווקטורים ופתרון בעיות.
 פונקציות: הפונקציות הטריגונומטריות, הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות.
 פונקציות ומדעי המחשב: מושג האלגוריתם, הצגת מספרים במחשבים וחישובים, כתיבת תכניות בשפת תכנות, ניתוח תוצאות.

אלגברה וגיאומטריה אנליטית:

הישר, המעגל, האליפסה, ההיפרבולה, הפרבולה, המשוואה הכללית של עקומה ממעלה שנייה, מקומות גיאומטריים.
 אלגברה ליניארית: וקטור וקטורים, שימושים בווקטורים, אלגברה של מטריצות.

מבוא לאנליזה:

סדרות: סדרות עם חוקיות, סדרות כלליות, גבול של סכום סדרה הנדסית.
 תכונות של פונקציות: זוגית אי זוגית, מחזוריות, מונוטוניות, פונקציות הפוכות.
 מושגים בסיסיים על הקירוב הליניארי ונגזרת. חישובי שטחים בקירוב.

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי:

מושג הגבול של סדרה. תכונות של סדרות מתכנסות. גבול של סדרות מונוטוניות וחסומות. תכונות של סדרות מתכנסות וחישובי גבולות. הגדרת הגבול של פונקציה.

אסימפטוטות. רציפות של פונקציה. הגדרת מושג הנגזרת של פונקציה. משמעות גיאומטרית ופיזיקאלית. משוואת המשיק. הכללים היסודיים של גזירה. נגזרות של פונקציות אלמנטאריות. נגזרת של פונקציה מורכבת והפוכה. המשפטים היסודיים של החשבון הדיפרנציאלי. חקירת פונקציות באמצעות הנגזרת. הנגזרת השנייה ומשמעותה. יישומי הנגזרת בבעיות שונות. האינטגרל המסוים והלא מסוים. פונקציות קדומות ואינטגרלים מידיים. שיטות אינטגרציה. המשפט היסודי של החדו"א. שימושים של האינטגרל המסוים. יישומי הנגזרת והאינטגרל במתמטיקה שימושית. משמעות המשוואה הדיפרנציאלית, שימושים שונים במשוואות הדיפרנציאליות.

הסתברות וסטטיסטיקה:

הצגת נתונים. מדדים מרכזיים. קשרים קומבינאטורים. הבינום של ניוטון. תכונות של מקדמים בינומיאליים. מאורעות. פעולות על מאורעות. הגדרת ההסתברות הקלאסית. מאורעות תלויים ובלתי תלויים. ההתפלגות הבינומית, ההתפלגות הנורמאלית, יישומים שונות בהסתברות וסטטיסטיקה.

קורס מתמטיקה 1 הוא קורס **חובה** לכל התלמידים. הקורסים האחרים הם קורסי **בחירה** וניתן ללמוד אותם אחרי קורס **מתמטיקה 1**. גם בחירת קורסים אפשר לעשות לפי סדר מסוים, למשל, כדי לבחור בקורס חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי צריך קודם ללמוד את הקורס מבוא לאנליזה. תכנית הלימודים מעודדת שימוש בטכנולוגיה דיגיטאלית.

אין מידע על קריטריונים מפורטים לגבי דרישות קבלה ל**מתמטיקה 2**, אך חלק גדול של התלמידים מעוניינים ומתקבלים לתכנית זו.

חלק II : תכנית לימודים במתמטיקה מדעית

לתכנית הלימודים במתמטיקה מדעית מוקצים 150-180 שעורים. כל בית ספר בונה תכנית לפי שיקוליו המקצועיים ואף מחליט לגבי בחירת הנושאים ופריסתם על פני שנות הלימוד.

התכנית הזאת מהווה התמחות, העמקה והרחבה והיא כוללת שני חלקים : מתמטיקה מדעית (Science Mathematics) ומתמטיקה משולבת (Integrated Mathematics).

מתמטיקה מדעית:

תורת המספרים, תורת המשוואות, פונקציות, מדעי המחשב.

מתמטיקה משולבת:

גיאומטריה אנליטית מתקדמת, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי, הסתברות וסטטיסטיקה, אלגברה ליניארית.

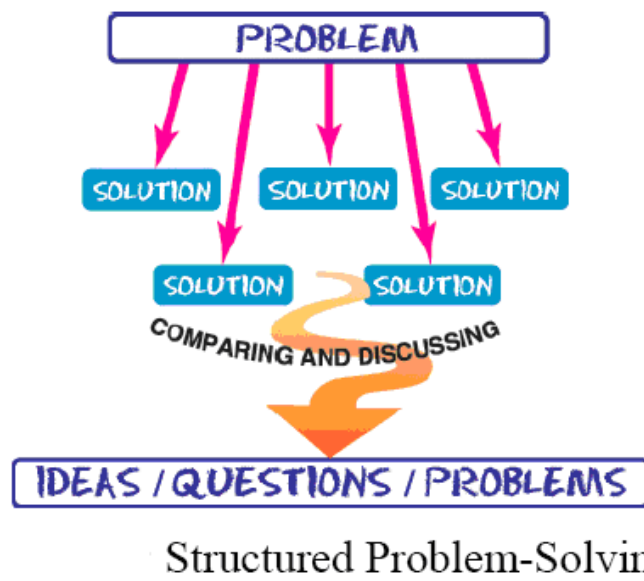
התכנים של הקורס 'מתמטיקה משולבת' מתבססים על הקורסים הקודמים אבל ברמה מתקדמת יותר, עם פתרון בעיות מורכבות מתחומים יישומיים. התלמידים משתתפים באופן פעיל בתהליך הלמידה: קוראים פרקים מסוימים באופן עצמאי, מכינים הרצאות, פותרים בעיות שונות בשילוב עם טכנולוגיה מתקדמת.

5. דרכי ההפעלה וההערכה

ביפן לא נהוגות הקבוצות ולא הוראה יחידנית, לפיכך לא מצוינים קריטריונים לחלוקת תלמידים לרמות או להקבוצות ולא שיעורי התפלגות התלמידים ברמות השונות.

שיטת ההוראה והלמידה מסתמכת על עיקרון של פתרון בעיות מובנה (Structured problem solving) אשר בא לידי ביטוי מעשי בפעילות מתמטית של שיתוף פעולה ושל החלפת דעות בין התלמידים. לאחר שתלמידים עובדים באופן עצמאי בפתרון בעיות הם מציגים את הרעיונות שלהם במתכונת של דיון כלל כיתתי. בצורה כזאת התלמיד הוא שותף פעיל בתהליך הבניית הידע. השלב האחרון שמתואר כאן נקרא ביפנית "Neriage" אשר משמעותו "ליטוש רעיונות".

השיעור במבנה Structured problem solving מוצג בתרשים 1:



תרשים 1. שיעור במבנה Structured problem solving

היפנים רואים בשיטת למידה זאת גישה רבת עוצמה לפיתוח מיומנויות טכניות, מושגיות ויצירתיות. הם משוכנעים שבדרך זו הם מצליחים להקנות אחריות בתהליך הלימודי.

שיעור במתמטיקה

המבנה האופייני לשיעור במתמטיקה בבית ספר ביפן (שיעור ביפן נמשך 50 דקות):
 התלמידים קמים כאשר מורה נכנס לכיתה.
 5 דקות – דיון על נושא קודם והצגת בעיה חדשה.
 5 דקות – הבנת הבעיה החדשה.
 20-25 דקות – התלמידים פותרים את הבעיה בזוגות או בקבוצות קטנות.
 10-15 דקות – דיון על פתרונות התלמידים, כל קבוצה מציגה את הפתרון.
 5 דקות – סיכום של המורה.
 שיעורי בית: חשוב לציין, כי כמות שיעורי הבית היא קטנה יחסית, אבל המשימות הן מורכבות, מאתגרות וקשות יותר מהמקובל אצלנו.
 התלמידים קמים כאשר השיעור מסתיים.
 בהתאם לצורך המורה רשאי להאריך את השיעור בכמה דקות כדי לסכם את הנושא הנלמד. להלן

דוגמאות אחדות לשיעורים במתמטיקה

דוגמה 1

הנושא: פתרון משוואות מהצורה: $ax^2 + c = 0$, $(x + d)^2 = k$

הבנת הבעיה על ידי דוגמה:

מריבוע בנו מלבן שארכו גדול מצלע הריבוע ב-2 ס"מ ורוחבו נשאר שווה לצלע הריבוע. שטח המלבן שהתקבל הוא 8 סמ"ר. האם ניתן למצוא את צלע הריבוע?

עבודת התלמידים

המורה מבקש לצייר את הריבוע ואת המלבן ולבנות את המודל האלגברי של הבעיה.

הביטוי המתקבל הוא $x(x + 2) = 8$ או $x^2 + 2x - 8 = 0$.

דרכים לפתרון:

1. הצבת מספרים.

2. להפוך לצורה $(x + 1)^2 = 9$

3. לפרק לגורמים $(x + 4)(x - 2) = 0$

השוואת פתרונות ודיון

תוצאת הדיון: להבין את הרעיון ואת הדרך לפתרון הבעיה.

קריסעבודת התלמידים

תלמידים פותרים משוואות ריבועיות שנותן המורה על ידי המרתן לצורה $(x + d)^2 = k$:

$$(1) \quad x^2 + 4x - 12 = 0$$

$$(2) \quad x^2 + 6x - 5 = 0$$

סיכום

הצגת דרכים שונות איך לפתור את המשוואה הריבועית $ax^2 + bx + c = 0$ שיעורי בית: 4 תרגילים.

דוגמה 2

הנושא: פתרון בעיה פתוחה: נתון המעגל ללא מרכז. האם ניתן למצוא את נקודת מרכז המעגל?

הבנת בעיה

כל תלמיד מקבל ציור של המעגל בלי נקודת מרכז ותלמידים מתבקשים להציע כל הדרכים האפשריות לפתרון הבעיה הנ"ל.

עבודת התלמידים

התלמידים הציעו 7 דרכים שונות (אפילו היה רעיון למצוא את מרכז הכובד של המעגל).

השוואת פתרונות ודיון

היה דיון על כל אחת מהדרכים שהציעו התלמידים, דנו ביתרונות ובחסרונות של הפתרונות.

סיכום של המורה

המורה מסכם את הדרך לפתרון ומציע להשתמש במשפט: "אנך העובר דרך אמצע מיתר במעגל עובר דרך מרכז המעגל". השיעור הנ"ל יכול להיות דוגמה טובה ל-Best Case של שיעור במתמטיקה. חשוב לציין, שברוב השיעורים משתמשים בהמחשה ויזואלית או בדיקת הממצאים מתבצעת באמצעות הסביבות הממוחשבות המתאימות.

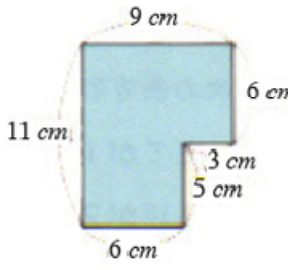
דוגמה 3

הנושא: פתרון בעיה פתוחה: מציאת שטח.

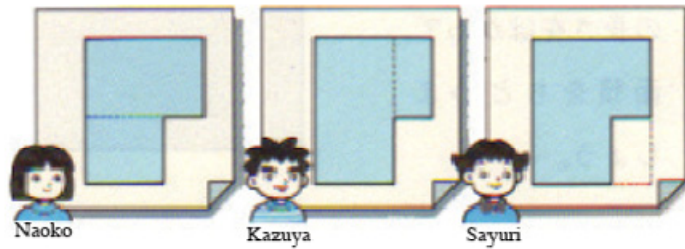
Ideas for Finding the Area

2 Let's think of a way to find the area of the shape on the right.

1 Let's explain each friend's way of thinking.



2 Let's find the area using each method.



JUKU

ביפן קיימת מערכת סיוע לימודית חוץ בית ספרית המכונה JUKU. מערכת זאת היא פרטית, קיימת בכל מקום ביפן ללא תלות בבתי ספר, ויש לה תפקיד מאוד חשוב בתהליך בניית ההשכלה של התלמידים. אלה מגיעים למרכזים בשעות אחר הצהריים וערב או בסוף שבוע. מערכת ה-JUKU מספקת לכל תלמיד אפשרויות לחזור על החומר הנלמד, לתרגל ולהתכונן לבחינות. המשמעות העיקרית היא אחידות ושוויוניות לכל התלמידים ללא חלוקה לרמות וללא סיווג של תלמידים. מטרת העל של JUKU היא לתת מענה לכל תלמיד, לתמוך בו ולחזק את ביטחונו העצמי. השיעורים אינם פורמאליים, דהיינו, תלמיד יכול לבוא רק לכמה דקות או למספר שעות לפי רצונו ולפי צרכיו. תלמיד מבקר בשיעורי JUKU כשעתיים בשבוע בממוצע. העלות של שיעורי JUKU היא כ-50\$ לחודש ללא הגבלת זמן.

המבחנים

מערכת החינוך היפנית ידועה בהפעלת מערכת בחינות מקיפה ואינטנסיבית. כדי להתקבל לתיכון תלמיד צריך לעבור בחינת כניסה הכוללת מבחני כישורים, מבחנים מעשיים וראיון. על אף תהליכי המיון, כ-97% מהתלמידים ממשיכים את לימודיהם בחטיבה העליונה. סיום הלימודים בחטיבה העליונה מבוסס על מבחני כניסה לאוניברסיטאות ולמוסדות להשכלה גבוהה אחרים. אחד מהשלבים של הרפורמה הוא לעבור להערכה פנים בית ספרית. כאן נוצרת התנגשות בין שני מערכי הערכה – פנימית וחיצונית – ועל כך יש מחלוקת מקצועית בתוך מערכת החינוך היפנית.

להלן דוגמה של מבחן כניסה לחטיבה העליונה.

Mathematics Problems on a Senior High School Entrance Examination
(50 minutes)

NOTE: Put all answers on separate answer sheet.

Calculations may be done anywhere on test booklet.

Note: Leave answers in radical form.

1. Solve problems [1]–[4] below.

[1] $\frac{12 - \sqrt{(-2)^2} + (-2 + \sqrt{3})^2}{\sqrt{3}}$

[2] Solve the compound inequality $\frac{3x + 1}{2} < \frac{4x + 1}{3} \leq \frac{7x + 5}{4}$

[3] In the quadratic equation in x : $x^2 - (a+1)^2x + (2a^2+2a-3)=0$, a is a constant and one of the roots of the equation is 2. Find the value of a and the equation's other root.

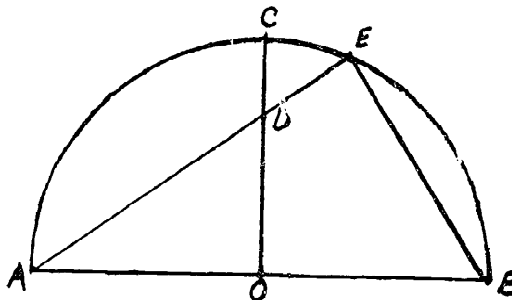
[4] a , b , and c are integers such that a is greater than 1 and less than 9 and b and c are each greater than 0 and less than 9. Find all triples (a, b, c) which satisfy the equality $100a + 10b + c = 5(12a + 5b + c)$.

2. There is a semicircle with point O as center, line segment AB as diameter, and a radius of 3 cm. Take radius OC perpendicular to AB and consider a point D on OC such that $OD:DC = 2:1$. The line segment AD extended intersects the semicircle at E . Solve the problems.

[1] Find $AE:EB$.

[2] Find the length of BE .

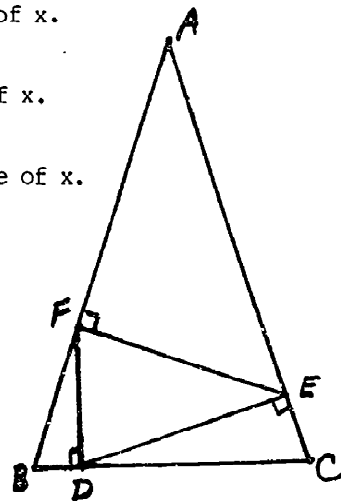
[3] Find the area of $\triangle CDE$.



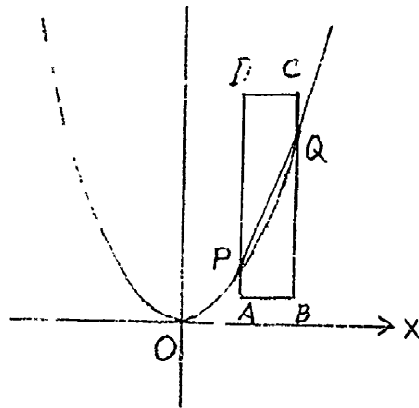
3. In isosceles triangle ABC , $AB = AC = 1$ and $\angle CAB = 36^\circ$. From a point D on side BC a perpendicular DE to side AC was drawn. When a perpendicular EF was drawn from E to side AB , $\angle FDB$ turned out to be a right angle.

Let $BC = 2x$ and solve the following problems.

- [1] (1) write an expression for $\frac{BD}{DF}$ in terms of x .
 (2) Write an expression of $\frac{BD}{DC}$ in terms of x .
 [2] Using the bisector of $\angle ABC$, find the value of x .
 [3] Find the value of $\frac{DB}{DC}$



4. Rectangle ABCD has vertices $A(2,1)$, $B(4,1)$, $C(4,8)$ and $D(2,8)$. The parabola $y = ax^2$ ($a > 0$) intersects the rectangle at two distinct points P and Q. Solve the following problems.
- [1] Find the range of values a can take under these conditions.
 - [2] Find the value of a for which the line segment PQ bisects the area of rectangle ABCD.
 - [3] If P lies on AD and Q on BC and line PQ passes through $(0,-3)$, find quadrangle ABQP:quadrangle CDPQ



5. Since for four consecutive integers $n-1$, n , $n+1$, and $n+2$ it is true that $(n-1) + (n+2) = n + (n+1) = 0$, it is possible, for example, to divide the consecutive integers 1, 2, 3, and 4 into two groups whose sums are equal, using each integer once and only once. Expressing this division as an equality, we can write $1 + 4 = 2 + 3$.

For squares of consecutive integers, do problems [1] and [2].

- [1] For eight consecutive integers $n-3$, $n-2$, $n-1$, n , $n+1$, $n+2$, $n+3$, and $n+4$, compute:

$$A = (n-3)^2 + n^2 - (n-2)^2 - (n-1)^2$$

$$B = (n+1)^2 + (n+4)^2 - (n+2)^2 - (n+3)^2$$

Using these results we can divide the consecutive integers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, and 8 into two groups such that, using each integer once and only once, the sum of the squares of the integers in one group is equal to the sum of the squares of the integers in the second group. Express this division as an equality.

6. המורים

המורים במערכת החינוך היפנית מתמנים על פי סטנדרטים ארציים הנקבעים על ידי משרד החינוך. בחירת המורים מתבצעת באמצעות מבחנים תחרותיים בין בעלי תעודות הוראה. קיימים גם מנגנוני סינון נוספים שאינם ניתנים לבחינה רגילה, והם פועל יוצא של המורכבות ההולכת וגדלה של מקצוע ההוראה. אמצעי המיון הנוספים, פרט לבחינה בכתב בתחומי ההתמחות ובתחומי הדעת הכלליים, הם ראיון ומשימה מעשית המוטלת על המועמד. לאחר שנת ההתנסות שבה המועמד זוכה גם לליווי ולהדרכה מקצועית, נקבע אם יש להאריך את תקופת התנסותו או להעניק לו קביעות בעבודה. על פי נתונים רב-שנתיים, כ-50% מהמועמדים להוראה עוברים בהצלחה את השלב הראשון של מבחנים אלה, אבל בהמשך אחרי אמצעי מיון נוספים יורד אחוז העוברים עוד יותר. על פי האומדן הקיים, יחס המתקבלים לעבודה למול המועמדים בראשית התהליך הינו כ-4:1.

הכשרת המורים וההתפתחות המקצועית

בחוק נקבע כי המורים נדרשים להמשיך ולהתמחות באופן קבוע לאורך הקריירה שלהם. קיימות תכניות שונות ומסגרות שונות כדי לממש עיקרון זה. מתקיימות סדנאות מרכזיות ומקומיות (בבתי ספר) הכוללות את הציוד הנדרש והדרכה, סגל מרצים ומדריכים. קיימים (וגם ממשיכים להקים) מרכזים מודרניים המצוידים במיטב הטכנולוגיה הדיגיטאלית כדי להבטיח שהמורים יהיו בקיאים ומעודכנים באופן שותף בתחום התמחותם תוך שימוש בטכנולוגיות חדשות ובלומדות מעודכנות.

כמו כן, נשלחים מידי שנה כ-5.000 מורים ללימודים בחו"ל, על מנת לרכוש פרספקטיבה בינלאומית בתחומים המקצועיים שלהם.

כחלק מתהליך ההכשרה המורים מקיימים סיורים לימודיים בתעשייה המודרנית, וכך הם נחשפים לצורכי המשק והכלכלה על מנת לשפר ולהעשיר את דרכי ההוראה בהתאם לצרכים אלה.

תכנית הכשרת המורים כוללת גם שיפור המיומנויות השונות הנדרשות להוראה טובה, והיא מתבצעת על ידי הצטרפותם לצוות מחקר בתחומם במוסד להשכלה גבוהה.

חלק בלתי נפרד מהקריירה החינוכית של המורה הוא השתתפות פעילה בקבוצת לימוד ומחקר כשעתיים עד חמש שעות בשבוע. הדבר מבטיח ההתפתחות מקצועית מתמדת או במילים אחרות: המורה לא רק מלמד אלא גם לומד – כל החיים!

שכר המורים

בשנת 1974 התקבל חוק אשר הבטיח כי בעלי יכולות גבוהות יבחרו במקצוע ההוראה. בחוק זה נקבע כי שכר המורים יהיה הגבוה ביותר במשק הציבורי. מקצוע ההוראה הינו בעל סטאטוס גבוה בהיררכיית המקצועות בחברה היפנית, והוא מושך אליו את בעלי היכולות הגבוהות ביותר. הביקוש להוראה יוצר עודפי מורים. מדובר באנשים בעלי ממוצע הישגים גבוה, העוברים את השלבים השונים בדרך להוראה – לימודים באוניברסיטאות, לימודי תעודת ההוראה, מבחני קבלה, שנת ההתנסות – והם נחשבים לבעלי פוטנציאל גבוה במיוחד, שכן עיקרון הם מסוגלים להשתלב בתחומים אחרים של המשק הלאומי, אך הם מעדיפים במפורש את העיסוק החינוכי.

סיכום

מערכת החינוך היפנית שואפת למצוינות אקדמית ולרמת הישגים גבוהה. בהרבה מחקרים מדגישים כי מערכת החינוך ביפן (וגם בכל מזרח-אסיה) מהווה מודל למופת לחברה המערבית. יש גם כאלה שמבקרים את השיטה הנהוגה ביפן ומבקשים לשבור כמה מהמיתוסים הפופולאריים לגבי מערכת החינוך היפנית. כך, למשל, עולה הטענה כי העובדה שהתלמידים נמצאים שעות ארוכות בבית-הספר אינה מלמדת על כך שהם לומדים כל אותן השעות הללו. שעות רבות מוקדשות לפעילויות לא אקדמיות. מצד השני יש הרואים זאת כיתרון.

בכל זאת החברה היפנית מצטיירת כאחת החברות המלומדות ביותר בעולם. הסוד של מערכת החינוך היפנית הוא ה-JUKU. כל התלמידים השואפים להגיע לאוניברסיטאות צריכים ללמוד ב-JUKU כדי להתכונן לבחינות הקבלה. רבים מההורים רושמים את ילדיהם ל-JUKU.

כבר בכיתות א או ב, וכך יוצא שילדים מתרגלים לקבל שיעורי השלמה בשעות אחר הצהריים לאחר סיום הלימודים. יש מחקרים שמצביעים על כך ש-JUKU מהווה עדות לכישלון מערכת החינוך היפנית, אשר אינה מצליחה להכין את תלמידיה לבחינות הכניסה לאוניברסיטאות, למרות שזאת מטרתם המוצהרת של בתי ספר התיכונים. יש אפילו תלמידי תיכון המוותרים על הלימודים בתיכון והולכים ללמוד באופן מלא ב-JUKU.

למעשה, JUKUs הפכו להיות מייצגי החינוך היפני. הם הראשונים ששילבו הוראה בעזרת מחשב באופן קבוע והראשונים שאפשרו אינדיבידואליזציה וקצב אישי לתלמידים. בתחום של תכנית הלימודים גם כן נחשבים ה-JUKU לחדשניים, הם מיישמים שיטות חווייתיות והתנסותיות.

המורים, כאמור, זוכים ביפן לכבוד רב ולהערכה וכך גם לכוח רב. מעמד המורה נמצא ברמה מאוד גבוה בחברה היפנית. שיטות ההוראה מאוד מגובשות וגם היחסים בין המורים לתלמידים יכולים להיות מודל לחיקוי.

חשוב לציין כי היתרון משמעותי הוא שלתלמידים היפנים יש ציפיות גדולות ורצון לדעת ואכן הם לומדים הרבה.

מערכת החינוך של יפן אינה מסתפקת בהישגים הקיימים כיום, היא שואפת להעמיק אותם תוך חשיבה אסטרטגית לאומית ולשמור על מעמדה של יפן בעולם כמדינה מובילה באמצעות העמקת ההשקעות בחינוך.

רשימת מקורות

- Isoda, M., Miyakawa, T., Stephens, M. & ,Ohara, Y. (2007). Japanese Lesson Study in Mathematics: Its Impact ,Diversity and Potential for Educational Improvement. Center for Research on International Cooperation in Educational Development, University of Tsukuba.
- Isoda, M., Ohara, Y., Miyakawa, T. (2004). The system, trend and task of mathematics education in Japan. International Educational Cooperation Symposium: Problematic and Perspective of international Cooperation in mathematics education.
- Mastrull, S. (2002). The Mathematics Education of Students in Japan: A Comparison with United States Mathematics Programs. Bristol Township School District. MIC & Training.
- Stigler, J & ,Hielbert, J. (1999).(Understanding and improving mathematics instruction: An overview of the TIMSS video study .*Phi Delta Kappan* , 14-21 ,(1)79
- Stigler, J., & Stevenson, H., (2000). *The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*. New York: free Press.
- Takahashi, A. (1999). *Characteristics of Japanese Mathematics Lessons*. DePaul University.
- Takuya B. (1998). Japanese Education and Lesson Study: An Overview. "How is Lesson Study Implemented?". Contemporary Issues in Mathematics Education. Vol. 35.
- Thomas W. J, (2000). Japan: A Different Model of Mathematics Education. Contemporary Issues in Mathematics Education. MSRI Publications.
- Yoshida, M. (2005). Using lesson study to develop effective blackboard practice. In P. Wang- Iverson & M. Yoshida, *Building our understanding of lesson study*. Philadelphia: Research for Better Schools.

צרפת

פרופ' נח דנא-פיקארד

1. מסורת ורקע תרבותי

המבנה המוכר עד היום של בית ספר תיכון צרפתי נוצר לפני כמאתיים שנה בתקופת הקיסר נפוליאון, ומכאן השם Lycée Napoléonien.

חוק חינוך החובה לא הופיע עד קרוב לסוף המאה ה-19, ובגרסתו הראשונה הוא לא כלל את הכיתות ה-Lycée, אלא רק את החינוך היסודי (Jules Ferry). בסוף בית הספר היסודי עברו התלמידים בחינה בשם תעודת סוף לימודים (Certificat de fin d'études). המבחן הזה היה עדיין קיים עד לפני כ-45 שנה, אבל בחשיבות נמוכה.

בסוף כיתה ט הייתה קיימת בחינה בשם BEPC (ראשי תיבות של Brevet d'Etudes de Premier Cycle). כמו במדינות רבות הדרישות עלו במשך השנים והבחינה אבדה הרבה מחשיבותה המקורית. הגרסה הקיימת כיום נקראת Brevet des Collèges. יש לזכור שבצרפת ה-College הוא בית ספרית ספר כללי מכיתה ו עד כיתה ט (כעין הקבלה לחט"ב שלנו). ולא מוסד להשכלה גבוהה. אין לתוצאות ה-Brevet des Collèges השפעה על זכותו של תלמיד לעבור לכיתה י.

בית הספר התיכון, ה-Lycée, מורכב משלוש הכיתות י, יא ו-יב. הוא מסתיים בבחינת בגרות הנקראת Baccalauréat (ובפי העם le bac, להלן ה"באק"). עד תחילת שנות ה-60 של המאה ה-20 היו נהוגות שתי בחינות בגרות, הבאק הראשון בסוף כיתה יא והבאק השני בסוף כיתה יב. התלמידים היו מחולקים לשלוש מגמות: מתמטיקה אלמנטרית, מדע ניסויי ופילוסופיה.

מאז השתנה המבנה. בחינה בגרות קיימת רק בסוף כיתה יב ומספר המגמות גדל מאוד. במשך כשלושים שנה היו 4 מגמות עיקריות A (פילוסופיה, ספרות, שפות, וכדומה), B (כלכלה), C (מתמטיקה-פיזיקה) ו-D (מדעים ניסויים), כל אחת מורכבת מתת מגמות בהתאם למספר השפות הזרות הנלמדות או לאלמנטים אחרים. בנוסף לכך נפתחו מגמות מקצועיות (מחשבים, חשבונאות ועוד). כיום קיימות שלוש מגמות "רגילות" (L, ES, S) ומספר רב של מגמות מקצועיות. הדוח הזה מתייחס ללימוד המתמטיקה במגמות L, ES, S בלבד.

תעודת הבגרות היא תעודת הזכאות לכניסה לאוניברסיטה, וזה מסביר חלק מן ההחלטות המתקבלות ביחס לתוכן הלימודים התיכוניים ולגישות חינוכיות. ה-Lycees

הוא לא רק מוסד לצרכים לימודיים מיידיים, אלא הוא גם מסלול עלייה לכיוון האוניברסיטה, ובדרך כלל המעבר מן ה-Lycée אל האוניברסיטה איננו נתפס כ-critical transition (על המושג הזה, ראו Yerushalmi 2005).

חוץ מן האוניברסיטאות קיימות בצרפת מספר מסגרות, ביניהם מה שנקרא "בתי הספר הגבוהים" (les Grandes Ecoles), רובם בתי ספר להנדסה (הנדסה אזרחית, high-tech, אווירונאוטיקה וחלל, מכרות, וטרינריה וכדומה), אבל גם למדעים מדויקים (מתמטיקה, פיזיקה, כימיה) ומספר גדול גם מיועד למקצועות הכלכלה. הוותיק מהם, L'Ecole Polytechnique, נוסד גם הוא על ידי Napoléon I. כדי להתקבל למוסדות אלה יש לעבור מסלול קשה. הבגרות היא תנאי הכרחי ולא מספיק להתקבל כתלמיד במכינות המיוחדות למוסדות אלה, הנקראות Classes Préparatoires aux Grandes Ecoles. תלמיד מתקבל למכינות על ידי ועדה מיוחדת, לפי תיק הלימודים שלו במשך כל התיכון, וכמובן בתנאי שיצליח בבחינת הבאק (בדרך כלל S) בציון גבוה. לאחר מכן מחכות לו שנתיים של עבודה אינטנסיבית בכיתות של כ-35 תלמידים בתוך המסגרת של ה-Lycée. לדוגמה, בשנה הראשונה של המכינות לבתי הספר להנדסה על התלמיד ללמוד 15 שעות שבועיות במתמטיקה, 10 בפיזיקה ו-8 בכימיה, שפות, אנגלית, ספרות וכדומה ובנוסף לכך מבדקים בעל פה כל שבוע ברוב המקצועות העיקריים. המעבר משנה לשנה איננו אוטומטי, אלא תלוי בהחלטת סגל המרצים. בסוף השנתיים מתקיימות תחרויות כניסה לבתי הספר הגבוהים. הצלחה במבחנים בכתב מקנה זכות להיבחן בעל פה, וייתכנו שני סיבובים של בחינות בעל פה עד ההחלטה הסופית. תלמידי ה-Grandes Ecoles נחשבים ל'שמנת' של ההשכלה הגבוהה בצרפת, ולכן הצפייה להתקבל לאחד ממוסדות אלה מלווה מספר גדול של תלמידי תיכון בצרפת ומשפיעה על המאמצים הלימודיים ועל ההחלטות שלהם, כגון באיזו מגמה לבחור.

בזמן כתיבת שורות אלו ניכר שינוי מסוים בגישה בצמרת המדינה ובמערכת החינוך בצרפת. מסיבות חינוכיות או פוליטיות הודיע נשיא צרפת בסוף מאי 2008 שהוא מתכוון לבצע רפורמה של התיכון ושל בחינת הבגרות על מנת למתן את עליונותה של המתמטיקה ככלי לסלקציה לקראת האוניברסיטה. ואמנם תלמידים רבים בוחרים ללמוד במגמה מדעית S אף על פי שאין להם כישורים מתאימים במיוחד, ואף על פי שאין זה הכיוון שהם רוצים לעתידם, רק משום שהדבר אמור לפתוח להם יותר דלתות מאשר במגמות האחרות. בעיקר מתכוון נשיא צרפת לבטל את המגמות בתיכון ולקדם מבנה מודולרי (על מבנה המגמות נביא פרוט להלן). עד כה לא פורסם שום תוכן ספציפי במקביל להצהרות אלה, ובאשר למבנה הפנימי של לימודי המתמטיקה, לא נראה לכותב דוח זה שהקביעות החינוכיות ישתנו בהרבה, והרפורמה המסתמנת עשויה להתמקד ביחסי הגומלין בין המקצועות השונים, בחשיבותם היחסית בחישובי ממוצע וכדומה.

- מתוך ראיונות לתקשורת שניתנו לאחרונה על ידי אנשי חינוך עולות הנקודות הבאות:
- הבגרות היא בחינה בת 200 שנה ויש מי שסובר שהיא לא מתאימה לעולם המודרני במבנה הנוכחי.
- צרפת היא המדינה הכמעט אחרונה המקיימת בחינת סוף לימודי תיכון.
- יש הטוענים שכיוון כי כ-85% מהנבחנים מצליחים בסופו של דבר (ואפילו 95% אחרי עוד ניסיון או שניים), אין טעם להמשיך ולהתייחס לבחינת הבגרות כסלקטור לאוניברסיטה.
- יש שמציעים לפצל את הבחינה: חלק ראשון הבודק ידיעות בסוף כיתה יא (כפי שהיה נהוג עד לפני כ-40 שנה), חלק שני הבודק "בגרות" ו"הבשלה" בסוף כיתה יב.
- יש הטוענים שכל ניסיון לרפורמה בתחום זה נכשל פעם אחר פעם בגלל התנגדותם הנחרצת של תלמידי התיכון.
- גם מדינות אירופה האחרות, רובן ככולן, עברו לבדיקה רצופה של הידע.

2. רציונל התכנית והעקרונות הפסיכולוגיים והדידקטיים

יש לפצל את הגישה לרציונל התכנית לשני מרכיבים שונים: רציונל החלוקה לפי מגמות (תת חלוקה לתכנית משותפת ולתכנית התמחות) והרציונל הפנימי של כל ענף בנפרד.

החלוקה למגמות נובעת מן הרצון להביא לתלמידים שני סוגי תכנים:

א. תכנים משותפים לכולם, דהיינו הבסיס הסביר ביותר של ידיעות מתמטיות. הדבר נובע מההבנה שכלים מתמטיים סובבים אותנו מכל עבר בכל תחומי החיים, החל מן השימושים שלנו ועד הבנתו של מידע המגיע אלינו דרך סוגי המדיה השונים.

ב. תכנים ספציפיים למגמות: הצרכים המתמטיים של העוסקים במדעי החברה שונים מן הצרכים המתמטיים של העוסקים בכלכלה, וכמובן מאלה של העוסקים במדעים מדויקים. יש לציין שהמגמה המדעית בנויה על אשכול של מתמטיקה-פיזיקה וכימיה-ביולוגיה, והתלמיד צריך לבחור התמחות באחד ממרכיבי האשכול, שיכול להיות מתמטיקה או תחום דעת אחר.

