

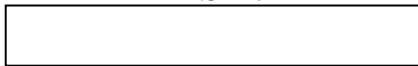
שומר מסך

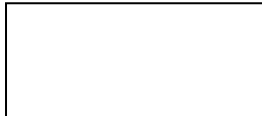
מתכנת התבקש לתכנן 'שומר מסך' שצורתו שני מלבנים, אשר גודלם משתנה כל הזמן. בכל רגע נראים שני המלבנים במלואם: הם אינם מכסים זה את זה, אפילו לא באופן חלקי. המתכנת תכנן שני דגמים של מלבנים.

מלבן מדגם I: בעל צלע אחת שאורכה אינו משתנה ועומד על 4 ס"מ, וצלע שנייה הקטנה בסנטימטר אחד בכל שנייה, ואורכה ההתחלתי הוא 22.5 ס"מ.

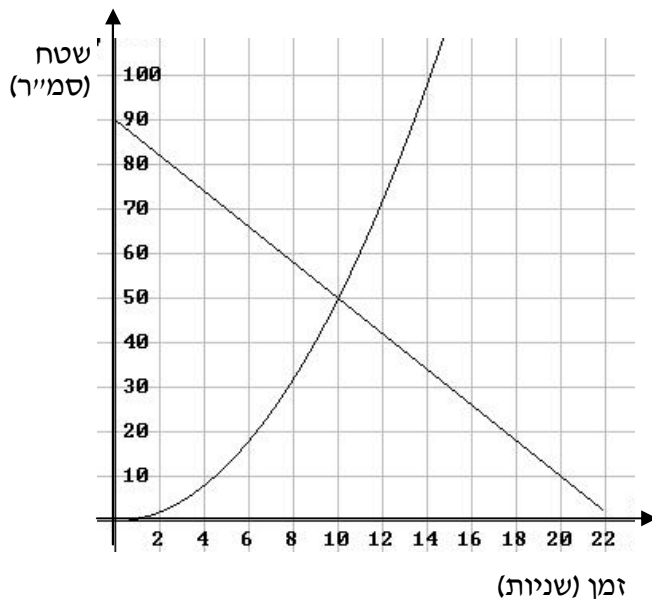
מלבן מדגם II: בעל צלע אחת הגדלה בכל שנייה בסנטימטר אחד, וצלע שנייה הגדלה בכל שנייה בחצי ס"מ.

לפניכם התבניות שרשם המתכנת על צלעות המלבנים, המתארות את אורכיהן בס"מ (t מייצג

את הזמן בשניות): $22.5 - t$
 מלבן מדגם I: 

מלבן מדגם II: $\frac{1}{2}t$


השתנות כל מלבן מתבצעת באופן רצוף, במחזוריות של 22 שניות. המתכנת תכנן שצבעי המלבנים יקבעו בכל שנייה לפי החוקיות הבאה: המלבן בעל השטח הגדול מבין השניים יהיה בצבע אדום, והמלבן הקטן יהיה כחול. כאשר שטחי המלבנים שווים נשמע זמזום, והמלבנים משנים את צבעם.



לפניכם הגרפים המתארים את השתנות שטחי שני המלבנים:

- שאלה 1. התאימו לכל גרף את דגם המלבן המתאים לו.
- שאלה 2. א. מהו שטחו ומה צבעו של מלבן מדגם I בתום השנייה השישית?
ב. מהו שטחו ומה צבעו של מלבן מדגם II בתום השנייה השישית?
- שאלה 3. מלבן מדגם II יגיע לשטח שגודלו 20 סמ"ר כעבור:
א. כ-10 שניות ב. כ-6 שניות ג. כ-18 שניות ד. אף פעם
- שאלה 4. קבעו מהו ההיגד הנכון לגבי מהלך מחזור אחד:
א. שטחי המלבנים משני הדגמים גדלים תמיד.
ב. שטחי המלבנים משני הדגמים קטנים תמיד.
ג. שטח מלבן מדגם I גדל תמיד ושטח מלבן מדגם II קטן תמיד.
ד. שטח מלבן מדגם I קטן תמיד ושטח מלבן מדגם II גדל תמיד.
- שאלה 5. המתכנת רצה ששטח המלבן מדגם I יקטן ב-4 סמ"ר בכל שנייה.
האם הוא הצליח? הסבירו כיצד אתם יודעים זאת.
- שאלה 6. באיזה שלב מתחלפים צבעי המלבנים במהלך המחזור הראשון? הסבירו כיצד מצאתם.
- שאלה 7. סמנו 'נכון' או 'לא נכון', ונמקו:
א. בתום 4 שניות מתחילת מחזור, צבעו של המלבן מדגם I הוא כחול.
ב. לקראת סוף המחזור, צבע המלבן מדגם II הוא אדום.
ג. במשך מחזור אחד, המלבנים משנים את צבעם פעם אחת.
ד. המלבנים משנים את צבעם כאשר הם בעלי אותו שטח.
- שאלה 8. בחרו את התשובה הנכונה:
במחזור אחד, המלבן מדגם II היה בצבע אדום במשך:
א. 10 שניות ב. 12 שניות ג. 4 שניות ד. 50 שניות
- שאלה 9. כאשר הפעיל המתכנת את שומר המסך שהכין, הוא ראה כי לקראת סופו של כל מחזור, הצבע הכחול כמעט שאינו נראה. הציעו לו כיצד לשנות את התבנית של המלבן מדגם I, כך ששטחו יגדל ושהצבע הכחול יבלוט יותר לקראת סוף המחזור.

פתרון למשימה: שומר מסך

מאפייני המשימה:

- התאמת מודל מתמטי לשאלה מציאותית;
- קריאת גרף;
- השוואה בין גרפים;
- המרה בין ייצוג מילולי, אלגברי וגרפי;
- הבנת מחזוריות של תופעה.

שאלה 1. התאימו לכל גרף את דגם המלבן המתאים לו.

הגרף היורד מתאים לדגם I, כי שטחו של המלבן מדגם I קטן במהלך הזמן, עד תום המחזור הראשון.

הגרף העולה מתאים לדגם II, כי שטחו של המלבן מדגם II גדל במהלך הזמן, עד תום המחזור הראשון.

ניתן לפתור את השאלה גם בעזרת הביטויים האלגבריים המתארים כל אחד מן השטחים.

השטח של המלבן מדגם I הוא מכפלת שתי צלעות המלבן:

$$S_I = 4 \cdot (22.5 - t) = -4t + 90$$

היורד בשיפוע -4, והחותך את הציר האנכי ב-90.

$$S_{II} = \frac{1}{2} t \cdot t = \frac{1}{2} t^2$$

השטח של המלבן מדגם II הוא מכפלת שתי צלעות המלבן:

התקבל ביטוי ששרטוטו כגרף הוא מחצית פרבולה (כי $t \geq 0$) שקדקודה בראשית הצירים.

שאלה 2. א. מהו שטחו ומה צבעו של מלבן מדגם I בתום השנייה השישית?

ניתן לראות מהשרטוט כי בתום השנייה השישית, הגרף היורד של המלבן מדגם I גבוה מהגרף של המלבן מדגם II, כך ששטחו של המלבן מדגם I גדול יותר. לפיכך יהיה צבעו של המלבן מדגם I אדום. מתוך התבוננות בגרף נראה ששטחו של המלבן מדגם I הוא בין 60 ל-70 סמ"ר. ואמנם, אם נציב את הערך 6 בתבנית המתאימה יתקבל:

$$S_I(6) = 4 \cdot (22.5 - 6) = -4 \cdot 6 + 90 = 66$$

שטחו של המלבן מדגם I הוא 66 סמ"ר.

ב. מהו שטחו ומה צבעו של מלבן מדגם II בתום השנייה השישית?

