דפים למורה

ד"ר דוד פיילכנפלד

פרק א: מבוא

אוריינות מתמטית

במציאות החיים נתקלים אנו לעתים מזומנות במצבים בהם נדרשים שיקולים כמותיים, הסתברותיים או מרחביים. מצבים מעין אלו עשויים להתרחש במהלך קניות, נסיעות, בישול, טיפול בכספים, שיפוט לגבי אירועים פוליטיים, וכיו"ב. במצבים כאלה, נדרשת יכולת ליישם את המיומנויות המתמטיות שלנו בהקשר פחות מובנה מהשאלות המילוליות להן אנו רגילים, וכאשר דרך ההתמודדות עם המשימה איננה ברורה לחלוטין מלכתחילה. על האדם הנקלע למצב הדורש שימוש בידע מתמטי להחליט מהו המידע הרלבנטי, וכיצד ניתן לנצלו ביעילות.

אמצעי התקשורת (עיתונים, רדיו, טלוויזיה, אינטרנט) גדושים במידע המוגש בטבלאות, בתרשימים, ובגרפים, העוסק בנושאים כמו: מזג אוויר, רפואה, ספורט ופוליטיקה. הם מציגים באורח קבע מידע על התחממות כדור הארץ ואפקט החממה, על גידול האוכלוסייה, על היעלמות נופים ובתי גידול ביולוגיים ועל יעילות אפשרית של תרופה חדשנית. ההתמודדות עם מידע כזה דורשת תמיד גם יכולת שימוש בשיקולים מתמטיים. היבט אחר הדורש שיקול מתמטי בא לידי ביטוי בקריאת טפסים והבנתם, בפירוש נכון של טבלאות זמני נסיעות (של אוטובוסים, רכבות או טיסות), בביצוע עסקאות כספיות ובהחלטות הנוגעות לעיתוי המתאים לקנייה או למכירה של ניירות ערך. כל אלה הן דוגמאות הממחישות את הצורך של האדם הרגיל באוריינות מתמטית.

אוריינות מתמטית היא יכולתו של הפרט לזהות ולהבין את התפקיד של המתמטיקה בעולם, לבצע שיקולים מבוססים היטב, להשתמש ולעסוק במתמטיקה בדרכים ובאופנים המתאימים לחיי הפרט של אזרח מודע, אחראי, מועיל, ובעל יכולת התבוננות ותגובה על הנעשה סביבו.

.(De Lange et al., PISA, 2006)

הגדרה זו של אוריינות מתמטית מדגישה את הפן של תפקוד מושכל במגוון מצבים מציאותיים. כמו שלא ניתן לצמצם את המובן של אוריינות הקריאה לאוצר מילים עשיר, לכללי דקדוק, או לכתיב וכתב, כך לא ניתן לצמצם את המובן של האוריינות המתמטית להכרת מינוח מתמטי, פרוצדורות ועובדות, או למיומנויות ביצוע של פעולות מסוימות בשיטות שונות. האוריינות המתמטית מתייחסת לכל אלה כתנאי מקדים, שבלעדיו היא לא תתאפשר. מובנה של האוריינות המתמטית הוא שילוב יצירתי של מרכיבים אלה, כתגובה לדרישות הנובעות ממצב מציאותי חוץ מתמטי.

אוריינות מתמטית כוללת בחובה את היכולת להציב, לנסח, ולפרש בעיות תוך שימוש במתמטיקה, במגוון רחב של מצבים והקשרים, החל בהקשרים מתמטיים טהורים, וכלה בהקשרים אשר נראים, במבט ראשון, כחסרי כל קשר למתמטיקה, או כחסרי מבנה מתמטי ניכר לעין. במצבים כאלה צריך פותר הבעיה להציב בעצמו את המבנה המתמטי המתאים לה.

לאוריינות מתמטית יש שני עקרונות יסוד:

הקשרה (יצירת הקשר) של המתמטיקה למצבים מציאותיים, ושימוש בהמחשה חזותית.

באופן טבעי, ההקשרה למצבים מציאותיים כרוכה בתיאורים מילוליים. זוהי הזיקה למושג 'אוריינות'. לטקסט המתמטי יש, לרוב, רמת מפורשות גבוהה מאוד. עם זאת, השפה המתמטית נחשבת כשפה רזה, כיוון שאין בה פירוט שלא לצורך. ככל שטקסט מתמטי קצר יותר, כך הוא נחשב כמדויק וכיפה יותר. בשל ה"רזון" של השפה המתמטית, נדרש ריכוז רב בפענוח הטקסט המתמטי. בכל משפט כלול, בדרך כלל, מידע רב יותר מהמקובל בטקסטים רגילים. העיבוד הנדרש מטקסט מתמטי כולל, לרוב, רק את שני המעגלים הפנימיים האלה: איתור המידע ואחזורו, ופרשנות והיסק מתוך הטקסט הכתוב. תגובה על תוכן הטקסט, על מבנהו וסגנונו נדרשת לעתים נדירות ביותר. מבחינה זו, ההתמודדות עם אוריינות מתמטית קלה יותר מההתמודדות עם אוריינות קריאה כללית.

השימוש בהמחשה חזותית כאמצעי לתיאור המודל המתמטי מייחד את האוריינות המתמט ית מאוריינות הקריאה הכללית. במסגרת אוריינות מתמטית נדרש אדם להמיר את המידע שברשותו מצורת ייצוג אחת לאחרת, לדוגמא: טקסט מילולי לטבלה, טבלה לגרף, גרף לביטוי אלגברי, וכו'. יכולת ההמרה החופשית בין ייצוגים שונים של אותו מידע היא לב לבה של האוריינות המתמטית .

מערך ההקשרה

בכל משימה הכוללת אלמנט של אוריינות מתמטית יש שלושה היבטים מרכזיים:
המצב המציאותי והקשרתו למתמטיקה, תחום התוכן המתמטי של הבעיה, והכישורים שיש להצטייד בהם כדי לפתור את הבעיה.

הפיכת בעיה מציאותית למתמטית כוללת חמישה שלבים של הקשרה:

1. השלב הראשון - מהותו היא עצם ההבחנה שהבעיה המוצבת קשורה למציאות, או אפילו נטועה במציאות.

2. בשלב השני יש לאתר את המתמטיקה הרלבנטית לבעיה, ולזהות את הבעיה בהתאם למושגים המתמטיים שזוהו. בשלב זה באה לידי ביטוי הבנת הקשרים שקיימים בין שפת הבעיה לבין השפה הפורמלית או הסמלית הנדרשת כדי להבין את הבעיה מבחינה מתמטית. הבנה כזו מביאה לייצוג הבעיה בדרך שונה, כולל ארגונה מחדש באופן המותאם למושגים מתמטיים, תוך ביצוע הנחות מתאימות ומציאת כללים, קשרים, תבניות וחוקיות.

3. השלב השלישי הוא טשטוש הדרגתי של ההסתכלות על המציאות, תוך התבהרות הדרגתית של ההתבוננות המתמטית על הבעיה. בשלב זה מניחים הנחות, מכלילים, ומנסחים ביטויים באופן פורמלי. צעדים אלה מקדמים את התיאור המתמטי של המצב, כך שהבעיה המציאותית מתורגמת לבעיה מתמטית, המייצגת נאמנה את המצב לאשורו. בשלב זה יש לנסות ולזהות היבטים בבעיה השקולים לבעיות אחרות, המוכרות מבחינה מתמטית מנסיון העבר.