חשוב לזכור שבכל מגמה, S או ES או L, קיימת אפשרות להתמחות במתמטיקה. בכל אחת מהן ההתמחות ספציפית למגמה הלימודית העיקרית.

בכל רמה ובכל מגמה מחפשים שתי מטרות: להשיג את **הערך האפיסטמי** של הלמידה (להביא את התלמידים להבנת טובה של החומר התאורטי) יחד עם **הערך הפרגמאטי** – לשלוט על טכניקות חישוביות. כדוגמה נביא את הפתרון של משוואה ריבועית מעל מספרים ממשיים:

א. לא עובדים לפי נוסחה נתונה, אלא על בסיס השלמה לריבוע. מראים שקיימים שלושה מקרים. מסמנים בברור את הדיסקרימיננטה ב- Δ וממיינים את המקרים לפי ש- $\Delta > 0$ או $\Delta = 0$ או $\Delta < 0$.

ב. בכל מקרה מסיקים מסקנות על קיום\אי-קיום של פתרונות ממשיים.

ג. אם קיימים פתרונות ממשיים יודעים איך לחשב אותם.

ודאי לא מרשים להציב בנוסחה נתונה, ואם הביטוי בתוך השורש הריבועי הוא שלילי, יש לכתוב "חסר משמעות". בכל תחום מתמטי מחנכים לבדוק תנאי קיום לפני ביצוע פעולות (תחום קיום של פונקציה, של משוואה וכדומה, בדיקה שלא נחלק ב-0 וכדומה).

כפי שנראה בפירוט התכנית לכיתה י, מתחילים בביסוס טוב של המתמטיקה שנלמדה בחטיבת הביניים, ועם זה מתחילים לבנות בסיס סולידי של ידע מתמטי – לא במטרה להרחיב מאוד את הידע, אלא במטרה להבנות אותו היטב.

בשנתיים הבאות מתקדמים לפי מגמות הלימוד S, ES, L לכיוונים שונים, אבל בעלי עקרונות משותפים. הלמידה בנויה לפי מה ש-Kutzler מכנה "הספירלה של Buchberger" (Herget et al., 2000). הלמידה מתבצעת בתנועה עולה בצורה "סיבובית": לומדים נושא מסוים, אחרי הקניית הידע הדרוש ממשיכים הלאה. אחרי זמן מה התנועה הסיבובית מביאה את הלומד שוב לאותו נושא, אבל "קומה מעל". הדבר בולט במיוחד עבור לימוד הפונקציות, בהתחלה פונקציות פשוטות (חזקות, שורש ריבועי) בלי טיפול בגזירה, מאוחר יותר פונקציות טריגונומטריות ואחר כך פונקציות מעריכיות. בסיבוב השני הנגזרת נכנסת, וכמובן לא רק בשביל הפונקציות החדשות, אלא גם עבור הישנות (נמצאים בלולאה עליונה יותר של הספירלה, מעל הלימוד הקודם).

כמו כן מושג הגבול של פונקציה בנקודה מתחיל מגבול ב-0, מבוסס אינטואיציה, מאוחר יותר המושג מקבל הרחבה למקרים אחרים. אסימפטוטות מופיעות אחרי הלולאה השלישית. בתכנית הלימודים מלפני כ-30 שנה הגדרת הגבול בעזרת (ε, α) הייתה מופיעה בכיתה יב C (מדעים מדויקים). נראה ש המצב היום שונה.

עיקרון חשוב בתכנית הלימודים הוא למידה בסביבה ממוחשבת. המחשבון הסימבולי הוא כלי רגיל, כפי שסרגל ומחוגה היו בדורות קודמים. תורת ה-Instrumentation שפותחה על ידי החוקרים הצרפתים Artigue, Guin, Lagrange⁵, Trouche (המבוססת

5 "The use of graphical and symbolic facilities in the teaching and learning of algebra and calculus will soon be a reality. Authors who write about the introduction of these instruments often claim that new technology is able to redress the imbalance between skill-dominated conceptions of school mathematics in favour of understanding. More recently some have stressed that "experimental mathematics" traditionally the reserve of mathematical research may be incorporated into the teaching and learning of mathematics" (2000).

לדעת רבים על המחקרים של Rabardel ועל הגישה האנתרופולוגית של Chevallard מתארת יפה את מה שמתרחש בתכנית הלימודים. התלמידים עוברים תהליך אקטיבי של הקניית מיומנויות ממוחשבות והכלי הטכנולוגי הופך כעין פרותזה (כלשונו של Trouche, בעקבות Debray). כמובן שלא מדובר בשימוש בכלי הטכנולוגי כשלעצמו, אלא משתמשים בו כדי לשפר וכדי לפתח את הערך האפיסטמי של הלמידה.

כדי לסיים את הניתוח החלקי הנ"ל, חשוב לציין שחלוקה למגמות, מטרתה אינה למיין את התלמידים לפי יכולות בלבד. בכל מגמה בחרו את הנושאים, את רמת ההצגה והלמידה ואת הגישה הספציפית בהתאם לצרכים המתמטיים בתחומים המהווים את מרכז התעניינותם של התלמידים, כפי שהדבר בא לידי ביטוי בתיאור המפורט של תכניות הלימודים. המתמטיקה משמשת כאלמנט מחויב המציאות בתכנית, ולא כעוד מקצוע שחייבים ללמוד כדי להגיע לתעודת בגרות.

3. מטרות העל של התכנית

מטרות העל של התכנית אינן ממוקדות בהישגים, אלא בידיעות, ביכולות (capacités) ובמיומנויות. הדגש הוא על הנקודות הבאות:

- **הערך האפיסטמי של הלימוד:**
 - להעמיק הבנה של המושגים.
 - לרכוש מיומנות תוך שימוש בידע קודם.
 - לגלות את החשיבות של ההוכחות ושל ניסוחן הנכון (הבנה של המבנה הגלובלי, הבנה של כל שלב בנפרד).
- **הערך הפרגמטי של הלימוד:**
 - לעורר את עניין התלמידים בחומר הנלמד.
 - להביא את התלמידים להבנת הרלבנטיות של החומר לתחומים שונים בחיים.
 - לגלות יישומים "בחיים האמיתיים", בהתאם לנושאים המרכזיים המעניינים את התלמידים ובהתאם למגמות.

לאור הדברים האלה, קיימת הקפדה על בהירות הדיבור והכתיבה (מצד המורה ומצד התלמיד) ועל דיוק ההבעה והניסוחים הן מבחינת השליטה בשפה הצרפתית והן באיכות ההבעה המתמטית. במיוחד מקפידים על מעבר מטיוטה לכתיבה "נקייה" (au propre). לאיכות הכתיבה וההצגה יש השלכה על ציוני העבודות. עבודה לא נקייה זוכה לציון נמוך יותר.

4. מבנה התכנית

חטיבת הביניים = ו – ט

תכנית אחידה לכל התלמידים
חינוך חובה

תיכון = י – יב

בכיתה י התכנית משותפת לכולם וכוללת אשכול מקצועות: מתמטיקה, פיזיקה וכימיה, לשון, שתי שפות זרות לפחות, היסטוריה וגיאוגרפיה, התעמלות וכדומה. בכיתות יא – יב התכנית בנויה לפי מגמות, לכל מגמה אשכול משלה בהתאם לאוכלוסיית היעד:

ES = כלכלה וחברה

L = ספרות ושפות (הומאנית)

S = מדעים

התכנית לכל כיתה ולכל מגמה כוללת את המרכיבים הבאים: רציונל (מפותח מאוד); נושאים ותתי נושאים (ממוינים לפי חובה/בחירה); תיאור היעדים והאמצעים; הערות-הארות על דרכי ההוראה ועל רמות ההפשטה וההוכחה הנדרשות.

תוכן החינוך המתמטי מותאם למגמה: דוגמאות מן השטח, הכנה לשימושי המתמטיקה בתחומים הספציפיים וכדומה.

מאפיין חשוב של תכנית התיכון הוא כדלהלן: בכל מגמה קיימת תכנית ליבה משותפת לכל תלמידי המגמה הזאת. מעבר לכך, התלמיד בוחר לעצמו התמחות. יש לדבר השלכה על המשקל של כל מרכיב בציון הסופי של הבגרות.

לדוגמה, האשכול המרכזי במגמה S (מדעים) הוא מתמטיקה, פיזיקה וכימיה, ביולוגיה. הציון בבגרות בכל אחד מן המקצועות האלה נושא "מקדם מכפיל" השווה ל-7. כאשר תלמיד בוחר במקצוע מסוים להתמחות הוא לומד נושאים נוספים בתחום הדעת הזה, והמקדם המכפיל מוגדל ל-9 במקצוע זה (ראו בסעיף הדין בבחינת הבגרות).

5. התוכן והמטרות האופרטיביות של התכנית

כיתה י

א. לוח זמנים: 3 שעות בכיתה מלאה; שעה אחת בקבוצות קטנות.

ב. מאפיינים:

כיתה י היא האחרונה השייכת ל"תכנית האחידה" אשר נהוגה לאורך כל חטיבת הביניים (ו-ט) והיא מהווה כיתת מיון.

היעד העיקרי הוא ליצור מסד נתונים המיועד לניצול בשנתיים הבאות, זאת לצד עיסוק במספר מצומצם של נושאים מסביב לתכנית החובה על מנת לתת מענה לסקרנות

התלמידים, לענות לשאלותיהם ולאפשר את המיון. מכאן מספר קטן של ציפיות לידע ולמיומנות ושימוש בונה של המחשוב.

התכנית מעודדת את הלומדים לעסוק באיתור ריבוי של נקודות מבט ובהשלמתן הדדית (גרפית, נומרית, אלגברית, גיאומטרית), בהדגשת חשיבותם של תהליכים ניסויים: "לחפש, למצוא תוצאות חלקיות, לשאול שאלות, להסביר בעל פה את התהליך, לכתוב טיוטה ואחר כך לנסח בצורה נקייה, להגיע לתענוג הגילוי ולתענוג ההבנה..."

התכנית דורשת לא לצמצם את ההוראה לניסוח הגדרות ותכונות מוסכמות המלוות בתרגילים רבים, חוזרים ונשנים.

התכנית עוסקת בחשיבות ההוכחה ומכוונת לעבוד על כללי לוגיקה (וגם, או, גרירה – על בסיס השנים הקודמות, בלי שיעור פרונטאלי; בכיתה י מגלים את אס"ם), לפתח סברה, לדייק בהגדרות ויותר מכל לעודד הבנה של המושגים.

מכל הנאמר לעיל נובעת חשיבות הגיוון בפעילויות ובמיוחד חשיבות עבודות בית בכתב.

ג. עבודה עצמית – מעקב

משימות מגוונות: ניסוח פתרונות שתחילת עיבודם הייתה בכיתה, מחקר משותף (או לא משותף) על בעיה חדשה, בניית סרטוטים, ניתוח טקסט מתמטי וכדומה. שיעורי בית: תדירות סבירה ועבודה הפרושה לאורך הרבעון, תוך ויסות הכמות והרמה.

שניים או שלושה מבדקים מעמיקים ברבעון. כל אחד יכול יותר ממרכיב אחד מתכנית הלימודים. הדבר יעזור לתלמיד להבין מה מקומו ולמה הוא יכול לשאוף לקראת כיתות יא – יב (למגמה מתמטית או למגמה אחרת).

על התלמיד ללמוד לנסח פתרון, לנסח הוכחה, לנסח חלק של הוכחה, לתאר בצורה ברורה שבילים היכולים להביא לפתרון וכדומה.

שימוש מבוקר בכתיבה סימבולית: $\in, \subset, \cup, \cap, \emptyset, \dots$. הכמתים $\forall, \exists$ לא בתכנית. הסימן $\sum$ יוכנס בסטטיסטיקה (ממוצעים).

ד. נושאי לימוד נוספים

בכל פרק (סטטיסטיקה, גיאומטריה, פונקציות) יש לבחור נושאים נוספים לפי נקודות עניין של התלמידים ובהתאם לשאיפותיהם לעתיד.

היעד: פיתוח מיומנות להשתמש במסמכים מתמטיים; העשרה; שליטה מחדש על נושאים שנלמדו בעבר ופיתוחם; עידוד לסקרנות וכדומה.

ה. מקום המחשוב (ICT)

קיימת הכוונה לשימוש במחשבון או במחשב. הכלי מאפשר הרחבת אופקים והגדלת מיומנות אופרטיבית, למשל ביצוע תהליכים ניסויים מרובים בשדות מספרים או בגיאומטריה (דו-ממדית ותלת-ממדית).

סביבה ממוחשבת מאפשרת לתלמיד יותר השקעה עצמית, יחס יותר אישי לבעיה המתמטית.

היא מאפשרת לחקור שאלה מתמטית ביותר מזווית ראייה אחת. הדבר תורם ליכולת ההפשטה המאפיינת את המתמטיקה;

הכלי הממוחשב תורם הרבה להבנת המושג של פונקציה (על הקונפליקט בין "תבנית" לבין "פונקציה" (לעיון: Cuoco, 2002). אפשר לסרטט מספר גרפים בחלונות שונים, לדון ולהסיק מסקנות;

תוכנות של גיאומטריה דינמית מחייבות דיוק גדול בשרטוט; חשוב שלכל תלמיד יהיה מחשבון משלו, ושהמורה יעמיד לרשות כל אחד ואחד את התוכנה הגיאומטרית (אפשרי מחשב אחד ל-2 תלמידים).

הערה חשובה: לא לשכוח את המטרה המתמטית, לראות את הפעילות בראייה מתמטית, לא להיסחף ליותר מידי פעולות טכניות (לעיון: Trouche 2001).

1. על הפרקים

סטטיסטיקה

מיקוד על:

חשיבה המובילה לתיאור נומרי של משתנה סטטיסטי כמותי
סימולציות בעזרת היוצר הרנדומאלי של המחשבון

המורה יעבוד עם מספר גדול דיו כדי להצדיק עבודה סטטיסטית. התלמיד יכין מחברת סטטיסטיקה אשר תהווה בסיס לעבודות בכיתות יא ויב (שם יעבדו על פי הזוג תוחלת-סטיית תקן).

מספרים (חישובים) ופונקציות

הנושאים מקובצים תחת כותרת אחת, ולכן יש לעודד את המורה לבנות פעילויות עם אינטראקציה של המרכיבים השונים. חישוב נומרי או סימבולי, ניתוח סרטוטים, פתרון גרפי של משוואות, שימוש בפונקציות כדי להוכיח אי-שוויונים ויכדומה.

אין סעיף המוקדש לחישוב אלגברי: יש למצוא את מקומו בכל מקום, בכל נושאי הלימוד.

נושאים

מספרים: טבע המספרים וכתובתם, הצגת מספרים במחשבון, סדר גודל וכתובה מדעית, חישוב ידני וחישוב ממוחשב (קדימות, סוגריים, השוואת התוצאות בשתי הדרכים וכדומה) וזה על מנת לפתח שימוש מושכל ומבוקר בכלים טכנולוגיים. אינטגרציית הכלי הטכנולוגי צריכה להיות אמיתית. יש לשים לב לכך שבמערך מדויק תמיד אפשר לחשב ערך מקורב, אבל ההיפך איננו נכון. מספרים ראשוניים (פירוק של

מספר טבעי לגורמים ראשוניים, בלי הוכחת משפט קיום ויחידות), סדר המספרים (ממשיים), ערך מוחלט.

פונקציות: המושג, ניתוח איכותי (בדרך כלל בקשר למצב קונקרטי כגון מצב גיאומטרי שבו משתנה אחד הוא אורך של קטע מסוים ומשתנה אחר הוא שטח, ואז הבעיה יכולה להיות בעיית מקסימום או מינימום).

אם הפונקציה מוגדרת על ידי עקומה במישור, חשוב להביא את התלמידים להבנה של המידע הנתון על ידי העקומה הזאת (אוריינות).

בעזרת כל הדוגמאות התלמיד יגיע להפנמת המושג של תחום קיום של פונקציה. שימוש בסימון $f(x)$ שבו משמעות הסוגריים שונה מזאת בחישוב אלגברי. הסימון f קשה יותר להבנה והפנמתו תתפרס על פני השנים הבאות גם כן. פונקציות ונוסחאות אלגבריות.

תרגום בעיה על ידי משוואה, פתרון אלגברי ופתרון גרפי של משוואה ושל אי-שוויון (מעלה 1 ומעלה 2).

גיאומטריה

העקרונות של תכנית הלימודים:

- לאפשר די זמן לניתוח ולמחקר אמיתי;
- להסתמך על מושגים מוכרים היטב על מנת להתקדם בידע הגיאומטרי.

הנושאים:

גיאומטריה במרחב תלת-מימדי: בניית סרטוט של גוף הנדסי קיים, ולהיפך: בניית גוף הנדסי על סמך סרטוט, מצב הדדי של ישרים ומישורים במרחב, חתכים של גופים הנדסיים באמצעות מישורים. חישובי אורך, חישובי שטח וחישובי נפח. אורתוגונאליות.

[תכניות הלימודים של הכיתות הבאות מסתמכות על הידע הנרכש כאן].

קונפיגורציות במישור: התכנית מסתמכת על מה שנלמד כבר (קונפיגורציות וטרנספורמציות) שנלמדו בחטיבת הביניים. יש להמשיך במאמץ להבדיל בין תוצאה נצפית לבין תוצאה מוכחת. תוכן: גיאומטריה המשולש (הגדרות שונות של מושגי החפיפה והדמיון בצורה אינטואיטיבית ובעזרת טרנספורמציות. הטבלה בהמשך מדגימה את ההתייחסות לנושאי תכנית הלימודים.

תכנים	יכולות צפויות	הארות/הערות
פונקציות ראשוניות (reference)	לקבוע את מגמת הפונקציה (עליה או ירידה) והצגה גרפית של הפונקציות $x \mapsto x^2, x \mapsto \frac{1}{x}$	ניתן לגלות פונקציות אחרות כגון $x \mapsto \sqrt{x}, x \mapsto x^3, x \mapsto x , \dots$ באמצעות בעיות. אפשר לקבל התוצאות אודותיהן בלי הוכחות. יש להתבונן במיקום ההדדי של העקומות שהתגלו ולקבל את הכללים המוסכמים.
פונקציות לינאריות ופונקציות אפיניות (קוויות)	להכיר את ההצגה הגרפית של $x \mapsto \sin x, x \mapsto \cos x$ לאפיין את הפונקציות הקוויות בעזרת העובדה שגדילת הפונקציה היא פרופורציונאלית לגדילת המשתנה	ההגדרות של $\cos x$ ו- $\sin x$ עבור מספר ממשי x כלשהו תתקבלנה כש"מסובבים" את R מסביב למעגל הטריגונומטרי. ייווצר קשר עם סינוס וקוסינוס של $30^\circ, 45^\circ$ ו- 60° . דוגמאות של חוסר לינאריות. המורה יראה שפונקצית העלאה לריבוע, פונקצית ההופכי וכדומה אינן לינאריות.
תרגום בעיה למשוואות. פתרון אלגברי ופתרון גרפי של משוואות ושל אי-שוויונים	לפתור משוואות ואי-שוויונים ה"מוחזרות" למעלה ראשונה ; להשתמש בטבלת סימנים כדי לפתור אי-שוויון או לקבוע את סימן של פונקציה לפתור בצורה גרפית אי-שוויונים מהצורת הבאות: $f(x) = k, f(x) < k, f(x) = g(x), f(x) < g(x), \dots$	עבור אותה בעיה יצורפו דרכי הפתרון האלגברי והגרפי. יחקרו את העדיפות של שיטה אחת על חברתה ואת גבולות השימוש בכל אחת. אפשר להשתמש בגרפי הפונקציות הבסיסיות (reference) ובמיקומם ההדדי. המורה רשאי לתת דוגמה אחת או שתיים למשוואה שלא יודעים לפתור בצורה אלגברית, ואז יחפשו פתרונות מקורבים.

ז. דוגמאות בודדות של נושאים להעשרה

- סטטיסטיקה:
 - סימולציה של משחק "עץ או פלי", התפלגות התוצאות במשחקים עם כללים שונים. הדגמה ממשית עם מטבעות, על מנת להמחיש משמעותה של סימולציה;
 - סימולציה של טיול רנדומאלי על גופים במרחב או על מצולעים.
- חשבון ופונקציות:
 - מחשבוני ומספרים גדולים;
 - בעיות היסטוריות על מספרים, אי-רציונאליות של $\sqrt{2}$, נפת ארסטותנס, וכדומה.
 - בנייה ואפיון של סכום, של מכפלה של שתי פונקציות הניתנות באמצעות הצגות גרפיות;
 - התאמת פונקציות לנתונים נומריים הנובעים מניסוי מדעי (פיזיקה, כימיה וכדומה) בעזרת כלי ממוחשב.
- גיאומטריה:
 - דוגמאות להוכחות של משפטים קלאסיים בעזרת חישובי שטחים (משפט פיתגורס, משפט תלס וכדומה);
 - ריצוף המישור;
 - שיחזור עצם מתוך שלושה סרטוטים מנקודות מבט שונות.
 - דוגמאות של שריגים במישור ובמרחב (למשל גבישים).

כיתה יא

שלוש מגמות בכיתות יא ויב: כלכלה וחברה (ES), ספרות (L) ומדעים (S).

מגמת ES

יעדים

- המדע הוא אמצעי יעיל להפוך את העולם מסביב ניתן להבנה ולחיזוי חלקי. על המוסד החינוכי לגרום לכך שהכלי הזה יהיה בהישג ידם של כל התלמידים, במיוחד של תלמידי ES. לכן חובה לתת חינוך מתמטי סולידי, בעיקר בשל ההתקדמות הטכנולוגית, ובנוסף לכך להביא את התלמידים להכליל את המתמטיקה בתוך דפוסי חשיבה שלהם. זוהי משימה ארוכת טווח בכיתות יא ויב.
- מכאן נגזרים היעדים הבאים:
- לתרגל קריאה אקטיבית של מידע, ביקורתו ועיבודו; בעדיפות לשיטות המביאות להשתמש בעיבוד גרפי, נומרי ואלגברי.
 - לחנך את התלמידים למהלך מדעי גלובלי, המערב צפייה, דמיון, כושר לשאול שאלות, סינתזה, שימוש בלוגיקה, ארגומנטציה והוכחה מתמטית;

- לעודד עבודה עצמית של התלמידים ולאפשר להם לרצות להתמודד עם בעיות פתוחות (מתמטיות או אחרות), זאת בלי לסלול להם מראש את הדרך לפתרון ;
- לנצל את החיבורים בין המתמטיקה ובין המקצועות האחרים.

מתמטיקה ומחשבים בכיתות יא ויב ES :

שימוש בכלי ממוחשב דורש יכולות מתמטיות והכלי הממוחשב תורם לפיתוח היכולות האלה. לכן תכונות הלימודים דורשת שהקשר הזה יעובד בכל הרמות, לא כדי להפוך למומחה בשימוש בתוכנה מסוימת, אלא כדי להיות מסוגל להבין מהן השאלות שאפשר לפתור בעזרת תוכנה ואיך לנתח את התשובות המתקבלות ממנה, כלומר ללמוד לעשות אינטגרציה של הכלי הממוחשב בתוך מהלך מדעי. המחשוב מאפשר השוואת מודלים שונים, חישוב אפקטיבי של פתרונות לבעיות שאינן ניתנות לתיאור באמצעות משוואות, פיתוח סימולציות. השינוי (בלימודים ובעבודה בחברות) יתבצע לאט, אבל צריך להתחיל בו כבר עכשיו. יש צורך לנסות ולבדוק אסטרטגיות.

ארגון עבודת התלמידים

כיתה יא : תכנית חובה 2.5 ש"ש + 0.5 ש"ש בקבוצות

תכנית חובה - נושא לפי בחירה (au choix) 2 ש"ש

כיתה יב : תכנית חובה 4 ש"ש

התמחות (spécialité) 2 ש"ש

למורה ניתן חופש מוחלט בארגון העבודה ובחלוקת הזמנים במסגרת הטבלאות, והוא דואג לאיזון בין המרכיבים (עבודה על תרגילים, על בעיות, פיתוח הוכחות, שיעור פרונטאלי, סינתזה וכדומה). בהקשר הזה מייחסים חשיבות גדולה לעבודה מחוץ לשעות השיעורים, בבית או בבית הספר. התכנית מאפשרת :

- פתרון תרגילים המבססים את הידע החדש ומאפשרים הערכה עצמית של היכולות ;
- תרגול אינדיבידואלי לניסוח פתרונות והוכחות ;
- מבדקים לא רבים ובהם יישום ישיר של החומר הנלמד בשיעורים + בעיות סינתזה המורכבות משאלות המתחברות אחת לחברתה ובעלות דרגות קושי הדרגתיות ;
- עבודות עצמיות בליווי הכוללות מצבים מורכבים יותר ועבודה ארוכת טווח.

תכנית הלימודים – חלק החובה

עיבוד נתונים והסתברות

סטטיסטיקה אינה אופנה חולפת, אלא הפצת תרבות ודרכי חשיבה המתאפשרת הודות להתקדמות בו-זמנית של המתמטיקה ושל הטכנולוגיה.

קיימת התייחסות לצרכים הסטטיסטיים של התחומים הספציפיים ל-ES. למשל חשיבות הסדר הכרונולוגי (לא נפוץ בכיתה יי); שימוש בסוגי דיאגרמות מתאימים (דיאגרמות בקופסאות = diagrammes en boîte) בנוסף לשאר סוגי הדיאגרמות; התייחסות לשני מדדי פיזור: סטיית תקן ומרחק בין רבעונים; לא מלמדים איסוף נתונים (שונה מתחום לתחום).

הסתברות

הכנסה של מושגים פשוטים ובסיסיים, זאת על מנת להסביר עובדות פשוטות הנובעות מצפייה;

השימוש בסימולציה מאפשר צפייה בתופעות מגוונות, מעשיר את ניסיון התלמידים מול תופעות אקראיות ומעודד הופעה של חשיבה סטטיסטית.

הכלי הטבעי לכך הוא המחשב. בנוסף לכך, התלמידים צריכים לדעת להפעיל את המחשבון שלהם לשם סדרות סטטיסטיות פשוטות.

תכנים	דרכי הפעלה	הארות/הערות
הגדרת חוק הסתברות על קבוצה סופית. הסתברות של מאורע, של איחוד ושל חיתוך של מאורעות. מודליזציה של ניסויים בסיסיים (reference) המביאים למצבים שווה-הסתברותיים. שימוש במודלים הנובעים מן הניסויים שנצפים.	יש להאיר את הקשר בין חוקי הסתברות והתפלגות תדירויות באמצעות ניסוח פשוט של חוק המספרים הגדולים. יש לבצע בו-זמנית סימולציה ומחקר תאורטי של סכום המספרים על שתי קוביות משחק (קשור לסעיף קודם).	ניסוח פשוט של חוק המספרים הגדולים יכול להיות כדלהלן: עבור ניסוי נתון, במודל המוגדר על ידי פונקציית הסתברות P, ההתפלגות של התדירויות של סדרות בגודל n מתקרבות ל-P כאשר n נהיה גדול מאוד. יצוין כי סימולציה של ניסוי מהווה סימולציה של מודל אחד של הניסוי. אפשר לא להצטמצם לחקירה של סיטואציה אחת בלבד ולהתבונן בסיטואציות אחרות (מכפלת המספרים על שתי קוביות, על שלוש קוביות וכדומה). אפשר לסמן את הבעייתיות של מודל מסוים, אבל בלי להתעכב יותר מידי. ישתמשו באופן ישיר במודלים שהתאפשרו על ידי העבודה הסטטיסטית.

אלגברה ואנליזה

ממשיכים ברוח כיתה י: להשתמש בעיבוד גרפי, נומרי ואלגברי ולפתחם בו-זמנית.

חלק האלגברה מיועד לשמר ולהרחיב את הידע שנרכש בכיתה י על פתרון משוואות ואי-שוויונים. יש ללמד את החלק הזה של תכנית הלימודים מוקדם בשנה כדי שיהווה בסיס להכנסת מושגים של חשבון המטריצות השייך לחלק האופציונאלי. אחר כך יש להרגיל את התלמידים לעיון בתופעות איטרטיביות פשוטות.

חלק האנליזה מרחיב את אוסף הפונקציות אשר התלמידים יודעים לבצע עליהן מניפולציות, דבר שיפתח דרך ללימוד תכונות חדשות. פעולות על הפונקציות תתבצעה דרך דוגמאות, בלי תיאור כללי. כך גם לגבי חקירת הווריאציות של הפונקציות האלמנטאריות. חשוב לא להפסיד תכונות בולטות ולא להיכנס לקשיים מיותרים.

מושג הנגזרת מרכזי בכיתה יא. יש להסתפק בגישה אינטואיטיבית של גבול פונקציה בנקודה אחת. גבולות באינסוף או גבולות אינסופיים - יש להגיע אליהם בגישה גרפית ובצורה אינטואיטיבית.

תכנים	דרכי הפעלה	הארות/הערות
גישה קינמטית או גרפית של מושג הנגזרת של פונקציה בנקודה אחת. נגזרת של פונקציה בנקודה: הגדרה כגבול של $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ כאשר h שואף ל-0. פונקציה נגזרת. משיק לגרף של פונקציה גזירה f. פונקציה נגזרת של סכום, של מכפלה, של מנה, של $x \mapsto x^n$, של $x \mapsto \sqrt{x}$. הקשר בין הנגזרת ובין מונוטוניות הפונקציה.	מספר מהלכים אפשריים: מעבר ממהירות ממוצעת למהירות רגעית עבור תנועות על קו ישר המקיימים חוקים אלמנטאריים (בהתחלה טרינום ריבועי; הגדלות (zoom) עוקבות על הצגה גרפית של פונקציה על צג מחשבון גרפי); קישור בין עלות שולית לבין נגזרת בנקודה אחת.	לא תינתן הגדרה פורמאלית של מושג הגבול. אוצר המילים והסימון הקשורים למושג הגבול יכנסו אגב העבודה הזאת על הנגזרת. יסתפקו בעבודה על דוגמאות ובשימוש אינטואיטיבי. שום פיתוח אחר לא מבוקש בנושא זה.

יישום לחישוב אחוזים.	באמצעות דוגמאות אחדות יחקרו את הווריאציות של פונקציות ממעלה 2 או 3, של פונקציות הומו גרפיות או של פונקציות רציונאליות פשוטות. יראו שעבור מספר x קטן, n העלאות מחירים של $x\%$ כמעט שקולות להעלאה של $nx\%$. אילוסטרציה של התוצאה הזאת תינתן באמצעות ההצגה הגרפית של הפונקציה $x \mapsto (1+x)^n$ עבור $x = 2,3$ ושל המשיק שלה עבור $x = 0$.	יצדיקו שלנגזרת של פונקציה מונוטונית על קטע יש סימן קבוע, ויקבלו את ההיפך.
-----------------------------	---	--

תכנית הלימודים בכיתה יא ES – חלק החובה לפי בחירה

היעד: הרחבת הידיעות של התלמידים בשביל המשך הלימודים.

פרק באנליזה

פונקציות אפיניות למקוטעים באמצעות דוגמאות פשוטות של אינטרפולציה ליניארית.

הנדסת המרחב

חישובים וקטוריים, קואורדינטות, מרחק בין שתי נקודות, וכדומה.

הצגה קרטזית של מישור, של ישר.

חשבון מטריביאלי. וקטור-שורה, וקטור עמודה, מטריצות, פעולות אלגבריות על מטריצות. שימוש במטריצות כדי לפתור בעיות הבאות לידי ביטוי באמצעות מערכת משוואות לינאריות.

הערות: הדטרמיננטות הן מחוץ לתכנית הלימודים. יחפשו את המטריצה ההופכית של מטריצה נתונה (מסדר 2 בלבד) באמצעות חישובים "ידניים". ליתר החישובים יעבדו בממדים נמוכים (2,3,4 ותו לא). יבדקו את הפירוש הגיאומטרי של מערכות משוואות לינאריות ב-3 נעלמים.

מגמת L

היעדים של תכנית הלימודים במתמטיקה – מחשבים

תכנית הלימודים ממוקדת במתמטיקה הנראית לעין בחיים היום-יומיים: עיבוד האינפורמציה המתקבלת.

כשמה כן היא : התכנית משלבת את הגיליון האלקטרוני בצורה סיסטמטית. היעדים של יא : לחזק את הידע הבסיסי של התלמידים על מנת לאפשר להם : להציג, לפרש, לסכם נתונים שאספו בעצמם ; לבקר באופן בונה את ההצגות, את הפירושים וכדומה הניתנים על ידי מערכות המדיה.

תכנית הלימודים – חלק החובה

מידע כמותי

אחוזים, גיליון אלקטרוני, הצגות גרפיות (ישרים, עקומות), פתרון גרפי של משוואות ואי-שוויונים, עקומות גובה וכדומה. דיאגרמות, עצים.

סטטיסטיקה

דיאגרמות שונות, מרחק בין ריבונים, שונות וסטיית התקן, טבלאות.

דוגמאות של סוגי גדילה

סדרות חשבוניות, סדרות הנדסיות, גדילה מעריכית, דוגמאות נוספות.

פעילויות פיתוח

צורות גיאומטריות המתקבלות בתהליך איטרטיבי (עקומת Von Koch). אנליזה וביצוע של ריצופים במישור.

תכנית הלימודים בכיתה יא L – חלק החובה לפי בחירה

הרציונל : תלמידי המגמה ההומאנית מתעתדים ללמוד במסלולים שונים, כמו מדעי הרוח, מדעי החברה, הוראה וכדומה (החלוקה שונה מזאת בארץ). לכל מסלול דרישות מתמטיות משלו.

ארבעה ממדים נלקחו בחשבון :

ממד אישי : להכיר את כללי החשיבה הדדוקטיבית, כלומר להבדיל בין זה לבין צורות אחרות של חשיבה, לאתר את הבעיות הפנימיות של הארגומנטים.

ממד חברתי : החיים במדינה מפותחת שיש בה סביבה טכנולוגית מחייבת שהיחיד ידע לקרוא ולנתח את המידע המגיע אליו.

ממד מקצועי : התחומים המתמטיים השוני תופסים יותר ויותר מקום בכל מקצוע, כולל המקצועות השייכים לתחום ההומני.

ממד תרבותי : לתת למתמטיקה את מקומה הראוי בתרבות הכלל אנושית.

שלושה סוגי תכנים בסיסיים

התחום הנומרי

המשך חקירת מושג המספר, המשך פיתוח מושגים וכלים לחקירת פונקציות ומושגים וכלים הנחוצים למודליזציה, בסיסי ספירה, פירוק לגורמים ראשוניים.

תכנית האריתמטיקה מיועדת להקנות ידע מבוסס היטב על מספרים שלמים ולעמת צורות שונות של חשיבה בתקווה שיהיו בשימוש בתחומים אחרים של דעת, כגון פילוסופיה, מדעי החברה וכדומה.

דבר זה מאפשר חזרה חשיבתית על הכללים שבבסיס הטכניקות היישומיות. כל פעם שיתאפשר, האלגוריתמים יהיו מתוכנתים בגיליון אלקטרוני ובמחשבון.

אנליזה

הרחבת מלאי הפונקציות, העלאה לחזקה השלישית, שורש ריבועי, טרנספורמציות אלגבריות פשוטות (חיבור, כפל, חילוק), שמירה על הסדר באמצעות העלאה לחזקה השלישית ובאמצעות השורש הריבועי; מושג הנגזרת, הסתכלות מקומית והסתכלות גלובלית.

סטטיסטיקה והסתברות

מושגי יסוד על מרחב סופי, איחוד וחיתוך של מאורעות, מצב שווה הסתברותי.

המרחב (גיאומטריה)

טיפול בשאלת ההצגה הגיאומטרית לפי יעדים טכניים, אומנותיים וכדומה מביא להעשרת הידע הגיאומטרי במישור ובמרחב. שני תחומים טרנסברסליים: לוגיקה ואלגוריתמיקה

אריתמטיקה היא התחום המועדף כדי לעבד לוגיקה, חשיבה וכדומה כשמתבססים על הידע הקודם על מספרים. "למצוא מספרים שלמים כך ש-...", "למצוא את כל המספרים השלמים כך ש-...", מביא להשערות, למציאת כללים. להבדיל בין תנאי מספיק לתנאי הכרחי, להבין את הקשרים או ו- וגם ולהבדיל בינם לבין מקביליהם בשפה היום-יומית, לנסח שלילה של משפט, להשתמש בהוכחה על דרך השלילה ובדוגמה נגדית.