כיוון שהמלבן מדגם I הוא בצבע אדום, חייב צבעו של המלבן מדגם II להיות כחול. מתוך התבוננות בגרף נראה ששטחו של המלבן מדגם II הוא מעט פחות מ- 20 סמ"ר. ואמנם, אם נציב את הערך 6 בתבנית המתאימה יתקבל:

$$S_{II}(6) = \frac{1}{2}6^2 = 18$$

שטחו של המלבן מדגם II הוא 18 סמ"ר.

3. מלבן מדגם II יגיע לשטח שגודלו 20 סמ"ר כעבור:

א. כ- 10 שניות ב. כ- 6 שניות ג. כ- 18 שניות ד. אף פעם

מלבן מדגם II יגיע לשטח שגודלו 20 סמ"ר כעבור כ- 6 שניות.

כאמור, כמו בפתרון התרגיל הקודם, ניתן לראות זאת מתוך הגרף או באמצעות הצבה בתבנית. אמנם הצבת 6 בתבנית מגלה ששטחו של מלבן II הוא 18 סמ"ר (וזה נמוך מ- 20 סמ"ר), אך הצבת 7 בתבנית מגלה ששטחו של מלבן II הוא 24.5 סמ"ר. לכן שטחו של המלבן מגיע ל- 20 סמ"ר סמוך יותר לתחילת השנייה השישית מאשר לתום השנייה השביעית.

4. קבעו מהו ההיגד הנכון לגבי מהלך מחזור אחד:

- א. שטחי המלבנים משני הדגמים גדלים תמיד.
- ב. שטחי המלבנים משני הדגמים קטנים תמיד.
- ג. שטח מלבן מדגם I גדל תמיד ושטח מלבן מדגם II קטן תמיד.
- ד. שטח מלבן מדגם I קטן תמיד ושטח מלבן מדגם II גדל תמיד.

ההיגד הרביעי הוא הנכון. ניתן לבדוק זאת באופן מידי באמצעות קריאת הגרפים, וניתן להסיק זאת באופן ישיר מתוך תבניות השטחים. במלבן I צלע אחת קבועה וצלע אחרת קטנה, ולכן השטח קטן. במלבן II שתי הצלעות גדלות, ולכן השטח גדל.

5. המתכנת רצה ששטח המלבן מדגם I יקטן ב- 4 סמ"ר בכל שנייה.

האם הוא הצליח? הסבירו כיצד אתם יודעים זאת.

המתכנת הצליח, ושטחו של מלבן I קטן בכל שנייה ב- 4 סמ"ר. למסקנה זו ניתן להגיע במספר דרכים:

א. שיפוע הגרף הישר המתאר את שטח המלבן הוא -4, מכאן שהשטח קטן בכל שנייה ב-4 סמ"ר.

ב. ניתן להציב בתבנית של שטח המלבן I שני זמנים עוקבים: t ו- $t+1$, ולחשב את ההפרש בין שני השטחים שנמצאו.

ג. ניתן להציב ערכים מספריים שונים בתבנית של שטח מלבן I, ולראות שבכל שנייה קטן שטחו של מלבן I ב-4 סמ"ר.

שאלה 6. באיזה שלב מתחלפים צבעי המלבנים במהלך המחזור הראשון? הסבירו כיצד מצאתם.

הצבעים מתחלפים כעבור 10 שניות מתחילת המחזור. אפשר להבחין בזאת באמצעות בדיקת נקודת החיתוך של שני הגרפים, ואפשר לפתור את המשוואה הריבועית

$$S_I = S_{II} \quad \text{המתקבלת מהצבת שוויון השטחים:}$$

$$-4t + 90 = \frac{1}{2}t^2$$

למשוואה יש שני פתרונות: $t = 10$, ו- $t = -18$. הפתרון השני איננו מתאים, כי הוגדר מראש ש- $t \geq 0$. (אילו היה מוגדר זמן שלילי, והפרבולה המשורטטת הייתה שלמה, אז $t = -18$ היה מתאר את נקודת החיתוך הנוספת של שני הגרפים.)

שאלה 7. סמנו 'נכון' או 'לא נכון', ונמקו:

א. בתום 4 שניות מתחילת מחזור, צבעו של המלבן מדגם I הוא כחול. לא נכון.