4. השלב הרביעי הוא פתרון הבעיה המתמטית באמצעים מתמטיים, תוך שימוש במיומנויות מתמטיות ובמושגים מתמטיים המוכרים לפותר הבעיה. בשלב זה יש לבצע המרות בין צורות ייצוג מתמטיות שונות של הבעיה, לעשות שימוש בפעולות ובשפה טכנית-פורמלית כדי לפתור את הבעיה, ולהביא לעידון ולהתאמת המודל המתמטי, תוך שילוב בין מודלים שונים, הסקת מסקנות, טיעונים והכללות.

5. השלב החמישי הוא פירוש של פתרון הבעיה המתמטית והחזרתו למונחים של המציאות, ובכלל זה זיהוי המגבלות של הפתרון המתמטי. שלב זה כולל את התרגום של הטיעונים המתמטיים לשפת המציאות, תוך הצדקת התוצאות והבהרתן (יחד עם כל התהליך) לאנשים נוספים. יש בכך הערכה מחודשת של כל תהליך הפתרון בעין ביקורתית, על מנת לתקף את התהליך כולו. בשלב זה מוצגים במפורש גבולות התוקף של המודל המתמטי. פירוש הפתרון כולל - בנוסף לפירוש המידי - גם התבוננות רחבה יותר על המעבר ממתמטיקה למציאות. למשל, עד כמה המודל המתמטי מתאר את המציאות בדייקנות, או שמא הוא מהווה רק 'כלל אצבע', אשר רומז לכיוון אפשרי? האם בסביבתם של קצות תחום הבעיה מידת הדיוק של המודל המתמטי קרובה למידת הדיוק במרכז התחום, או שיש להתייחס לתוצאות בקצוות בזהירות מרובה יותר?

שלושת השלבים הראשונים מייצגים יחדיו את התרגום של הבעיה המציאותית למתמטיקה, ומהווים פן אחד של ההקשרה. הפתרון המתמטי עצמו נעשה בשלב הרביעי, באופן שאינו קשור לבעיה המציאותית. השלב החמישי, ובו תרגום המתמטיקה למציאות, הוא הפן השני של ההקשרה. פן זה דורש יכולת הערכה ביקורתית לגבי תהליך הביצוע כולו ולגבי תוקפו.

תחומי התוכן המתמטי

תחום התוכן המתמטי הוא ההיבט השני מבין שלושת היבטי הבעיה:
המצב המציאותי והקשרתו למתמטיקה, תחום התוכן המתמטי של הבעיה, והכישורים שיש להצטייד בהם כדי לפתור את הבעיה.

במתמטיקה קיימים ארבעה תחומי תוכן מרכזיים הרלבנטיים להקשרים מציאותיים: כמות, השתנות ויחסים, אי-ודאות וצורות במישור ובמרחב.

כמות

חשיבה כמותית כוללת בתוכה הבנה של גודל יחסי, הכרה של תבניות מספריות, ושימוש במספרים לייצוג כמויות של מדדים מציאותיים בעולם הרחב, כגון: אורך, שטח, נפח, גובה, מהירות, זמן, מסה, לחץ, או ערך כספי.

מעבר לכך, כוללת החשיבה הכמותית הבנה של פעולות המתבצעות בכמויות ואת המשמעויות של תהליכים חשבוניים אלה. הבנה כמותית כוללת את החוש המספרי (כולל גודל יחסי, וייצוגים שונים של מספר), הבנת המשמעות של פעולות החשבון (כולל השוואות יחסים ואחוזים), תחושת הגודל של מספרים, חישובים אלגנטיים, יכולת חישוב בעל פה, ויכולת אומדן.

יכולת האומדן וההערכה קשורה לידע עולם, המאפשר לבדוק את הסבירותיות שיש לתוצאות שהתקבלו. האם המהירות הממוצעת של מכונית יכולה להיות 5 קמ"ש? 50 קמ"ש? או 500 קמ"ש? האם סביר כי אוכלוסיית העולם כוללת 7 מליון אנשים? 70 מליון? 700 מליון? או 7000 מליון? מה יכול להיות גובהו של מגדל? מהו רוחבו של נהר? היכולת לבצע במהירות הערכות לגבי סדרי גודל של תוצאות אפשריות היא בעלת חשיבות עצומה, במיוחד לאור השימוש ההולך ומתגבר במחשבונים. אדם צריך להבחין כי המכפלה של 613 x 33 היא בערך 20,000. אין צורך לתרגל לצורך זה את אלגוריתם הכפל, אלא ליישם בגמישות את עיקרון ערך המקום בהצגה העשרונית של מספר, ואת עקרונות החשבון החד ספרתי (Fey, 1990).

השתנות ויחסים

השתנות באה לידי ביטוי במגוון רחב של תופעות טבע וחברה : גדילה ודעיכה, מחזוריות העונות, גאות ושפל, שיעורי תעסוקה ואבטלה, שינויים במזג האוויר ושינויים בבורסה. ההשתנות בהתאם לזמן היא הנפוצה והמוכרת ביותר, אולם קיימות דוגמאות רבות להשתנות מסוג שונה : הצליל שמפיק מיתר תלוי באורכו ; מאזן של חשבון בנק תלוי בהיקפו, במספר המשיכות וההפקדות שבוצעו וברמת הריבית שיש לחשבון. משתנים אלה תלויים הדדית אלה באלה, ואחדים מהם משפיעים על אחרים.

חלק מתהליכי השתנות אלה מתוארים באופן ישיר באמצעות פונקציות מתמטיות : לינאריות, מעריכיות, מחזוריות או לוגיסטיות, בדידות או רציפות. אדם נדרש להכיר את היחסים בין המודלים השונים של ההשתנות : ההבדל המרכזי בין השתנות לינארית להשתנות מעריכית ; הזהות הקיימת בין גדילה באחוזים לבין גדילה מעריכית ; כיצד מתרחשת גדילה לוגיסטית - עבור משתנה בדיד ועבור משתנה רציף - ומדוע היא מתרחשת. קשרים נוספים שייכים לצורות ייצוג מתמטיות אחרות, אשר יש להחליט על התאמתן באמצעות ניתוח נתונים. קשרים מתמטיים עשויים לבוא לידי ביטוי באמצעות פונקציות, משוואות ואי שוויונים, התחלקות, שקילות, הכלה וכו׳. השתנות ויחסים עשויים להיות מיוצגים במגוון דרכים, כגון : דרך מספרית (כולל ייצוג בטבלה), גרפית, אלגברית, גאומטרית ובאמצעות סימולים. להמרה בין הייצוגים השונים יש חשיבות מרכזית, כפי שיש להבנת הסוגים היסודיים של השתנות. חשיבה פונקציונלית נעשית במונחים של קשרים ויחסים. התלמידים נדרשים להכיר מושגים כמו : קצב שינוי, מידת התלילות של השיפוע ותלות של משתנה אחד במשנהו. עליהם לקבוע עד כמה השינוי הקיים בתהליך הוא מהיר, ולהשוות בין קצבי השינוי של שני תהליכים נפרדים.

אי ודאות

חיי היומיום שלנו מלאים בחוסר ודאות : תוצאות בחירות, התמוטטות גשרים, משבר בבורסה, תחזית מזג האוויר, תחזיות לגידול באוכלוסייה, מודלים כלכליים וכו׳. התחומים המתמטיים המתאימים לטיפול בחוסר הוודאות הם סטטיסטיקה - העוסקת בחקר נתונים, והסתברות - העוסקת ביד המקרה. איסוף מידע, ניתוחו וייצוגו החזותי הם אבני דרך לטיפול בנושאים אלה. במסגרת העיסוק בסטטיסטיקה יש צורך בהנמקה המבוססת על תמונת עולם חלקית, שאיננה יכולה להיות מלאה. אבני הליבה של הסטטיסטיקה הם : ההכרה בקיום שונות בתוך תהליכים, הצורך בנתונים המתארים את התהליכים, חקר הנתונים ועיצובם תוך שמירה על רעיון השונות, כימות השונות והיכולת להסביר אותה. תכנון וביצוע חקר של מדגם מייצג הוא עיקרון יסודי בחשיבותו, ומטרתו הבנת נושאים שיש להם נגיעה לחוסר ודאות.