התחומים האחרים משתתפים גם הם בבניית החשיבה הלוגית.

לגבי אלגוריתמיקה, היעדים הם:

למשוך את תשומת לבם של התלמידים להבדל בין פתרון מופשט של בעיה לבין רצף הפעולות המביאות לתשובה;

להעלות את שאלת היעילות של השימוש באלגוריתמים.

מצפים מהתלמידים שידעו:

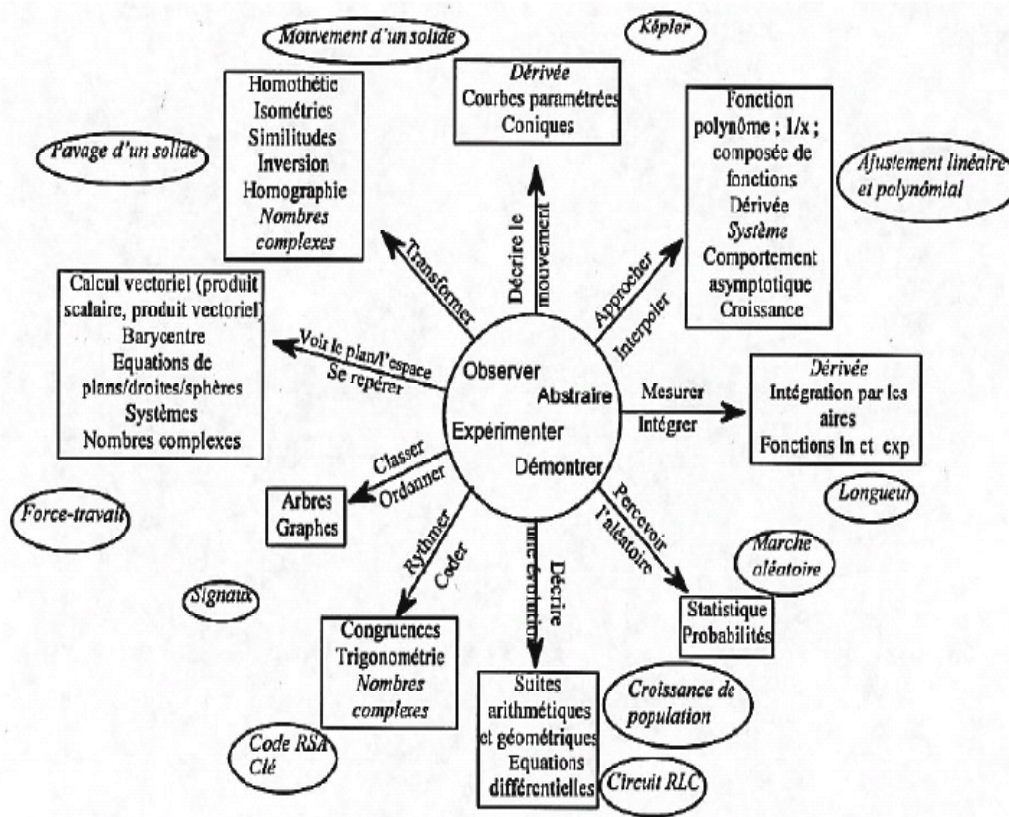
לתאר אלגוריתמים בצרפתית;

לבצע מספר אלגוריתמים באמצעות גיליון אלקטרוני או מחשבון (דבר שיאפשר בקרה);

לנתח ולפרש אלגוריתמים מסובכים יותר.

מגמת S

במגמה הזאת כיתות יא ויב נחשבות כחטיבה אחת ומשרד החינוך הצרפתי פרסם הנחיות כלליות עבור החטיבה הזאת במסמך אחד (ראו תרשים 1). בבחינת הבגרות המתקיימת בסוף כיתה יב יכולים להופיע מושגים וטכניקות שנלמדו ב-יא. לא קיימת הבחנה בין יחידות ובין בחינות (כל בחינות הבגרות בכל המקצועות מתקיימת בסוף יב).



תרשים 1. ההנחיות הכלליות עבור כיתות יא-יב

להלן תיאור התרשים:

פעולות שונות מסומנות על החיצים. המשמעות היא פעולות בתחום מתמטי. המסגרות המלבניות מכילות נושאים המהווים חובה בכל תכנית לימודים אפשרית. יחד עם זאת, ברור שאין אפשרות להכליל את כל הנושאים האלה בתכנית אחת, ללא קשר למספר השעות המוקדשות למתמטיקה בבית הספר התיכון. לכן חייבים לבחור ביניהם, ובעתיד הבחירה יכולה להיות שונה.

האליפסות מכילות נושאי לימוד וחקירה נוספים, כעין לזויינים לתכנית העיקרית. חלקם מתקשרים עם תחומי דעת אחרים שבהם בנויים תיאוריות על בסיס מתודות מתמטיות. הנושאים האלה צריכים להיות עשירים דיים כדי שהתלמיד יוכל להתייחס לבעיות מודרניות.

הגרעין המרכזי (מסומן במעגל) מציג את ארבעת המרכיבים העיקריים של כל פעילות מתמטית: צפייה, הפשטה, ניסוי והוכחה. בין המרכיבים האלה קיימים יחסים דיאלקטיים, כל אחד יכול להשתמש באחד אחר או להסתמך על אחד אחר.

הצפייה היא תהליך דינמי בלתי פוסק, מביאה לשאלות ומאירה את מקור הבעיות המתמטיות. צפייה ממלאת את תפקידה רק כאשר היא מלווה ברקע תאורטי חזק. היא דורשת ניסיון ותורמת לבניית ניסיון גדול יותר.

ההפשטה היא לב הפעילות המתמטית. היא יכולה להתבצע במספר רמות שונות, והתלמידים יתנסו בעוצמה וביכולות של כל רמה חדשה. בכל רמה התלמידים מגלים עולם חדש, וחשוב שייהנו מן הגילוי. תכנית הלימודים לא קובעת טכניקות מעבר מרמה לרמה והמורה יבחר את תהליכי ההפשטה שמתאימים לתלמידיו. התכנית הנוכחית מושתתת על אסטרטגיה חינוכית המובילה מבנייה של אובייקטים שכליים לפיתוח מושגים מתמטיים (לעיון: תורת Vinner ו-Tall על concept-image ו-concept-definition).

בכל תחום של פעילות מתמטית קיים הניסוי. הניסוי מאפשר לטפל בבעיות קשות כדי למצוא פתרון ישיר. הוא מאפשר למצוא דוגמאות נגדיות, להבין מתי תוצאות במקרים פרטיים ניתנות להכללה ומתי לא ולנסח השערות במקרים דומים.

ההוכחה היא מרכיב מרכזי של כל פעילות מתמטית והתלמידים צריכים להגיע להבנת העובדה הזאת. להביא את התלמידים להבנה גלובלית של הוכחות ולהבנת השלבים שלהן היתה ונשארה אחת המטרות של תכנית הלימודים בצרפת. רמת הדיוק הדרוש בהוכחות תלויה בתחום המתמטי הספציפי: גיאומטריה נלמדת מבית הספר היסודי, לכן אפשר לצפות לרמה אקדמית בהוכחות בתחום זה. אנליזה היא תחום חדש יחסית והתלמידים עדיין לא ראו הגדרות מדויקות, לכן תתקבלנה הוכחות מבוססות על דיאגרמות ועל אינטואיציות, גם אם התלמידים אינם מסוגלים לנסח את ההוכחות בשפה ברורה (ולניאריט). יחד עם זאת, מנסחי התכנית רואים חשיבות בדירוג ברור של ניסוחים מתמטיים: הגדרות, אקסיומות, משפט עם הוכחה, משפט מוסכם [ראו את המושג של Théorème en actes (משפט במעשים) המתואר על ידי Rabardel ואחריו [Trouche].

ההוכחה צריכה להיות תהליך חי ודינמי. תחת שרביטו של המורה הפרקטיקה של ההוכחה משתנה מידי שנה בשנה, וזאת על מנת שהוכחות לא יהיו כבדות מידי. כמו כן, מייחסים חשיבות גדולה לניסוח נכון של ההוכחות על ידי התלמידים.

התרשים הנ"ל מצביע על כך שהפעילות המתמטית מכוונת יותר לפתרון בעיות מאשר לתכנים מופשטים.

הקשר למדעי המחשב

כפי שכבר צוין לעיל, הקשר למדעי המחשב חשוב בתפיסת החינוך המתמטי בצרפת. Trouche מסתמך על Lavoie ומשווה את החשיבות של כניסת המחשבון הסימבולי לחינוך המתמטי לכניסה לשימוש של הקולמוס ממתכת, בגלל המהפכה שהוא אפשר. מושגים אלמנטאריים של מדעי המחשב (לולאה, טסט, תהליך רקורסיבי וכדומה) שייכים בפועל לתחום המתמטי. אין בתכנית הלימודים פרק של מדעי המחשב בלבד, אבל מצפים מתלמידים ליישם בעזרת המחשבון לולאות וטסטים.

שימוש בתוכנה (Computer Algebra System – CAS) על מחשבון או על מחשב דורש ידע ומיומנויות מתמטיות, ובתהליך גומלין תורם להרחבתם. לא דורשים שליטה מוחלטת בתוכנה כלשהי, אבל התלמיד צריך ללמוד איך להתייחס לבעיות מתמטיות בעזרת CAS, אילו שאלות ניתן לחקור בעזרת הכלי הזה, איך לנתח את תשובות המחשב וכדומה.

הכלים הטכנולוגיים הזמינים לעבודה מתמטית הולכים ומשתנים/משתפרים באופן תמידי הן מבחינה כמותית והן מבחינה איכותית. לכן יש להתאים את ההכלה של הטכנולוגיה בכל פרק של תכנית הלימודים. הסעיף הזה של ההנחיות תואם את תוצאות המחקרים של האסכולה הצרפתית בנושא ה-Instrumentation (ראו העבודות המרכזיות של Lagrange 2000, Artigue 2002, Trouche 2002-2004 ועוד על בסיס העבודות של Chevallard, Balacheff ו-Rabardel). ובנוסף לכך, אין מסגרת חובה. המורה יקבע את האסטרטגיה המתאימה בכל רגע.

אפיסטמולוגיה ותולדות המתמטיקה

התלמידים צריכים להיות מודעים שהמתמטיקה של היום היא התוצר של גאונותם ושל עבודתם של רבים וטובים. ידיעת שמות של אחדים מהם, ומהי תרומתם מהווה חלק אינטגרלי של הרקע המדעי שיש לבנות. המורה יבנה פעילויות ספציפיות (כגון קריאת טקסטים היסטוריים, בניית טבלה כרונולוגית המאפשרת פיתוח של מושגים וכדומה) בקשר לנושאים המתמטיים הנלמדים בכיתה באותו זמן. בנושא הזה המורה נהנה מחופש מוחלט תוך הנחיה ברורה להעדיף איכות על פני הכמות.

ארגון ההוראה וארגון עבודת התלמידים

המורה חופשי לארגן את עבודת הכיתה, בהתאם לתכנים ולהנחיות ההפעלה שמשדר החינוך הצרפתי מפרסם. הדברים מתפרסמים כטבלאות, דומות לטבלאות שראינו עבור כיתות אחרות (ראו דוגמאות של טבלאות להלן).

התכנים לכיתה יא

פעם נוספת מדגישים את החשיבות באיזון החלק של החידושים מול הידע הקודם, ברציפות של העלייה במעלה הלימודים וכדומה. הטבלאות מאורגנות בשלושה טורים: הראשון קובע תכנים, השני מתאר את דרכי ההפעלה, השלישי מבהיר את תוכן המושגים. לנושא "חישוב אלגברי" אין מקום מוגדר כאן, כי התלמידים צריכים ליישם את מה שלמדו והפנימו בשנים קודמות.

כבר בכיתה י (המשותפת) מתחילים ללמוד סטטיסטיקה. לסטטיסטיקה תיאורית אין הרבה מקום במגמה S, אבל יש מקום רחב למודליזציה של בעיות מודרניות; בעיות שונות מאפשרות לתלמיד פיתוח של חשיבה סטטיסטית משלו. השילוב של הכלי הטכנולוגי (CAS) מאפשר גיוון גדול בעבודה הסטטיסטית.

הגיאומטריה מתפתחת בסדר עולה: הסרטוטים לעצמם, גיאומטריה אנליטית, גישה וקטורית ובסוף - טרנספורמציות. אבל המורה רשאי לבחור סדר שונה. קואורדינאטות קוטביות מעניקות נקודת מבט חדשה. לימוד קונפיגורציות במישור ובמרחב מהווה חלק חשוב מהתכנית: תחילה בצורה סטטית בגישה וקטורית, ואחר כך בצורה דינמית בעזרת טרנספורמציות. יש לעשות שימוש רחב בתוכנות לגיאומטריה דינמית. הגיאומטריה נתפסת כ"בית ספר לחשיבה": חשוב לבנות הוכחות, להגיע לחשיבה דדוקטיבית וכדומה.

נושאים:

- חיתוכים של קווים, של טראזדר על ידי מישור;
- מערכות קואורדינאטות במישור (קרטיזית, קוטבית), זוויות מכוונות, פונקציות טריגונומטריות של זוויות מכוונות (בגישה טריגונומטרית, לא כפונקציות. המושג נקרא בצרפתית *lignes trigonométriques*);
- קואורדינאטות קרטזיות במרחב, מרחק בין נקודות במערכת אורתונורמלית;
- גיאומטריה וקטורית: חישוב וקטורי במרחב, מרכזי כובד, מכפלה סקלרית במישור, יישומים של המכפלה הסקלרית (היטל אורתוגונאלי של וקטור על ישר, חישובי אורך);
- טרנספורמציות במישור ובמרחב: הומוטתיות והזזות, סיבובים. ההשפעה שלהן על קולינאריות, על שטחים ועל נפחים;
- מקומות גיאומטריים במישור (בעזרת תוכנות לגיאומטריה דינמית).

התכנית באנליזה מרחיבה את החומר שנלמד בכיתה י: מלאי הפונקציות, חקירת תכונותיהן. מושג הנגזרת הוא נושא מרכזי בכיתה יא. כל הפונקציות בשנה זו הן פונקציות חלקות. דרך הנגזרת יגיעו לחשיפה מסוימת למושג של גבול סופי בנקודה. עבור סוגים אחרים של גבולות (גבול אינסופי, גבול באינסוף) דיי בגישה אינטואיטיבית. התכנית שאפתנית, ויש להעדיף חשיבה על בסיס הצגות גרפיות.

הנושאים:

- פעולות אלגבריות על פונקציות $\left(u + v, \lambda u, uv, \frac{u}{v}, u \circ v\right)$;
- פונקציה פולינומאלית, מעלתה;
- מגמת עלייה ומגמת ירידה של פונקציה (כולל $u + \lambda, \lambda u, u \circ v$);
- פתרון משוואה ריבועית, חקירת סימן של טרינום ריבועי;
- גזירה: גישה קינמטית או גרפית, משיק לגרף הפונקציה בנקודה, נגזרות של פונקציות אלמנטאריות (חזקות, פונקציות טריגונומטריות), אלגברת הפונקציות הגזירות, הקשר בין נגזרת ומונוטוניות;
- התנהגות אסימפטוטית;
- סדרות, סדרות מונוטוניות, סדרות חשבוניות וסדרות הנדסיות;
- גבולות (גישה אינטואיטיבית), התכנסות של סדרה ושימושים במושג זה. גבול של סדרה הנדסית.

בהסתברות ובסטטיסטיקה מקנים מושגי יסוד על מנת להבין תופעות הנצפות באמצעות ניסוי או סימולציה. מכניסים כלים תיאוריים חדשים: דיאגרמת קופסה, סטיית תקן ומרחק בין רבעונים.

בין הנושאים:

- שונות וסטיית תקן;
- הגדרת פונקציית הסתברות. הסתברות של איחוד, של חיתוך מאורעות.
- משתנה מקרי, פונקציית הסתברות על קבוצה סופית, תוחלת, שונות, סטיית תקן;
- מודליזציה של ניסויים אקראיים.

התכנים לכיתה יב

המלצה: אנליזה 45% (14 שבועות), גיאומטריה 35% (11 שבועות), הסתברות וסטטיסטיקה 20% (6 שבועות).

תכנית החובה משותפת לכל תלמידי יב S:

לאנליזה שתי מטרות עיקריות:

הרחבת קטלוג הפונקציות: פונקציות לוגריתמיות, פונקציות מערכיות, פונקציות טריגונומטריות ($\tan$);

גישה ראשונית לחשבון אינטגרלי ולמשוואות דיפרנציאליות.

מצפים לשליטה טובה במושגים שנלמדו קודם (נגזרת, נקודות קיצון וכדומה). מושג הרציפות יוכנס בשלב זה ויאפשר ניסוח נכון של משפטים חשובים. לעיתים קרובות חקירת הפונקציות תהיה מוגבלת לקטע.

הנושאים:

- חזרה על מושג הגבול של סדרה, הרבה לגבול אינסופי $(-\infty, +\infty)$;
- גבול (סופי או אינסופי) של פונקציה בנקודה a ;
- 'משפט הסנדוויץ' עבור פונקציות;
- אלגברת הגבולות;
- רציפות (בנקודה, בקטע), מונוטוניות, משפט ערכי הביניים (או מסוכם או מוכח בעזרת סדרות צמודות adjacent sequences), טבלת ווריאציות של פונקציה⁶;
- גזירה: חזרה על נושאים שנלמדו בכיתה יא, חקירת פונקציות ה-tan, נגזרת של פונקציה מורכבת;
- הפונקציה המעריכית בבסיס e , משוואה פונקציונאלית, המספר e , הסימון e^x ;
- חקירת פונקציות לוגריתמיות ומערכיות: $\ln$, משוואה פונקציונלית, התנהגות אסימפטוטית;
- השוואת קצב הגדילה של הפונקציות הנ"ל;
- פונקציות השורש;
- הוכחה באינדוקציה. סדרה מונוטונית, חסומה מלעיל, חסומה מלרע, חסומה. סדרות צמודות ותכונותיהן;
- הגדרת הסימון $\int_a^b f(x) dx$ עבור פונקציה רציפה וחיובית כשטח "מתחת לגרף";
- הרחבה של האינטגרל למושג של ממוצע;
- תכונות אלגבריות של האינטגרל. אי-שוויון הממוצע;
- מושג של פונקציה קדומה, משפט קיום, המשפט היסודי של החשבון האינטגרלי;
- חישוב אינטגרל מסוים בעזרת פונקציה קדומה. אינטגרציה בחלקים;
- משוואות דיפרנציאליות $y' = ay + b$.

בגיאומטריה ממשיכים את הנלמד משנים קודמות. הקואורדינטות הקוטביות, יחד עם המספרים המרוכבים מציעים מסגרת מאחדת לחקירת בעיות שונות מעבר לערך ההיסטורי והבין-תחומי שלהן.

נושאים:

- הנדסת המישור - המספרים המרוכבים (הצגה אלגברית, הצגה טריגונומטרית, $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$). משוואות ריבועיות בעלות מקדמים ממשיים, הצגה מרוכבת של טרנספורמציות במישור;
- מכפלה סקלארית במרחב (בהזדמנות זו מציגים הטלה על ישר או על מישור);
- ישרים ומישורים במרחב. הצגה בריצנטרית של ישר ושל מישור מצב הדדי של שניים או שלושה ישרים או מישורים.

⁶ טבלת ווריאציות הוא כלי חשוב, ושימושו רחב מאוד בבתי הספר בצרפת. חקירת פונקציה מסתכמת תמיד בטבלה כזאת, לפני סרטוט גרף. מעבר לזה, מקובל לפתור בעיות מסוימות על סמך טבלת הווריאציות.

בהסתברות ובסטטיסטיקה ממשיכים את הנלמד (חשוב לזכור ש-יא ו-יב נחשבות כמקשה אחת). בודקים התאמה של פונקצית הסתברות לנתונים ניסויים.

נושאים:

- הסתברות מותנית, מאורעות בלתי תלויים. נוסחת ההסתברות השלמה;
- סטטיסטיקה ומודליזציה;
- נוסחת הבינום של ניוטון;
- התפלגות ברנולי התפלגות בינומית (תוחלת, שונות);
- דוגמאות של התפלגויות רציפות בעלות פונקצית צפיפות: התפלגות אחידה על $[0,1]$ ועוד;
- סטטיסטיקה וסימולציה.

תכנית ההתמחות:

הנושאים נבחרו לשם חשיפה ראשונה בגלל עושרם המתמטי.

נושאים:

- אריתמטיקה: חילוק ב-Z, חילוק אויכלידי, האלגוריתם של אויכלידס, קונגרואנציות, מספרים זרים. מספרים ראשוניים, פירקו לגורמים ראשוניים, LCM, משפט Bezout, משפט Gauss;
- טרנספורמציות דמיון במישור. הגדרה גיאומטרית, איזומטריות, הצגה מרוכבת. חקירת טרנספורמציות הדמיון הישירות⁷, יישומים גיאומטריים (מקומות גיאומטריים במישור וכדומה - קשר למושגים שנלמדו בכיתה ו);
- חתכים של משטחים על ידי מישורים (חתכי חרוט וכדומה).

פעילויות רב-תחומיות:

אחד המאפיינים של תכנית הלימודים הוא הקיום של פעילויות רב-תחומיות עם אלמנט מתמטי מובהק. הפעילויות האלה מאפשרות להכיר לתלמידים יישומים חשובים, מודרניים של המתמטיקה שהם לומדים, ואפילו לגלות נושאים מעבר לה. בדיאגרמה בעמוד 13, דוגמאות של נושאים לפעילויות אלה מופיעות בחלק החיצוני, מסומנות בתוך אליפסות: קוד RCA, מעגל חשמלי RLC וכדומה.

הפעילויות האלה הן אולי המרכיב החשוב של תכנית הלימודים שדרכו מקנים לתלמידים ראייה רחבה, הבנה עמוקה יותר, פתיחת אופקים חדשים. היישומים בחיים היום-יומיים תורמים לרצון ללמוד⁸.

7 טרנספורמציות דמיון היא ההרכבה של איזומטריה שהומו תטיה. היא נקראת ישירה (שומרת זוויות, חיובית) או הפוכה (הופכת זוויות, שלילית) בהתאם לאיזומטריה, כסיבוב או כשיקוף.

8 עלי לציין שמשוחחות שהיו לי בזמן האחרון עם עמיתים צרפתיים עולה שכנראה שקיימת כוונה לבטל את האלמנט הזה, אבל הרבה מורים מתנגדים לביטול. הם רואים בפעילויות רב-תחומיות את לב עבודתם החינוכית.

5. דרכי ההפעלה וההערכה

פנקס לימודים

כבר התייחסנו בסעיפים קודמים לדרכי ההפעלה, ובמידה חלקית - לדרכי ההערכה של עבודת התלמידים. לא נותר לנו אלא לראות אלמנט מקורי של הערכה רציפה של התלמידים לאורך שנות ה-Lycée, אלמנט שמכונה Livret Scolaire ("פנקס לימודים").

ההערכה הרציפה של התלמידים (עבאמצעות עבודות בית, מבדקים קצרים, מבחנים ארוכים יותר, ובכיתה יב באמצעות מבחני מתכונת המכונים Bac Blanc) היא נושא לדיון העולה פעם ברבעון באספת המורים. לכל תלמיד יש פנקס לימודים אישי, המוחזק בבית הספר. התלמיד יקבל את הפנקס הזה כשהוא ייגש לבחינות הבגרות וימסור אותו למזכירות מרכז הבחינות שבו הוא נבחן.

פעמיים או שלוש פעמים בשנה, בתום תקופה, כל מורה (דהיינו בכל מקצוע) ממלא את הפרטים הבאים:

הציון המסכם של התקופה, לפי מפתח חישוב שהוא עצמו קבע;
הציון הגבוה ביותר והציון הנמוך ביותר בכיתה של התלמיד ומספר התלמידים בכיתה;
תיאור במספר שורות של רמת התלמיד, התנהגותו ותפקודו בלימודי המקצוע.
לכל כיתה "מורה מרכז" (Professeur Principal – תפקיד רשמי המוגדר בחוק). לאחר שכל המורים כתבו את הציונים ואת ההערות שלהם, המורה המרכז מוסיף הערה מסכמת בעקבות המסקנות משיבת המורים.

בתום בדיקת מבחני הבגרות מתקיימת ישיבת שופטים ובה דנים במצב התלמידים בעלי ממוצע גבולי (קרוב לציון עובר בבגרות, אבל נמוך במקצת ממנו). בודקים את הרקע לפי פנקס הלימודים על מנת לבדוק אם הבעיה נובעת מ"תאונה" או משקפת מצב כללי. לפי הנחיות משרד החינוך ובהתאם לשיקול דעתם של השופטים, תלמיד כזה, אשר חסר לו מעט מאוד בתוצאות הבחינה, עשוי לקבל ציון 'עובר'.

מבנה המבחן

השאלון מכסה חלק גדול של תכנית הלימודים.
אין אפשרות בחירה, כל השאלות הן חובה. כמו כן, אין מיקוד.
השאלות לא בהכרח סטנדרטיות.
מדובר בבעיות, לא בתרגילים (לפי ההבחנה של Dörner), דהיינו צריכים להפגין הבנת דבר מתוך דבר, ויש השפעה של התשובות של שאלות קודמות על השאלה הבאה (שיטת הרדוקציה).

הכשרונות הנדרשים:

- ידע והבנה בחומר הנדרש;
- יוזמה: התלמיד רשאי (והדבר אפילו מומלץ) להשתמש בדרכים לא סטנדרטיות. העיקרון הוא שיענה בצורה נכונה ושלמה;
- הניסוח בהיר ומדויק;
- שימוש ב-CAS (כמובן, בבחינה זה מחשבון סימבולי). כותבי השאלון לוקחים בחשבון שהמחשבון הוא חלק מן הכלים העומדים לרשות המועמד. עם זה הם רשאים להחליט על איסור שימוש, ואז הדבר צריך להיות כתוב במפורש. במידה שהשימוש במחשבון מותר, על התלמיד לתאר את מה שהוא עשה.

Handwritten work showing the integral equation:

$$\int_0^{\pi/2} k \cos(x) dx - \int_0^{\pi/2} k x^2 dx = 2$$

The student calculates the integrals and solves for k :

$$k \sin(x) - \frac{k x^3}{3} \Big|_0^{\pi/2} = 2$$

$$k \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{3} \right) = 2$$

$$k \left(1 - \frac{\pi^3}{24} \right) = 2$$

$$k = \frac{2}{1 - \frac{\pi^3}{24}} \approx 3.65379$$

A blue circle highlights the text: "solve avec f.i." and "La valeur positive de k sera de 3,65379".

- אין דף נוסחאות רשמי. מרכיבי השאלון יכולים להחליט על בניית דף נוסחאות ספציפי, בהתאם לסוגי הבעיות.

משך הבחינה: 4 שעות

החלק המשותף (תכנית הליבה) – חובה: obligatoire

מקדם מכפיל: 7

4 בעיות

התמחות במתמטיקה: spécialité

מקדם מכפיל: 9

4 בעיות, מתוכן 3 מהחלק המשותף ו-1 מההתמחות.

בחינה בעל פה

כאשר מועמד לא מגיע לציון הממוצע המינימלי (ממוצע של ציוני כל המקצועות, עם מקדמים מתאימים למגמה) הוא רשאי לעבור מספר קטן של בחינות בעל פה בהתאם לבחירתו, על מנת לשפר את הציון. להלן מבנה הבחינה בעל פה:

- זמן הכנה: 20 דקות (יש דפי טיוטה על שולחן בחדר הבחינה).
- זמן המבחן: 20 דקות, מול בוחן אחד.
- צריך להיות לוח בכיתת המבחן. התלמיד יעבוד על הלוח בזמן הבחינה.
- המועמד מקבל 2 שאלות.

- המועמד יכול להשתמש במחשבון.
- הבוחן צריך לאפשר למועמד ביטוי עצמי.

איך נראה שאלון?

להלן שאלון של בחינת Baccalauréat S במגמת התמחות. כדאי לשים לב לדברים הבאים:

- בעמוד הראשון יש מעט מאוד הנחיות. הכללים ברורים למועמדים לפני שהם מגיעים.
- הנספח בסוף השאלון מכיל גרף פונקציה. זאת תוצאה של ההיתר להשתמש במחשבון סימבולי. אין טעם לבקש מן המועמד להעתיק את הגרף שהוא רואה על צג המחשבון.
- כיון שמדובר בשאלון למתמחים במתמטיקה במגמה S, הוא מכיל 3 בעיות מתוך התכנית המשותפת ובעיה אחת מתוך חלק התמחות.

להלן קיצור הנושאים המופעים בשאלון:

בעיה מס' 1:

נתונות שלוש טענות שעל המועמד להוכיח או להפריך (מדגישים את החובה לנמק).
הנושאים הם:

- טרנספורמצית המרחב בתיאור אנליטי;
- משוואה דיפרנציאלית ליניארית;
- סדרה של מספרים ממשיים (הוכחת אי-שוויון באינדוקציה).

בעיה מס' 2:

מספרים מרוכבים והצגתם הגיאומטרית.
חקירת טרנספורמציה המוגדרת במסגרת מרוכבת. בקרה הנוכחית טרנספורמצית דמיון ישיר (direct similarity).
קישור הנושא הנ"ל עם משוואה ליניארית בשני נעלמים ועם חקירת הפתרונות השלמים.
חזרה לגיאומטריה, אבל הפעם מנקודת מבט של וקטורים בדגש על פתרונות עם מרכיבים שלמים.

בעיה מס' 3:

הסתברות. סוף הבעיה מבוסס על נוסחת ההסתברות השלמה, ושם מתבקשת בנייה של נוסחת אינדוקציה.

בעיה מס' 4:

בעיה באנליזה. החלק הראשון מתחיל בכותרת: "שימוש מסודר בידע שנרכש". בין המטרות הוכחה של הגבול $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$ בעזרת שימוש במשפטים ידועים (חלקם מוזכר בתחילת הבעיה).

המשך הבעיה דן חקירת פונקציה המוגדרת באמצעות אינטגרל (אין צורך בידיעת המשפט היסודי של החשבון האינטגרלי) והסקת מסקנות, שימוש במשפט ערכי הביניים ובשיטת החצייה כדי לפתור משוואה בצורה מקורבת (חובה להשתמש במחשבון). החלק האחרון מיועד לחישוב אינטגרל שגבול האינטגרציה העליון שלו הוא פרמטר (בעצם שלב אחד לפני חישוב אינטגרל לא אמיתי שאינו שייך לתכנית הלימודים).

להלן תרגום של שלוש בעיות השייכות לבחינות שניתנו באחרונה במגמת S.

מגמה מדעית S

צרפת – נושא ארצי 2007 (לא למועמדים ממדינות אחרות)

בעיה משותפת לכל המועמדים

הפונקציה f מוגדרת על $(-1, +\infty)$ באמצעות $f(x) = x - \frac{\ln(1+x)}{1+x}$. הגרף C של הפונקציה f נתון בנספח. על המועמד להשלים את הסרטוט ולהגיש אותו עם המבחן.

חלק א': חקירת תכונות מסוימות של העקומה C .

- מסמנים ב- f' את הנגזרת הראשונה של f . חשב את $f'(x)$ עבור כל x ב- $(-1, +\infty)$.
- לכל x ב- $(-1, +\infty)$ מגדירים את $N(x) = (1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)$. בדוק שכך מגדירים פונקציה עולה ממש ב- $(-1, +\infty)$. חשב את $N(0)$. הסק מזה את התנהגות הפונקציה f .
- יהי D הישר שמשוואתו היא $y = x$. חשב את הקואורדינטות של נקודת החיתוך של C ו- D .

חלק ב': חקירת סדרה בעלת כלל אינדוקציה המוגדר באמצעות הפונקציה f .

- הוכח שאם $x \in [0, 4]$, אזי $f(x) \in [0, 4]$.
- מגדירים את הסדרה (u_n) באמצעות $u_1 = 4$ ו- $u_{n+1} = f(u_n)$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

בסרטוט שבנספח ובעזרת העקומה C והישר D מקם את הנקודות בעלות שיעורי-x השווים ל- u_0, u_1, u_2 ו- u_3 .

3. הוכח שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $u_n \in [0, 4]$.
4. חקור את המונוטוניות של הסדרה (u_n) .
5. הוכח שהסדרה (u_n) מתכנסת. נסמן את הגבול שלה באות l.
6. השתמש בחלק א' כדי לחשב את הערך של l.

מגמה מדעית S

פולינזיה (Polynésie) 2005

בעיה עבור המועמדים שבהתמחות

5 נקודות

הסדרה (u_n) של מספרים טבעיים נתונה על ידי $u_0 = 14$ ו- $u_{n+1} = 5u_n - 6$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

1. חשב את u_1, u_2, u_3 ו- u_4 . איזו השערה אפשר לנסח לגבי שתי הספרות האחרונות של המספר u_n ?
2. הוכח שלכל מספר טבעי n מתקיים $u_{n+2} \equiv u_n \pmod{4}$. הסק מזה שלכל מספר טבעי k מתקיימים $u_{2k} \equiv 2 \pmod{4}$ ו- $u_{2k+1} \equiv 0 \pmod{4}$.
א. הוכח באינדוקציה שלכל מספר טבעי n, $2u_n = 5^{n+2} + 3$.
ב. הסק מזה שלכל מספר טבעי n, $2u_n \equiv 20 \pmod{100}$.
3. מצא את שתי הספרות בכתובה העשרונית של u_n בהתאם לערכים של n.
4. הוכח שהמחלק המשותף המכסימלי של שני מספרים עוקבים בסדרה (u_n) הוא קבוע. חשב את ערכו.

מגמה מדעית S

צרפת – נושא ארצי 2005 (לא למועמדים ממדינות אחרות)

בעיה עבור המועמדים שבהתמחות

5 נקודות

השאלות 3 ו-4 בלתי תלויות בשאלות 1 ו-2. רק משוואת Γ הנתונה ב-1ג בשימוש בשאלה 4.

1. במרחב התלת-ממדי נתונה מערכת אורתונורמלית $(\vec{0}; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
א. יהיו P ו-Q שני מישורים הנתונים על ידי המשוואות $x + \sqrt{3}y - 2z = 0$ ו- $2x - z = 0$ בהתאמה. הוכח ש-P ו-Q לא מקבילים.
ב. מצא הצגה פרמטרית של הישר Δ , חיתוך של P ו-Q.

ג. נסמן ב- Γ את החרוט של סיבוב שצירו הוא ציר ה- x וכך ש- Δ הוא ישר יוצר. הוכח שמשוואת Γ היא $y^2 + z^2 = 7x^2$.

2. ייצגו בסרטוט הבא את החיתוכים של Γ עם מישורים מקבילים לצירי המערכת. בכל אחד מן המקרים, מצא משוואת מישור אפשרית. נמק את תשובתך בקפדנות.



3. א. הוכח שאין פתרון שלם למשוואה $x^2 \equiv 3 \pmod{7}$.

ב. הוכח את התכונה הבאה:

לכל המספרים השלמים a ו- b , אם 7 מחלק את $a^2 + b^2$, אזי 7 מחלק את a ו- 7 מחלק את b .

4. א. יהיו a, b, c שלושה מספרים שלמים שונים מ-0. הוכח את התכונה הבאה: אם הנקודה בעלת הקואורדינטות (a, b, c) נמצאת על החרוט Γ , אזי a, b ו- c מתחלקים ב-7.

ב. הסק מזה שהנקודה היחידה של Γ בעלת קואורדינטות שלמות היא קודקוד החרוט הזה.

ניקוד וציון

בדיקת המבחן מתבצעת על ידי קבוצות מורים. לפני הבדיקה קובעים את הניקוד לכל שאלה, עד רמה של חצי ואלי רבע נקודה (הציון הכולל הוא מתוך 20 נקודות). על מנת לצמצם ככל האפשר את ההבדלים בבדיקה מבודק לבדוק, קיימות ועדות עד-הוק הבודקות את התוצאות ומנרמלות במקצת את הציונים לפני פרסומם.