בתום 4 שניות מתחילת מחזור, צבעו של המלבן מדגם I הוא אדום כי שטחו גדול יותר.

ב. לקראת סוף המחזור, צבע המלבן מדגם II הוא אדום. נכון.

לקראת סוף המחזור, צבעו של המלבן מדגם II הוא אדום כי שטחו גדול יותר.

ג. במשך מחזור אחד, המלבנים משנים את צבעם פעם אחת. לא נכון.

במשך מחזור אחד המלבנים משנים את צבעם פעמיים: פעם אחת בתום 10 שניות, ופעם נוספת בתום המחזור.

ד. המלבנים משנים את צבעם כאשר הם בעלי אותו שטח. לא נכון.

המלבנים משנים את צבעם כאשר הם בעלי אותו שטח בתום 10 שניות מתחילת המחזור, אך בתום המחזור הם מחליפים שוב את צבעיהם למרות ששטחיהם שונים.

שאלה 8. בחרו את התשובה הנכונה :

במחזור אחד, המלבן מדגם II היה בצבע אדום במשך :

- א. 10 שניות ב. 12 שניות ג. 4 שניות ד. 50 שניות

במחזור אחד, המלבן מדגם II היה בצבע אדום מתום השנייה העשירית ועד תום המחזור, כלומר : במשך 12 שניות.

שאלה 9. כאשר הפעיל המתכנת את שומר המסך שהכין, הוא ראה כי לקראת סופו של כל

מחזור, הצבע הכחול כמעט שאינו נראה. הציעו לו כיצד לשנות את התבנית של

המלבן מדגם I, כך ששטחו יגדל ושהצבע הכחול יבלוט יותר לקראת סוף המחזור.

קיימות אפשרויות שונות לטיפול בבעיה, כולן מבוססות על הניסיון להגדיל את שטחו של המלבן מדגם I גם לקראת סוף המחזור.

אפשרות א : הגדלת הצלע הקבועה של מלבן I, למשל ל- 5 ס"מ. זוהי אפשרות נכונה אף שאין היא מוצלחת. שטחו ההתחלתי של מלבן I גדל באופן משמעותי, אך גם קצב הקטנת שטחו של המלבן מהיר יותר. באופן זה, גדל שטחו ההתחלתי של המלבן ב- 22.5 סמ"ר, אך בסוף המחזור שטחו גדל רק ב- 0.5 סמ"ר. תלמידים מתקדמים עשויים להגיע להכללה, לפיה אם מגדילים את הצלע הקבועה ב- d ס"מ, יגדל שטח המלבן בסוף המחזור ב- 0.5d סמ"ר. כמו כן, יכולים תלמידים מתקדמים לגלות שלמשפחת הישרים המתקבלים באופן זה יש נקודה משותפת שהיא (0, 22.5).

אפשרות ב : הגדלת האורך ההתחלתי של הצלע המשתנה, למשל ל- 25 ס"מ. באופן זה גדל שטחו של המלבן ב- 10 סמ"ר בכל רגע נתון, ובפרט בסוף המחזור. תלמידים מתקדמים עשויים לגלות שהישרים המתקבלים באופן זה מקבילים כולם אלה לאלה.

אפשרות ג : הקטנה של קצב שינוי גודל המלבן, באמצעות שינוי קצב ההשתנות של

אורך הצלע. אם תבנית האורך תהיה, למשל : $22.5 - \frac{1}{2}t$, יקטן קצב שינוי השטח

מ- 4 סמ"ר לשנייה ל- 2 סמ"ר לשנייה. במצב כזה יהיה שטחו הסופי של המלבן 46 סמ"ר. תלמידים מתקדמים עשויים לגלות שלמשפחת הישרים המתקבלים באופן זה יש נקודה משותפת שהיא (0, 22.5).

אפשרות ד : צירוף של האפשרויות הקודמות. תלמידים מתקדמים יוכלו ללמוד הרבה מבדיקת הצירופים השונים, בשיטת ניסוי ותהייה.