חקר תופעות מביא לתוצאות חלקיות, המהוות בסיס להכללת מסקנות, למרות חוסר הוודאות שבהן. לעתים קרובות, התבנית לפיה תוצאות חוזרות על עצמן היא מקרית לחלוטין. תורת ההסתברות נותנת לנו כלים להתמודד היטב עם מצבים כאלה.

צורות במישור ובמרחב

צורות הן תבניות במישור ובמרחב. הימצאותן היא יומיומית : רהיטים, בתים, גשרים, תוכניות בניין, סריגי בד, משחקי ילדים, מפות ערים, גבישים, פתיתי שלג, עלים או צללים. אדם מתמודד כמעט מדי יום עם הצורך לפרש מידע חזותי של צורה במישור או במרחב, או לפרש את השינוי שחל בצורות אלה עם הזמן.

המרכיבים המרכזיים של הטיפול בצורות במישור ובמרחב הם : זיהוי צורות ותבניות, תיאור, הצפנה ופענוח של מידע חזותי, הבנה של שינויים דינאמיים בצורות, דמיון ושוני, מיקום יחסי, ייצוגים דו ממדיים ותלת ממדיים והקשרים ביניהם וניווט במרחב.

כישורים

במסגרת הלימודים בבית הספר, אנו מעוניינים לפתח את יכולתם של התלמידים לנתח, להסביר ולתקשר רעיונות מתמטיים ביעילות. בתוך כך עליהם להציב, לנסח, לפתור ולפרש בעיות מתמטיות במגוון מצבים. פתרון בעיות באופן כזה דורש מהתלמיד ניצול של מלוא המיומנויות המתמטיות אותן רכש במסגרת בית הספר ומחוץ לה.

הכישורים והיכולות הנדרשים מתלמיד לצורך זה הם:

יכולת חשיבה והנמקה, יכולת טיעון, יכולת תקשורת, יכולת הדגמה (modeling), יכולת הצגת בעיות ופתרונן, יכולת ייצוג, יכולת שימוש בשפה טכנית פורמאלית ויכולת שימוש בכלים ובעזרים.

רשימת הכישורים מבוססת על מאמרו בשפה הדנית של ניס (Niss, 1999), ומובאת מתוך פירוט הדרישות המקובלות במדינות ה- OECD (De lange et al., PISA, 2006).

יכולת חשיבה והנמקה: במתמטיקה נשאלות שאלות אופייניות כגון: האם..?, אם כן - כמה...?, כיצד ניתן למצוא...?, ועוד. במסגרת הגדרת יכולת זו, נדרש התלמיד להכיר את התשובות שמתמטיקאים מציעים בדרך כלל לשאלות מעין אלה. בנוסף, צריך התלמיד להבדיל בין סוגים שונים של היגדים, כגון: הגדרות, משפטים, דוגמאות, השערות, מסקנות ומסקנות מותנות, ולהבין את השימוש ואת המגבלות שיש למושגים מתמטיים רלבנטיים.

יכולת טיעון: בה נדרש התלמיד להכיר מגוון של הסברים מתמטיים, וביניהם את ההוכחה. התלמיד צריך להיות מסוגל לעקוב אחר שרשרת טיעונים מתמטיים מסוגים שונים, כדי להשתכנע ולשכנע אחרים בנכונות היגד מתמטי. התלמיד צריך ליצור ולבטא טיעונים מתמטיים. במידת האפשר, הוא צריך לבסס תחושה היוריסטית (כללי אצבע לאומדן ראשוני) לגבי מה יכול להתרחש, מה לא יכול להתרחש, ובאילו תנאים.

יכולת תקשורת: משמעה שלתלמיד צריכה להיות יכולת ביטוי בכתב ובעל פה במגוון דרכים לגבי נושאים בעלי תוכן מתמטי, וכן הבנה של התבטאויות של אחרים בכתב או בעל פה באותם נושאים.

יכולת הדגמה (modeling): בכך כלולה היכולת של התלמיד לתרגם את המציאות למודל מתמטי, לפרש מודלים מתמטיים במינוחים של מציאות, ולפעול במסגרת של מודל מתמטי: בקרה, פיקוח ושליטה על תהליך המודל, תיקופו, הערכתו וניתוח ביקורתי של המודל ושל תוצאותיו.

יכולת הצגת בעיות ופתרונן: במסגרתה על התלמיד להכיר הצגות וניסוחים של סוגים שונים של בעיות מתמטיות (טהורות, שימושיות, פתוחות או סגורות), לבדל אותן זו מזו, וכמובן, לפתור סוגים שונים של בעיות מתמטיות במגוון דרכים.

יכולת ייצוג: בכך מעורבת יכולת ההצפנה, הפענוח, התרגום, הפרשנות והאבחנה בין סוגים שונים של ייצוגים של אובייקטים מתמטיים במצבים שונים. התלמיד נדרש להכיר את הקשרים ההדדיים הקיימים בין ייצוגים שונים, לבחור את המתאים מהם, ולהחליף ביניהם, בהתאם למצב ולמטרה.

יכולת שימוש בשפה טכנית פורמאלית הכוללת סימולים מתמטיים: בכך מעורבים פענוח ופרשנות של שפה מתמטית פורמאלית, והבנת הקשר שלה לשפה היומיומית. נדרש מהתלמיד תרגום הדדי בין שפה דבורה רגילה לשפה המתמטית, טיפול בהיגדים ובביטויים הכוללים סימולים ונוסחאות, שימוש במשתנים, פתרון משוואות וביצוע פעולות חשבון.

יכולת שימוש בכלים ובעזרים: במסגרתה נדרש התלמיד לדעת על מגוון כלים ועזרים (כולל עזרי מידע אלקטרוניים) העשויים להועיל בפעילות מתמטית, ולעשות בהם שימוש תוך הכרת המגבלות שיש לכלים ולעזרים אלה.

רמות חשיבה

קיימות טקסונומיות רבות לרמות החשיבה הנדרשות במגוון של בעיות ומשימות. כאן נביא רק את הטקסונומיה של פיזה, המאפיינת את הנדרש במדינות ה- OECD (De lange et al., PISA, 2006). במסגרת החלוקה של פיזה, מסווגים את משימות האוריינות המתמטית לפי שלוש רמות חשיבה: רמת ידע, רמת קישורים ורמת הערכה.

רמת הידע: ברמה זו מערבים ידע שתורגל הן בכיתת הלימוד והן במבחנים רגילים. מדובר בידע עובדתי, ובייצוגים רגילים של בעיות רגילות, כגון: זיהוי שקילויות, היזכרות באובייקטים מתמטיים מוכרים ובתכונותיהם, ביצוע של תהליכים שגרתיים, יישום של אלגוריתם מקובל או של מיומנות טכנית ידועה, טיפול בביטויים עם סימולים ונוסחאות המוצגים בצורתם הרגילה, וביצוע פעולות חשבון.