6. סיכום ממצאים לגבי איכות התכנית

כפי שצוין לעיל, כותב שורות אלה מוצא חיוב רב בתכנית ובארגונה. להלן מספר נקודות חשובות:

א. קיום שלוש המגמות העיקריות ובחירת ההתמחות במתמטיקה או במקצוע אחר מאפשרות ולהתאים במידה מסוימת תכנית לימודים לרמת התלמיד ולבקשותיו.

ב. ההתאמה של נושאי הלימוד למגמה הכללית, דהיינו הוראת נושאים מתמטיים הרלבנטיים לכלכלה במגמה ES, ובדומה לכך גם במגמות האחרות, חשובה ומעוררת עניין אצל התלמידים, כי הרי לא כל אחד לומד מתמטיקה לשם המתמטיקה לבדה.

ג. אלמנט חשוב של הלימוד הבא לידי ביטוי גם בבחינות, הוא השילוב בין נושאים שונים. המתמטיקה איננה אוסף של נושאים זרים אלא גוף אחד (Corpus בלע"ז) בעל פנים רבות ובעל קשרים בין נושא לנושא. גיאומטריה אנליטית, למשל, היא נושא המגשר בין אלגברה לגיאומטריה (להרחבה: הפרק על web of notions אצל Noss & Hoyles (1996) והמאמרים של כותב שורות אלה על המושג של cognitive neighborhood).

ד. נקודה חשובה היא השימוש הפדגוגי המשמעותי בטכנולוגיה. אמנם מעבירים חלק מן העבודה הטכנית אל המחשבה/מחשבון, אבל רוב השימוש בכלי זה הוא כדי לעשות עבודה ניסויית המיועדת להעמקת הבנה.

ה. היעדר בחירה בבחינה הוא דבר חשוב. מצפים מן התלמיד לדעת את כל תכנית הלימודים. ובהתאם לכך גם מושג המיקוד איננו קיים בתכנית הלימודים הצרפתית. בחירה וואו מיקוד מוציאים חלקים פנימיים מן המצרף של התכנית המלאה, כאילו הידע המתמטי שהיינו יכולים להשוותו לאריג, פתאום נפרם.

ו. היבט פחות חיובי הוא כי נושאים מתקדמים יותר, למשל בתחום החשבון הדיפרנציאלי (חלק מן האפסילונטיקה – עבודה בעזרת $\varepsilon - \delta$), שהיו קיימים בתכנית הלימודים הקודמת של התיכון נעלמו ונדחו לאוניברסיטה. אמנם נושאים אלה לא יכולים להיות נחלת כל התלמידים, אבל אוכלוסיית תלמידים בעלי אוריינטציה מתמטית הייתה יכולה ללמוד את הנושאים האלה ולהפגישם.

סיכום

כאן דיי לצטט את אחת החוקרות החשובות ביותר בצרפת ובעולם, הלא היא יושבת הראש של ICMI:

"What is aimed by mathematics education, and especially by general mathematics education in school and university, is not an efficient mathematical practice assisted by the current available computational tools; rather, it is concerned with the transmission of the bases of a "mathematical culture".

(Artigue 2002)

רשימת מקורות

- Artigue M. (2002). Learning Mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work, *Int. J. of Computers for Math. Learning* 7, 245-274.
- Cuoco A. (2002). Thoughts on Reading Artigue's "Learning Mathematics in a CAS Environment", *International Journal of Computers in Mathematical Learning* 7, 293-299.
- Herget W., Heugl H., Kutzler B., & Lehmann E. (2000). Indispensable Manual Calculation Skills in a CAS Environment, available: http://b.kutzler.com/article/art_indi/art_indi.pdf
- Lagrange J.B. (2000). L'intégration d'instruments informatiques dans l'enseignement: une approche par les techniques, *Educational Studies in Mathematics* 43,1-30.
- Noss, R. & Hoyles, C. (1996), *Windows on Mathematical Meaning*, Kluwer: Dordrecht.

מקורות לעיון נוסף

- Balacheff N. (1994). La transposition informatique: note sur un nouveau problème sur la didactique, in M. Artigue et al. (edts), *Vingt ans de didactique en France*, La Pensée Sauvage, Grenoble, 364-370.
- Ball L. (2001). Solving Equations: Will a more general approach be possible with CAS?", *Proceedings of the ICMI Meeting on teaching and learning algebra*, Melbourne.
- Chevallard Y. (1992a), Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 12 (1), 73-112.
- Chevallard Y. (1992b), Intégration et viabilité des objets informatiques dans l'enseignement des mathématiques, in B. Cornu (ed.), *L'ordinateur pour enseigner les Mathématiques*, 183-203, Nouvelle Encyclopédie Diderot, Presses Universitaires de France, Paris.

- Dana-Picard T. & Steiner J. (2003): Enhancing conceptual insight using a CAS, CAME 2003 - the Third CAME Symposium, Reims (France); <http://itsn.mathstore.ac.uk/came/events/reims/3-ShortPres-DanaPicard.pdf>
- Fischer R. (1991). Mathematik und gesellschaftlicher Wandel, *Journal für Mathematik Didaktik*, 4, 323-345.
- Giraldo V., Tall, D. O., Carvalho, L. M., (2003). Using Theoretical Computational Conflicts to Enrich the Concept Image of Derivative. *Research in Mathematics Education*, vol. 5, pp. 63–78.
- Kadijevich D. and Haapasalo L. (2001). Linking procedural and conceptual mathematical knowledge through CAL, *Journal of Computer Assisted Learning* 17, 156-165.
- Pegg, J., & Tall, D. (2005). The fundamental cycle of concept construction underlying various theoretical frameworks. *International Reviews on Mathematical Education (Zentralblatt für Didaktik der Mathematik)*, vol. 37, no.6, pp. 468-475.
- Peschek, W. & Schneider, E. (2001). How to identify basic knowledge and basic skills? Features of modern general education in mathematics, *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, 8 (1), 7-22.
- Peschek, W. (2005). the impact of CAS on our understanding of mathematics education. Retrieved on 20/11/2006 from CAME 2005 - The Fourth CAME Symposium Web site: <http://www.lonklab.ac.uk/came/events/CAME4/CAME4-topic2-Peschek-paper.pdf>
- Robert A. & Boschet F. (1984). L'acquisition des débuts de l'analyse sur $\mathbf{R}$ à la fin des études scientifiques secondaires françaises, Cahier de didactique des mathématiques 7, IREM, Paris VII.
- Tall D. (1998) Concept Image and Concept Definition, Senior Secondary Mathematics Education, (ed. Jan de Lange, Michiel Doorman), *OW&OC Utrecht*, 37–41.
- Tall D. (2001) Conceptual and Formal Infinities, *Educational Studies in Mathematics*, 48 (2&3), 199–238.

- Tall D., Gray E., Bin Ali M., Crowley L., DeMarois P., McGowen M., Pitta D., Pinto M., Thomas M., & Yusof Y.(2001). Symbols and the Bifurcation between Procedural and Conceptual Thinking, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education* 1, 81–104.
- Trouche, L. (2000). La parabole du gaucher et de la casserole à bec verseur: étude des processus d'apprentissages dans un environnement de calculatrices symboliques, *Educational Studies in Mathematics* 41 (2000), 239-264.
- Trouche, L. (2004). Environnements informatisés et Mathématiques: quels usages pour quels apprentissages?, *Educational Studies in Mathematics* 55, 181-197.
- Vygotsky, L.S. (1978). *Mind and society: The development of higher mental processes*, Harvard University Press, Cambridge, MA.
- Yerushalmy M. (2005), Challenging known transitions: learning and teaching algebra with technology, *For the Learning of Mathematics* 25 (3), 37-42

מישיגן, ארה"ב

ד"ר טלי נחליאלי

1. הרקע להתפתחות תכנית הלימודים

ככל מדינות ארה"ב גם מדינת מישיגן היא מדינה מערבית הכוללת בתוכה שילוב של מהגרים רבים ואנשים מקבוצות אתניות שונות. מישיגן הייתה ידועה עד לא מכבר בתעשיית רכב מפוארת אשר הבטיחה עתיד כלכלי סביר לתושבים רבים גם אם לא חוו עבר לימודי עשיר.

עם נפילתה של התעשייה בשנים האחרונות עלה נושא החינוך לדיון מחודש. אנשי חינוך רבים וכן המנהלים של תעשיית הרכב פורד דנו ב מחקרים שונים הקשורים לרפורמות בתכניות לימודים תוך שהם מנסים ללמוד ממכללות ומבתי ספר פרטיים כיצד עליהם לשנות את תכנית הלימודים הקיימת כך שרמת הלימודים במדינה תהיה גבוהה יותר. כמו כן, הם פנו לחקור את מדיניות החינוך בארצות שונות אשר התלמידים שם מצטיינים במבחנים בינלאומיים.

אנשי החינוך ניסו לגבש תכנית לימודים אשר תספק לתלמידים ידע ומיומנויות שיאפשרו לתלמידים להתמודד עם שוק העבודה ועם דרישות המוסדות להשכלה גבוהה של המאה ה-21.

בעקבות השינוי במצב הכלכלי והחשש כי בוגרי תיכון רבים לא ימצאו את דרכם להמשך לימודים ולא יצליחו להשתלב בשוק העבודה חוקקו במישיגן ב-20 לאפריל 2006 שני חוקים המייצגים את הדרישות החדשות מבוגרי בתי הספר התיכוניים במדינה. חוקים אלה כוללים התייחסות לקורסי חובה שעל כל בוגר ללמוד במהלך לימודי התיכון, כך שתתאפשר אחידות בין הבוגרים של בתי הספר השונים. הדרישות הן בנוסף לכל דרישה אחרת של בית הספר או של המחוז שביית הספר שייך אליו.

תכנית הלימודים במישיגן נבנתה על בסיס העמדה כי יש לזמן הזדמנויות למידה נרחבות כך שהתלמידים יפתחו את המיומנויות הנדרשות כדי שהבוגרים יצליחו בלימודים במוסדות להשכלה גבוהה וישתלבו בשוק העבודה של המאה ה-21. על פי דוח "Preparing all students for College and work" של ה- American College Test (ACT), רק 32% מהתלמידים בארה"ב אשר מתחילים ללמוד בכיתה ט יסיימו את בית הספר כשהם מוכנים ללימודים במכללה. מבין התלמידים שהם אפרו-אמריקאיים המספר הוא 20%, ומבין התלמידים הלטיניים – 16%. למעשה, נמצא כי מרבית בוגרי התיכון מודים שלא אותגרו באופן משמעותי במהלך לימודי התיכון שלהם ושהם אינם

מוכנים לעבודה או ללימודים במכללה. מעסיקים ומרצים במכללות מצפים מהתלמידים שיהיו בעלי שליטה ברמה גבוהה יותר של מתמטיקה ותקשורת. על פי מתכני תכנית הלימודים, המפתח להצלחה של התלמידים במקום עבודה או בלימודים במכללה הוא לקיחת קורסים מתקדמים באנגלית, במדעים ובמתמטיקה.

הממצאים המוצגים להלן עולים מתוך המסמך Improving High School Graduation "Requirements, Michigan Merit Curriculum", Michigan department of Education, (2006) – איכות הקורסים אשר התלמידים לומדים במהלך לימודי התיכון שלהם מהווה כלי מנבא טוב יותר להצלחה בלימודים במכללה מאשר ציונים בקורסים, מיקום בכיתה או ממוצע ציונים.

- לתלמידים יש סיכוי גבוה יותר להצליח בקורסים שהם ברמה גבוהה לעומת קורסים שהם ברמה נמוכה. לפיכך, על פי מחקרים אלה, ככל שיותר תלמידים ישתתפו בקורסים אקדמיים מתקדמים, כך ישתפרו ההישגים האקדמיים של התלמיד. יתר על כן, כאשר תלמידים שהם בני מיעוטים נדרשים ללמוד על פי תכנית לימודים קפדנית ומאתגרת, הם נענים לאתגר ואחוזי הנשירה יורדים.
- למידת מתמטיקה לפחות עד הקורס אלגברה II מפחיתה בחצי את הפער שבין אחוז המסיימים מכללות בין תלמידים לבנים, תלמידים אפרו-אמריקאיים ותלמידים לטיניים.
- 84% מאלה אשר עובדים במשרות בעלות משכורת גבוהה במשיגן למדו את הקורס אלגברה II או קורסים גבוהים יותר בשנת הלימודים האחרונה שלהם בתיכון. במשיגן של שנת 2006 כמחצית מבוגרי התיכון לא למדו קורסים מאתגרים במתמטיקה, כולל את הקורס אלגברה II.
- לפיכך אחת ממטרות ההוראה העיקריות של התכנית היא שהתלמידים ירכשו ידע הניתן להעברה. כדי להשיג זאת, התוצאות של הלמידה צריכות לכלול הבנה מעמיקה של התכנים ולהביא לשליטה במיומנויות.

בחלק הבא אתייחס לקשר שבין תכנית הלימודים לבין שלושת העקרונות של DNR, תוך התייחסות לשאלות אשר מפורטות בפרק הרקע התאורטי של דוח זה.

עקרון הדואליות. השאלה הנשאלת בקשר לעיקרון זה היא: האם בתכנית יש התייחסות לא רק לתוצרים מתמטיים אלא גם לדרכי חשיבה? אם כן, באיזו מידה ובאילו דרכים מקשרת התכנית בין דרכי חשיבה לתוצרים?

כדי להתייחס לעקרון הדואליות ביחס לתכנית הלימודים יש לבחון כיצד התכנית מתייחסת לדרכים שבאמצעותן מפתחים התלמידים חשיבה וכן כיצד הם אמורים לבנות תוצרים מתמטיים. כלומר, מהן הזדמנויות הלמידה שהתכנית מאפשרת כך

שהלומדים יפתחו חשיבה ומהן הפעולות הכלולות בה המובילות להפקת תוצרים מתמטיים.

אמנם תכנית הלימודים מתמקדת יותר ב'מה' של למידת המתמטיקה ולבתי הספר נותרת גמישות רבה לגבי ה'איך', אך אפשר ללמוד לגבי הדואליות ממקורות שונים, כמו מטרות התכנית, הבהרות המנוסחות בתכנית לגבי הציפיות מהלומדים (High School Content Expectations) ודוגמאות מומלצות של בעיות בנושאים שונים.

המטרה העיקרית של תכנית הלימודים היא שבוגרי בית הספר התיכון במישיגן יצליחו בלימודים מתקדמים וכן ישתלבו בשוק העבודה של המאה ה-21. התכנית מציינת במפורש כי ידע תוכן כשלעצמו אינו מספיק לשם כך וכי על הבוגרים לדעת איך להעביר את הידע ולהשתמש בו ליישומים בהקשרים שונים. נראה שאמירה זו מתייחסת אל ידע התוכן ואל החשיבה המתמטית בנפרד והטענה היא שיש צורך לפתח את שניהם.

לאורך תכנית הלימודים נמצאו סטנדרטים רבים שעקרון הדואליות מודגש בהם הן בפירוט ספציפי של הציפיות לגבי התכנים והן בדגש הרב על פעילויות חקר ועל יצירת קשרים בין נושאים, המצוין כאחת ממטרות העל של התכנית (המטרות מפורטות בסעיף 3). הדגש על חקירה ועל קישור בין נושאים שונים מעודד פיתוח חשיבה על סמך תוצרים מתמטיים, ופיתוח תוצרים מתמטיים שונים בעקבות ההבנות החדשות שפותחו.

כך למשל, בפירוט הנושאים הנלמדים במסגרת שני הקורסים באלגברה מפורטות הפונקציות שעל התלמידים ללמוד וכן מצוין הצורך בהנמקה דדוקטיבית כדי להצדיק תהליכים במהלך פתרון משוואות ואי-שוויונים. בהמשך נכתב כי "התנסות הלמידה העשירה הזו תספק לתלמיד את ההזדמנות להבין את המבנה של האלגברה והן את אפשרויות היישום של האלגברה בעת פתרון בעיות מהעולם האמיתי". כלומר יש התייחסות לשינוי בתוצרים מתמטיים אשר מוביל לפיתוח החשיבה לגבי האלגברה, והבנה זאת לגבי המבנה והשימושיות של האלגברה, על אף שהדבר לא נכתב כך בתכנית במפורש, עשויה להוביל לכך שהלומדים ישנו את הדרכים שבאמצעותם הם יוצרים תוצרים מתמטיים ואת התוצרים עצמם (Mathematics clarification for topic A1.1).

בגיאומטריה התלמידים נדרשים לבצע בניית בסיסיות ולנמק את הבניות שביצעו. בתכנית מצוינים ההבדלים בין בנייה (סרטוט באמצעות ישר ומחוגה), סרטוט (כולל שימוש בכלי מדידה) וציור (ללא שימוש בכלים, פרט לכלי כתיבה). כדי להבחין בין ההבדלים בין שלושת הסוגים, מציעים למורים לבקש מהתלמיד לבנות מלבן, לסרטוט מלבן ולצייר מלבן. כלומר, פיתוח הבנה ומודעות להבדלים יביאו ליצירת תוצרים מתמטיים שונים, ויצירת תוצרים שונים תפתח את החשיבה של הלומדים.

תכנית הלימודים במישיגן מושתתת על הסטנדרטים האמריקאיים ובפרט על הסטנדרט הנוגע להנמקה אשר לפיו "נימוק והוכחה אינם שמורים למקרים מיוחדים או למקומות מסוימים בתכנית הלימודים, אלא הם אמורים להיות חלק טבעי ובלתי נפרד מהדיונים המתמטיים ללא קשר לנושא הנלמד. התלמידים אמורים לצפות לכך שיתבקשו לנמק ולהסביר את המסקנות אליהן הגיעו. כאשר שאלות כמו 'מה אתה עושה?' או 'למה זה הגיוני?' מהוות את הנורמה בשיעורי המתמטיקה התלמידים יכולים להבהיר את חשיבתם, ללמוד דרכים חדשות להסתכל על סיטואציות ולחשוב עליהן ולפתח סטנדרטים להנמקה מתמטית באיכות גבוהה". (National Council of Teachers of Mathematics, 2000, p. 342).

עקרון הנחיצות. השאלה שנשאלת בפרק על הרקע התאורטי היא אם בתכנית לימודים מסוימת יש התייחסות לתוצרים מתמטיים בזיקה לבעיות משמעותיות שניתן לפתור באמצעותם? השאלה ניתנת לתשובה במחקר בעיקר באמצעות התבוננות בדוגמאות שמלוות את תכניות הלימודים הכתובות.

אחת ההנחות הבסיסיות של התכנית היא שההוראה צריכה להיות רלבנטית לעולם המשתנה של ימינו, ושהוראת המתמטיקה צריכה לכלול השתתפות במשימות ופרייקטים אשר יעוררו את סקרנות הלומדים ויאפשרו להם ליצור קשרים בין מה שהם לומדים בבית הספר, החיים שלהם ועתידם. ההנחה היא ש"תכנית לימודים שהיא גם מערבת וגם יעילה, מספקת הזדמנויות לחקירה ולחשיפה לרעיונות חדשים. חוויות למידה הקשורות ל"עולם האמיתי" (real world) מספקות ללומדים הזדמנויות ליישם ידע בסיטואציות חדשות ומגוונות. ואכן, לאורך התכנית יש רעיונות לגבי בעיות רב שלביות שונות בהקשרים מגוונים שהתלמידים אמורים להתמודד איתן תוך יישום המתמטיקה שהם למדו. כלומר ההתייחסות לנחיצות של המתמטיקה נתפסת כמזמנת למידה משמעותית והיא עומדת בבסיס התכנית.

בפירוט מטרות העל של התכנית מצוין כי ההוראה בבית הספר התיכון צריכה לכלול יישומים שהם משמעותיים לעולם האמיתי, חוויות למידה רלבנטיות, דרכי הוראה מגוונות וגמישות ללומדים שונים. כפי שנכתב ברקע התאורטי, אין זה מחייב שמתן דגש ליישומים הרלבנטיים לעולם האמיתי יוביל לנחיצות אך הדבר מזמן אפשרות כזאת.

בבחינה מעמיקה לגבי התפתחות של נושאים שונים נמצאו מקומות רבים שבהם יש התייחסות לעיקרון זה, אך יש גם נושא שבו עקרון זה אינו מיושם (או לפחות, אינו מוצהר) – הנושא של חפיפת משולשים. התלמידים נחשפים לנושא של חפיפה בכיתה ו– שם הם אמורים להבין שעבור מצולעים חפיפה משמעה שלצלעות מתאימות ולזוויות מתאימות יש אותה המידה. המקום הבא שבו הם לומדים את הנושא של חפיפה הוא בקורס בגיאומטריה בתיכון שם הם נדרשים להוכיח חפיפה של משולשים תוך שימוש

במשפטי החפיפה השונים. אין כל התייחסות להבנה של המשפטים ולצורך בהם. עם זאת, על אף שזו אינה דרישה מפורשת, אחת הפעילויות המומלצות כדי לפתח את הנושא מתמקדת ביצירת סיטואציה שבה יש צורך במציאת כללים יעילים אשר יאפשרו זיהוי של משולשים חופפים (ראו פירוט בסעיף 6).

עקרון החשיבה החוזרת. האם התכנית מקצה זמן לחשיבה חוזרת ולא רק לתרגול של טכניקות נלמדות? האם התכנית מדגישה למידה ספיראלית של תכנים מתמטיים כאשר שימוש בידע שנלמד בעבר נמשך בלימוד נושאים חדשים?

מטרות העל של התכנית מדגישות כי ההוראה בבית הספר התיכון צריכה לכלול מתן זמן מתאים לחזרות או ליישום של ידע חדש וכן הזדמנויות לחזרה על עבודות על בסיס משוב. מעבר לכך, על אף שבפירוט התכנים אין התייחסות מפורשת לחזרה, בפרישה של התכנים המתמטיים מכיתה ו ועד לקורס הספציפי אשר נלמד בתיכון נמצא כי יש חזרה על נושאים רבים ולאחר מכן העמקה באותו נושא.

למשל, בגיאומטריה התלמידים לומדים לבנות בעזרת ישר ומחוגה בכיתה ז. במסגרת קורס הגיאומטריה שניתן בכיתות התיכון התלמידים נדרשים לבנות אותן בניות אשר כבר בנו בעבר, אך אם בכיתה ז הם נדרשו להבין צידוקים לא פורמליים לבניות, בקורס הנוכחי הם נדרשים להצדיק את הבניות שלהם וכן לומדים בניות חדשות שאף אותן הם נדרשים להצדיק.

2. מטרות התכנית

מטרות תכנית הלימודים הכללית במישגן היא להבטיח שלבוגרי בית הספר התיכון במדינה יהיו המיומנויות הנדרשות כדי להשתלב ולהצליח בלימודים להשכלה גבוהה או במקום עבודה.

אנשי החינוך אשר גיבשו את תכנית הלימודים המליצו כי לימודי התיכון במדינה יכללו למידת אנגלית ומתמטיקה במשך ארבע שנים, מדעים ומדעי החברה במשך שלוש שנים, שפה זרה במשך שנתיים, חינוך גופני במשך שנה אחת, אמנות במשך שנה, וכן קורס מקוון אחד. בנוסף לכך, מועצת החינוך המליצה שהלימודים ישפרו את החשיבה הביקורתית של התלמידים, יפתחו בהם יכולות לפתרון בעיות ויכולות תקשורת תוך כדי עבודה בצוותים. הלמידה צריכה להיות קשורה יותר לחיי היומיום של הילדים ולהכין אותם לחיים מחוץ לבית הספר (Steptoe, 2006).

משרד החינוך מציע למורים בעת תכנון יחידות ההוראה השונות להתייחס למטרות הבאות:

- התלמידים צריכים לעמוד בדרישות אשר נוסחו על ידי מועצת החינוך לגבי התכנים.
- התלמידים אמורים להציב לעצמם מטרות ולבחון את הדרך להשגת מטרות אלה.

ההוראה בבית הספר התיכון צריכה לכלול:

- מיקוד ברעיונות גדולים הניתנים להעברה;
- שאילת שאלות ממוקדות אשר יעודדו חקר ויצירת קשרים;
- מיומנויות ותהליכים רלבנטיים תקפים וברורים;
- יישומים שהם משמעותיים לעולם האמיתי;
- חוויות למידה רלבנטיות;
- דרכי הוראה מגוונות וגמישות ללומדים שונים;
- אסטרטגיות הוראה המתבססות על מחקרים;
- הוראה מפורשת ושיטתית;
- מודל מתאים של הוראה וכן תרגול מונחה;
- מתן זמן מתאים לחזרות או ליישום של ידע חדש;
- הזדמנויות לחזרה על עבודות על בסיס משוב;
- הערכת היחידה על ידי הלומד.

ההוראה צריכה להיות רלבנטית לעולם המשתנה של ימינו. ידע תוכן לבדו אינו יכול להספיק לכל הלומדים, ויש ללמד שיעורים ולתת לתלמידים פרויקטים אשר יעוררו את סקרנות הלומדים ויאפשרו להם ליצור קשרים בין מה שהם לומדים בבית הספר לחיים שלהם ול עתידם. התלמידים אמורים להשתתף בחוויות למידה הקשורות לעולם האמיתי אשר יזמנו להם הזדמנויות להעביר ידע וליישמו בסיטואציות חדשות ומגוונות.

3. מבנה התכנית

בעקבות השינוי במצב הכלכלי והחשש כי בוגרי תיכון רבים לא ימצאו את דרכם להמשך לימודים ולא יצליחו להשתלב בשוק העבודה נחקקו ב-20 באפריל 2006 במישגן שני חוקים המייצגים את הדרישות החדשות מבוגרי בתי הספר התיכוניים במדינה. בין היתר מציינים החוקים כי כל תלמיד חייב ללמוד ארבעה קורסים במתמטיקה, אלגברה I, אלגברה II וגיאומטריה, אשר יילמדו בהתאם לציפיות שנוסחו על ידי משרד החינוך באישור מועצת החינוך או לחלופין ילמד התלמיד את תכני הקורסים האלה במסגרת של למידה אינטגרטיבית של התכנים. יתר על כן, ילמדו התלמידים קורס נוסף במתמטיקה, כמו טריגונומטריה, סטטיסטיקה, חשבון דיפרנציאלי, מתמטיקה שימושית, חשבונאות, מתמטיקה לעסקים או קורס נוסף באלגברה II. הקורס הרביעי לא חייב להיות ברמה גבוהה מהקורס אלגברה II. כל

תלמיד מחויב ללמוד לפחות קורס אחד במתמטיקה בשנת הלימודים האחרונה שלו בבית הספר (The revised school code, act 451 of 1976).

תכנית הלימודים במתמטיקה מאורגנת בשתי דרכים הקשורות זו בזו. מצד אחד, מפורטים התכנים לגבי כל אחד משלושה קורסים שעל כל אחד מהתלמידים ללמוד במהלך שנות הלימודים בתיכון: אלגברה I, אלגברה II, גיאומטריה וכן התכנים לגבי שני קורסי בחירה שעשויים להילמד כקורס רביעי – pre calculus וסטטיסטיקה. מצד שני, מאורגנת תכנית הלימודים בארבע קבוצות (strands) המתייחסות לתחומים מתמטיים שונים. בכל אחת מהקבוצות האלה מצוינים מספר סטנדרטים ועבור כל אחד מהסטנדרטים מפורטות הציפיות מהתלמיד אשר השלים את הסטנדרטים. בנוסף לכך, פורסם דוח הכולל הבהרות לגבי ציפיות אלה. ההבהרות כוללות גם דוגמאות לשאלות וכן העמקה לגבי התכנים המצוינים.

תכנית הלימודים אינה מתייחסת לחלוקה לרמות או להקבוצות. החלוקה לקבוצות על פי רמות למידה היא באחריות המחוז או בית הספר. ההתייחסות לרמות שונות יכולה להיות בצורה של מתן קורס רביעי ברמות שונות לתלמידים חזקים יותר או פחות, בחלוקה של הכיתה לקבוצות הומוגניות יותר כדי לאפשר למידה (דרישות הסיום אינן משתנות) וכן במתן קורסים נוספים (מעבר לארבעה הנדרשים) אשר יעזרו לתלמידים מתקשים להתמודד עם הקורסים הנדרשים על פי תכנית הלימודים.

להלן ארבע הקבוצות (strands) והסטנדרטים לגבי כל אחד מהן:

Organizational Structure

STRAND 1

Quantitative Literacy and Logic (L)

STANDARDS (and number of core expectations in each standard)

L1: Reasoning About Numbers, Systems and Quantitative Situations (13)

L2: Calculation, Algorithms, and Estimation (13)

L3: Mathematical Reasoning, Logic, and Proof (10)

STRAND 2

Algebra and Functions (A)

A1: Expressions, Equations, and Inequalities (16)

A2: Functions (16)

A3: Families of Functions (27)

STRAND 3

Geometry and Trigonometry (G)

G1: Figures and Their Properties (29)

G2: Relationships Between Figures (10)

G3: Transformations of Figures in the Plane (5)

STRAND 4

Statistics and Probability (S)

S1: Univariate Data— Examining Distributions (9)

S2: Bivariate Data— Examining Relationships (6)

S3: Samples, Surveys, and Experiments (3)

S4: Probability Models and Probability Calculation (4)

חשוב לציין, שארבע הקבוצות אשר פורטו אינן תואמות את החלוקה לקורסים המוצעים. הפירוט של כל אחד מהקורסים המופיע בתכנית הלימודים כולל פירוט של הסטנדרטים השונים הרלבנטיים לאותו קורס.

המחלקה לחינוך של מישגן ניסחה אוסף של 157 ציפיות לגבי תכנים במתמטיקה שיילמדו בתיכון (High School Content Expectations) לגבי הסטנדרטים השונים אשר כל אחד מהתלמידים אמור לעמוד בהם בסוף לימודיו בבית הספר התיכון. ציפיות אלה מתייחסות לשלושה קורסים במתמטיקה – אלגברה I, אלגברה II וגיאומטריה. תלמיד העומד בציפיות אלה ייחשב כמי שיש לו שליטה בכל אחד משלושת הקורסים. בנוסף נוסחו מסמכים המגדירים את הציפיות לגבי קורסי הבחירה pre calculus וסטטיסטיקה.

תפקידו של המחוז שבו נמצא בית הספר הוא לקבוע איך לעזור לתלמידים המתקשים בקורס כמו אלגברה II. המחוז יכול לתכנן קורסים בסיסיים יותר באלגברה שבהם התלמידים יעמיקו את ההבנות שלהם לגבי מושגים בסיסיים באלגברה וכן לאפשר זמנים של למידה אישית עם מורה לחיזוק ההבנה של נושאי הקורס. בנוסף לכך, תלמיד מתקשה יכול לבקש בנייה של תכנית אישית אשר במסגרתה הקורס אלגברה II יילמד במשך שנתיים. עבור קורס כזה התלמיד יקבל שני קרדיטים, כלומר אישור שהשלים חובותיו לשני קורסים במתמטיקה. מעבר לכך, על כל בית ספר לקבוע את דרכי ההוראה כך שיתאימו לתלמידים השונים הלומדים באותו בית הספר, תוך התייחסות לתלמידים המצליחים מאוד ולאלה המתקשים.

תלמידים עשויים לקבל אישור על סיום אחד מארבעת הקורסים הנדרשים עוד בזמן הלימודים בחטיבת הביניים, ובלבד שהקורס שהם למדו כיסה את הציפיות לגבי התכנים, כפי שהם נוסחו על ידי מחלקת החינוך. הבחינה לגבי שליטה בקורסים אלה צריכה להיות זהה לבחינה המקובלת בבית הספר התיכון וגם הציון הקובע אם התלמיד עבר את הקורס או לא צריך להיות זהה.

כל התלמידים מחויבים ללמוד את ארבעת הקורסים האלה. עם זאת, בית הספר או המחוז יכולים לקבוע כי על התלמידים ללמוד קורסים נוספים במתמטיקה. יש אפשרות לבניית תכנית אישית לתלמידים הנזקקים לכך, אך זאת על פי אישור מיוחד.

למחוזות השונים יש תפקיד נרחב לגבי גיבוש תכנית הלימודים. כל מחוז צריך לבנות את תכנית הלימודים הספציפית על בסיס רשימת הציפיות מהתלמידים לגבי הנושאים השונים, לקבוע את סדר לקיחת הקורסים ואת קצב הלמידה, לבחור את דרכי ההערכה של הקורסים השונים, לקבוע את תקופות הלימודים לאורך השנה (זמני חופשות) לקבוע ספרי לימוד ועוד. הציפיות מהתלמידים מפרטות מה התלמידים צריכים לדעת, על כל מחוז לגבש תכנית לגבי ה-איך. כל מחוז יכול להוסיף תכנים ונושאים אך לא ניתן לגרוע מהרשימה הנתונה. תכנית הלימודים תוכננה על בסיס מחקרים אשר מראים כי תלמידים אינם נוטים לנשור יותר בשל תכנית לימודים אשר דורשת מהם להשקיע יותר. להפך, לתלמידים בעלי יכולות שונות יש סיכוי גבוה יותר לעבור קורסים בעלי דרישות גבוהות לעומת קורסים בעלי דרישות נמוכות. גם תלמידים אשר לומדים במוסדות חינוך בעלי תכניות חינוך אלטרנטיביות נדרשים אותן הדרישות לגבי התוכן.

4. התכנים העיקריים של התכנית

בחלק זה אפרט את המטרות לגבי הידע והמיומנויות של כל אחד משלושת קורסי החובה המופיעים בתכנית הלימודים - אלגברה I, אלגברה II וגיאומטריה.

אלגברה

ההתייחסות לאלגברה היא כאל כלי תאורטי לניתוח ולתיאור של קשרים מתמטיים וכן ככלי עוצמתי למידול מתמטי ולפתרון בעיות של העולם האמיתי. הקורסים מסתמכים על ידע קודם של התלמידים ועל פיו הם פיתחו גישה כללית לחקר פונקציות ויכולים לזהות בעיות מתמטיות ובעיות אותנטיות, וגישה לפתרון בעיות כאלה הכוללות קשרים ליניאריים. כמו כן, התלמידים יכולים להבין ייצוגים גראפיים, מספריים, סימבוליים ומילוליים של דפוסים אלה ולעבור ביניהם.

קורסים אלה מיועדים להרחיב את הלמידה של חקר פונקציות וייצוגים ולכלול מערכות משוואות עם שלושה משתנים, סימון פורמלי של פונקציות וכן פיתוח נושאים העוסקים בניתוח נתונים עם שני משתנים כמו גרסיה ליניארית וקורלציה. כמו כן, הקורסים אמורים להרחיב ולהעמיק את הידע של התלמידים לגבי פונקציות ריבועיות ומעריכיות אחרות על ידי הוספת נושאים כמו כללי חזקות (כולל חזקות רציונאליות). בנוסף להרחבת הידע של התלמידים לגבי האלגברה, קורסים אלה גם מתקשרים

לנושאים הקשורים למספרים ולגיאומטריה על ידי למידה פורמאלית של מערכת המספרים הממשיים ותכונותיה ועל ידי הצגת נושאים בסיסיים מתורת המספרים. במסגרת הקורסים אלגברה I ואלגברה II, התלמידים יתנסו במתמטיקה באופן כללי ובאלגברה בפרט לא רק כחקר תאורטי של דפוסים מתמטיים וקשרים, אלא גם כשפה המאפשרת לנו להבין את הסמלים המתמטיים. מעבר לכך, התלמידים יפתחו הבנה שחשיבה מתמטית היא כלי נגיש ועוצמתי לפתרון בעיות של העולם האמיתי.