רמת הקישורים: ברמה זו מרחיבים את הכישורים שפורטו ברמת הידע אל מעבר לביצועים שגרתיים. למרות זאת, סביבת הפעילות מוכרת או מוכרת-למחצה לתלמיד הפותר. פריטים הדורשים רמת חשיבה זו, דורשים אינטגרציה – או, לפחות, יכולת קישור - בין תחומי תוכן נפרדים, או בין פרקים נפרדים בתוך תכנית הלימודים, או יכולת קישור בין ייצוגים שונים של הבעיה.

רמת הערכה: פריט הכלול ברמת חשיבה זו, מכיל רכיב הדורש מהתלמיד הפותר אותו יכולת הערכה לגבי התהליך הנדרש לפתרון הבעיה. זה מתקשר ליכולת התלמיד לתכנן פתרון, וליישם אותו בבעיה הכוללת רכיבים מרובים, או בבעיה המוכרת פחות לתלמיד הפותר אותה. ברמת ידע זו נדרשת יכולת הנמקה מתקדמת, יכולת טיעון, ויכולות הפשטה, הכללה והדגמה, המיושמות בהקשרים חדשים ובלתי מוכרים.

סיכום

החשיבות שבהקניית אוריינות מתמטית ככלי לחיים מוסכמת כיום על הכל. בית הספר, המכין את תלמידיו לקראת היותם אזרחים בוגרים, מחויב להכין את תלמידיו גם בתחום חשוב זה. אוריינות מתמטית נרכשת רק מתוך לימוד ותרגול המכוונים למטרה זו. הוראת מתמטיקה בדרכים שהיו מקובלות בעבר היא טובה וראויה למגוון מטרות, אך לא תורמת לשיפור האוריינות המתמטית של התלמידים. הוראת האוריינות המתמטית חייבת להיעשות בדרך אחרת. הדרך שנראית כיום כמועילה בתחום זה היא תרגול בביצוע משימות, כדוגמת המשימות המופיעות בחוברת זו. דרך זו מומלצת למרות כל הקשיים הכרוכים בביצועה.

מיומנויות רבות דרושות לפתרון משימות האוריינות המתמטית. המיומנויות העיקריות הדרושות הן: יכולת שימוש בידע מתמטי, קריאה והבנת הנקרא, תפיסה חזותית, יכולת המרה בין ייצוגים מתמטיים שונים ותרגום מצב מציאותי למודל מתמטי, תוך מודעות ליתרונות המודל ולמגבלותיו. די שתחסר לתלמיד אחת המיומנויות הנדרשות לפתור משימה, על מנת שהיא תהפוך לבלתי ידידותית לו. למרות זאת, אסור שהדרישה מהתלמיד לשלוט בכל המיומנויות הללו בעת ובעונה אחת תרפה את ידי המו רים.

הקשיים בהוראת משימות האוריינות המתמטית הם רבים. הם נובעים, בחלקם, ממגוון הדרישות שהתלמיד צריך להתמודד איתן בעת ובעונה אחת. כדי לעזור למורה להתגבר על קשיים אלה צורף לכל משימה פתרון מפורט. כדי לעזור למורה לבחור את הדגשים בהוראה, הוצגו בתחילת כל פתרון של

משימה המאפיינים המרכזיים שלה. במידת האפשר, הוצגו מספר גישות פתרון שונות לבעיה אחת, וזאת, כדי לאפשר למורה להראות בכיתה את הקשרים השונים הנובעים מהמרות של ייצוגים שונים של הבעיה ופתרונה.

מקורות:

De lange, J., Blum, W., Dossey, J., Marciniak, Z., Niss, M., and Shimizu, Y. (2006). Mathematical literacy In: *Assesing Scientific, Reading and Mathematical Literacy: A Famework for PISA 2006,* (71-114), OECD 2006.

Fey, J. (1990). Quantity In: Steen, L. A. (ed)., *On the shoulders of Giants: New Approach to Numeracy,* National Academy Press, Washington D.C.

Niss, M. (1999). Kompetencer og uddannelsesbeskrivelse, *Uddanneise, 9*.

פרק ב: משימות האוריינות המתמטית

בחירת משימות האוריינות המתמטית

משימות האוריינות המתמטית נבחרו בתחום התואם ככל האפשר את תכנית הלימודים הקיימת במתמטיקה בחטיבת הביניים. למגוון רחב של מצבים מציאותיים אותם מכיר אדם בוגר, אין כמעט נגיעה בתכנית הלימודים של חטיבת הביניים. משימות המטפלות במצבים כאלה לא נבחרו. לא נבחרו משימות הקשורות להשתנות מעריכית או לוגיסטית, לא נבחרו משימות הנוגעות לניתוח סטטיסטי מתקדם, וכמעט שלא נבחרו משימות המטפלות בצורות במרחב. החלטה זו נועדה לאפשר למורה לנצל את המשימות המוגשות לתלמיד לשימוש תוך כדי הוראת החומר המתאים במסגרת תכנית ההוראה של כל כיתה.

חלוקת המשימות לפי כיתות לימוד נעשתה אף היא תוך התחשבות מרבית בתכנית הלימודים הנוכחית. למרות חלוקה זו, עשויים מורים אחדים להעדיף להורות בכיתתם משימות שהותאמו לכיתות אחרות, גבוהות יותר או פחות. בחירה כזו היא סבירה, כל עוד התוכן המתמטי שנדרש במשימה תואם את אשר הספיקו תלמידי הכיתה ללמוד.

כל מורה צריך לבחור את המשימות המתאימות לתלמידיו מתוך מגוון המשימות המוצעות. התאמת המשימות לכל כיתה יכולה להתבצע על סמך המאפיינים שלה. לנוחיות המורים, מצורפים להלן המאפיינים של כל אחת ממשימות האוריינות.

תחום התוכן: כמות

מאפייני המשימות לכיתות ז' ח' ט'

שם המשימה / **מאפיינים**	הלו גיא כיתה ז'	ספסלי ישיבה כיתה ז'	מגדלור כיתה ז'	36 שולחנות כיתה ז'	פרסום תעריפי סלולר כיתה ח'	סולמות לפי הזמנה כיתה ט'
התאמת מודל מתמטי לשאלה מציאותית	+	+	+	+	+	+
המרות בין ייצוגים	+	+	+	+	+	+
זיהוי משמעות הפתרון במציאות	+	+	+	+	+	+
פתירת משוואה				+	+	+
פרופורציה	+		+			
מציאת היקפים או שטחים		+		+		
שינוי נושא נוסחה		+				
קריאת גרף			+			
מחזוריות			+			
סדרה חשבונית						+
חקירת השתנות בדידה				+		

תחום התוכן: השתנות ויחסים

מאפייני המשימות לכיתה ז'

שם המשימה / **מאפיינים**	שלט חוצות	צמיחה לגובה	טמפרטורה מתחת לפני האדמה	שידורי פרסומת	יורדים ברכבל
התאמת מודל מתמטי לשאלה מציאותית	+	+	+	+	+
המרות בין ייצוגים	+	+	+	+	+
זיהוי משמעות הפתרון במציאות	+	+	+	+	+
ניתוח השתנות	+	+	+	+	+
קריאת גרף			+	+	+
פונקציה קווית				+	+
קריאת טבלה ומילויה		+			
מחזוריות	+		+		
שיקולי כדאיות				+	

מאפייני משימות לכיתה ח'

שם המשימה / **מאפיינים**	סוף העונה	העבודה היא חיינו	צח כשלג	תדלק וסע	גל מסתפר	עקומות צמיחה לגובה	גברת שרוני אופה	שיפור ציון	קבלני גינון
התאמת מודל מתמטי לשאלה מציאותית	+	+	+	+	+	+	+	+	+
המרות בין ייצוגים	+	+	+	+	+	+	+	+	+
זיהוי משמעות הפתרון במציאות	+	+	+	+	+	+	+	+	+
ניתוח השתנות	+	+	+	+	+	+	+	+	+
קריאת גרף	+	+	+	+	+	+	+	+	+
פונקציה קווית	+	+	+	+	+		+	+	+
אחוזים	+	+	+				+	+	
פתרון משוואה או אי שוויון		+	+				+	+	+
שיקולי כדאיות	+			+				+	+
שינוי נושא נוסחה			+				+		
קירוב ואומדן							+		+
ממוצע						+			
עיגול									+

מאפייני משימות לכיתה ט'

שם המשימה / **מאפיינים**	מדרגות	מעקב גדילה	שחיינים	מדד למשקל תקין	סולמות טמפרטורה	מטע תפוחים	שומר מסך	חלקת אדמה	מנקי חלונות
התאמת מודל מתמטי לשאלה מציאותית	+	+	+	+	+	+	+	+	+
המרות בין ייצוגים	+	+	+	+	+	+	+	+	+
זיהוי משמעות הפתרון במציאות	+	+	+	+	+	+	+	+	+
ניתוח השתנות	+	+	+	+	+	+	+	+	+
קריאת גרף		+	+	+	+		+	+	+
פונקציה קווית		+	+	+	+	+	+	+	+
פונקציה ריבועית				+		+	+	+	+
אחוזים								+	
פתרון משוואה או אי שוויון			+		+	+	+	+	+
שיקולי כדאיות							+	+	
שינוי נושא נוסחה				+	+				+
קירוב ואומדן		+							
ממוצע		+							
שטחים								+	
סדרה חשבונית	+					+			
מחזוריות							+		
קריאת טבלה				+		+			
אקסטרפולציה		+							

תחום התוכן: אי ודאות

מאפייני המשימות לכיתה ז'

מאפיינים / שם המשימה	שוד ושבר	המלחמה בפשע	יצוא	מזג האוויר בהר כנען	ליל הסדר
התאמת מודל מתמטי לשאלה מציאותית	+	+	+	+	+
המרות בין ייצוגים	+	+	+	+	+
זיהוי משמעות הפתרון במציאות	+	+	+	+	+
קריאת דיאגרמה			+	+	+
קריאת גרף	+	+			
ניתוח מידע בעזרת אחוזים	+	+	+	+	+
ניתוח השתנות	+	+	+	+	
יחס או שכיחות יחסית		+	+		
ממוצע				+	

מאפייני המשימות לכיתה ח'

מאפיינים / שם המשימה	ודאי, בלתי אפשרי ומה שביניהם	שעוני מספרים	זוג גרביים	אולימפיאדת המתמטיקה
התאמת מודל מתמטי לשאלה מציאותית	+	+	+	+
המרות בין ייצוגים	+	+	+	+
זיהוי משמעות הפתרון במציאות	+	+	+	+
יחס או שכיחות יחסית	+	+	+	+
זיהוי מאורעות או סידורים	+	+	+	+
שיקולי כדאיות		+		+

תחום התוכן: צורות במישור ובמרחב

מאפייני המשימות התוכן לכיתות ז' ח' ט'

שם המשימה / מאפיינים	אולמות תצוגה כיתה ז'	אדריכל גינון כיתה ז'	ממגורה כיתה ח'	מיסוי במצריים כיתה ח'	ירושת קרקע כיתה ט'	פריסות של קובייה כיתה ט'	חלקת דשא כיתה ט'
התאמת מודל מתמטי לשאלה מציאותית	+	+	+	+	+	+	+
המרות בין ייצוגים	+	+	+	+	+	+	+
זיהוי משמעות הפתרון במציאות	+	+	+	+	+	+	+
שטחים	+	+		+	+		+
אומדן	+	+	+	+			+
פרופורציה			+				+
שיקולי כדאיות		+		+			+
מעגל		+					+
גוף במרחב			+			+	
נפח			+				
אחוזים			+				

המבנה הכללי של משימות האוריינות המתמטית

כל המשימות הן בעלות מבנה אחיד. תחילתן בסיפור מסגרת (המוקף לרוב במסגרת), והמשכן בסדרת שאלות במדרג קושי עולה, ובדרישה לרמות חשיבה גבוהות יותר. השאלות נוגעות להמרת סיפור המסגרת למודל מתמטי, טיפול מתמטי בבעיה שהוצגה, ותרגום התוצאה המתמטית בחזרה לסיפור המסגרת. ההמרה בין ייצוגים שונים - כלליים ומתמטיים - באה לידי ביטוי בכל המשימות באופן טבעי.

סיפור מסגרת מציאותי ככל האפשר

סיפור המסגרת של כל משימה נועד לקרב את התלמידים אל המתמטיקה הנדרשת במשימה. בפני התלמידים הוצגו בעיות אותנטיות ככל האפשר, אשר בהן עשויים הם להיתקל במסגרת חיי היומיום. הבעיות עוסקות בנושאים הנוגעים בחיי הפרט, בנושאים הקשורים לחיי בית הספר, לעבודה, לשעות הפנאי, לקהילה המקומית ולחברה בכללותה.

דוגמא לפעילות בנושאים הנוגעים בחיי הפרט היא המשימה העוסקת באורך השיער של גל לפני ואחרי התספורות, או המשימה המטפלת באופן סידור הבגדים בארון (זוג גרביים). משימה אחרת עוסקת בשימוש נבון בטלפון סלולרי, תוך התחשבות בתעריפים שונים בשעות היום והלילה. בתחום הלימודים מוצגת משימה בה מחפשים את הדרך היעילה להעלאת הציונים של כלל התלמידים ; מתברר, שלכל תלמיד מתאימה דרך שונה לשיפור מצב ציונו, וזאת בהתאם לציונו המקורי. קבוצה של משימות עוסקת בצמיחה לגובה של תלמיד בודד, בצמיחה של בני הנוערים תוך השוואה בין הבנים לבנות בהקשר זה, ובשמירה על משקל תקין.

בתחום התכנון מוצג בפני התלמידים מגוון של בעיות: כיצד לארגן את הישיבה סביב שולחנות בכנס, כיצד לעצב אולמות תצוגה, ומהם השיקולים השונים המובילים לתכניות שונות להקמת בריכה עם גן לצידה.

בתחום החברתי הרחב יותר יש משימה המתייחסת לשיטות שונות של תשלום שכר לעובד, או משימה העוסקת בניהול הכספי של עסק קטן, תוך התחשבות בהוצאות ובהכנסות התלויות בכמות הפעילות. בתחום המסחר עוסקים בהוזלות ובהתייקרויות, ובדרך בה הן מתקזזות. בנוסף, קיימות משימות במגוון נושאים, כגון: המלחמה בפשע, יצוא, מזג אוויר ולחצי התנועה הקיימים בערב פסח לקראת ליל הסדר.

על אף האמור לעיל, קיימות משימות שהאותנטיות שלהן דחוקה. משימות אלה צורפו בשל הדרישות המתמטיות שהן מציבות בפני התלמיד. להלן מספר דוגמאות למשימות כאלה: אב המוריש לארבעת בניו חלקת אדמה בצורת משולש; ממגורה שצורתה שתי תיבות ריבועיות העומדות האחת על גבי השנייה; קובייה שיש לעטוף אותה; בית מלאכה המייצר סולמות באופן המזכיר את נוסחת הסכום של סדרה חשבונית; מטע עצי פרי שצורתו ריבוע ואשר העצים בגבולו ניטעים בצפיפות כפולה; מנקי חלונות השומטים את המברשות שבידיהם על העוברים ושבים וחילופי קרקעות בין שכנים במושב. יש לצפות שתלמידים אחדים יעירו הערות הנוגעות למידת האותנטיות של המשימות. המורה מתבקש לדון בהערות אלה באופן מסודר. רוב התלמידים יהיו סלחניים כלפי נקודת חולשה זו, ויפתרו את המשימות בהנאה רבה.