אלגברה I

הציפיות לגבי ידע התכנים של התלמידים באלגברה I נחלקות לשישה סטנדרטים:

(1) L1: הנמקה לגבי מספרים, מערכות, ומצבים כמותיים – מערכות מספרים

ותובנה מספרית, ייצוגים וקשרים

מערכות מספרים ותובנה מספרית

- התלמידים יכירו תכונות שונות המתאימות למערכות מספרים שונות ויזהו שינויים בתכונות במעבר בין מערכות המספרים השונות (משלמים חיוביים לשלמים, למספרים הרציונאליים ולממשיים).
- התלמידים יסבירו מדוע להופכי של מספר יש אותו הסימן כמו למספר בעוד שלמספר הנגדי של מספר יש סימן הפוך.
- התלמידים יסבירו איך תכונות של אסוציאטיביות (קיבוץ), קומוטטיביות (חילוף) ודיסטריבוטיביות (פילוג) כמו גם זהות ומספרים הופכיים/נגדיים שימושיים לחישובים אריתמטיים ואלגבריים.
- התלמידים יתארו את הסיבות להשפעות השונות שיש לכפל ב- או להעלאה בחזקה של מספר חיובי במספר קטן מ-0, מספר בין 0 ל-1 ומספר גדול מ-1.
- התלמידים ינמקו קשרים מספריים (למשל, יראו שסכום של מספרים זוגיים הוא זוגי, יראו שסכום n המספרים השלמים החיוביים הראשונים הוא $n(n+1)/2$).

ייצוגים וקשרים

- התלמידים יארגנו אוסף של נתונים בטבלה, דיאגרמה, גרף או גיליון נתונים ויסכמו אותם. התלמידים ימצאו דפוסים בהצגת הנתונים, וכן יבינו ויבקרו דרכי ייצוג שונות של נתונים באמצעי תקשורת שונים.

(2) L2: חישובים, אלגוריתמים ואומדן – חישובים תוך שימוש במספרים ממשיים

ומורכבים

- התלמידים יסבירו את המשמעות של ממוצע משוקלל ויסבירו את השימושים בו.
- התלמידים ישלטו בחישובים של ביטויים מספריים הכוללים חזקות; הם ישתמשו בכללי החזקה; יעריכו ביטויים מספריים הכוללים מעריכים רציונאליים או שליליים; התלמידים יעברו בקלות בין שורשים וחזקות.
- התלמידים ידעו שהמספר המדומה i הוא אחד משני הפתרונות ל: $x^2 = -1$.

(3) A1: ביטויים, משוואות ואי-שוויונים – בנייה, תרגום ומניפולציות על ביטויים, פתרון משוואות ואי-שוויונים

בנייה, פרושים ומניפולציה על ביטויים (לינאריים, ריבועיים, פולינומיאליים, בעלי חזקה ומעריכיים)

- התלמידים יתארו באופן מילולי ביטויים המוצגים באופן סימבולי, הם יכתבו ביטויים אלגבריים מתאורים מילוליים ויחשבו את הערך של ביטויים בהינתן ערכים למשתנים.
- התלמידים יכירו את התכונות של חזקות ושל שורשים וישמו אותן בביטויים אלגבריים.
- התלמידים יפרקו ביטויים אלגבריים לגורמים תוך שימוש, למשל בגורם המשותף הגדול ביותר.

פתרונות של משוואות ואי-שוויונים

- התלמידים יכתבו משוואות ואי-שוויונים עם משתנה אחד או שניים כדי לייצג סיטואציות שונות, ויפתרו אותם.
- התלמידים יקשרו בין משוואה נתונה עם משוואה שהאפסים שלה הם הפתרונות של המשוואה הנתונה.
- התלמידים יפתרו (וינמקו את שלבי הפתרון השונים) משוואות ואי-שוויונים לינאריים וריבועיים, כולל מערכות של עד שלוש משוואות לינאריות עם שלושה נעלמים. הם יישמו את הנוסחה לפתרון משוואה ריבועית, כנדרש.
- התלמידים יפתרו משוואות עם חזקות (למשל, $(x+1)^3 = 8$) ומשוואות הכוללות שורשים (כמו, $\sigma(3x-7) = 7$).
- התלמידים יפתרו משוואות ואי-שוויונים עם ערכים מוחלטים וינמקו את שלבי הפתרון.
- התלמידים יפתרו משוואות הכוללות מספר משתנים (עם מקדמים שהם מספרים או אותיות) וינמקו את הפתרון.

(4) A2: פונקציות – הגדרות, ייצוגים ותכונות של פונקציות, פעולות וטרנספורמציות עם פונקציות, ייצוגים של פונקציות, מודלים של סיטואציות מהעולם האמיתי תוך שימוש במשפחות של פונקציות.

הגדרות, ייצוגים ותכונות של פונקציות

- התלמידים יקבעו אם קשר נתון (בייצוג של הקשר, בייצוג סימבולי, טבלה או גרפי) הוא פונקציה, ואז יזהו את התחום והטווח של הפונקציה.
- התלמידים יקראו, יפרשו וישתמשו בכתוב המקובל לגבי פונקציות כדי לקבוע את ערך הפונקציה עבור ערך מסוים מהתחום.
- התלמידים ייצגו פונקציות בעזרת סימבולים, גרפים, טבלאות, דיאגרמות או מילים, ויתרגמו בין הייצוגים השונים.

- התלמידים יזהו שפונקציות עשויות להיות מוגדרות בעזרת ביטויים שונים מעל קטעים שונים מתחום ההגדרה.
- התלמידים יזהו שפונקציות עשויות להיות מוגדרות באופן רקורסיבי. הם יחשבו את הערכים של פונקציות פשוטות המוגדרות כך.
- התלמידים יזהו את האפסים של פונקציה, את הקטעים שבהם הפונקציה חיובית או שלילית ויתארו את התנהגות הפונקציה כאשר x שואף לאינסוף חיובי או שלילי, כאשר הפונקציה מיוצגת על ידי גרף או באופן סימבולי.
- התלמידים יזהו ויפרשו את התכונות העיקריות של פונקציה מהגרף שלה או מהנוסחה.

פעולות וטרנספורמציות על פונקציות

- התלמידים יאחדו פונקציות על ידי חיבור, חיסור, כפל וחילוק.
- התלמידים יישמו טרנספורמציות נתונות (למשל, שינוי אופקי או אנכי, מתיחה או כיווץ או שיקוף סביב הצירים) על פונקציות נתונות וייצגו אותן באופן סימבולי.
- התלמידים יקבעו האם לפונקציה מסוימת (הנתונה על ידי טבלה או גרף) יש פונקציה הפוכה ויזהו זוגות הפוכים פשוטים.

ייצוגים של פונקציות

- התלמידים יזהו פונקציה כחלק ממשפחה של פונקציות בהתבסס על הייצוג הגרפי או הסימבולי שלה. הם יזהו שלמשפחות שונות של פונקציות יש התנהגות אסימפטוטית שונה.
- התלמידים יתארו את הדפוסים של פונקציה אשר לה קצב שינוי קבוע (פונקציה לינארית) או מספר קצבי שינוי.
- התלמידים יכתבו את הצורות הסימבוליות הכלליות המאפיינות כל משפחה של פונקציות.

בניית מודלים למצבים מהחיים בעזרת משפחות של פונקציות

- התלמידים יזהו את משפחת הפונקציות המתאימה ביותר כדי לבנות מודל לסיטואציה נתונה מהחיים.
- התלמידים יתאימו את הצורה הסימבולית שבעזרתה נתונה משפחה של פונקציות, כך שזו תתאים לפרטים הייחודיים של סיטואציה נתונה.
- התלמידים ישתמשו בצורה הסימבולית הכללית שהותאמה לסיטואציה ויסיקו מסקנות לגבי הסיטואציה שעבודה בנו מודל.

(5) A3: משפחות של פונקציות – קווים ופונקציות ליניאריות, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות, פונקציות ריבועיות, פונקציות מעריכיות (כולל שורשים, פונקציות מהמעלה שלישית, הרביעית וכדומה) ופולינומים.

קווים ופונקציות ליניאריות

- התלמידים יכתבו את הצורה הסימבולית של פונקציות ליניאריות (סטנדרטי, נקודה-שיפוע, ושיפוע-חותך) בהינתן המידע המתאים, וידעו להמיר בין הצורות.
- התלמידים יסרטטו גרף של קווים (כולל כאלה מהצורה $y = kx + h$) בהינתן המידע הרלבנטי.
- התלמידים יקשרו את המקדמים של פונקציה ליניארית לשיפוע ולנקודות החיתוך עם הצירים של הגרף המתאים.
- התלמידים ימצאו משוואה של ישר המקביל או מאונך לישר נתון דרך נקודה. התלמידים יבינו וישתמשו בעובדה שלקווים מקבילים שאינם ניצבים יש שיפועים שווים, ושכפלת השיפועים של קווים מאונכים שאינם ניצבים היא (-1) .

פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

- התלמידים יכתבו את הצורה הסימבולית של פונקציה מעריכית ויסרטטו את הגרף שלה, בהינתן המידע המתאים.
- התלמידים יבינו את העובדה שהבסיס של פונקציה מעריכית קובע האם הפונקציה עולה או יורדת ואיך הבסיס משפיע על קצב הגדילה או ההאטה, וישתמשו בעובדה זו.
- התלמידים יקשרו פונקציות מעריכיות לתופעות אמיתיות כולל מחצית זמן חיים והכפלת הזמן.

משוואות ריבועיות

- התלמידים יכתבו את הצורה הסימבולית של פונקציה ריבועית ויסרטטו את הגרף שלה, בהינתן מידע מתאים.
- התלמידים יזהו את המרכיבים של פרבולה (קדקוד, ציר סימטריה, כיוון פתיחה) בהינתן הייצוג הסימבולי או הגרפי שלה ויקשרו מרכיבים אלה למקדמים של המשתנים של הפונקציה כאשר היא נתונה בצורה סימבולית.
- התלמידים ימירו פונקציות ריבועיות מצורה סטנדרטית לצורת קדקוד (vertex form) על ידי השלמה לריבוע.
- התלמידים יקשרו את מספר הפתרונות הממשיים של פונקציה ריבועית לגרף המתאים לפונקציה.
- התלמידים יבטאו פונקציות ריבועיות הנתונות בצורת קדקוד (vertex form) כדי לזהות את המינימום והמקסימום שלהן, ובצורת גורמים (factored form) כדי לזהות את האפסים שלה.

פונקציות חזקה (כולל שורשים, פונקציות ממעלה שלישית, רביעית וכדומה)

- התלמידים יכתבו את הצורה הסימבולית של פונקציות חזקה נתונה ויסרטטו גרף מתאים.
- התלמידים יבטאו קשרים ישירים והפוכים כפונקציות ויזהו את המאפיינים שלהם.
- התלמידים ינתחו את הגרפים של פונקציות חזקה תוך ציון סימטריה שיקופית או סיבובית.

פונקציות פולינומיאליות

- התלמידים יכתבו את הצורה הסימבולית של פונקציות פולינומיאליות פשוטות ויסרטטו את הגרף שלהן.
- התלמידים יבינו את ההשפעה שיש למעלת הפולינום, למקדם המוביל, למספר האפסים הממשיים על הגרף של פונקציה פולינומיאלית ממעלה הגבוהה מ-2.
- התלמידים יקבעו את מספר האפסים המקסימלי של פונקציה פולינומיאלית ויבינו את הקשרים בין נקודות החיתוך עם ציר x של גרף ואת כתיבת הפונקציה בצורת גורמים (factored form).

(6) S2: נתונים עם שני משתנים – ניתוח קשרים – קורלציות ורגרסיה ליניארית

- התלמידים יבנו דיאגרמת פיזור (scatterplot) לאוסף נתונים עם שני משתנים, יכתבו תוויות מתאימות לצירים ויבחרו קנה מידה מתאים.
- בהינתן דיאגרמת פיזור, התלמידים יזהו דפוסים, מקבצים וכן דוגמאות של נתונים חריגים. התלמידים יזהו מקרים של היעדר קורלציה, קורלציה חלשה וקורלציה גבוהה.
- התלמידים יעריכו ויפרשו מקדמי קורלציה של פירסון עבור דיאגרמת פיזור של אוסף נתונים בעל שני משתנים. התלמידים יזהו שקורלציה מודדת את עצמת הקשר הליניארי.
- התלמידים יבחינו בין קורלציה לבין סיבתיות. הם ידעו שקורלציה גבוהה אינה מעידה על קשר של סיבה-תוצאה. כמו כן יזהו התלמידים את התפקיד של משתנים "סמויים" (lurking variables) בקורלציה.

רגרסיה ליניארית

- עבור אוסף נתונים בעל שני משתנים - התלמידים ימצאו את קו הרגרסיה של הריבועים הפחותים על ידי הערכה ויזואלית וכן על ידי חישובים בעזרת משוואת קו הרגרסיה. הם יפרשו את שיפוע המשוואה לקו הרגרסיה.
- התלמידים ישתמשו בנוסחת הריבועים הפחותים לישר הרגרסיה לשם ניבוי.

אלגברה II

(1) L1: הנמקה לגבי מספרים, מערכות וסיטואציות כמותיות – ייצוגים וקשרים וכן מנייה והנמקה הסתברותית.

ייצוגים וקשרים

- התלמידים ישתמשו בסמלים מתמטיים (למשל, כיצד מציינים קטע או קבוצה) כדי לייצג קשרים כמותיים וסיטואציות.

מנייה והנמקה הסתברותית

- התלמידים יתארו, יסבירו ויישמו טכניקות מנייה שונות (למשל, מציאת מספר הסיסמאות בנות 4 אותיות, תמורות וקומבינציות). הם יקשרו את הנושא של קומבינציות למשולש פסקל, וכן ידעו כיצד להשתמש בכל אחת מהדרכים.
- התלמידים יגדירו ויפרשו ביטויים שונים מתחום ההסתברות (כמו למשל, סיכויים של מאורע).
- התלמידים יזהו ויסבירו תפיסות שגויות שונות בהסתברות.

(2) L2: חישובים, אלגוריתמים ואומדן – חישובים הכוללים שימוש במספרים ממשיים ומרוכבים, סדרות ואיטרציות, יחידות מידה, חישובים וקנה מידה, הבנה של שגיאה.

חישובים תוך שימוש במספרים ממשיים ומרוכבים

- התלמידים יסבירו את הקשר בין מספר לבין הלוגריתם בבסיס 10 שלו, וישתמשו בכך כדי לקשר כללים של לוגריתמים לאלה של חזקות בביטויים הכוללים מספרים.
- התלמידים יחברו, יחסרו ויכפלו מספרים מרוכבים. הם ישתמשו בצמוד המרוכב כדי לפשט מנה של מספרים מרוכבים.

סדרות ואיטרציות

- התלמידים ימצאו את האיבר ה-n בסדרה חשבונית, הנדסית או בסדרה פשוטה אחרת.
- התלמידים יחשבו סכומים של סדרות חשבוניות והנדסיות סופיות.
- התלמידים ישתמשו בתהליכים איטרטיביים בדוגמאות כמו חישוב ריבית דריבית או יישום פרוצדורות קירוב.

יחידות מידה, חישובים וקנה מידה

- התלמידים יתארו ויפרשו קשרים לוגריתמיים בהקשרים שונים כמו סולם ריכטר או יחידות של דציבל כדי לפתור בעיות יישומיות שונות.

הבנת השגיאה

- התלמידים יקבעו מהי מידת הדיוק הסבירה למדידה מסוימת בסיטואציה נתונה. הם יתארו דיוק תוך שימוש בספרות המשמעותיות או באחוז שגיאה. התלמידים יתארו כיצד שגיאות מועצמות בחישובים ויזהו שגיאה מצטברת בסיטואציות יישומיות שונות.
- התלמידים יתארו שגיאת עיגול או שגיאה הנובעת מהתעלמות מחלק מהספרות הימניות ביותר אשר מימין לנקודה העשרונית (שגיאת "קיצוץ").
- התלמידים ידעו מהי המשמעות של מובהקות סטטיסטית, טווח שגיאה (margin of error) וכן רמת ביטחון (confidence level).

(3) A1: ביטויים, משוואות, ואי-שוויונים – בנייה, פירוש ומניפולציות על ביטויים, פתרון משוואות ואי-שוויונים.

בנייה, פירוש ומניפולציות על ביטויים

- התלמידים יתארו באופן מילולי ביטוי הנתון באופן סימבולי, הם יכתבו ביטוי אלגברי מתאור מילולי וכן יקבעו את הערך של ביטויים בהינתן ערכי המשתנים.
- התלמידים יחברו, יחסרו, יכפלו ויפשוטו ביטויים פולינומיאליים וביטויים רציונאליים.
- התלמידים יחלקו פולינום בביטוי חד איבר.
- התלמידים יציגו ביטויים מעריכיים או ביטויים לוגריתמיים בעזרת ביטויים שקולים תוך שימוש בחוקי החזקה והלוגריתמים כולל הקשר ההפוך שבין חזקות ולוגריתמים.

פתרונות של משוואות ואי-שוויונים

- התלמידים יקשרו משוואה נתונה עם פונקציה אשר האפסים שלה הם הפתרונות של המשוואה.
- התלמידים יפתרו משוואות פולינומיאליות ומשוואות הכוללות ביטויים רציונאליים וינמקו את שלבי הפתרון.
- התלמידים יפתרו משוואות מעריכיות ולוגריתמיות וינמקו את שלבי הפתרון.
- התלמידים יפתרו משוואה הכוללת מספר משתנים (עם מקדמים שהם מספרים או אותיות) עבור משתנה נבחר וינמקו את שלבי הפתרון.
- התלמידים יכירו נוסחאות מוכרות (למשל, לחישוב השיפוע, המרחק בין שתי נקודות, ריבית דריבית וכדומה) וישתמשו בהן כמקובל, בסיטואציות יומיומיות.
- התלמידים ישתמשו בערכים מיוחדים עבור הפונקציה הטריגונומטרית ההפוכה כדי לפתור משוואות טריגונומטריות מעל קטעים מסוימים.

(4) A2: פונקציות – הגדרות, ייצוגים ותכונות של פונקציות, פעולות וטרנספורמציות עם פונקציות, ייצוגים של פונקציות, מודלים של סיטואציות אותנטיות תוך שימוש במשפחות של פונקציות.

הגדרות, ייצוגים ותכונות של פונקציות

- התלמידים יקבעו אם קשר נתון (בייצוג של הקשר, בייצוג סימבולי, טבלה או גרפי) הוא פונקציה, ואז יזהו את התחום והטווח שלהם.
- התלמידים יקראו, יפרשו וישתמשו בכתוב המקובל לגבי פונקציות כדי לקבוע את ערך הפונקציה עבור ערך מסוים מהתחום.
- התלמידים ייצגו פונקציות בעזרת סימבולים, גרפים, טבלאות, דיאגרמות או מילים, ויתרגמו בין הייצוגים השונים.
- התלמידים יזהו את האפסים של פונקציה, את הקטעים שבהם הפונקציה חיובית או שלילית ויתארו את התנהגות הפונקציה כאשר x שואף לאינסוף חיובי או שלילי, כאשר הפונקציה מיוצגת על ידי גרף או באופן סימבולי.
- התלמידים יזהו ויפרשו את התכונות העיקריות של פונקציה מהגרף שלה או מהנוסחה.

פעולות וטרנספורמציות על פונקציות

- התלמידים יאחדו פונקציות על ידי חיבור, חיסור, כפל וחילוק.
- התלמידים יישמו טרנספורמציות נתונות (למשל שינוי אופקי או אנכי, מתיחה או כיווץ או שיקוף סביב הצירים) לפונקציות נתונות וייצגו אותן באופן סימבולי.
- התלמידים יקבעו אם לפונקציה מסוימת (הנתונה על ידי טבלה או גרף) יש פונקציה הפוכה ויזהו זוגות הפוכים פשוטים.

משפחות של פונקציות

- התלמידים יזהו פונקציה כחלק ממשפחה של פונקציות בהתבסס על הייצוג הגרפי או הסימבולי שלה. הם יזהו שלמשפחות שונות של פונקציות יש התנהגות אסימפטוטית שונה.
- התלמידים יכתבו את הצורות הסימבוליות הכלליות המאפיינות כל משפחה של פונקציות.

בניית מודלים למצבים מהחיים

- התלמידים יזהו את משפחת הפונקציות המתאימה ביותר כדי לבנות מודל לסיטואציה נתונה מהחיים.
- התלמידים יתאימו את הצורה הסימבולית שבעזרתה נתונה משפחה של פונקציות, כך שזו תתאים לפרטים הייחודיים של סיטואציה נתונה.
- התלמידים ישתמשו בצורה הסימבולית הכללית שהותאמה לסיטואציה ויסקו מסקנות לגבי הסיטואציה שעבודה בנו מודל.

(5) A3: משפחות ופונקציות – פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות, פונקציות רציונאליות, פונקציות טריגונומטריות.

פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

- התלמידים יפרשו פונקציות הנתונות באופן סימבולי ויזהו את הגרפים של פונקציות לוגריתמיות.
- התלמידים יישמו תכונות של פונקציות לוגריתמיות ומעריכיות.

פונקציות רציונאליות

- התלמידים יכתבו את הייצוג הסימבולי של פונקציה ויסרטטו את הגרף של פונקציות רציונאליות פשוטות.
- התלמידים ינתחו גרפים של פונקציות רציונאליות פשוטות ויבינו את הקשרים בין האפסים של המונה ושל המכנה לבין נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים, האסימפטוטות והתחום.

פונקציות טריגונומטריות

- התלמידים ישתמשו במעגל היחידה כדי להגדיר סינוס וקוסינוס, הם יאמדו ערכים של סינוס וקוסינוס, וכן ישתמשו בסינוס ובקוסינוס כדי להגדיר את הפונקציות הטריגונומטריות האחרות. בנוסף לכך, התלמידים יסבירו מדוע הפונקציות הטריגונומטריות הן מחזוריות.
- התלמידים ישתמשו בקשר שבין מעלה ורדיאן כדי לפתור בעיות.
- התלמידים ישתמשו במעגל היחידה כדי לקבוע את הערך המדויק של סינוס וקוסינוס למכפלות במספר שלם של $\frac{\pi}{6}$ ושל $\frac{\pi}{4}$.
- התלמידים יסרטטו את הגרף של הפונקציות סינוס וקוסינוס. הם ינתחו את הגרפים תוך ציון התחום, טווח, מחזוריות, עצמה ומיקום המינימום והמקסימום.
- התלמידים יסרטטו טרנספורמציות של פונקציות טריגונומטריות פשוטות (הכוללות שינוי במחזוריות, בעצמה, במופע ובקו האמצע) ויבינו את הקשר שבין קבועים בנוסחה לבין הגרף לאחר הטרנספורמציה.

(6) G1: צורות ותכונותיהן – חתכים של חרוט ותכונותיהם.

חתכים של חרוט ותכונותיהם

- התלמידים ימצאו את המשוואה של מעגל בהינתן המרכז והרדיוס שלו. הם ימצאו את המרכז והרדיוס בהינתן משוואת המעגל.
- התלמידים יזהו ויבחינו בין ייצוגים גיאומטריים של פרבולה, מעגל, אליפסה והיפרבולה. הם יתארו את הסימטריה שלהן ויסבירו כיצד אלה קשורים לחרוט.
- בהינתן משוואות מתאימות, התלמידים יסרטטו גרפים של אליפסה ושל היפרבולה אשר ציריהן מקבילות לצירי ה-x וה-y.

(7) S1: נתונים בעלי משתנה אחד – ניתוח התפלגויות – יצירה ותרגום של תרשימים, מידות של מרכז ושונות, ההתפלגות הנורמלית.

ייצור תרשימים ופרושם

- התלמידים יבנו ויפרשו דיאגרמת נקודות, היסטוגרמות, היסטוגרמת שכיחות מותנית, גרף עמודות, דיאגרמת קופסה (box plot) כולל תוויות וקנה מידה מתאימים. הם יקבעו אלו תרשימים מתאימים לסוגים שונים של נתונים, ישוּוּ בין אוספים שונים של נתונים ויפרשו את ההבדלים על סמך גרפים ו-summary statistics.
- בהינתן התפלגות של משתנה באוסף נתונים, התלמידים יתארו את הצורה שלו, כולל סימטריה, ויסבירו איך הצורה קשורה למדדי מרכז (ממוצע וחציון) ולמדדי שונות (טווח וסטיית התקן), תוך התייחסות מיוחדת להשפעה שיש לנתונים חריגים על מדדים אלה.

מדדי מרכז ושונות

- התלמידים יחשבו ויפרשו מדדי מרכז, כולל: ממוצע, חציון ושכיח. הם יסבירו שימושים, יתרונות וחסרונות של כל אחד מהמדדים בהינתן אוסף נתונים וההקשר שלו.
- התלמידים יאמדו את מקום הממוצע, החציון והשכיח בהתפלגויות סימטריות ומוטות ומהתפלגות שכיחות או היסטוגרמה.

ההתפלגות הנורמלית

- התלמידים יסבירו את המושג התפלגות ואת הקשר בין summary statistics עבור אוסף נתונים לבין הפרמטרים של ההתפלגות.
- התלמידים יתארו מאפיינים של ההתפלגות הנורמלית, כולל הצורה שלה והקשר בין הממוצע, החציון והשכיח.
- התלמידים ידעו וישתמשו בעובדה שבהתפלגות נורמלית, בערך 68%, 95% ו-99.7% מהנתונים הנמצאים בין אחת, שתיים או שלוש סטיות תקן מהממוצע בהתאמה.
- התלמידים יחשבו ציוני z (z-score), ישתמשו בהם כדי לזהות נתונים חריגים וכן על מנת לקבל החלטות מושכלות.

(8) S3: מדגמים, סקרים וניסויים – איסוף נתונים וניתוחם

אוסף נתונים וניתוחם

- התלמידים יכירו את המשמעויות של מדגם של אוכלוסיה ומפקד אוכלוסין ויבחינו בין סטטיסטיקת מדגם (תורת הדגימה) לבין פרמטרים של האוכלוסייה.
- התלמידים יזהו מקורות אפשריים להטיה באוסף נתונים ויכירו שיטות דגימה שונות. הם יתארו איך אפשר להקטין את ההטיה ולשלוט בה על ידי מדגם מקרי. הם יסבירו את ההשפעה שיש להטיה על המסקנות מניתוח כזה של נתונים.

- התלמידים יבחינו בין מחקר תצפיתי למחקר ניסויי ויזהו בתוך הקשר את המסקנות שאפשר להסיק מכל אחד מהם.

(9) S4: מודלים בהסתברות וחישובים – הסתברות, יישומים וייצוגים

הסתברות

- התלמידים יבנו מרחב מדגם בסיטואציות פשוטות (למשל, הטלת שני מטבעות, זריקת שתי קוביות והתייחסות לסכום המספרים).
- התלמידים יגדירו מאורעות זרים, מאורעות בלתי תלויים, מאורעות תלויים, מאורעות מורכבים, מאורעות משלימים והסתברות מותנית. הם ישתמשו בהגדרות כדי לחשב הסתברויות.

יישומים וייצוגים

- התלמידים יחשבו הסתברויות של מאורעות תוך שימוש בדיאגרמות עץ, נוסחאות לחישוב תמורות וקומבינציות, דיאגרמות וון או שיטות מנייה אחרות.
- התלמידים ישתמשו במושגים בהסתברות בסיטואציות פרקטיות, כמו כאלה הקשורות בכלכלה, בבריאות, באקולוגיה או באפידמיולוגיה כדי לקבל החלטות בצורה מושכלת.

גיאומטריה

הנחת היסוד של קורס זה היא שבעולמנו כיום, כאשר הטכנולוגיה משתנה ומשתפרת בקצב מהיר, למידה עשירה של לוגיקה והוכחות במתמטיקה חשובה מאוד לפיתוח יכולות הנמקה ולקבלת החלטות. למידת גיאומטריה מספקת לתלמידים הזדמנות לפתח מיומנויות של הנמקה ושל הוכחות פורמליות. בנוסף לכך היא עוזרת לתלמידים לתאר, לנתח ולהכיר ביופי שבכך. חשיבה גיאומטרית היא כלי עוצמתי להבנה ולפתרון של בעיות מתמטיות ושימושיות ועשויה לכלול דרכים חלופיות להנמקה מתמטית, וזאת מעבר לאלגברה, הכוללת הנמקה אנליטית ומרחבית.

הקורס בגיאומטריה מסתמך על לימודי הגיאומטריה בחטיבת הביניים. הציפייה היא שבוגרי חטיבת הביניים ידעו לזהות, לסווג וליישם תכונות של צורות גיאומטריות בסיסיות, שידעו משפטים בסיסיים העוסקים בחפיפה או דמיון ויישמו אותם, שיבינו בניות בסיסיות בעזרת מחוגה וסרגל וימצאו את השטח והנפח של צורות וגופים בסיסיים.

במהלך לימודי הגיאומטריה בתיכון התלמידים ממשיכים לפתח הנמקה אנליטית ומרחבית. הם אמורים ליישם את ידיעותיהם לגבי צורות דו ממדיות לגבי גופים תלת ממדיים בהקשרים של העולם האמיתי, לבנות מיומנויות של ראייה מרחבית ולהעמיק את ההבנות שלהם לגבי הצורות ולגבי הקשרים בין הצורות. למידת הגיאומטריה כוללת גם למידה של טריגונומטריה במקרה של משולשים ישרי זווית אשר תתפתח

דרך קשרי דמיון. נושאים אלה מאפשרים התייחסות לבעיות מהעולם האמיתי אשר יעזרו לתלמידים להרחיב את מיומנויות ההנמקה שלהם. ההוראה אמורה לעודד תלמידים ליצור קשרים שונים, כמו קשרים בין הנמקה אלגברית לסיטואציות גיאומטריות וקשרים בין טרנספורמציות של פונקציות ליניאריות וריבועיות לטרנספורמציות גיאומטריות.

המטרה היא שדרך למידה של לוגיקה פורמלית ושל הוכחות התלמידים יבינו את המערכת האקסיומטית אשר עומדת בבסיסה של המתמטיקה, דרך ההצגה וההתפתחות של טענות, הגדרות ומשפטים. זה הכרחי שתלמידים יפתחו מיומנויות של הנמקה דדוקטיבית אשר יוכלו להיות מיושמים בהקשרים של פתרון בעיות מתמטיות ופתרון בעיות אותנטיות.

הציפיות לגבי התכנים בגיאומטריה מחולקים לשבעה סטנדרטים, ובכל אחד מהם מפורטים מספר נושאים:

(1) L1: הנמקה לגבי מספרים, מערכות וסיטואציות כמותיות – מערכות מספרים ותובנה מספרית וכן ייצוגים וקשרים רלבנטיים. למשל, אחת הציפיות מהתלמידים תחת סטנדרט זה היא שיוכלו להסביר את החשיבות של מספרים אי רציונאליים מסוימים לגבי טריגונומטריה במשולשים ישרי זווית ואת החשיבות של המספר π בשל התפקיד שיש לו בקשרים במעגלים.

(2) L2: חישובים, אלגוריתמים ואומדן – יחידות מידה, חישובים וקנה מידה. הציפייה תחת סטנדרט זה היא שהתלמידים ימירו יחידות מידה בתוך ובין מערכות, יסבירו איך פעולות אריתמטיות על מדידות ישפיעו על יחידות המידה ויבצעו חישובים נכונים.

(3) L3: הנמקה מתמטית, לוגיקה והוכחות. חלק מהציפיות לגבי הוכחות כוללות את המבנה הבסיסי של הוכחה של טענות "אם... אז..." בניית הוכחות על דרך השלילה, שימוש בדוגמאות נגדיות במקרים מתאימים, הסבר ההבדלים בין תנאים הכרחיים ומספיקים במשפטים מתמטיים.

(4) G1: צורות ותכונותיהן – קווים וזוויות, גיאומטריה אויכלידית וגיאומטריה על לוח קואורדינטות, משולשים ותכונותיהם, משולשים בטריוגונומטריה, מרובעים ותכונותיהם, מצולעים אחרים ותכונותיהם, מעגלים ותכונותיהם, גופים תלת ממדיים. (5) G2: קשרים בין צורות. קשרים בין נוסחאות לחישובי שטחים ונפחים, קשרים בין ייצוגים דו ממדיים ותלת ממדיים, חפיפה ודמיון.

(6) G3: טרנספורמציות של צורות במישור – טרנספורמציות איזומטריות שומרות מרחק, טרנספורמציות שומרות צורה: הרחבות ואיזומטריות.

להלן תקצירי החוקים העוסקים בהערכה לגבי תכנית הלימודים במישיגן לגבי הקורסים במתמטיקה.

380.1278(a)(4)(b) – כל מחוז או בית ספר ציבורי יקבעו באורח מבוסס באיזו מידה התלמיד מילא את חובותיו לגבי כל קורס או בחלק ממנו על פי מבחנים אשר פותחו או נבחרו על ידי המחלקה לחינוך או על פי מבחן אחד או יותר אשר נבחרו או פותחו על ידי המחוז או בית הספר הציבורי, ואשר מודדים את הבנת הציפיות על ידי התלמיד בתחומי התוכן הרלבנטיים לאותו הקורס.

380.1278(b)(1)(d) – תוך שלוש שנים מיום פרסום החוקים (כלומר בשנת 2009) יפותחו או ייבחרו מבחנים אשר ישמשו את מחוזות בתי הספר או בתי הספר השונים כדי לקבוע אם תלמיד מילא את חובותיו לגבי הקורס. המבחנים בכל קורס ימדדו את הבנת הציפיות על ידי התלמיד בתחום התוכן הרלבנטי לקורס.

388/1704b – מבחן מסכם של משיגן. לאחר שנת 2006, כל אחד מתלמידי כיתות יא ייבחן במבחן מסכם של מדינת משיגן. תלמיד אשר לא יעבור את המבחן יוכל להיבחן פעם נוספת בשנה שלאחר מכן. מטרת המבחן – להעריך את ביצועי התלמיד במתמטיקה, במדעים, במדעי החברה (היסטוריה של ארה"ב, היסטוריה כללית, גיאוגרפיה, כלכלה והממשל בארה"ב) ובאנגלית (קריאה וכתובה) למטרה של שיפור ההישגים האקדמיים ולשם קביעת סטנדרטים אחידים של מסוגלות לגבי כלל התלמידים במדינה. ההמלצה כיום היא להשתמש במבחן סיום קורס אשר נכתב על ידי מחלקת החינוך. ציון המבחן יהווה לא יותר מ-25%-20% מהציון הסופי של הקורס. הציון הכולל יכול מרכיבים שונים, כמו הכנת שיעורי בית, מבדקים נוספים אשר נלקחו במסגרת הקורס, השתתפות בכיתה, פרויקטים ומשימות שנעשו על ידי התלמיד במסגרת הקורס. לגבי מבחן שנקבע או נכתב על ידי מחלקת החינוך, המחלקה תקבע מהו הציון העובר. המחוז יקבע מהו הציון העובר של הקורס.

עד אשר יהיו מוכנים מבחני ההערכה של הציפיות, בתי הספר יכולים לבחור בדרכים שונות להערכה. למשל: מספר בחנים קצרים במהלך היחידה, הערכה המתייחסת למכלול הציפיות מהתלמיד והכוללת את מבחן סוף הקורס אשר נכתב על ידי המחלקה לחינוך, מבחן בכתב לצד מבחן פעולה, השתתפות, פורטפוליו, עבודה או מצגת לגבי נושאים שונים שנלמדו בקורס.

המלצה נוספת היא שבמהלך לימודיהם בכיתה יא, יבחנו התלמידים כדי לבדוק את המוכנות שלהם להמשך לימודים במכללות (מבחן ACT). מבחן זה אינו בודק את כל הציפיות אשר נוסחו, ובכל מקרה ניתן רק בכיתה יא. לפיכך מחלקת החינוך תצטרך לבחון בכל שנה מהן הציפיות אשר לא נבדקו על ידי מבחן זה, כך שיוכל להיכתב מבחן אשר יבטיח בחינה של כל הציפיות הנדרשות מהקורס.