סדרת שאלות במדרג קושי

סדרת השאלות מוצגת במדרג קושי עולה. השאלה הראשונה (לעתים מספר שאלות) נועדה להבטיח שלתלמיד יש הבנה בסיסית של סיפור המסגרת. התשובה לשאלה מבוססת על יישום פשוט של תנאי הבעיה, באופן שמחייב את התלמיד לאתר בסיפור המסגרת את נקודות המפתח.

דוגמא 1: במשימה הנוגעת לתעריפי טלפון סלולרי מוצגות בשאלה הראשונה מספר אפשרויות, והתלמיד צריך להעיד על התאמתן לדרישות הסיפור. בסיפור נדרש כי תעריף הערב יהיה נמוך מתעריף היום, וכן שעלות 40 דקות שיחה תהיה 8 ₪.

דוגמא 2: במשימת המדרגות מוסבר בסיפור המסגרת מבנה גרם המדרגות שבין קומה לקומה, ובשאלה הראשונה מתבקש התלמיד לחשב את מספר המדרגות שעולה אדם עד לקומה החמישית. השאלה השנייה מורכבת מעט יותר (שינוי נושא נוסחה) ומבקשת להמיר את מספר המדרגות לקומה.

דוגמא 3: במשימה 'גל מסתפר' מוצג גרף, המתאר את אורך השיער של גל במשך שנה. השאלה הראשונה - כמה פעמים הסתפר גל במשך השנה? - מוודאת שהתלמיד יודע לקשר את נקודות אי הרציפות בגרף לקיצור השיער של גל כאשר הסתפר.

ככל שתלמיד מתקדם בשאלות, כך רמת החשיבה הנדרשת ממנו עולה. השאלות הראשונות דורשות הבנה ויישום עקרונות של סיפור המסגרת. שאלות אלה ניתנות לפתרון בדרך אלגוריתמית אחת או יותר. השאלות האחרונות, לעומתן, דורשות לעתים אנליסה של הנתונים: לא תמיד יש אלגוריתם ברור שהשימוש בו מוביל לפתרון. בעוד שהשאלות הראשונות ניתנות לפתרון על ידי רוב מכריע של התלמידים, נועדו השאלות האחרונות לאתגר את התלמידים לכיוונים נוספים.

דוגמא 1: המשימה הנוגעת לתעריפי טלפון סלולרי מטפלת במגוון רחב של מיומנויות מתמטיות, ולכן פוצלה לשתיים: משימה פשוטה יותר לכיתה ז' ומשימה הדורשת מיומנויות נוספות - לכיתה ח'.

במשימה הראשונה ('הלו, גיא') דורשת השאלה השנייה יישום של פרופורצייה על גבי הנתונים שהובהרו בשאלה הראשונה. השאלה השלישית והאחרונה דורשת תובנה מספרית מתקדמת. יש בה השוואה בין שני מצבים, הנראים, לכאורה, כחסרי בסיס להשוואה.

המשימה השנייה ('פרסום תעריפי סלולר') עוסקת בעיקר בפתירת מערכת של שתי משוואות לינאריות בשני משתנים. בשאלה הרביעית מתבקש התלמיד להציג מערכת אילוצים חדשה, אשר פתרונה יהיה זהה לפתרון המערכת הקיימת. זוהי שאלה הדורשת חשיבה מתקדמת: בדרך כלל אנו מצפים מתלמיד לפתור מערכות משוואות, וכאן הוא נדרש להציג משוואה חדשה, אשר הוספתה למערכת הקיימת תשמור על שקילות המערכות. בשאלה האחרונה נדרש התלמיד לביקורתיות: מוצג בפניו אילוץ חדש, אשר על פני הדברים נראה כבלתי משפיע. התבוננות זהירה באילוץ הנוסף מגלה שלא תמיד אלה הם פני הדברים. ביקורתיות מסוג זה מהווה אתגר גם לתלמידים המתקדמים בכל כיתה.

דוגמא 2: שתי השאלות הראשונות במשימת המדרגות דורשות מהתלמיד הבנה חשבונית של המתרחש בגרם המדרגות. לשלוש השאלות הבאות נוסף גם ממד של כיוון: התלמיד אמור לתרגם את מספר המדרגות שהוא מחשב גם לשינויי הכיוון סביב גרם המדרגות העולה. שלוש השאלות האחרונות מבוססות, בנוסף, גם על פרמטר, ומביניהן - שתי האחרונות על פרמטר וכיוון. השימוש בפרמטר מכליל את השאלה הרבה מעבר להיקף הקונקרטי הנדרש בשאלות הראשונות.

דוגמא 3: במשימה 'גל מסתפר' כל שש השאלות הראשונות הן פרשנות ברמת קושי עולה של הגרף של אורך השיער, הנתון בסיפור המסגרת. התלמיד נדרש להתייחס להיבטים שונים של הגרף: אורך מקטעי הזמן, ערך מקסימלי, שיפוע כקצב שינוי, וחישוב ממוצע. לכל אחת מהשאלות קיימת דרך המבטיחה להולך בה את הפתרון. השאלה השביעית שונה מהן באופן עקרוני. בשאלה זו מתבקש התלמיד לשרטט גרף חדש, המתאר את אורך השיער של גל בשנה העוקבת, תחת אילוצים של נתונים. לשאלה זו תשובות אפשריות רבות; אין לתלמיד דרך בטוחה בה יוכל לפתור אותה, והוא יכול לגשת אליה מכיוונים שונים, ולהצליח. שרטוט נכון של הגרף מעיד על הבנה של הכלי המתמטי, בד בבד עם יכולת יישום גבוהה.

דרישה להמרה בין ייצוגים

בכל משימה נדרש התלמיד להמיר את סיפור המסגרת למודל מתמטי. אמצעי הייצוג המתמטיים העומדים לרשות התלמיד רבים ומגוונים: ייצוג מילולי, ייצוג טבלאי, ייצוג אלגברי, ייצוג גאומטרי, ייצוג באמצעות גרף או דיאגרמה. אחד העקרונות העומדים מאחורי כל המשימות הוא הדרישה העקבית ליכולת מעבר בין שיטת ייצוג אחת לאחרת. בכל המשימות מראים לתלמיד כיצד שיטת ייצוג אחת עולה, בהקשר מסוים, על אחרות, בהתאם לתנאי הבעיה. הכוונה היא להרגיל את התלמיד לגוון את שיטות העבודה המתמטית שלו ככל האפשר.

הפעלת משימות האוריינות בכיתה

שילוב המשימות בהוראת המתמטיקה השוטפת

שילוב המשימות של האוריינות המתמטית צריך להיעשות בכיתה (או במסגרת שיעורי בית) כדבר שבשגרה. אין כוונה ליצור בתכנית ההוראה פרק נפרד של אוריינות מתמטית, שבמסגרתו מתמודדים עם המשימות, אלא לשלב את המשימות בתכנית ההוראה הכללית במתמטיקה.

משימות האוריינות המתמטית נבחרו באופן התואם ככל האפשר את תכנית הלימודים הקיימת במתמטיקה בחטיבת הביניים. לכן הן משתלבות בטבעיות בהוראת הנושאים המתמטיים שבתכנית הלימודים. בנוסף להוראת המשימות תוך כדי לימוד נושא, יש שתי דרכים לשילוב המשימה בתוך

הפרק: האחת כמבוא לפרק, והשנייה כסיכומו. בחירת אחת הדרכים נובעת ישירות מגישת ההוראה של המורה.

הגישה הרווחת בהוראת מתמטיקה מבססת את החומר שלב אחר שלב, וצעד אחר צעד. לימוד המתמטיקה נועד, לפי גישה זו, לצורך המשך לימודים ולרכישת מושגים מתקדמים יותר במתמטיקה, תוך הבנה טובה יותר של ידע מתמטי קיים. שימוש בעקרונות ובמיומנויות מתמטיים לפתרון בעיות בתחומים מציאותיים שונים הוא יישום של המתמטיקה. לפי גישה זו, ראוי להציב משימת אוריינות בפני התלמידים רק לאחר שהם שולטים במידה מספקת בתוכן המתמטי הדרוש לפתרון המשימה. משימת האוריינות מהווה, אם כן, משימת סיכום לידע שנרכש קודם לכן.

גישה אחרת בהוראת המתמטיקה מציגה בפני התלמידים את הדברים בסדר שונה: ראשית, מוצג הצורך בכלי המתמטי, ורק לאחר עירור המוטיבציה ללימודו - נלמד הכלי עצמו.

לדוגמא: ניתן ללמד פתרון משוואות ממעלה ראשונה, ולאחר מכן לנצל את הידע לפתרון בעיות מילוליות. לעומת זאת, ניתן להציג את הבעיה המילולית כגורם המעלה את הצורך בלמידת הדרך לפתרון המשוואות. בגישה זו, ראוי להציג את משימת האוריינות המתאימה לתלמידים כגריין, המבהיר את הצורך המציאותי ברכישת הכלי המתמטי האמור.

שתי הגישות לשילוב משימות האוריינות המתמטית הן נכונות וראויות. ניתן גם לנצל חלק אחד של המשימות כגריינים לנושאים, וחלק אחר של המשימות - כמסכמי נושא. ניתן אפילו לנצל את המשימות ללא כל קשר לתכנית ההוראה הכיתתית. אמנם, רצוי מאוד להקדיש לאחת המשימות לפחות שיעור אחד בכל חודש, אך מינון זה עשוי להיות גמיש, בהתאם לרצון המורה.

הפעלת חלקי משימות

כל משימות האוריינות המתמטית מקושרות למספר היבטים. כהקדמה לחלק המציג את דרך הפתרון של כל משימה, מוצגים בפני המורה המאפיינים המרכזיים שלה. אם המורה מעוניין לתרגל עם כיתתו רק חלק מההיבטים של המשימה או מאפייניה, הוא יכול לעשות זאת. אין צורך לתרגל משימה בשלמותה, אלא אם כן המורה מעוניין בכך. בכל מקרה, ראוי לטפל בסיפור המסגרת ובשאלה הראשונה. שאלה זו נועדה כמעט תמיד לכוון את התלמידים לפירוש נכון של סיפור המסגרת.

דוגמא 1: 'צח כשלג'

סיפור המסגרת במשימה זו מתייחס להכנסות ולהוצאות של מכבסה שכונתית. השאלות סביב סיפור זה נוגעות במגוון היבטים מתמטיים. מורה שאיננו מעוניין לתרגל בתחום האחוזים יכול להשמיט את שתי השאלות האחרונות. לעומתו, מורה שמתעניין דווקא באחוזים יכוון את כיתתו לשאלה הראשונה, ולשתי השאלות האחרונות. מורה שמתעניין ביחסים יוכל לכוון את הכיתה לשאלה הראשונה, וכן לשאלות השלישית, הרביעית והחמישית. מורה שמתעניין רק במציאת המודל המתמטי המתאים יבקש מכיתתו לפתור את שתי השאלות הראשונות בלבד.

דוגמא 2: 'שחיינים'

סיפור המסגרת במשימה זו דן בשני שחיינים בבריכה, ובקצב שחייתם. הסיפור כולל גם גרף של מרחק וזמן השחייה. מורה עשוי להתמקד בחלק הגרפי-חזותי של המשימה. מורה זה יבקש מתלמידיו לפתור את השאלות 1, 2, 4 ו- 9. מורה שיעדיף להדגיש את הפן הכמותי-אלגברי יבקש מתלמידיו לפתור את השאלות 2, 3, 6, 7, ו-8. לעומתם, מורה המדגיש את ההמרה בין ייצוגים שונים יפנה את תלמידיו לכל השאלות.

קריאת סיפור המסגרת

הבנת סיפור המסגרת במשימות השונות היא אתגר עבור תלמידים רבים. פעמים רבות נחשפים התלמידים לעולם תוכן שלא היו מודעים לו במפורש, לביטוי שלא היה מוכר להם, ואפילו למילים שהן חדשות עבורם. כדי להקל במידה מסוימת על ההתמודדות עם קשיים אלה (שאינם מתמטיים כלל) מומלץ למורה לנקוט במספר אמצעי עזר:

1. אם סיפור המסגרת אמנם חושף את התלמידים לעולם תוכן שלא היו מודעים לו קודם, רצוי להקדים ולשוחח עמם מעט על המציאות הבלתי מוכרת. בתום קריאת סיפור המסגרת, כדאי לבקש מתלמידים אחדים לנסח במילים שלהם את אשר הבינו מסיפור המסגרת.

2. אם כלולים בסיפור המסגרת ביטויים חדשים או מילים חדשות, כדאי להסביר אותן עוד לפני קריאתו. המורה צריך להכין מראש את קריאת הסיפור, תוך מודעות לקשיים אלה. בזמן קריאת הסיפור יש להדגיש את הימצאות הביטויים או המילים, ואת אופן השימוש בהם.

3. יש להיעזר בכל ערוצי התקשורת החושיים האפשריים: קריאת הכתוב בסיפור המסגרת הינה שימוש בערוץ חזותי בלבד. קריאה בקול רם של הכתוב מוסיפה לערוץ החזותי גם ערוץ שמיעתי. בכך מקל המורה במשהו על כל אותם תלמידים שהקלט והזיכרון השמיעתיים שלהם טובים יותר מהקלט והזיכרון החזותיים. גם תלמידים בעלי קלט וזיכרון חזותיים טובים יוצאים נשכרים מחיזוק הקלט והזיכרון בערוץ נוסף.

4. חלק מסיפורי המסגרת נושאים מבנה מסוים, כגון: מבנה של הסקה לוגית, או של כלל עם דוגמא. רצוי מאוד שהמורה יציין במפורש את המבנה בפני התלמידים. ציון מפורש של מבנה סיפור המסגרת יקל על רוב התלמידים במציאת המודל המתמטי המתאים לסיפור המסגרת.

5. בכל מקרה, לאחר קריאת סיפור המסגרת, מומלץ לבקש מתלמידים אחדים לנסח במילים שלהם את אשר הבינו מסיפור המסגרת. התלמידים עושים זאת, בדרך כלל, תוך כדי שינוי של השפה הכתובה לשפה מדוברת: אוצר המילים פשוט יותר, ומבנה המשפטים קצר ופשוט יותר. בהזדמנות זו יכול המורה לוודא שהתלמידים הבינו לאשורם את כל התנאים הדרושים להמרת הסיפור למודל מתמטי.