שיעורים בתכנית ייחודית – Advanced Placement Program (CollegeBoard, 2008) בבתי ספר שונים בארצות הברית נהוג כיום ללמד קורסים שונים אשר מטרתם היא לעזור להצליח טוב יותר במכללות. הארגון College Board הוא ארגון ללא מטרת רווח אשר דוגל במצוינות ובמתן הזדמנויות מתאימות לכל תלמיד. בפרט, מעודד את המורים לאתגר תלמידים כך שילמדו ברמה גבוהה יותר, כזו אשר תיתן להם הזדמנות להצליח יותר במכללות ובאוניברסיטאות. ארגון זה מציע כ-37 קורסים שונים ללמידה בתיכון, שלושה מהם במתמטיקה – שני קורסים בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי (Calculus) ואחד בסטטיסטיקה. עבור כל קורס נבנה מבחן מתאים המורכב משאלות רב ברירה ומשאלות פתוחות. הציון האפשרי הניתן הוא מספר בין 1-5, כאשר ציון 5 מעיד על הצלחה רבה (extremely well qualified) וציון 1 – על אי הצלחה (not recommended). עבור קורסים אלה התלמיד עשוי לקבל קרדיט כחלק מלימודים אקדמיים בעתיד.

על פי נתונים שהציג משרד החינוך האמריקאי לגבי שנת 2007, שיעור תלמידי התיכון הניגשים למבחן ה-AP במתמטיקה במדינת מישגן הוא 8.1%, זאת לעומת 9.4% בקרב תלמידי התיכון בכל ארה"ב. שיעור התלמידים אשר משיגים במבחן זה ציון של 3 או יותר במישגן הינו 5.3% לעומת 5.5% בקרב כלל תלמידי התיכון בארה"ב.

פילוסופיה כללית. מטרתם המרכזית של שני הקורסים של חדו"א היא פיתוח ההבנה של מושגים הקשורים לנושא תוך התנסות בשיטות ויישומים רלבנטיים. הקורסים מדגישים גישה רב-ייצוגית לחדו"א, כאשר המושגים, התוצאות והבעיות מוצגים באופן גרפי, מספרי, אנליטי ומילולי. הקשרים בין הייצוגים השונים חשוב. הקורס calculus BC הוא הרחבה של calculus AB ולא העמקה שלו. הלמידה של מושגים שונים כוללת העמקה זהה. הדגש של הקורסים אינו מניפולציות או זכירה אלא הדגשת מושגים רחבים ושיטות הישימות לשימושים שונים.

מטרות:

- התלמידים אמורים להיות מסוגלים לעבוד עם פונקציות המיוצגות בדרכים שונות: ייצוג גרפי, מספרי, אנליטי או מילולי. עליהם להבין את הקשרים בין הייצוגים השונים.
- התלמידים אמורים להבין את משמעות הנגזרת במונחים של קצב שינוי ואומדן לינארי מקומי ואמורים להיות מסוגלים להשתמש בנגזרות לפתור בעיות שונות.
- התלמידים אמורים להבין את המשמעות של אינטגרל מסוים הן כגבול של סכומי רימן והן כסכום מצטבר של שינוי וכן הם אמורים להיות מסוגלים להשתמש באינטגרלים כדי לפתור מגוון בעיות.
- התלמידים אמורים להבין את הקשרים בין הנגזרת והאינטגרל המסוים כפי שהם באים לידי ביטוי בשני החלקים של המשפט המרכזי של החשבון האינטגרלי והדיפרנציאלי.

- התלמידים אמורים להיות מסוגלים לתקשר מתמטית ולהסביר פתרונות לבעיות הן מילולית והן במשפטים כתובים.
- התלמידים אמורים להיות מסוגלים לבנות מודל מתמטי לתאור מצב מתחום הפיסיקה בעזרת פונקציות, משוואות דיפרנציאליות או אינטגרלים.
- התלמידים אמורים להיות מסוגלים להשתמש בטכנולוגיה בתהליך של פתרון בעיות, בניסויים כדי לפרש תוצאות וכדי לתמוך במסקנות.
- התלמידים אמורים להיות מסוגלים לקבוע את הסבירות של פתרונות, כולל סימון, גודל, דיוק יחסי ויחידות מידה.
- התלמידים אמורים להיות מסוגלים לפתח הערכה לחדו"א כגוף ידע קוהרנטי וכהישג אנושי.

דרישות קדם

השלמה של ארבע שנות לימוד מתמטיקה המיועדת לבית הספר העל יסודי, כולל קורסים באלגברה, גיאומטריה, טריגונומטריה, גיאומטריה אנליטית ופונקציות אלמנטריות. פונקציות אלה כוללות פונקציות לינאריות, פולינומיאליות, רציונאליות, מעריכיות, לוגריתמיות, טריגונומטריות, פונקציות טריגונומטריות הפוכות, ופונקציות המוגדרות בחלקים. בפרט, התלמיד אמור להכיר תכונות של פונקציות, אלגברה של פונקציות וגרפים של פונקציות. התלמידים אמורים גם להבין את השפה של הפונקציות (תחום וטווח, פונקציה זוגית ואי זוגית, סימטריה, אפסים, חיתוך וכדומה), להכיר את הערכים של פונקציות טריגונומטריות עבור ערכי x מסוימים.

רשימת הנושאים בשני הקורסים

הקורס Calculus BC כולל את כל הנושאים המופיעים בקורס Calculus AB ונושאים נוספים. הנושאים אשר מסומנים ב - * או ב - + מיועדים להילמד בקורס Calculus BC בלבד. סדר הופעת הנושאים נתון לשיקולי המרצה או רכז התכנית.

I. פונקציות, גרפים וגבולות

ניתוח גרפים. הדגש הוא על הקשר בין גיאומטריה ומידע אנליטי ועל השימוש בחדו"א כדי לנבא ולהסביר התנהגות לוקלית וגלובלית של פונקציה.

גבולות של פונקציות (כולל גבולות חד-צדדיים)

- הבנה אינטואיטיבית של תהליך ההגבלה ;
- חישוב גבולות תוך שימוש באלגברה ;
- אומדן גבולות מנתונים הנתונים על ידי גרפים או טבלאות.

אסימפטוטות והתנהגות לא חסומה

- הבנת אסימפטוטות במונחים של התנהגות גרפית ;
- תיאור התנהגות אסימפטוטית במנחים של גבולות הכוללים אינסוף ;

- השוואת גדלים יחסיים של פונקציות ושל קצב השינוי שלהן (למשל, השוואה בין גדילה מעריכית, פולינומיאלית ולוגריתמית).

רציפות כתכונה של פונקציה

- הבנה אינטואיטיבית של רציפות;
- הבנת רציפות במונחים של גבולות;
- הבנה גיאומטרית של גרפים של פונקציות רציפות;
- * **פונקציות פרמטריות, פולריות וקטוריות.** חקירת עקומים במישור כולל אלה המיוצגים באופן פרמטרי, פולרי וקטורי.

II. נגזרות

מושג הנגזרת

- נגזרת המיוצגת באופן גרפי, מספרי ומילולי;
- נגזרות המיוצגות כקצב שינוי;
- נגזרות המוגדרות כגבול של מנת ההפרשים;
- קשר בין דיפרנציאליות ורציפות.

נגזרת בנקודה

- שיפוע של עקום בנקודה. שימוש בדוגמאות כולל נקודות שבהן משיקים מאונכים ונקודות ללא משיקים;
- ישר משיק לעקום בנקודה וקירוב לינארי מקומי;
- קצב שינוי מיידי כגבול של קצב שינוי ממוצע;
- קירוב לקצב השינוי מגרפים ומטבלאות ערכים.

נגזרת כפונקציה

- מאפיינים מתאימים של הגרפים של f ושל f' ;
- קשר בין התנהגות עולה ויורדת של פונקציה והסימן של f' ;
- משפט הערך הממוצע והפרוש הגיאומטרי שלו;
- משוואות הכוללות נגזרות. ייצוג תיאורים מילוליים בעזרת משוואות, כולל נגזרות, ולהפך.

נגזרות שניות

- מאפיינים מתאימים של גרפים של f, f', f'' ;
- הקשר בין קמירות וקעירות של f והסימן של f'' ;
- נקודות פיתול במקומות בהם הקמירות או הקעירות משתנה.

יישומים של נגזרות

- ניתוח עקומים, כולל ציון מונוטוניות וקמירות;
- + ניתוח של עקומים מישוריים המיוצגים בדרך פרמטרית, פולרית, וקטורית, כולל מהירות ותאוצה;
- אופטימיזציה, נקודות קיצון מוחלטת (גלובלית) ויחסית (לוקלית);
- מידול קצב השינוי, כולל בעיות קצב קשורות;
- מציאת נגזרת של פונקציה הפוכה;
- פרוש של הנגזרת כקצב השינוי בהקשרים יישומיים שונים, כולל מהירות ותאוצה;
- פירוש גיאומטרי של משוואות דיפרנציאליות;
- + פתרונות נומריים של משוואות דיפרנציאליות תוך שימוש בשיטת אוילר;
- + כלל לופיטל, כולל שימוש בו לקביעת גבולות והתכנסות של אינטגרלים לא אמיתיים וטורים.

חישובי נגזרות

- הכרת נגזרות של פונקציות בסיסיות, כולל חזקות, מעריכיות, לוגריתמיות, טריגונומטריות; ופונקציות טריגונומטריות הפוכות;
- כללי גזירה עבור סכומים מכפלות ומנות של פונקציות;
- כללי שרשרת ונגזרת של פונקציה סתומה;
- + נגזרות של פונקציות פרמטריות, פולריות וקטוריות.

III. אינטגרלים

פרושים ותכונות של אינטגרלים מוחלטים

- אינטגרל מוחלט כגבול של סכומי רימן;
- התייחסות לאינטגרל מוחלט של קצב שינוי של כמות מעל קטע כשינוי הכמות מעל הקטע: $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$;
- תכונות בסיסיות של אינטגרלים מוחלטים (כולל, למשל, חיבוריות ולינאריות).

* **ישומים של אינטגרלים.** משתמשים באינטגרלים כדי לבנות מודלים מתמטיים לתופעות הקשורות בפיסיקה, ביולוגיה או כלכלה. התלמידים צריכים להתאים את הידע שלהם ואת הטכניקות המוכרות להם כדי לפתור בעיות יישומיות דומות. הדגש הוא על שימוש בקירוב של סכום רימן וייצוג הגבול שלו כאינטגרל מסוים. כדי ליצור בסיס משותף, יישומים מסוימים אמורים לכלול מציאת שטח של אזור, נפח של גוף עם חתכים ידועים, מציאת הערך הממוצע של פונקציה, המרחק שעבר חלקיק לאורך ישר ושינוי מצטבר מקצב של שינוי.

המשפט המרכזי של החשבון האינטגרלי והדיפרנציאלי.

- שימוש במשפט כדי לאמוד את הערך של אינטגרלים מוחלטים;
- שימוש במשפט כדי לייצג אנטי-נגזרת מסוימת וכדי לייצג את הניתוח האנליטי והגרפי של הפונקציות.

טכניקות של אנטי-דיפרנציאליות

- אנטי-נגזרות הנובעות ישירות מנגזרות של פונקציות בסיסיות;
- + אנטי-נגזרות על ידי החלפת המשתנים (כולל שינוי של הגבולות לאינטגרלים מוחלטים);
- + אינטגרלים לא אמיתיים (כגבולות של אינטגרלים מוחלטים).

יישומים של אנטידיפרנציאליות

- מציאת אנטי-נגזרות מסוימות תוך שימוש בתנאי פתיחה, כולל יישומים לתנועה לאורך קו;
- פתרון של משוואות דיפרנציאליות הניתנות להפרדה ושימוש בהן לצרכי בניית מודלים (כולל חקירת המשוואה $y' = ky$ וגידול מעריכי);
- פתרון משוואות דיפרנציאליות לוגיסטיות ושימוש בהן לשם כתיבת מודלים.
- **קירובים נומריים לאינטגרלים מוחלטים.** שימוש בסכומי רימן וסכומי טרפז לקירוב של אינטגרלים מוחלטים של פונקציות המיוצגות באופן אלגברי, גרפי, ועל ידי טבלת ערכים.

* IV. קירובים פולינומיאליים וטורים

- **המושג טור.** טור מוגדר כסדרה של סכומים חלקיים, והתכנסות מוגדרת במונחים של הגבול של הסדרה של סכומים חלקיים. אפשר להשתמש בטכנולוגיה כדי לחקור התכנסות והתבדרות.
- טור של קבועים;
- דוגמאות אשר יעוררו מוטיבציה, כולל התרחבות דצימלית;
- טורים גיאומטריים ויישומים שלהם;
- טורים הרמוניים;
- טורים מתחלפים עם חסם שגיאיה;
- מונחים של טורים כמו שטחי מלבנים והקשר שלהם לאינטגרלים לא אמיתיים;
- מבחן היחס להתכנסות והתבדרות;
- השוואת טורים לבחינת התכנסות או התבדרות.

*** טורי טיילור**

- קירובים פולינומי טיילור עם הצגה גרפית של התכנסות;
- טורי מק לורן וטורי טיילור הכלליים שמרכזם ב- $x = a$;
- טורי טיילור לפונקציות e^x , $\sin x$, $\cos x$, $1/(1-x)$;
- מניפולציות פורמליות של טורי טיילור וקיצורים לחישוב טורי טיילור;
- פונקציות המוגדרות על ידי טורי חזקה;
- חסם שגיאה של לגראנז' לפולינומי טיילור.

שימוש במחשבוני גרפיים

כל הגופים המעורבים בחינוך מתמטי, כמו National Council of Teachers of Mathematics, Mathematics Association of America, ו-Mathematical Sciences Education Board of the National Academy of Sciences, ממליצים על השימוש במחשבוני להוראת המתמטיקה וכן לבחינת התלמידים.

השימוש במחשבון גרפי בקורסים של תכנית AP נחשבת כחלק אינטגרלי של הקורס. התלמידים אמורים להיעזר במחשבוני ברמה יומית, כך שישלטו בשימוש בהם. יחד עם זאת, התלמידים חייבים גם להגיע לשליטה בטכניקות חישוב הנעשות ללא מחשבוני, ולהיעזר בהם במקרים בהם השימוש במחשבון אינו יעיל או שאינו מתאים. בשל ההתפתחות המהירה במחשבוני גרפיים, נוסחה רשימת דרישות מהטכנולוגיה שבה ישתמשו במהלך הלימודים והמבחנים וכן רשימה של הגבלות לגבי השימוש בטכנולוגיה במבחנים. הרשימה מופיעה בקובץ Calculus Course Description (CollegeBoard, 2008).

בקובץ זה גם אפשר לראות דוגמאות למבחני סיכום של הקורסים האלה.

דוגמאות לפעילויות המומלצות על ידי תכנית הלימודים

השיעור שנבחר להוות דוגמה לשיעור בנושא של חפיפת משולשים בתכנית הלימודים לקוח מכתב העת Mathematics Teacher (Oct., 2001). במסגרת השיעור המורה אמור להציג לתלמידים את הבעיה הבאה: לורנס עובד בחברה המייצרת רעפים משולשים. תפקידו של לורנס הוא לוודא שכל הרעפים הם אכן באותו הגודל. לורנס עצלן והוא מחפש את הדרך הקלה ביותר להבטיח שהם אכן שווים בגודלם. עזרו ללורנס למצוא את הדרך הקלה ביותר לוודא ששני משולשים שווים בגודל.

התלמידים אמורים להתייחס לבעיה, ובמסגרת הדיון שמתפתח המורה אמור לחזור על המושג חפיפה של משולשים. המורה אמור להעלות את השאלה, אם לורנס אמור למדוד את כל הצלעות כדי לוודא ששני משולשים הם חופפים. לאחר הדיון המורה יכתוב את ההשערה "אם לשני משולשים יש צלע אחת בעלת אורך שווה, המשולשים

חופפים". התלמידים ישתמשו בכלים שונים (רצועות, למשל) כדי לבחון את ההשערה. אם לא הועלתה דוגמה נגדית כדי לסתור את הטענה, המורה אמור לצייר דוגמה כזאת. במהלך השיעור המורה אמור להעלות השערות נוספות לגבי חפיפה של משולשים (תחילה לגבי נתון אחד – צלע או זווית, לאחר מכן לגבי שני נתונים ולבסוף לגבי שלושה נתונים) והתלמידים אמורים לבחון אותן באופן אמפירי על ידי חיפוש דוגמה נגדית. אפשר גם לדון במקרה של משולש ישר זווית.

חשוב לציין, שבתכנית לא מצוין במפורש כי יש לדון בצורך שבמשפטי החפיפה, וכי השיעור המוצע הוא דוגמה אפשרית בעת למידת המשפטים.

דוגמאות לשאלות המתאימות לציפיות תוכן ספציפיות – (High School Content) (Expectations – HSCE)

הדרישות הבאות מנוסחות בתכנית הלימודים כחלק מהציפיות לגבי תוכן מהתלמידים בקורס אלגברה I.

1. HSCE A1.2.2: Associate a given equation with a function whose zeros are the solutions of the equation.

הבעיה הניתנת לדוגמה:

What are the solutions of $(x-2)(x+3)=0$?

What does this tell you about where the graph of $f(x) = x^2 + x - 6$ crosses the x-axis?

שאלה זו עוסקת בקשר שבין משוואה לפונקציה ובייצוגים של כל אחת מהן. היא מדגישה שקיים הבדל בין משוואה לבין פונקציה ומדגישה את הקשר שיש בין פתרון של משוואה לנקודת החיתוך של גרף הפונקציה אשר מבוטאת על ידי ביטוי שקול.

2. HSCE A2.5.4: Understand and use the fact that the base of an exponential function determines whether the function increases or decreases and understand how the base affects the rate of growth or decay.

בעיה לדוגמה:

The following formulas each describe the size of an animal population, P , in t years since they were first counted.

- | | |
|-------------------------|--------------------------|
| (i) $P = 1000(1.08)^t$ | (ii) $P = 600(1.12)^t$ |
| (iii) $P = 2500(0.9)^t$ | (iv) $P = 1200(1.185)^t$ |
| (v) $P = 800(0.78)^t$ | (vi) $P = 2000(0.99)^t$ |

- (a) Which populations are growing? Which are shrinking?
- (b) Which population is growing the fastest? What is its annual percent growth rate?
- (c) Which population is shrinking the fastest? What is the annual percent “decay” rate for that population?
- (d) Which population has the largest initial population? Which has the smallest?

3. HSCE A2.3.1: Identify a function as a member of a family of functions based on its symbolic or graphical representation. Recognize that different families of functions have different asymptotic behavior

Example 1:

Group project

Each group creates a poster that shows the context, equation, table, and graph of a given function.

- Compare all of the posters and put the functions into groups having common features.
- Each function group summarized the common patterns of their family of functions.
- Summarize and share your descriptions with the whole class.
- Individually, each student records the summaries.
- NOTE: The goal is to give students an opportunity to analyze characteristics of functions, not necessarily for them to generate the exact classes.

במסגרת למידת המתמטיקה הלומדים מעורבים במשימות קבוצתיות שונות כמו זו. במסגרת המשימה התלמידים מתבקשים לבחור פונקציה בעצמם ולנתח אותה. המשימה מקשרת בין פונקציה ספציפית למשפחה של פונקציות ומדגישה את הייצוגים השונים שיש לפונקציה.

Example 2:

Identify an appropriate function family to model a set of bivariate data.

- The height of a kicked football as a function of elapsed time (quadratic).
- Number of bacteria growing as a function of elapsed time (exponential increase).
- Cost of parking a car at the airport during a trip (linear increasing or step function).
- The price of gas if it grows by \$0.16 per week (linear increase)

- The speed of personal computers if the speed doubles every three years. (exponential increase)
- The area of a rectangle that is 6 inches narrower than it is long. (quadratic)
- The value of an investment that drops by one-third n times in a row (exponential decrease)
- The rate of absorption of one dose of insulin in the human body. (exponential decrease)
- o A function that has x-intercepts at -3, 0, and 4, and -5 and no asymptotes (quartic polynomial)

6. דרכי ההפעלה וההערכה של התכנית

בינתיים לא נמצאו מחקרים לגבי תכנית הלימודים החדשה. אתייחס לעקרון הנחיצות כדי לבקר את התכנית וכן לתכנים ולסטנדרטים הנלמדים. **עקרון הנחיצות.** כפי שפורט לגבי עיקרון זה בסעיף 2, העיקרון בא לידי ביטוי במקומות שונים בתכנית הלימודים, אך נראה שלא תמיד הוא מודגש דיו. כאשר מלמדים את הנושא של חפיפת משולשים יש חשיבות לכך שהתלמידים יבינו תחילה את הצורך במשפטי החפיפה ויבינו את נכונותם, לא רק מכיוון שאפשר להוכיח את המשפטים, אלא גם מתוך התנסות – שבהינתן נתונים מסוימים קיימת בנייה יחידה של משולש, ולפיכך כל המשולשים אשר ייבנו בהתאם לנתונים אלה (למשל צלע, צלע, צלע), יהיו חופפים. לעומת זאת, יש נתונים לגבי המשולש אשר בניית המשולשים על פיהם אינה אפשרות יחידה. בתכנית הלימודים התלמידים אכן לומדים לבצע בניית שונות, גם של משולשים, והם נדרשים ללמוד את משפטי החפיפה ולהוכיח אותם, אך הקשר הזה שבין בנייה לבין חפיפה אינו נדרש.

נימוקים מתמטיים והוכחות. הנושאים נימוקים מתמטיים והוכחות מופיעים כסטנדרט מפורש בתכנית והם מקושרים לקורס בגיאומטריה. הם אינם מקושרים כלל לקורסים באלגברה. ובכלל, בדוח המסכם את הציפיות מהתלמידים הלומדים את הקורסים באלגברה, התלמידים כמעט שאינם נדרשים לנמק ולהוכיח משפטים ודרכי פתרון (התלמידים נדרשים לנמק את שלבי הפתרון של משוואות ואי-שוויונים). הנושאים נדונים לעומק בגיאומטריה והתלמידים נדרשים לנמק ולהוכיח משפטים וטענות שונות. נשאלת השאלה, האם הדבר רצוי? האם לא כדאי היה לעסוק בשאלות של הנמקה והוכחה גם לגבי פתרון בעיות והכרת משפטים באלגברה?

הקשר בין כמות התכנים לבין עומק הלמידה. מבחינת התכנים הנלמדים במסגרת לימודי התיכון, הקורס pre-calculus הוא קורס בחירה. הקורס מהווה הכנה לקורס calculus אשר נלמד במוסדות על תיכוניים, והוא אמור לבסס את הידע של הלומדים

בנושאים של אלגברה ופונקציות. הקורס מתמקד בלמידת פונקציות שונות (מעריכיות ולוגריתמיות, ריבועיות, פולינומאליות, רציונאליות וטריגונומטריות) וכן בנושאים של וקטורים, מטריצות ומערכות משוואות, סדרות, אינדוקציה מתמטית, קואורדינטות פולאריות וחתכים קוניים. הנושאים העוסקים בנגזרות ובאינטגרלים לא נלמדים כלל. נושאים אלה הם הכרחיים ללימודי הנדסה, מדעים, רפואה ועסקים, אך הטענה בתכנית היא שנושאים אלה אינם מורכבים, ושהלמידה המשמעותית והמורכבת היא ההכנה לנושאים הנלמדים בקורס calculus, ולפיכך מעדיפים להקדיש את הזמן ללמידה מעמיקה של פחות תכנים, אשר יאפשרו השלמה של הנושאים הרלבנטיים לאחר התיכון. שאלה חשובה עוסקת בקשר שבין כמות התכנים למידת ההעמקה שבה הם נלמדים. כל תכנית לימודים היא תוצאה של בחירות של שני גורמים אלה. מאחר שכאן הבחירה לגבי התכנים שונה מאשר אצלנו, כדאי להתייחס לויתור שנעשה כאן לגבי התכנים כדי לנסות ולברר מהם היתרונות ומהם החסרונות שיש בויתור על תכנים ספציפיים ובהעמקה בתכנים אחרים.

סיכום

תכנית הלימודים במישורן עברה בשלוש השנים האחרונות שינויים מתוך מטרה ליצור אחדות לגבי הנושאים הנלמדים בבתי הספר השונים, כך שתהיה לכל הבוגרים ההזדמנות להשתלב במסגרות של לימודים גבוהים או בשוק העבודה. כל בוגר תיכון נדרש ללמוד לפחות ארבעה קורסים במתמטיקה (שלושה קורסי חובה וקורס בחירה אחד). התכנית החדשה מדגישה את הצורך בהעברת ידע מתמטי לתחומים שונים, מתמטיים ושאינם מתמטיים, וכן יצירת קשרים שבין נושאים שונים במתמטיקה ובין המתמטיקה לתחומים אחרים.

בתכנית הכתובה אפשר למצוא סימנים המרמזים הסתמכות על הגישה הקונסטרוקטיביסטית (שהיא פיאז'טאנית ביסודה) שכן היא מעודדת בניית ידע על ידי הלומדים תוך השתתפות במשימות מאתגרות, וכן על חלקים מהתאוריה של ויגוצקי לגבי התפתחות החשיבה הנעשית במישור החברתי תחילה ורק לאחר מכן היא מופנמת (כמו גם התפתחות של פונקציות מנטליות אחרות). התכנית מעודדת למידה שיתופית כדי לשפר יכולות תקשורת אשר עשויות לשפר בתורן את ההבנה המתמטית של הלומדים.

רשימת מקורות

- CollegeBoard, AP. (2008). Calculus Course Description. Retrieved January 1st, 2008 from http://apcentral.collegeboard.com/apc/public/repository/ap08_calculus_courses_desc.pdf
- Michigan department of Education, (2006). Improving High School Graduation Requirements, Michigan Merit Curriculum, Research Says That... Retrieved July 13, 2008 from http://www.michigan.gov/documents/hs_research_doc_149897_7.pdf
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and standards for schoolmathematics. Reston, VA: NCTM.
- Steptoe, S., (2006). Building a New Student in Michigan. Time Magazine. Retrieved July 13, 2008 from <http://www.time.com/time/nation/article/0,8599,1568853,00.html>

מקורות לעיון נוסף

- Clarifying examples and activities documents. Geometry. (n. d.). Retrieved July 13, 2008 from <http://mi-math-companion.wikispaces.com/Geometry>
- Legislative Council, State of Michigan, (2008). The Revised School Code, Act 451 of 1976, Retrieved July 13, 2008 from <http://www.legislature.mi.gov/documents/mcl/pdf/mcl-Act-451-of-1976.pdf>
- Michigan department of Education, (2007). High school content expectation clarification document. Mathematics. Algebra. Retrieved July 13, 2008 from <http://mi-math-companion.wikispaces.com/Algebra+Clarification+Documents>
- Michigan department of Education, (2007). High school content expectation clarification document. Mathematics. Geometry. Retrieved July 13, 2008 from <http://mi-math-companion.wikispaces.com/Algebra+Clarification+Documents>
- Michigan department of Education, (2007). High school content expectations. Retrieved July 13, 2008 from http://www.michigan.gov/documents/Math11-14-open1_142202_7.pdf

Michigan department of Education, (n.d.). Mathematics Companion document. Looking across the grades. 6th grade through Algebra I. Grade level content expectations. Retrieved July 13, 2008 from

http://www.michigan.gov/documents/mde/AcrosstheGrades6toAlgebra_225032_7.pdf

Michigan department of Education, (n.d.). Mathematics Companion document. Looking across the grades. 6th grade through Geometry. Grade level content expectations. Retrieved July 13, 2008 from

http://www.michigan.gov/documents/mde/AcrosstheGrades6toGeometry_225033_7.pdf

Michigan department of Education, (n. d.). Michigan Curriculum Framework. Mathematics. Including teaching & Learning. Sample activities. Retrieved July 13, 2008 from

http://www.michigan.gov/documents/MathematicsTeachingLearning_116267.pdf

Michigan department of Education, (2007). Michigan Merit Curriculum. course/credit requirements. Algebra I. Retrieved July 13, 2008 from

http://www.michigan.gov/documents/mde/AlgebraI_216634_7.pdf

Michigan department of Education, (2007). Michigan Merit Curriculum. course/credit requirements. Algebra II. Retrieved July 13, 2008 from

http://www.michigan.gov/documents/mde/AlgebraII_216635_7.pdf

Michigan department of Education, (2007). Michigan Merit Curriculum. course/credit requirements. Geometry. Retrieved July 13, 2008 from

http://www.michigan.gov/documents/mde/Geometry_216636_7.pdf

Michigan department of Education, (2006). Michigan Merit Curriculum. course/credit requirements. PreCalculus. Retrieved July 13, 2008 from

http://www.michigan.gov/documents/PreCalc_167750_7.pdf

Michigan department of Education, (2006). Michigan Merit Curriculum. course/credit requirements. Statistics & Probability. Retrieved July 13, 2008 from

http://www.michigan.gov/documents/StatProb_167751_7.pdf

Michigan department of Education, (2006). Michigan Merit Curriculum, High School Graduation Requirements. Retrieved July 13, 2008 from

http://www.michigan.gov/documents/mde/111706-finalhsfaq_178578_7.pdf

Michigan department of Education, (2007). Quantitative literacy clarification documents. Retrieved July 13, 2008 from

<http://mi-math-companion.wikispaces.com/Quantitative+Literacy+Documents>

Michigan department of Education, (2007). Statistics and Probability Clarification documents. Retrieved July 13, 2008 from

<http://mi-math-companion.wikispaces.com/Statistics+%26+Probability+Clarification+Documents>

Vygotsky, L. S., (1968). Thought and language. MIT Press.

רוסיה

ד"ר אנטולי שטרקמן

1. הרקע להתפתחות תכנית הלימודים

הפדרציה של רוסיה היא המדינה הגדולה ביותר בעולם מבחינת השטח. הקמת נובגורוד (Novgorod) בשנת 862 על-ידי הוויקינגים נחשבת לייסודה של המדינה הרוסית. במשך מאות שנים התחלפו השליטים, והשלטון (וכן גם המצב הכלכלי) חווה עליות ומורדות אינספור. לאחר מלחמת העולם השנייה, התאוששה רוסיה בזכות איחוד מדינות מזרח אירופה ויצירת ברית המועצות. המדינה ידעה שנים רבות של דיקטטורה קומוניסטית. החל משנת 1988 החלו רפורמות פוליטיות וכלכליות אשר הביאו לפתיחות רבה יותר ולפרישת 15 מדינות מהרפובליקה הסובייטית. מאז התמוטטות בריה"מ, רוסיה נאבקה כדי לבסס כלכלת שוק חופשית וכדי להשיג צמיחה כלכלית. כל המהלכים האלה השפיעו על התרבות והחינוך הן ברוסיה והן במדינות בריה"מ לשעבר.

הקניית השכלה מתמטית פורמאלית החלה בשנת 1701, כאשר פיטר הגדול הקים את בית הספר למדעים, למתמטיקה ולניווט. המורה המקצועי הראשון היה מגניצקי (L. F. Magnitsky). הוא גם כתב את ספר הלימוד הראשון במתמטיקה.

בתחילת המאה העשרים הסטנדרטים בהוראת המתמטיקה היו גבוהים במיוחד, וספרי הלימוד היו מודל גם לדורות הבאים. אז גם הופיע העיתון "חינוך מתמטי", ובאמצע המאה ה-20 גם כתב העת המפורסם "קוונטום" (Quantum). באותה תקופה החלו להתקיים תחרויות מתמטיות בהיקף רחב, ובתי ספר מיוחדים למתמטיקה ולמדעים נפתחו בכל הערים הגדולות. בתי ספר אלה מלמדים מתמטיקה על פי אותה תכנית לימודים הנהוגה בכלל בתי הספר, אך בהעמקה נוספת ומתוך מגמה לשתף את התלמידים בשאלות מחקר. גם לבית הספר האלה ניתנת אפשרות לבחור נושאים נוספים במתמטיקה וללמד אותם. חשוב לציין שגם התלמידים המסיימים בית ספר מיוחדים אלה, ניגשים לאותו מבחן ממלכתי אחיד.

מערכת החינוך הושפעה מאוד ממערכות חינוך מערביות ובראשן צרפת וגרמניה, ונשאה אופי שמרני.

תכנית הלימודים המוצגת במסמך זה מתבססת על תקן ממלכתי של השכלה כללית בסיסית ברוסיה שהתקבל בשנת 2007. הכוונה של תכנית הלימודים היא להבהיר ולקבוע את המטרות, את התכנים ואת האסטרטגיה הכללית, ולהדגיש את השלבים

העיקריים של תהליך הלימודים. היא מהווה בסיס לכתיבת ספרי הלימוד, להגדרת הסדר של הוראת הנושאים, לבניית תכניות מפורטות על-ידי הכותבים ולתכנון דרכי ההוראה. היא מאפשרת עבודה יצירתית ויוזמה למורים ולמחברי הספרים, והיא מציעה שתי רמות של הוראה – בסיסית ומוגברת, וגם הוספת נושאים מיוחדים לפי החלטה של בית הספר. המתמטיקה נחשבת למקצוע בסיסי לכל המגמות. היא כמובן מועברת ברמה מוגברת במגמות מדעים, כלכלה, והנדסה. תכנית הלימודים גם מציעה חומרים דידקטיים מיוחדים למורים.

בהמשך הסעיף אתייחס לשלושת עקרונות ה-DNR.

עקרון הדואליות

האם בתכנית הלימודים יש התייחסות לא רק לתוצרים מתמטיים, אלא גם לדרכי חשיבה? התשובה היא חיובית – על פיתוח החשיבה מושם דגש משמעותי. אמנם אין פירוט לגבי פיתוח דרכי חשיבה בתכנית הלימודים עצמה, אך המורים ואנשי החינוך המתמטי נדרשים לעניין, ואכן הצטבר ניסיון רב במהלך השנים. בתכנית הלימודים מופעים סטנדרטים לא מעטים אשר מתייחסים לעקרון הדואליות. לדוגמה: בגיאומטריה התלמיד נדרש לבצע בניות ולשלוט בחוקי הבנייה היסודיים. יתרה מזו, בספרי הלימוד בגיאומטריה, התרגילים ניתנים ללא סרטוטים. התלמיד נדרש להבין את הבעיה, להמיר את המלים לסרטוט, ולאחר מכן לפתור אותה. ניתן לראות את יישום העיקרון גם בגישות לפתרון בעיות, וגם בקישורים בין חלקי המתמטיקה השונים. חשוב לציין שבכל מקצוע מתמטי, התלמידים נדרשים לדעת לנמק ולהוכיח את המסקנות שלהם, ולא רק להסתמך על ממצאים או עובדות.

עקרון הנחיצות

האם בתכנית הלימודים ישנה התייחסות לתוצרים מתמטיים בזיקה לבעיות משמעותיות שניתן לפתור באמצעותם? במילים אחרות: האם מודגש הצורך בלימודי מתמטיקה כדי לדעת לפתור בעיות אמיתיות או כדי לעבור את המבחן? התכנית שמה דגש על הקשר בין הנושאים המתמטיים השונים ועל היישומים שלהם בפתרון בעיות בתחומים המדעיים, כגון פיזיקה, הנדסה וביולוגיה. מצוין במפורש כי יש לתת לתלמידים הזדמנויות מגוונות לפתח מיומנויות מתמטיות יישומיות, כולל תוך שימוש מושכל בכלים טכנולוגיים.

עקרון החשיבה החוזרת

האם התכנית מקצה זמן לחשיבה חוזרת ולא רק לתרגול של טכניקות נלמדות? האם התכנית נותנת חשיבות ללמידה ספיראלית של תכנים מתמטיים?

בתכנית הלימודים החדשה (וגם בישנה) מודגש כי בכל אחד מהשלבים, התלמידים יבנו ידע חדש על בסיס הידע והמיומנויות שהם רכשו בשנים הקודמות – בחטיבת הביניים

ובבית הספר היסודי. במילים אחרות, מדובר בבניית הידע על ידי הרחבה חוזרת ונשנית. אנו נציג דוגמאות ללמידה ספיראלית בהמשך.

תכנית הלימודים הבסיסית במתמטיקה כוללת לפחות 420 שעות בשלוש שנות הלימודים האחרונות, מהן 50 שעות שמורות לתכנים ולשיטות יזומות על ידי המורים ומחברי הספרים ולשילוב טכנולוגיות. המקצוע "מתמטיקה" מתחלק לשני תת-מקצועות: "אלגברה ומבוא לאנליזה" ו"גיאומטריה". התכנית מציעה ללמד את שניהם במקביל. ללימודי מתמטיקה ברמה מוגברת (שני המקצועות) מומלץ להקדיש לפחות 8 ש"ש.

הכיוונים העיקריים של רכישת השכלה מתמטית בחטיבה העליונה הם:

- מושג המספר, הרחבת קבוצות המספרים (מקבוצת המספרים הטבעיים ועד לקבוצת המספרים המרוכבים), שיטות מתמטיות לפתרון בעיות בתחומים שונים והקניית מיומנויות חישוב;
- הקניית מיומנויות בטכניקה אלגברית, פתרון משוואות, אי-שוויונים ומערכות של משוואות ואי-שוויונים;
- תורת הפונקציות, אנליזה מתמטית;
- מושגים ומבנים בגיאומטריה המישור והמרחב. הבנת מבנה אקסיומטי;
- הסתברות וסטטיסטיקה;
- שיטות מתמטיות לפתרון בעיות בתחומים מדעיים כגון פיזיקה, הנדסה, ביולוגיה.

2. מטרות התכנית

על-אף השינויים שחלו בתכנית במהלך 12 השנים האחרונות, מטרות-העל היו ונשארו פחות או יותר כדלקמן:

- הכרה והבנה של רעיונות ושיטות במתמטיקה. "המתמטיקה היא שפת מדעים";
- שליטה בשפה מתמטית בעל פה ובכתב;
- שליטה בידע מתמטי ופיתוח היכולת ליישמו בתחומי דעת אחרים;
- פיתוח חשיבה לוגית וחשיבה מדעית ביקורתית;
- פיתוח חשיבה מרחבית;
- הקניית מיומנויות בחשיבה אלגוריתמית;
- היכרות עם ההיסטוריה של מתמטיקה;
- הבנת המשמעות וההשפעה של המתמטיקה על הקדמה והתרבות.

תכנית הלימודים החדשה, כמו קודמתה, מכירה בחשיבות התכנים מתמטיים, תוך מתן דגש על פיתוח המיומנויות הנדרשות. ההתייחסות הרצינית למטרות אמורה להבטיח שהתלמידים ייצאו מבית הספר התיכון עם ידע, מיומנויות וגישות, אשר יאפשרו להם להשתלב בלימודים אקדמיים ובשוק העבודה. בתכנית החדשה מודגש גם השימוש המושכל בטכנולוגיות המודרניות.

תכנית הלימודים מציבה דרישות ללומד:

- שליטה בשפה המתמטית;
- רכישת מיומנויות נימוק, הוכחה, והסקת מסקנות;
- יכולת לבצע אינטגרציה בין תחומי המתמטיקה השונים;
- יכולת התמודדות עם בעיות חדשות ולא שגרתיות, תוך הפגנת תושייה ויצירתיות;
- יכולת לדעת לנתח ולבנות מודלים מתמטיים;
- שליטה בשיטות אלגוריתמיות;
- יכולת ללמוד באופן עצמאי, לעבוד עם מקורות ידע, לאסוף נתונים ולהסיק מסקנות.

3. מבנה התכנית

ביטויים אריתמטיים ואלגבריים (50 שעות)

התחלקות מספרים שלמים. חילוק עם שארית. פתרון בעיות עם מספרים שלמים. מספרים מרוכבים: הצגה אלגברית וטריגונומטרית. פעולות החשבון. משפט דה-מואבר. המשפט היסודי של אלגברה. פולינום במשתנה אחד. התחלקות של פולינומים, חילוק עם שארית. משוואות אלגבריות. שיטת גורר. משפט בזו. מספר השורשים של פולינום. פולינום בשני משתנים. הבינום של ניוטון. פולינומים רב משתנים. פולינום סימטרי. שורש מסדר n ותכונותיו. חזקה במעריך רציונאלי. חזקה במעריך ממשי. הלוגריתם. חוקי הלוגריתמים. לוגריתם עשרוני ולוגריתם טבעי. המספר e . ביטויים עם חזקות ולוגריתמים.

טריגונומטריה (30 שעות)

הגדרות ותכונות יסוד של הפונקציות הטריגונומטריות. הרדיאן. הפונקציות הטריגונומטריות כפונקציות של משתנה ממשי. זהויות טריגונומטריות בסיסיות. נוסחאות: סכום והפרש, זווית כפולה, מחצית זווית. הוכחת זהויות טריגונומטריות. הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות. פתרון משוואות ואי-שוויוניים.

פונקציות (30 שעות)

הגדרת פונקציה. תחום וטווח. גרף הפונקציה. טרנספורמציות של גרפים. תכונות של פונקציה: מונוטוניות, זוגיות ואי זוגיות, מחזוריות, חסימות. תחומי עלייה וירידה, נקודות מינימום ומקסימום לוקאליות, ערך מקסימאלי ומינימאלי. קעירות וקמירות. שימוש בפונקציות בתחומי דעת שונים. פונקציה מורכבת. פונקציה הפוכה וגרף. פונקצית חזקה. פונקציה רציונאלית. אסימפטוטות מקבילות לצירים. הפונקציות הטריגונומטריות והטריגונומטריות ההפוכות. הפונקציה המעריכית והפונקציה הלוגריתמית.

מבוא לאנליזה מתמטית (50 שעות)

מושג הגבול של סדרה. גבול של סדרות מונוטוניות וחסומות. טור גיאומטרי מתכנס. משפטים על סדרות מתכנסות. שיטות לחישוב גבולות. גבול של פונקציה. רציפות. משפטים יסודיים על רציפות. מושג הנגזרת. המשמעות הגיאומטרית והפיזיקאלית של נגזרת. משוואת המשיק. כללים יסודיים של גזירה. נגזרות של פונקציות אלמנטאריות. נגזרת של פונקציה מורכבת והפוכה. חקירת פונקציות באמצעות הנגזרת. הנגזרת השנייה ומשמעותה. האינטגרל המסוים והלא מסוים. פונקציות קדומות ואינטגרלים מידיים. המשפט היסודי של החדו"א. שימושים של האינטגרל המסוים. יישומי הנגזרת והאינטגרל במתמטיקה שימושית.

משוואות ואי-שוויונים (70 שעות)

משוואות רציונליות, מעריכיות, לוגריתמיות. אי-שוויונים רציונליים, מעריכיים ולוגריתמיים. משוואות אירציונליות וטריגונומטריות. אי-שוויונים אירציונליים וטריגונומטריים. הוכחות אי-שוויונים. שימוש בפונקציות לפתרון משוואות ואי-שוויונים. שיטת האינטרוואלים. שיטות גראפיות. פתרון בעיות בתחומי דעת שונים באמצעות כלים מתמטיים.

מושגי יסוד בקומבינטוריקה, סטטיסטיקה ותורת ההסתברות (20 שעות)

הצגת נתונים. מדדים מרכזיים. תמורות, חליפות וצירופים. קשרים קומבינטוריים. הבינום של ניוטון ותכונות המקדמים. משולש פסקל. מאורעות. פעולות על מאורעות. הגדרת ההסתברות הקלאסית. מאורעות תלויים ובלתי תלויים.

גיאומטריה (120 שעות)

מבנה אקסיומטי של גיאומטריה במישור ובמרחב. תכונות חוצי הזוויות במשולש. חוצי זוויות, תיכונים וגבהים. רדיוסים של מעגלים חוסמים וחסומים. שטח המשולש. נוסחת הרון. שטח המשולש כביטוי עם רדיוס המעגל החוסם או החסום. המעגל: זווית היקפית, זווית פנימית וזווית חיצונית. זווית בין משיק למיתר. פרופורציות במעגל. מרובעים ומעגלים חוסמים וחסומים. מקומות גיאומטריים. אליפסה, היפרבולה, פרבולה כמקומות גיאומטריים. פתרון בעיות על ידי טרנספורמציות גיאומטריות ומקומות גיאומטריים. מושגים בסיסיים בגיאומטריה המרחב. ישרים מקבילים, נחתכים ומצטלבים. זוויות בין ישרים וישרים מאונכים. ישר ומישור. משפט שלושת האנכים. זווית בין ישר ומישור. מצב הדדי בין מישורים. זווית בין מישורים. מרחקים: בין נקודה למישור, בין ישר למישור, בין שני מישורים. השלכה מקבילה ואורתוגונאלית. סימטריה במרחב. פאונים (פוליאדרים): קודקודים, מקצועות ופאות. זוויות בפאונים. פאונים קעורים. מנסרה, פירמידה. חיתוכים בפאונים ובנייתם. פאונים משוכללים.

גליל, חרוט, כדור. תכונות וחיתוכים. שילוב עם פאונים.
נפחים ושטחים.
מבוא לתורת הווקטורים. גישה גיאומטרית ואלגברית במרחב. תלות ואי-תלות
ליניארית.

קרבן שמורה (50 שעות)

המורים מחליטים באופן עצמאי כיצד לעשות שימוש בשעות אלה, כגון הכנה לבחינות,
הרחבה והעשרה וכיו"ב.

תכנית הלימודים מציעה פירוט שיעורים בכל נושא, כולל מספר שעות מומלץ
להוראתו. בנוסף לכך, יש המלצות לגבי חומרי עזר נוספים, לפי נושאי לימוד.
תכנית הלימודים נכתבה מתוך אמונה ביכולת של כל ילד ללמוד ולהבין מתמטיקה.
היא נבנתה כך שהיא תוכל לעורר עניין ולהביא לתודעה את החשיבות של המקצוע
בחיים. דרך העיסוק המתמטי לומדים לחשוב ולפתח אסטרטגיות של פתרון בעיות,
שהרי מיומנויות חשיבה ושיטות אסטרטגיות הן לב ליבה של המתמטיקה.
תכנית הלימודים הבית ספרית אמורה להתבסס על התכנית הלאומית, אך גם להתאים
את עצמה לקבוצות לומדים שונות (שכן התלמידים באים מרקע תרבותי וחברתי
שונה), וזאת כדי לאפשר לכל תלמיד ותלמיד להגיע להישגים.

4. דרכי הפעלה והערכה, דוגמת בחינה ודגם של שיעור

הפעלת התכנית החדשה החלה בשנת 2007. אין בה התייחסות לדרכי הפעלה ואין בה
דוגמאות לשיעורים. כיוון שברוסיה קיימת מסורת ארוכת שנים בנוגע לשיטות הוראת
המתמטיקה, הניסיון המצטבר איננו דורש פירוט של דרכים ושיטות במסגרת התכנית
עצמה, אלא נתון להחלטתם של המורים. החידוש העיקרי של תכנית הלימודים הוא
מבחן ממלכתי אחיד, ובעל מבנה שונה מזה שהיה נהוג עד כה.

המבחן הממלכתי האחיד (ממ"א)

ממ"א מורכב משתי בחינות. אחת היא בחינה לפי תכנית הלימודים בבית הספר,
והשנייה משמשת כבחינת כניסה לאוניברסיטות. כמובן שיש שוני משמעותי בין רמות
של הבחינות האלו.
דוחות של משרד החינוך הרוסי אינם מכילים נתונים סטטיסטיים לגבי התפלגות
התלמידים ברמות הלימוד השונות.

מבנה המבחן

המבחן מורכב משלושה חלקים I, II, III. חלק I מכיל 13 שאלות A1 – A10 ו-B1-B3 מקורס "אלגברה ומבוא לאנליזה" כיתות 10-11. לכל שאלה A1 – A10 נתונות 4 תשובות שרק אחת מהן נכונה. תלמיד צריך לסמן את התשובה. לשאלות B1-B3 צריך לתת הסבר קצר. חלק II מכיל 10 שאלות קשות יותר B4-B11, C1 ו-C2 מקורסים "אלגברה ומבוא לאנליזה" ו"גיאומטריה". לשאלות B4-B11 צריך לתת הסבר קצר ולשאלות C1 ו-C2 צריך לתת פתרונות עם נימוקים והסברים מלאים.

חלק III מציעה 3 משימות עוד יותר מסובכות C3 - C5 ותלמיד נדרש לתת פתרונות עם הסברים.

תלמיד מקבל שני ציונים: ציון בגרות לפי סקלה: 1-5 וציון מבחן: 1-100. ציון הבגרות אינו תלוי בשאלות B9-B11 ו-C4. כדי לתת ציון מבחן מחברים את הציונים של כל שאלות. כדי לעבור בחינה צריך לקבל לפחות 7 נקודות. לדוגמה, ציון "2" מקבלים כי 20% תלמידים ברוסיה, ו-9% במוסקבה.

בטבלה 1 ניתן לראות את התפלגות הציונים בשנים 2004-2007.

טבלה 1. התפלגות הציונים באחוזים בשנים 2004-2007

ציון	2004	2005	2006	2007
"5"	11.1	6.9	11.8	9.7
"4"	35.4	31.3	34.0	33.5
"3"	34.0	40.2	34.2	35.7
"2"	19.5	21.6	20.0	21.1

חשוב לציין ששיעור הנכשלים במבחן הממלכתי האחד הינו גבוה למדי, אין נתונים לגבי מספר התלמידים הניגשים לחלק המורחב של המבחן אך ניתן להניח שהמספר אינו גדול במיוחד כי באופן יחסי מעט אוניברסיטאות משתתפות בניסיון לחליף בחינות כניסה בחלק המורחב של הממ"א.

הסטטיסטיקה של התוצאות אינה משביעה את רצון מערכת החינוך. ההסברים הניתנים להישגים הלא משביעים רצון הם:

- רמת המורים;
- ספרי לימוד וחומרי עזר;

- צמצום שעות הוראה ;
- מבנה ממ"א ;
- הערכה ומתן ציונים בבתי ספר ;
- בעיות סוציו-אקונומיות.

נציין שבשנים קודמות לא התקיימו בחינות ארציות במתכונת שאינה תלויה בבית ספר, והרושם היה שהרמה של כל אוכלוסיית התלמידים יותר קרובה לרמת התלמידים בבתי הספר המיוחדים לטיפול מצוינות במתמטיקה.

דוגמה של המבחן

חלק I

A1 מצאו ערך מספרי של הביטוי הבא: $4^{6p} \cdot 4^{-4p}$ כאשר $p = \frac{1}{4}$.

- (1) 1 (2) 2 (3) 32 (4) 4

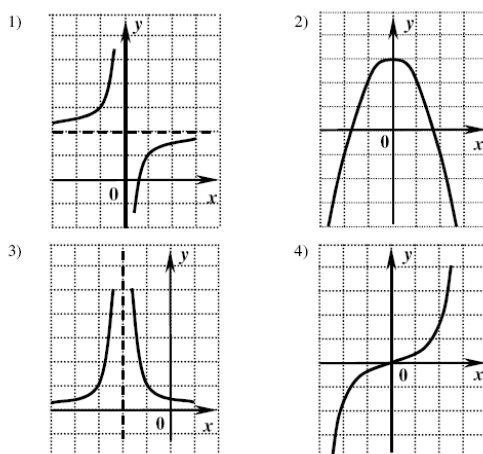
A2 פשטו את הביטוי הבא: $\frac{\sqrt[3]{54} \cdot \sqrt{16}}{\sqrt[3]{250}}$.

- (1) 1.2 (2) $\frac{6 \cdot \sqrt[3]{2}}{5}$ (3) 2.4 (4) $\sqrt[3]{2}$

A3 מצאו ערך מספרי של הביטוי הבא: $\log_4(64c)$ כאשר $\log_4 c = -3.5$.

- (1) -6.5 (2) -0.5 (3) -10.5 (4) -67.5

A4 באחד מהציורים הבאים יש גרף של פונקציה אי זוגית. מצאו אותו.



A5 מצאו את הנגזרת של הפונקציה $y = (x - 3) \cos x$

- (1) $y' = \cos x + (x - 3) \sin x$ (2) $y' = (x - 3) \sin x - \cos x$
 (3) $y' = \cos x - (x - 3) \sin x$ (4) $y' = -\sin x$

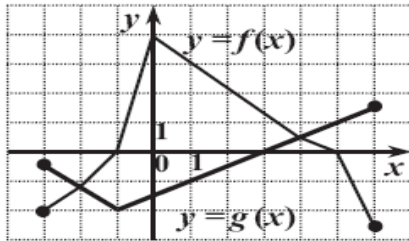
A6 מצאו את הטווח של הפונקציה $y = 2^x + 5$

- (1) $(5, +\infty)$ (2) $(0, +\infty)$ (3) $(-\infty, +\infty)$ (4) $(7, +\infty)$

A7 בציור נתונים גרפים של פונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$,

מוגדרות בקטע $[-3, 6]$. עבור אילו ערכי x מתקיים את

אי השוויון $f(x) \geq g(x)$?



- (1) $[-1, 5]$ (2) $[-3, -2] \cup [4, 6]$
(3) $[-3, -1] \cup [5, 6]$ (4) $[-2, 4]$

A8 מצאו תחום ההגדרה של פונקציה $f(x) = \frac{25}{3 - \sqrt[4]{x}}$

- 1) $[0; 3) \cup (3; +\infty)$
2) $[0; +\infty)$
3) $[0; 81) \cup (81; +\infty)$
4) $(-\infty; 81) \cup (81; +\infty)$

A9 פתרו את אי-השוויון הבא: $\log_{\frac{1}{2}}(7x - 21) > \log_{\frac{1}{2}}(6x)$

- (1) $(-\infty, 21)$ (2) $(3, 21)$ (3) $(3, +\infty)$ (4) $(21, +\infty)$

A10 פתרו את המשוואה הבאה: $2 \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) - 1 = 0$

- 1) $\pm \frac{4}{3} + 8n, n \in \mathbb{Z}$
2) $\frac{4}{3} + 8n, n \in \mathbb{Z}$
3) $\pm \frac{2}{3} + 4n, n \in \mathbb{Z}$
4) $\frac{2}{3} + 4n, n \in \mathbb{Z}$

בשאלות B1-B11 צריך לרשום רק תשובה מספרית.

B1 פתרו את המשוואה הבאה: $7 \cdot 5^{\log_5 x} = x + 21$

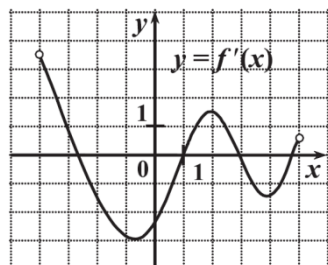
B2 מצאו את ערך הביטוי הבא: $5 \sin(\pi + \alpha) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ כאשר

$$\sin(\alpha) = 0.5$$

B3 פתרו את המשוואה הבאה: $x^2 \sqrt{x-1} - 4\sqrt{x-1} = 0$

B4 מצאו את ערך הביטוי הבא: $2^x - y$ כאשר (x, y) הוא פתרון של מערכת

$$\begin{cases} 7 \cdot 2^x + 6y = 2 \\ 2^{x+1} - 3y = 43 \end{cases} \text{ : המשוואות}$$



B5 הפונקציה $y=f(x)$ מוגדרת בקטע $(-4,5)$.

בציור נתון גרף של הנגזרת של הפונקציה $f(x)$.

מצאו מספר המשיקים היוצרים זווית של 45°

עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

B6 מצאו ערך הביטוי הבא: $\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}}$ כאשר $x=1.2007$.

B7 מצאו את השורש הקטן ביותר של המשוואה הבאה:

$$\log_3 (x+1)^2 + \log_3 |x+1| = 6$$

B8 נתונה הפונקציה המחזורית $y=f(x)$ המוגדרת לכל מספר ממשי x . ידוע שמחזור

שלה הוא 2 וגם $f(1)=5$. מצאו את ערך הביטוי $3f(7)-4f(-3)$.

B9 אדם הפקיד בבנק 70000 רובלים בריבית שנתית של 11%. בסוף שנה הוא החליט

להמשיך את החוזה עם הבנק אבל הוא רוצה לקבל בסוף השנה השנייה לא פחות

מ-100000 רובלים. מהו סכום הכסף המינימאלי שהוא צריך להוסיף כדי להגשים את

תכניתו בתנאי שהריבית השנתית נשארת 11%?

B10 גובה מנסרה מרובעת ומשוכללת $ABCD A'B'C'D'$ הוא 8 וצלע הבסיס שווה

$6\sqrt{2}$. חשבו את המרחק מקודקוד A עד המישור $A'BD$.

B11 נתון מעוין $ABCD$ עם זווית חדה B . שטח המעוין שווה 320, סינוס של הזווית B

הוא 0.8. הגובה CH חותך את האלכסון BD בנקודה K . חשבו את אורך הקטע CK .

C1 מהו הערך המקסימאלי של הפונקציה: $f(x) = 10^{\lg\left(\frac{x^3-3x}{x+5}\right) - \log_{0.1}(x+5)}$?

C2 פתרו את המשוואה: $\sin 2x \cdot \tan x + 1 = 3 \sin x$?

C3 מצאו את כל ערכי x עבורם מתקיים את אי השוויון:

$$(2a - 1)x^2 < (a + 1)x + 3a$$

לכל ערך של a בין 1 ל-2.

C4 נתונה פירמידה משולשת ומשוכללת עם צלע הבסיס $2\sqrt{7}$. בפירמידה חסום חרוט, כך שהקודקוד שלו מתלכד עם נקודת מפגש התיכונים של בסיס הפירמידה, ובסיס החרוט הוא מעגל חסום בפאה של הפירמידה. מצאו את הרדיוס של בסיס החרוט.

C5 מצאו את כל הפתרונות של מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} y(1-x)^2 + x^3 = 0 \\ 2x - \frac{10}{x \log_y 2} = 5 \log_{32} (0,125 y^2) - 7. \end{cases}$$

סיכום

אין עדיין די מחקרים אשר בוחנים את איכותה של תכנית הלימודים החדשה ואת מידת הצלחתה. יחד עם זאת, אפשר כבר להציג מספר מאמרים אשר דנים במבחן הממלכתי. הם בדרך כלל מטילים ספק במבנה ובתכנים ומדגישים שהוא יותר טכני ופחות דורש מחשבה ויצירתיות. במקביל, ישנה גם ביקורת על רמת המורים. חוץ מאשר בערים המרכזיות, כמו מוסקבה, סנט-פטרבורג, יקאטרינבורג, נובוסיבירסק ועוד מקומות אחדים, רמת המורים היא די נמוכה. בזמן האחרון הממשלה עושה מאמצים כדי לשפר את המצב מבחינת המשכורת ומבחינת ההשכלה והמקצועיות. חשוב גם לציין שיש פער ניכר בין רמת התלמידים בערים המרכזיות לעומת רמתם בשאר המקומות.

מערכת החינוך הרוסית שואפת למצוינות אקדמית ולרמת הישגים גבוהה. בין היתר מודגש השימוש בטכנולוגיות, בעיקר במתמטיקה ובמקצועות המדעיים, אך גם מההיבט הזה, יש הבדלים משמעותיים בין האזורים השונים של המדינה. במרכז יש כיתות מחשבים רבות יותר מאשר בפריפריה.

מערכת החינוך מנסה להעניק משאבים שווים באמצעות השקעות נוספות במוסדות החינוך. הממשלה איננה מסתפקת בהישגים הקיימים, והיא שואפת ליותר מתוך שיקולים אסטרטגיים לאומיים וכדי לשמור על מעמדה של רוסיה בעולם.

רשימת מקורות

- Mission: Development of Education in Russia.(2007). Retrieved July 10, 2008 from <http://www.math.toronto.edu/oz/turgor/ofr2.php>
- Specifics of Mathematic Education in 2008. Retrieved July 15 from <http://math.mioo.ru/>
- Standards of Education. (2007). Retrieved June 15, 2008 from <http://www.edu.ru/>
- Mathematical high schools and classes. (2008) Retrieved July 15, 2008 from <http://www.mccme.ru/english>
- Standards of Education. (2007). Ministry of Education. Retrieved June 10, 2008 from <http://math.mioo.ru/>
- Standard Mathematics State Exam in 2008. Retrieved July 15 from <http://math.mioo.ru/>
- The Statistic of Results of Standard Mathematics State Exam in 2008. Retrieved July 15, 2008 from <http://math.mccme.ru/>
- 300 Years of mathematical education in Russia. (2008). Retrieved June 15, 2008 from <http://www.allconferences.com/conferences/20011115004005/>

סיכום והמלצות

פרופ' אברהם ברמן וד"ר בוריס קויצ'ו

בדוח זה נסקרו תכניות הלימודים של אנגליה, יפן, צרפת, רוסיה ומדינת מישגן שבארה"ב. הציונים של מדינות אלו במבחן PISA בשנת 2006 במתמטיקה לגיל 15 היו: אנגליה – 495 (מקום 22), יפן – 528 (מקום 6), צרפת – 496 (מקום 21), רוסיה – 476 (מקום 32) וארה"ב – 474 (גם כן מקום 32). להשוואה, הציון שלנו היה 442 (מקום 40). פרט ליפן, ההישגים של המדינות שנבחרו אינם מזהירים. למרות זאת, בכל תכניות הלימודים הושקעה מחשבה רבה ויש הרבה מה ללמוד מהן.

ככלל, לא קיימת מתודולוגיה מחקרית ממוסדת שמאפשרת השוואה חד משמעית בין תכניות לימודים שונות במונחים של "יעיל יותר – יעיל פחות", "טוב יותר – טוב פחות" או "מתאים יותר – מתאים פחות". הסיבה לכך היא המורכבות של יחסי הגומלין בין גורמים שונים שמשפיעים על למידת המתמטיקה, כפי שצוין בהנחה מס' 2 ברקע התאורטי. עם זאת, ניתן לבחון כיצד תכניות לימודים שונות נותנות מענה על מספר שאלות חשובות ועל צרכים מסוימים, וללמוד מהשוואת התשובות. במסמך זה עשינו זאת תוך התייחסות לשש הנקודות שצינו בסוף הרקע התאורטי. בסוף המסמך (לפני ההמלצות) מוצגת טבלה שמרכזת את התשובות על 10 השאלות כפי שהוצגו בפנינו. לצערנו, לא לכל השאלות ניתן למצוא תשובות מלאות. אנו חייבים לציין שגם בארץ קשה לקבל תשובות לשאלות אלו.

1. הרקע להתפתחות תכניות הלימודים

ראשית, שמחנו לראות שאנחנו לא יוצאי דופן ברצון לשנות ולשדרג את תכניות הלימודים הקיימות. התכניות שנסקרו בארבע מהמדינות הן תכניות לימוד חדשות שנכתבו כתוצאה מאי שביעות רצון מהמצב של מערכת החינוך בכלל ושל החינוך המתמטי בפרט. גם בצרפת חותר עכשיו הנשיא לשינוי בתכנית הלימודים, לביטול מגמות ולמעבר לתכנית לימודים מודולארית. תכנית הלימודים החדשה לחטיבת הביניים ולחטיבה העליונה באנגליה פורסמה ב-2007 והפעלתה מתחילה עכשיו. הדבר נעשה בעקבות שני מסמכים ממשלתיים שפורסמו ב-2003 וב-2004 וחוק משנת 2004, שעוסק ברווחת הילד. ביפן הופעלה תכנית הלימודים החדשה בשנת 2002. השינוי נעשה למרות ההצלחה של יפן במבחנים בין לאומיים. ברוסיה ובמישגן התכניות החדשות נמצאות כעת בשלב של ניסוי וקיים ויכוח ציבורי רחב על הצורך בשינויים.

מעניין לציין, שהסיבות לשינויים המוצעים שונות ממדינה למדינה. בדוח על אנגליה מצוין שהצורך בתכנית החדשה נובע מכך שבמשך 50 השנים האחרונות חל פיתוח ברמת התכנית, והדבר בא לידי ביטוי ברמת הידע המתמטי של בוגרי בתי הספר, בעומק הלמידה של החומר המתמטי וברמת הבחינות. בדוח על יפן מצוין שהצורך בתכנית החדשה נבע מכך שהתכנית הקודמת לא פיתחה אזרח יצירתי ובעל חשיבה ביקורתית ולא התבססה על טכנולוגיות מתקדמות, ולכן לא התאימה לצרכי התלמידים והקהילה. בצרפת מהווים ציוני המתמטיקה כלי חשוב למיון בקבלה לאוניברסיטאות. המדיניות של נשיא צרפת מונעת על ידי הרצון להקטין מרכזיות זו. השינויים בתכנית הלימודים ברוסיה שזורים בשינויים החברתיים שעברו על ברה"מ עם פתיחתה לעולם המערבי. הרקע לשינויים במישגן הוא הקשיים של תעשיית הרכב שעליה מבוססת הכלכלה של המדינה. קשייה של התעשייה גרמו לחיפוש דרכים להכשרת תלמידים בתחומים נוספים, כאשר המתמטיקה נתפסה כנדבך חשוב בהכשרה כזו.

2. רציונל התכניות, העקרונות הפסיכולוגיים והדידקטיים

בכל חמש המדינות תואם הרציונל של תכניות הלימודים את המסגרת התאורטית של DNR, אך כולל גם עקרונות נוספים. בכולן ממלא השימוש בטכנולוגיות מתקדמות של למידה מקום חשוב.

עיקרון מנחה באנגליה וביפן הוא "הילד במרכז". באנגליה מדברים על איזון בין ידע תוכן לבין פיתוח יצירתיות, חשיבה ביקורתית ויכולת הנמקה. האיזון נעשה על ידי צמצום מספר הנושאים הנלמדים ובאמצעות שימוש שיטתי במשימות עשירות. עיקרון נוסף הוא לימוד מתמטיקה לצורך שימושים במדעים אחרים ובחיי היום יום. עיקרון זה קשור לעקרון הנחיצות של DNR אך אינו זהה לו. ב-DNR שימושים הם רק חלק מהדרכים להדגיש את נחיצות לימוד המתמטיקה, בעוד שבתכנית באנגליה הם מהווים חלק מרכזי. עיקרון חשוב בהוראה ביפן הוא העיקרון של פתרון בעיות מובנה שלפיו התלמידים פותרים בעיות באופן עצמאי, מחליפים דעות ומציגים את הרעיונות שלהם ומלטשים אותם ביחד.

הרציונל של תכנית הלימודים בצרפת נשען על ההבחנה בין הערך האפיסטמי של הלמידה לבין הערך הפרגמאטי שלה – דבר המתאים במיוחד לעיקרון הדואליות של DNR. עיקרון חשוב נוסף בתכנית בצרפת הוא הלימוד הספיראלי, כאשר לכל נושא חוזרים מספר פעמים ברמות עומק והרחבה שונות. המתמטיקה בצרפת משמשת כאלמנט מרכזי בהשכלת כל תלמיד ולא רק כעוד מקצוע שחייבים ללמוד כדי לקבל תעודת בגרות. פעילויות רב תחומיות מהוות מרכיב מהותי של התכנית.

בין העקרונות של התכנית ברוסיה מושם דגש על הקשר בין נושאים מתמטיים שונים ועל שליטה בשיטות אלגוריתמיות, זאת בנוסף לפיתוח דרכי חשיבה תוך פתרון בעיות.

אחד העקרונות של התכנית במישיגן הוא פיתוח סטנדרטים להנמקה מתמטית באיכות גבוהה.

3. מטרות התכניות

כיוון שלכל התכניות יש בסיס רעיוני משותף, יש להן מטרות משותפות. בנוסף לבניית ידע מתמטי עמוק (לא בהכרח רחב), בכולן רוצים לפתח דרכי חשיבה באמצעות פיתוח מיומנויות של למידה פעילה.

המטרות המוצהרות של תכנית הלימודים באנגליה הן לטפח יכולת מתמטית, יצירתיות, הכרה של יישומים של מתמטיקה והבנה ביקורתית. בתכנית היפנית רוצים לפתח יכולת לימוד עצמי, חשיבה ביקורתית ומיומנויות חקר וגילוי. בצרפת המטרות כוללת העמקת הבנה של המושגים, רכישת מיומנויות בשימוש בידע קודם, הבנת החשיבות של הוכחות וניסוחן הנכון, בהירות הדיבור והכתיבה, פיתוח עניין התלמידים בחומר הנלמד, הבנת הרלבנטיות של החומר לתחומים שונים בחיים.

בדוח על רוסיה מצוין כי על-אף השינויים שחלו בתכנית במהלך 12 השנים האחרונות, המטרות לא השתנו. הן כוללות תפיסת המתמטיקה כשפת המדעים וכחלק מהתרבות האנושית, שליטה בידע מתמטי ופיתוח היכולת ליישמו בתחומי דעת אחרים, פיתוח חשיבה לוגית ומדעית ביקורתית. כמו בצרפת, תכנית הלימודים אמורה לפתח שליטה בשפה המתמטית, מיומנויות נימוק והוכחה, יכולת לקשר בין תחומי מתמטיקה שונים. בנוסף לכך שואפים ברוסיה לפתח הן יצירתיות ויכולת התמודדות עם בעיות חדשות ולא שגרתיות והן ידע להשתמש באלגוריתמים. כמו כן, התכנית מיועדת לפתח ידע, יכולת לבנות מודלים מתמטיים ולנתחם והרגלי לימוד עצמי, כולל עבודה עם מקורות. גם רשימת המטרות בתכנית מישיגן היא רחבה וכוללת אותן המטרות שמופיעות בתכניות של אנגליה, רוסיה ויפן. בתכנית של מישיגן יש פירוט של המטרות באמצעות 157 ציפיות לגבי התכנים הנלמדים בתכנית.

4. מבנה התכניות

תכנית הלימודים באנגליה מחולקת לארבעה שלבים כאשר השלב האחרון עוסק בגילים 14-16. בסיום שלב זה נבחנים התלמידים לקבלת General Certificate of Secondary Education (GCSE). לאחר הבחינות התלמידים יכולים לעבור ללמוד בבתי ספר מקצועיים או טכניים, או שהם יכולים להמשיך ללמוד ולהיבחן ברמה גבוהה יותר. לאחר שנת לימודים אחת נוספת הם יכולים להיבחן ברמת AS (AS Level) ולאחר שנת לימודים נוספת הם יכולים להיבחן בבחינות מתקדמות יותר (A Level), כדי להתקבל ללימודים באוניברסיטה.

ביפן יש שתי מגמות: מתמטיקה כללית ומתמטיקה מדעית. לומדים שם 40 שבועות בשנה, כ-15% יותר מאשר אצלנו. יש שם מערכת בחינות מקיפה ואינטנסיבית, גם בכניסה לתיכון. כ-97% מהתלמידים ממשיכים את לימודיהם בחטיבה העליונה. בסיום הלימודים בחטיבה העליונה יש מבחני כניסה לאוניברסיטאות ולמוסדות להשכלה גבוהה אחרים. אחד מהשלבים של הרפורמה הוא לעבור להערכה פנים בית ספרית.

בצרפת קיימות שלוש מגמות: כלכלית/חברתית, ספרותית/לשונית ומדעית שמתוכנן על התלמידים לבחור אחרי שנה ראשונה של לימודים בחטיבה עליונה. תוכן החינוך המתמטי מותאם למגמה: דוגמאות מן השטח, הכנה לשימושי המתמטיקה בתחומים הספציפיים וכדומה. בכל מגמה חלק מהשיעורים ניתן בקבוצות גדולות, וחלק – בקבוצות קטנות. בחינת בגרות קיימת רק בסוף כיתה יב, אך יש שמציעים לפצל את הבחינה: חלק ראשון הבודק ידיעות בסוף כיתה יא (כפי שהיה נהוג עד לפני כ-40 שנה), וחלק שני הבודק "בגרות" ו"הבשלה" בסוף כיתה יב. הצעה זו אינה מתאימה לרציונל שלפיו בנויה התכנית העכשווית. כיום קיימת גם אפשרות להיבחן בעל פה על מנת לשפר את הציון של המבחן בכתב. אפשרות כזו קיימת גם במישיגן.

תכנית הלימודים הבסיסית ברוסיה כוללת לפחות 420 שעות בשלוש שנות הלימודים האחרונות, מהן 50 שעות שמורות לתכנים ולשיטות יזומות על ידי המורים ומחברי הספרים. המקצוע מתמטיקה מתחלק לשני תת-מקצועות: "אלגברה ומבוא לאנליזה" ו"גיאומטריה". התכנית מציעה ללמד את שניהם במקביל. שני המקצועות ניתנים גם ברמה מוגברת, וברמה זו מומלץ להקדיש להם לפחות 8 ש"ש. מעניין לציין, שנושא הטריגונומטריה נלמד בשני תת המקצועות.

אחד החידושים בתכנית הלימודים שהופעלה ברוסיה ב-2007 הוא המבחן הממלכתי האחיד שניתן בסוף הלימודים. המבחן מורכב משני בחינות: לפי תכנית הלימודים של בית הספר ובחינת כניסה לאוניברסיטה. לפי החוק במישיגן, כל תלמיד חייב ללמוד ארבעה קורסים במתמטיקה כששלושה מהם הם אלגברה I, אלגברה II

וגיאומטריה. הקורסים נלמדים לא בהכרח בקבוצות של אותו גיל. נושא הבחינות במישיגן בסוף בית הספר נמצא עכשיו בשלבים של דיון ופיתוח. עד לשנת 2009 אמורים להיבנות מבחנים שיקבעו האם תלמיד מילא את חובותיו. כיום יש מבחן מסכם של המדינה שניתן בכיתה יא. מומלץ שבמקביל יבחנו התלמידים במבחן ACT שיבדוק את מוכנותם להמשך לימודים במכללות. מבחן זה אינו בודק את כל הציפיות שהוזכרו בסעיף 3 וכאמור למעלה הנושא של בדיקת ציפיות אלו עדיין בטיפול.

5. התכנים העיקריים של התכניות

הדוח על אנגליה מתייחס לשלב הרביעי של הלימודים שם (גילים 14-16). תכני הלימוד בשלב זה הם מספרים ואלגברה, גיאומטריה ומדידות וסטטיסטיקה. בשלב זה אין לימודי אנליזה. אחד הכלים המרכזיים בהפעלת התכנית באנגליה הוא למידה מבוססת על פרויקטים.

ביפן, נלמדים הנושאים מספרים וביטויים אלגבריים, משוואות ואי-שוויונים, פונקציות, טריגונומטריה, הסתברות וסטטיסטיקה, וקטורים, גיאומטריה אנליטית, אלגברה ליניארית ואנליזה. בתכנית למתמטיקה מדעית יש התמחות, העמקה והרחבה. גם בצרפת מכוסים נושאים אלו. בהשוואה לתכנית הלימודים הקודמת בצרפת, בתכנית הנוכחית לא נכלל שימוש בשפת $\varepsilon - \delta$ והדבר נדחה לאוניברסיטה. כפי שצוין למעלה, מדגישים בצרפת את הקשר בין כל נושא מתמטי לשימושים במדעים אחרים ובמיוחד במדעי המחשב. תכנית הלימודים ברוסיה מכסה אותם נושאים כמו בארצות אחרות. מה שמייחד את התכנית הוא ששמינית מהזמן שמוקצב לה מוקדש ל"קרן שמורה" המאפשרת למורים להחליט מה לעשות בזמן ז; הכנה לבחינות, הרחבה או העשרה. במישיגן לימוד אנליזה אינו הכרחי לסיום בית הספר וניתן ללמוד גיאומטריה לא במקביל ללימוד אלגברה, בניגוד למקובל בארצות אחרות ובמיוחד ברוסיה.

6. דרכי ההפעלה וההערכה של התכניות

התכניות באנגליה וביפן הן חדשות ולפיכך אין עדיין דוחות הבוחנים את איכותן. לגבי אנגליה, כפי שצינו קודם, אחד הכלים להפעלתה הוא למידה מבוססת על פרויקטים. דוגמה לפרויקט כזה בשלב ניסויי התכנית ניתנת בדוח, וכאמור שם המורים והתלמידים אשר לקחו חלק בניסויי טענו כי הפרויקט עורר בהם עניין רב. לימודי המתמטיקה ביפן הם ברמה גבוהה ולכן בודקים במקומות שונים בעולם כיצד ניתן לחקות אותם. יש לקחת בחשבון שתכניות הלימודים ביפן שונה מזו שבארץ ומושתתת על משמעת ולחץ להישגיות. הלימודים ביפן מאופיינים על ידי פיתוח דרכי חשיבה, מיומנויות חקר ופתרון בעיות מאתגרות בבית הספר היסודי ובחטיבת הביניים ובלימוד אינטנסיבי לקראת בחינות בחטיבה העליונה.

אף על פי שההישגים של תלמידים בצרפת במבחנים בינלאומיים הם ממוצעים, הרעיונות הדידקטיים של האסכולה הצרפתית מוערכים בעולם וראויים לתשומת לבנו. ברוסיה ההישגים בינוניים בממוצע, אבל יש בה הרבה איים של מצוינות, בעיקר בערים הגדולות ובבתי ספר מיוחדים. גם לגבי רוסיה אין עדיין די מחקרים על תכנית הלימודים החדשה, אשר בוחנים את איכותה ואת הצלחתה. יחד עם זאת, יש מאמרים אשר דנים במבחן הממלכתי. הם בדרך כלל מטילים ספק במבנה ובתכנים ומדגישים שהמבחן יותר טכני ופחות דורש מחשבה ויצירתיות. בשעת כתיבת סיכום זה ראינו מאמר באחד העיתונים ברוסיה שבו שר החינוך מביע דאגה שבמצב הנוכחי התלמידים לומדים לקראת מבחן במקום ללמוד מתמטיקה לשמה. בינתיים לא נמצאו מחקרים לגבי תכנית הלימודים החדשה במישגן, אבל כבר עכשיו יש סימנים של התלבטויות לגבי הצלחתה.

ריכוז התשובות ל-10 השאלות

כדי לסייע למקבלי ההחלטות להשתמש בתוצאות המחקר סיכמנו את התשובות ל-10 השאלות שהוצגו בפנינו. בטבלה הבאה מרוכזות התשובות לכל אחת מהשאלות לגבי כל אחת מחמש המדינות. בעקבות הממצאים מוצגות המלצות החוקרים.

שאלה מס' 1	מהן מטרות הוראת המתמטיקה בחטיבה העליונה של בית הספר התיכון במדינות הנבחרות, ועל איזה רציונל הן מבוססות?
אנגליה	לפתח מיומנויות וכשרים הנדרשים לחיים ולעבודה במאה ה-21. בין המטרות: פיתוח יצירתיות בקרב הלומדים; פיתוח החשיבה המדעית ויכולות החקר; פיתוח יכולות הרפלקציה, טיעון והנמקה; פיתוח יכולת פתרון בעיות וקבלת החלטות; פיתוח לומד עצמאי
יפן	להדגיש "פעילות מתמטית" אשר מטרתה ליצור הנאה ועניין בלימודי מתמטיקה. המטרה המרכזית של תכנית הלימודים היא לפתח חשיבה לוגית וחשיבה יצירתית ולמידה עצמית.
צרפת	להקנות לתלמידים ידע תאורטי יחד עם מיומנויות טכניות. לבנות ידע שאינו מחולק לנושאים נפרדים בצורה הרמטית, להבין את המתמטיקה כתחום ידע אחד בעל אינטראקציות בין תת-התחומים. להקנות כלים כדי להבין סיטואציות מתוך המדעים השונים ולפתור בעיות מהחיים (אספקט יישומי).

מישיגן, ארה"ב	לפתח מיומנויות להצלחה בלימודים גבוהים ולהצלחה בשוק העבודה.
רוסיה	לפתח הבנת המשמעות והכרה בהשפעה של המתמטיקה על הקידמה ועל התרבות; הכרה והבנה של רעיונות ושיטות במתמטיקה כ"שפת המדעים"; שליטה בשפה מתמטית בעל פה ובכתב; שליטה בידע מתמטי ופיתוח היכולת ליישמו בתחומי דעת אחרים; פיתוח חשיבה לוגית וחשיבה מדעית ביקורתית; פיתוח חשיבה מרחבית; הקניית מיומנויות בחשיבה אלגוריתמית; היכרות עם ההיסטוריה של מתמטיקה.
שאלה מס' 2	מהם העקרונות הפסיכולוגיים והדידקטיים עליהם מושתתות דרכי ההוראה והלמידה של תחום הדעת באותן תכניות?
אנגליה	שלושת עקרונות ה- DNR באים לידי ביטוי בתכנית וביחידות הלימוד המתקדמות. מטרות התכנית מדגישות את הצורך בלמידה של דרכים שונות לפתרון בעיות שונות וכן את הצורך בבחינה ביקורתית של התלמידים לגבי הדרכים השונות. קיים עידוד לקיום דיונים כיתתיים, עבודת צוות וביצוע הערכת עמיתים.
יפן	התכנית היפנית מתאימה לעקרון הנחיצות. עד החטיבה העליונה הלימודים נעשים סביב פתרון בעיות מאתגרות שמזמנות בניית ידע חדש. עד לאחרונה, הנחיצות בחטיבה העליונה הייתה הצלחה בבחינות והלימודים התרכזו בהכנה לבחינות אלו. הרפורמה הנוכחית ביפן נועדה לשנות זאת באמצעות שימת דגש על לימוד תוך פיתוח חשיבה ביקורתית ויצירתית, מעבר להוראה של עד 20 תלמידים בכיתה, יצירת סביבת עבודה המבוססת על טכנולוגיה דיגיטלית, עידוד המורים למתמטיקה לבצע מחקר פעולה בהיבטים השונים של ההוראה.
צרפת	התכנית בנויה על עקרון הצבירה ובמבנה ספיראלי: בונים אבן על אבן, ומדגישים איכות הלמידה והבנה על פני ריבוי נושאים. הריבוי גדל בעזרת פעילויות סדנה. בשלב מאוחר יותר, חוזרים על נושאים שכבר נלמדו, אבל ברמה גבוהה יותר. בנוסף לכך, חשיבות גדולה ניתנת להיבט רב-תחומי במתמטיקה, כגון בעיות המערבות גם גיאומטריה אנליטית מעל המספרים המרוכבים וחדו"א או הסתברות וסדרות של מספרים ממשיים.
מישיגן, ארה"ב	שלושת עקרונות ה- DNR באים לידי ביטוי בתכנית הלימודים.
רוסיה	דגש משמעותי מושם על פיתוח החשיבה. התכנית שמה דגש על הקשר בין הנושאים המתמטיים השונים ועל היישומים שלהם בפתרון בעיות בתחומים המדעיים, כגון פיזיקה, הנדסה וביולוגיה.

	מצוין במפורש כי יש לתת לתלמידים הזדמנויות מגוונות לפתח מיומנויות מתמטיות יישומיות, תוך שימוש מושכל בכלים טכנולוגיים. מודגש כי בכל אחד מהשלבים התלמידים יבנו ידע חדש על בסיס הידע והמיומנויות שהם רכשו בשנים הקודמות.
שאלה מס' 3	מהם התכנים המתמטיים שנלמדים במדינות השונות ובאילו דרגות כיתה?
אנגליה	התכנים העיקריים בהם עוסקת תכנית הלימודים הם: מספרים, אלגברה, גיאומטריה ומדידות וסטטיסטיקה. עבור רמות מתקדמות יותר התכניות הן מודולאריות וכוללות יחידות חובה ובחירה. בין התכנים המתמטיים הנכללים בהן: אלגברה ופונקציות, הנדסה אנליטית, חדו"א, לוגריתמים, טריגונומטריה, אנליזה נומרית, וקטורים, מספרים מורכבים, אינדוקציה, מטריצות ודטרמיננטים, משוואות דיפרנציאליות, פונקציות טריגונומטריות הפוכות, קואורדינטות פולאריות. כמו כן נלמדות יחידות במכאניקה ובסטטיסטיקה.
יפן	תכנית הלימודים מחולקת למספר קורסים. התכנים העיקריים שנלמדים בחטיבה עליונה כוללים את הנושאים הבאים: מספרים וביטויים אלגבריים, משוואות ואי-שוויונים, פונקציות כולל הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות, טריגונומטריה, הסתברות וסטטיסטיקה, וקטורים, במישור ובמרחב, תלות ליניארית, פונקציות במדעי המחשב, אלגברה וגיאומטריה אנליטית, אלגברה של מטריצות, סדרות, מושגים בסיסיים על הקירוב הליניארי ונגזרת. גבול של סדרה, גבול ונגזרת של פונקציה, הנגזרת השנייה, חקירת פונקציות ויישומי הנגזרת נוספים, האינטגרל המסוים והלא מסוים, המשפט היסודי של החדו"א, משוואות דיפרנציאליות, אלמנטים של קומבינטוריקה. קורס "מתמטיקה 1" הוא חובה. הקורסים האחרים הם קורסי בחירה וניתן ללמוד אותם אחרי קורס "מתמטיקה 1". תכנית לימודים במתמטיקה מדעית - התכנית הזאת מהווה התמחות, העמקה והרחבה והיא כוללת שני חלקים: מתמטיקה מדעית ומתמטיקה משולבת. התכנים של הקורס "מתמטיקה משולבת" מתבססים על הקורסים הקודמים אבל ברמה מתקדמת יותר, עם פתרון בעיות מורכבות מתחומים יישומיים. הבחירה מתבצעת לפי רמת הלימודים ולפי הרצון של התלמידים.
צרפת	הבסיס המשותף לתכנית הלימודים בכל המגמות מכיל אלגברה, חדו"א (כולל שיטות אינטגרציה ומבוא לאינטגרלים לא אמיתיים, בלי אזכור של השם) וגיאומטריה (כולל טרנספורמציות, לא רק

תיאור סטטי של קונפיגורציות). בנוסף לכך, לומדים הסתברות, תורת המספרים (במגמות מסוימות), תורת הגרפים (במגמות מסוימות), מספרים מרוכבים כולל היבטים גיאומטריים וטרנספורמציות המישור) ועוד נושאים הקשורים לבעיות קונקרטיות המתאימות למגמה הכללית (מדעית, כלכלית, הומאנית). העבודה מלווה במחשבון גרפי או במחשבון סימבולי בצורה אינטגרטיבית. המיומנויות הטכנולוגיות נחשבות כחלק מן המיומנויות המתמטיות הנרכשות, בהתאם לתאוריה האנתרופולוגית של הלמידה ולתיאורית ה-instrumental genesis.	
תכניות הלימודים בנויה סביב 4 קוים מובילים: אורניות כמותית ולוגיקה, אלגברה ופונקציות, גיאומטריה וטריגו, סטטיסטיקה והסתברות. מבחינה ארגונית, יש ללמוד לפחות 4 קורסים, וביניהם: אלגברה 1, אלגברה 2 וגיאומטריה. קורסים נוספים כוללים מבוא לאנליזה וסטטיסטיקה.	מישיגן, ארה"ב
תכנית הלימודים הבסיסית במתמטיקה כוללת לפחות 420 שעות בשלוש שנות הלימודים האחרונות, מהן 50 שעות שמורות לתכנים ולשיטות יזומות על ידי המורים ומחברי הספרים ולשילוב טכנולוגיות. המקצוע "מתמטיקה" מתחלק לשני תת-מקצועות: "אלגברה ומבוא לאנליזה" ו"גיאומטריה". התכנית מציעה ללמד את שניהם במקביל. ללימודי מתמטיקה ברמה מוגברת (שני המקצועות) מומלץ להקדיש לפחות 8 ש"ש.	רוסיה
כיצד מרכיבים של חשיבה מתמטית באים לידי ביטוי בתכניות הלימודים הנבחרות?	שאלה מס' 4
מרכיבים אלה כלולים גם בהגדרת מטרות התכניות ובאופן יישום התכניות עצמן. הדרך העיקרית לפיתוח חשיבה מתמטית היא פתרון בעיות. התלמידים נדרשים לבחון באופן ביקורתי אסטרטגיות פתרון שונות, ליצור ולנמק טיעונים לשם הצדקת ממצאים והצהרות, לקשר ממצאים, לזהות אסטרטגיות פתרון רלבנטיות, אלגנטיות ויעילות לבעיות ספציפיות, לקשר בין ייצוגים שונים, לפתור בעיות רב-שלביות תוך שימוש בתכונות ובמשפטים שלמדו ולהיות מסוגלים לערוך שימוש במגוון דרכים על מנת להציג ממצאיהם לקהלי יעד שונים.	אנגליה
הדרך העיקרית לפיתוח חשיבה מתמטית מסתמכת על העיקרון של פתרון בעיות מובנה אשר בא לידי ביטוי בפעילות מתמטית של שיתוף פעולה ושל אינטראקציות בין התלמידים סביב פתרון	יפן

	בעיות. לאחר שתלמידים עובדים באופן עצמאי בפתרון בעיות הם מציגים רעיונות שלהם במתכונת של דיון כלל כיתתי. בצורה כזאת התלמיד הוא שותף פעיל בתהליך הבניית הידע.
צרפת	מדגישים חשיבה ולא טכניקה יבשה. האסכולה הצרפתית משתמשת במילה טכניקה בהיבט רחב יותר ממדינות אחרות. בעיני החוקרים הצרפתים הדומיננטיים, "טכניקה" היא צירוף של חשיבה (הערך האפיסטמי) ופרקטיקה (הערך הפרגמאטי). לא מייחסים הרבה כבוד לעבודה בלי חשיבה. גם העבודה הנתמכת טכנולוגיה בנויה כדי לתמוך בחשיבה.
מישיגן, ארה"ב	מרכיבי החשיבה המתמטית מפורטים בסטנדרטים של הקווים מנחים. הסטנדרטים של הקורסים מדגישים בעיקר היבטים טכניים/פרגמאטיים.
רוסיה	תכנית הלימודים החדשה מכירה בחשיבות התכנים המתמטיים, תוך מתן דגש על פיתוח המיומנויות הנדרשות וגם פיתוח חשיבה לוגית וחשיבה מדעית ביקורתית. ההתייחסות הרצינית למטרות אמורה להבטיח שהתלמידים ייצאו מבית הספר התיכון עם ידע, מיומנויות וגישות, אשר יאפשרו להם להשתלב בלימודים אקדמיים ובשוק העבודה. בתכנית החדשה מודגש גם השימוש המושכל בטכנולוגיות המודרניות.
שאלה מס' 5	כיצד תכנית הלימודים במתמטיקה מופעלת במדינות הנבחרות בקרב אוכלוסיות הטרוגניות?
אנגליה	בתכנית הלימודים קיים פירוט כללי בלבד כיצד על בתי הספר להתמודד עם לומדים בעלי צרכים מיוחדים. למעשה, הבחירה היא בידי בתי הספר. עם זאת, מצוין כי על המורים ליצור סביבות למידה יעילות ומאתגרות, לאפשר ללומדים המתאימים הרחבה והעמקה בחומר הנלמד, להגביר את המוטיבציה והריכוז בקרב התלמידים, לשים דגש על מתן שוויון הזדמנויות וליישם גישות הערכה מתאימות. המורים יכולים לאמץ תכניות שונות המתמקדות בקבוצות שונות, כמו בתלמידים לקויי למידה, תלמידים מוכשרים ועוד. המורים יכולים לבחור ללמד את הידע והמיומנויות משלבים מוקדמים או מתקדמים יותר (למשל מ-3 stage או מ-A levels), כך שהתלמיד היחיד יהיה מסוגל להתקדם בלמידתו ולהצביע על הישגיו.
יפן	הארגון של תכנית הלימודים ברמות שונות מיועד ליצור כיתות עם רמת ההטרוגניות נמוכה יחסית. חשוב לציין כי לתלמידים היפנים יש ציפיות גדולות ורצון לדעת, ואכן הם לומדים הרבה.

צרפת	בבית ספר תיכון האוכלוסייה הטרוגנית בכיתה י'. אחת המטרות של הכיתה הזאת היא צפייה בתלמידים על מנת למיין אותם למגמות בהמשך. בכיתות יא ו-יב קיימות מגמות המדעים S, מגמת כלכלה-חברתית ES, מגמה הומאנית L (ספרות, פילוסופיה, שפות) ועוד מספר רב של מגמות מקצועיות שלא הוצגו בדוח זה. בכל מגמה קיימת אפשרות לתוספת מתמטית (התמחות – spécialité) במשקל ניכר, אבל היא אופציונאלית.
מישיגן, ארה"ב	התלמידים לוקחים את הקורסים בהתאם ליכולתם ומוכנותם ולא דווקא בהתאם לגיל. המחוז רשאי לתכנן קורסים נוספים כדי לעזור לתלמידים מתקשים. קיימת אפשרות להתאמה אישית של הקורסים העיקריים לצרכים של תלמידים מתקשים. תלמידים מצטיינים יכולים לקחת קורסים מתקדמים (AP).
רוסיה	הארגון של תכנית הלימודים ברמות שונות מיועד ליצור כיתות עם רמת ההטרוגניות נמוכה יחסית. בתכנית הלימודים אין הוראות לגבי הפעלת התכנית בכיתות שונות.
שאלה מס' 6	כיצד מתפלגת אוכלוסיית התלמידים ברמות השונות? (שיעור הלומדים ברמה המוגברת, הבינונית והחלשה ועד איזו דרגת כיתה)
אנגליה	כמעט כל התלמידים נבחנים בבחינות GCSE, אבל רק מעט יותר ממחציתם נבחנים בחמש בחינות ברמה גבוהה, תנאי לקבלה לאוניברסיטה. ב-2005 נבחנו בחמישה מקצועות ברמה הגבוהה 56.3% מהתלמידים בעוד שרק 44.3% נבחנו בחמישה מקצועות הכוללים גם מתמטיקה.
יפן	ביפן לא נהוגות הקבצות, ולפיכך לא נהוגים קריטריונים למיון.
צרפת	הסקירה אינה מספקת מידע. כנראה בגלל החשיבות של המתמטיקה בתנאי קבלה להמשך לימודים, קיימת אצל תלמידים רבים נטייה לנסות את כוחותיהם במגמה המדעית S, גם אם זה כרוך במאמצים קשים. כנראה קיים רצון ממשלתי להוריד ממשקל המתמטיקה בנקודה זאת.
מישיגן, ארה"ב	אחוז תלמידי התיכון שניגשו למבחן ה-AP במתמטיקה ב-2007 במישיגן הוא 8.1% (לעומת 9.4% מכלל תלמידי התיכון בארה"ב). אחוז התלמידים אשר השיגו במבחן זה ציון של 3 נקודות או יותר (5 נקודות הוא הציון המרבי) במישיגן הוא 5.3% (לעומת 5.5% מכלל תלמידי התיכון בארה"ב).

רוסיה	יש הקבצות בארבע שנות הלימודים האחרונות לפי רמות היכולת של התלמידים. קריטריוני החלוקה להקבצות נקבעים על ידי בית הספר.
שאלה מס' 7	האם קיימות הקבצות על פי רמות בתכניות הנבדקות (ובאיזה גיל)?, מהם הקריטריונים לפיהם נקבעות ההקבצות?
אנגליה	תכנית הלימודים באנגליה מחולקת לארבעה שלבים, על פי כיתות הלימוד. בכל אחד מהשלבים הלומדים יכולים להגיע לרמות שונות. בשלב הרביעי מדובר על למידה לרמות של הישגים יוצאי דופן. אין בנמצא פירוט של הרמות, למעט ההישגים הנדרשים מהתלמידים ברמות אלה. אין פירוט קריטריונים.
יפן	קיימות רמות לימוד שונות, אך אין הקבצות, ולפיכך גם אין קריטריונים למיון.
צרפת	המגמות תוארו לעיל בשאלה 6: שלוש מגמות (S,ES,L) עם אפשרות להתמחות במתמטיקה בנוסף לחלק המשותף (חובה).
מישיגן, ארה"ב	התלמידים לוקחים את הקורסים בהתאם ליכולתם ולמוכנותם ולא דווקא בהתאם לגיל. המחוז יכול לתכנן קורסים נוספים כדי לעזור לתלמידים מתקשים. קיימת אפשרות להתאמה אישית של הקורסים העיקריים לצרכים של תלמידים מתקשים. תלמידים מצטיינים יכולים לקחת קורסים מתקדמים (AP).
רוסיה	יש הקבצות בארבע שנות הלימודים האחרונות לפי רמות היכולת של התלמידים. קריטריוני החלוקה להקבצות נקבעים על ידי בית הספר. בנוסף לכך, קיימים בתי ספר מתמטיים מיוחדים.
שאלה מס' 8	מהי "תרבות הלימוד" במתמטיקה כפי שהיא משתקפת בתכניות הלימודים של אותן מדינות? (מתמטיקה לכל לעומת מתמטיקה למתמחים); האם קיימות תכניות לימודים שונות למתמחים במדעים ולשאר התלמידים, ואם כן - במה הן שונות?
אנגליה	במסגרת "תרבות הלימוד" במתמטיקה, כפי שהיא משתקפת בתכניות הלימודים באנגליה, התלמידים אמורים לשלב בין הבנה להתנסות, לדמיון ולהנמקה כדי לבנות ידע חדש. עליהם להשתמש בידע מתמטי קיים כדי ליצור פתרונות לבעיות שאינן מוכרות. מעבר לכך, התלמידים צריכים לאמץ גישה של שאילת שאלות ושל פיתוח נימוקים משכנעים. התלמידים צריכים לדעת שהמתמטיקה היא דיסציפלינה מדויקת ועקבית, וכן להבין שאפשר להשתמש במתמטיקה ככלי בהקשרים שונים. נראה שאין תכניות שונות למתמחים במדעים ולשאר התלמידים.

יפן	מערכת החינוך היפנית מכוונת את עצמה לתפיסה של "הילד במרכז". על פי תפיסה זו, תכנית הלימודים מתאימה עצמה לצורכי הילד. המורה מתרכז יותר בילד, בסקרנותו, בצרכיו, במגבלותיו ובקצב התפתחותו. קיימות שתי תכניות במתמטיקה: תכנית לימודים במתמטיקה כללית ותכנית לימודים במתמטיקה למתמחים.
צרפת	קיימות שלוש מגמות עיקריות S,ES,L ולכל אחת אפשרות משלה להתמחות במתמטיקה, בהתאם לאספקטים המיוחדים של המגמה. התוספת ל-S מדעית; התוספת ל-L המכוונת לבעיות הקשורות לחברה וכדומה. לחץ חברתי מסוים (ולא רק חברתי) משפיע על הרצון ללמוד במגמה מדעית עם התמחות במתמטיקה.
מישיגן, ארה"ב	קיימת אפשרות להתאמה אישית של הקורסים העיקריים לצרכים של התלמידים ברמות השונות של היכולת וההכנה.
רוסיה	קיימות תכניות לימודים שונות למתמחים במדעים ולשאר התלמידים. יש הבדלים משמעותיים בין האזורים השונים של המדינה.
שאלה מס' 9	מה מלמד המחקר החינוכי על איכותן ו/או על הישגיהן של תכניות אלה ועל הוראת המתמטיקה בכלל.
אנגליה	על פי הסקירה הנוכחית, ההתייחסות בשאלה זו תהיה להוראת המתמטיקה: א. בעקבות מחקרים שונים מושם כעת דגש בתכנית הלימודים החדשה על בניית ידע התלמיד על בסיס הידע הקודם והמיומנויות שנרכשו בשלבים מוקדמים יותר ועל ישום ידע זה בהקשרים נרחבים. ב. בעקבות מחקרים בוצע שינוי נוסף בתכנית הלימודים החדשה באנגליה והוא כולל ההתייחסות להיבטים שימושיים של המתמטיקה מתוך הצורך שתלמידים יישמו הבנות לגבי מתמטיקה בהקשרים שונים בכיתה ומחוצה לה. מחקרים מעידים כי מורים ותלמידים צריכים להתייחס למשימות הניתנות בכיתה כאל הזדמנות לפתח רעיון ולא כאל פתרון של תרגיל. ג. בעקבות מחקרים נמצא כי מרבית השאלות הנשאלות על ידי המורים בשיעורי מתמטיקה מעודדות שליפה מהזיכרון או ביצוע פרוצדורות. על כן, כיום המורים נדרשים לעידוד התלמידים לשאילת שאלות ולרפלקציה ברמה גבוהה. יתר על כן, המורים נדרשים לספק לתלמידים די זמן לחשוב על דרכי פתרון טרם הצעת עזרה מצידם.

יפן	השיטה היפנית שמבוססת על דיון בפתרונות שונים לבעיות משמעותיות ידועה בעולם ומשמשת כמודל לחיקויים. יש לציין שהדוגמאות לשימוש בשיטה מתייחסות לחטיבת הביניים.
צרפת	המורים בבתי הספר התיכוניים מתקבלים לרוב אחרי תואר ראשון או שני ועוד הכשרה מיוחדת. קיימות בחינות נוספות כדי להתקבל לשירות המדינה (CAPES אחרי תואר ראשון, Agrégation אחרי תואר שני). הספרים מושקעים מאוד ברמה המתמטית, באיכות ההסברים ובאסתטיקה שלהם. התוצאות נראות לעין דרך הסטודנטים הבאים מצרפת והמתקבלים למוסדות להשכלה גבוהה בארץ. רמת הידיעות ורמת המיומנויות שלהם בדרך כלל גבוהות. הם כבר למדו (ושולטים על) נושאים רבים הנלמדים בהרבה מדינות רק בשנה א' בחינוך העל-תיכוני והגבוה. הערה נוספת: קיימת מגמה להורדת רמה, ולא מסיבות חינוכיות לפי מה שאומרים מורים וחוקרים שם (שעות ההתמחות והסדנה יקרות).
מישיגן, ארה"ב	עדיין אין. בית הספר והמחוזות יכולים לבחור בדרכים שונות להערכה.
רוסיה	אין עדיין די מחקרים אשר בוחנים את איכותה של תכנית הלימודים החדשה ואת מידת הצלחתה. יחד עם זאת, אפשר כבר להציג מספר מאמרים אשר דנים במבחן הממלכתי. הם בדרך כלל מטילים ספק במבנה ובתכנים, ומדגישים שהוא יותר טכני ופחות דורש מחשבה ויצירתיות.
שאלה מס' 10	כיצד משפיעים מחקרים, ניירות עמדה ודוחות העוסקים בהוראת מתמטיקה בחטיבה העליונה על שינויים בתכנית הלימודים?
אנגליה	מחקרים אכן משפיעים על שינויים בתכניות הלימודים באנגליה, הן על ידי גורמים אקדמיים והן על ידי גופים הממונים על פיתוח סילבוסים, על בחינות ועל הערכתן. למשל, החוקרים ליטל וג'ונס (Little & Jones, 2008) בוחנים במאמרם את ההתפתחויות שחלו במהלך השנים 1951-2001 בבחינות GCE A-level אשר משמשות גם כתנאי קבלה לאוניברסיטאות באנגליה. הם מצאו כי מעבר לשינויים חברתיים, טכנולוגיים וכלכליים קיימות דרישות ומופעלים לחצים על מערך בחינות הגמר מצד בעלי עניין שונים הכוללים את התלמידים עצמם, הורי התלמידים, המורים, הגופים הבוחנים, הממשלה, האוניברסיטאות ומעסיקים שונים. תלמידים והורים שואפים להשגת ציונים גבוהים, המורים מעוניינים בסילבוס שיאפשר לתלמידיהם סיכויי הצלחה גבוהים יותר,

האוניברסיטאות מעוניינות ברוב לומדים ברמה גבוהה, הממשלה אחראית על הסטנדרטים ועל התאמה בין הסילבוסים וקשובה ללחצים מקבוצות עניין שונות, והמעסיקים מעוניינים, במיוחד בשנים האחרונות, בבוגרי מערכת חינוך בעלי הכשרה מתמטית גבוהה. כתוצאה מכך, אכן מבוצעים שינויים בתכניות הלימודים תוך ניסיון לשמירת איזון בין הצרכים של גורמי העניין השונים. מעבר למחקרים, נערכים דוחות על ידי גופים הממונים על פיתוח הבחינות והערכתן. בדרך כלל גופים אלה כותבים דוחות על כל בחינה שנעשתה ביחידות הלימוד השונות. למשל, הגופים OCR, AQA, Edexcel, WJEC, CCEA. גופים אלה מפרסמים את חומרי ההערכה, כולל בחינות שניתנו בעבר, הנחיות למורים ודוחות סטטיסטיים הנוגעים לאחוזי הצלחה ברמות השונות. גופים אלו מבוקרים על ידי גוף ממשלתי ה-QCA.	
שינויים במערכת חינוך בכלל ובהוראת מתמטיקה בפרט מצביעים על כך שמחקרים של האקדמיה היפנית אכן משפיעים באופן משמעותי על קבלת החלטות והיוו גורם מרכזי ברפורמה שהתקבלה ב-2002.	יפן
קיימת מערכת משומנת של מכונים להכשרה של pre-service ושל in-service (כגון IUFM). תכנית הלימודים מופצת לא רק בראשי פרקים או ברשימת נושאים, אלא כטבלה המתארת יחד עם הנושאים את רמת ההוכחות ואת העומק הנדרש. הספרים נכתבים על ידי צוותים שחבריהם מלמדים חלקם בבתי ספר וחלקם באוניברסיטה. המחקרים משפיעים דרך ארגוני מורים (APMEP) ומכונים המיועדים לכך (IREM). יש בצרפת חוקרים בחינוך מתמטי ברמה גבוהה והם משפיעים על תכנים ועל צורת ההוראה. התוצאות איטיות ממה שהחוקרים היו רוצים לראות (לדוגמה, הכניסה לשטח של הכלים הטכנולוגיים הייתה איטית, למרות הרצון של משרד החינוך שם).	צרפת
הרפורמה במישיגן הושפעה על ידי החוקים (2006) והסטנדרטים (2007).	מישיגן, ארה"ב
ניירות העמדה והדוחות התבטאו בהשקעה במורים, השקעה בתשתיות, השקעה בספרי לימוד ובחומרי למידה	רוסיה

המלצות החוקרים

1. להשתמש ב-DNR כמסגרת תאורטית לפיתוח תכנית הלימודים.
2. בניסוח מטרות התכנית כדאי לכלול התייחסות לפיתוח דרכי חשיבה תוך כדי לימוד תוצרים מתמטיים, כמו למשל בצרפת.
3. מטרות התכנית צריכות להיות ניתנות לביצוע ולבדיקה גם כאן, כמו בצרפת.
4. להתאים את תכנית הלימודים לצרכים של קבוצות שונות של תלמידים ולשלב שימושים שונים של מתמטיקה בהתאם לצרכים אלו.
5. לבנות את לימוד הנושאים סביב משימות עשירות ומאתגרות, ולעשות זאת בכל הרמות (כמו באנגליה וביפן).
6. אחת ממטרות תכנית הלימודים היא שבוגרי בית הספר התיכון ידעו להעריך את היופי ואת החשיבות של המתמטיקה. יש לדאוג לכך בכל הרמות.
7. ברמת 3 יח"ל מוצע להוסיף קורס של "math appreciation" ולשם כך לצמצם חומר שנלמד בצורה טכנית בלבד, כמו אנליזה.
8. עבור תלמידים בעלי נטיות וכישורים מתמטיים מיוחדים יוצע קורס ברמה יותר גבוהה מ-5 יח"ל שיכלול בעיות אולימפידיות ונושאים מתקדמים (ואולי ייתן קרדיט אקדמי). דוגמאות לכך ראינו באנגליה וביפן.
9. להקצות בתכנית הלימודים זמן שהמורים למתמטיקה יוכלו להשתמש בו כרצונם להעמקה, להרחבה או לתרגול, כמו בתכנית ברוסיה.
10. למידה פעילה דורשת הרבה זמן. לכן חלק של הנושאים ניתן ללמד בסגנון JUKU.
11. כמו בצרפת, כדאי ללמד חלק מהשעורים בקבוצות קטנות. ניתן לעשות זאת על ידי חלוקת ההוראה בין מורה אחראי ומורים עוזרים.
12. כפי שראינו, אין בדוחות תמימות דעים בנושא הבחינות. לפיכך איננו ממליצים דבר על מבנה הבחינות.
13. כדאי לארגן את ההוראה לפי נושאים ורמות ולא לפי גילים, כמו למשל במישיגן.
14. גם אם שמים את הילד במרכז, אסור לשים את המורה בצד. יותר מכך, יש לשפר באופן משמעותי את מעמד המורה. כדאי ללמוד מיפן. שכר המורים שם הוא הגבוה ביותר במגזר הציבורי. המורים משתתפים בקבוצות מחקר ובסדורים לימודיים בתעשייה ומעמדם בחברה הוא גבוה.

רוב ההמלצות מבוססות על מה שלמדנו מהדוחות על 5 המדינות. אף על פי שלא התבקשנו להתייחס לנושא מעמד המורה, התייחסנו אליו בהמלצה מס' 14 כיוון שכל תכנית לימודים, טובה ככל שתהיה, תצליח רק אם מעמד המורה ישופר בצורה משמעותית.