לא כל תלמיד צריך לפתור הכל

כאמור בסעיף קודם, אין צורך לתרגל משימה בשלמותה. באותו אופן, אין צורך שכל תלמידי הכיתה יענו על אותם תרגילים. תלמידים שונים יכולים להיות מופנים לשאלות שונות כשאלות משלימות. לדוגמא: התרגיל השני במשימה 'תדלק וסע' מורכב משלושה סעיפים. בכל סעיף צריכים התלמידים להתאים באופן מושכל בין תיאור של מצב לבין גרף. ניתן לחלק את הכיתה לקבוצות עבודה, במסגרתן

מטפלת כל קבוצה בסעיף אחר. פתרון מלוא הסעיפים על ידי תלמיד מסוים הוא בעל ערך שולי קטן, ועלול להתגלות כמייגע.

המורה מתבקש לתת את דעתו לרמת החשיבה הנדרשת בכל תרגיל, ולמידת הקושי הגלומה בו. בעוד שתלמיד מסוים עשוי להתמודד בהצלחה, ביעילות ובזריזות עם כל התרגילים, עשוי תלמיד אחר להתקשות אפילו בפתרון שלושת התרגילים הראשונים במשימה. המורה יכול בהחלט להטיל על תלמידים שונים תרגילים שונים, בהיקף שונה, וברמת חשיבה שונה, בהתאם להערכתו את יכולותיהם האישיות ואת הזמן העומד לרשותם.

קונקרטי ומופשט באוריינות מתמטית

משימות האוריינות משלבות בין תחום קונקרטי למופשט. סיפור המסגרת המציאותי הוא החלק הקונקרטי במשימה, בעוד שבניית המודל המתמטי הופכת את הסיפור למופשט. מובן שתלמידים אחדים נאחזים בקונקרטי, ואינם רוצים להפליג למחוזות מופשטים יותר. הטיפול הטוב ביותר בקושי מסוג זה הוא תרגול מוגבר של משימות אוריינות מתמטית. ככל שההתמודדות עם משימות אוריינות מתמטית תהיה שגרתית יותר, ותכלול מהלך מובנה של מציאת המודל המתמטי המתאים, כך המודל עצמו יהפוך להיות - בעיני התלמידים - יותר קונקרטי ופחות מופשט.

במסגרת ההיצמדות אל הקונקרטי, עשויים תלמידים אחדים לסחוף את הכיתה לדיון בשאלה עד כמה סיפור המסגרת הוא אמנם מציאותי. ברור לכל שיש בסיפורי המסגרת הנחות סמויות ו'עיגולי פינות' אשר אינם תואמים את המציאות. הנחות סמויות אלה נועדו להקל במידת מה על שלב המעבר מסיפור המסגרת למודל המתמטי. דיון כיתתי בנושא זה הוא ראוי ומועיל. תלמיד המעלה נושא כזה לדיון לא ישתכנע אם טענותיו 'יטואטאו אל מתחת לשטיח' תוך אמירות כגון: "זוהי המשימה שכתובה בחוברת, וזה מה שנפתור", או: "זה כנראה אפשרי אצל אחרים". יש לדון ברצינות בטענות התלמידים לגבי חוסר המציאותיות שבסיפורי המסגרת. את הדיון ראוי לסכם בכך שכוונת המשימה היא תרגול של מעבר ממצב מציאותי למודל מתמטי, ולאו דווקא שיקוף אמין של המציאות האישית של כל אחד מאיתנו.

אוריינות מתמטית לתלמידים מצטיינים

בכל כיתת מתמטיקה בחטיבת הביניים יש מספר קטן של תלמידים הבולטים ביכולותיהם מעבר לשאר תלמידי הכיתה. משימות האוריינות המתמטית, ובמיוחד השאלות האחרונות שבהן, מהוות בחלקן אתגר לתלמידים אלה. במקרים רבים במהלך שיעור, כאשר המורה מפעיל את רוב תלמידי הכיתה בנושאים שונים, הוא יכול לכוון את תלמידיו המצטיינים לעסוק באחת מהמשימות הללו. רצוי מאוד לכוון את התלמידים לפתירת משימות שהמורה איננו מתכוון שייפתרו על ידי רוב תלמידי הכיתה, כך שהתלמידים המצטיינים אכן יזכו לתוספת למידה ביחס לשאר התלמידים בכיתה.

ניתן לאתגר את התלמידים המצטיינים על ידי הוספת שאלות שאינן כלולות במשימה, אשר עשויות להרחיב את דעתם. שאלות כאלה צריכות להיות מותאמות ליכולות הגבוהות של תלמידים אלה, ולא שאלות הדורשות רק תוספת של טכניקה מורכבת יותר.

דוגמא 1: במשימה העוסקת בממגורה מתואר תהליך המילוי של ממגורה המורכבת משתי תיבות ריבועיות העומדות אחת על גבי השנייה. ניתן לשאול את התלמיד המצטיין כיצד היו משתנות התשובות לשאלות, אילו מדובר היה בשני גלילים, או בשתי מנסרות ישרות שבסיסיהן משולשים שווי צלעות. מתברר שעם התאמות מתאימות (רדיוס הגליל במקום צלע הבסיס) התשובות נותרות ללא כל שינוי. הגילוי שתהליך המילוי איננו תלוי בצורת החתך של הממגורה עשוי לשבות את ליבם של התלמידים המצטיינים. מתלמידים מצטיינים פחות ניתן לבקש לשרטט את גרף המילוי של הממגורה.

דוגמא 2: במשימה 'פריסות של קובייה' מתבקשים התלמידים בשאלה האחרונה למצוא את אלכסון הקובייה. בפני תלמידים מצטיינים ניתן להציב אותה שאלה עבור תיבה כלשהי.

דוגמא 3: בשאלה האחרונה המופיעה במשימה על זוג הגרביים מערבבים את הגרביים של שני ילדים, ובכך משתנות ההסתברויות המחושבות שם. ניתן להראות לתלמיד המצטיין, שלמעשה מוגדרת שם פעולת חשבון חדשה עבור שברים פשוטים, שבה מחברים בנפרד את המונים ואת המכנים. תלמיד מצטיין ישמח להיכנס בעובי הקורה, ולבדוק מהן התכונות של פעולה זו. מעניין במיוחד לגלות שפעולה זו תלויה בייצוג של השבר הפשוט. פעולה לגבי השבר $\frac{2}{4}$ לא תיתן תמיד אותה תוצאה כמו פעולה לגבי השבר $\frac{3}{6}$.

אוריינות מתמטית לתלמידים מתקשים

המגע הראשון של התלמיד המתקשה במשימות האוריינות נמצא תמיד בסיפור המסגרת. קריאת סיפור המסגרת באופן שפורט בסעיף קודם (7.3) תקל מאוד את הממשק הראשון של התלמיד עם המשימה.

דרך נוספת שתקל על התלמיד המתקשה היא להוריד ככל הניתן את רמת ההפשטה, תוך הפיכת הדברים לקונקרטיים ככל האפשר. אפשרות אחת לכך היא המרת פרמטרים מופשטים למספרים קונקרטיים. נדגים זאת על המשימה המתארת ממגורה: במשימה זו, לשתי התיבות יש אותו גובה – h. לפרמטר זה אין כל חשיבות בשאלה. ניתן בקלות ללחוש באוזנו של התלמיד המתקשה, שיתייחס לגובה התיבות כאילו הוא 4, למשל. אין לכך כל משמעות לגבי המשך פתרון המשימה, אך הצבת מספר קונקרטי מקילה מאוד את היחס לפרמטר המופשט. באחת השאלות באותה משימה מתבקשים התלמידים למצוא את הקשר בין שני פרמטרים, המציינים את אורך צלעות הבסיס של התיבות. גם כאן ניתן לבחור מספר במקום אחד הפרמטרים, כדי לגלות את השני.

יש שאלות שרמת המורכבות שלהן גבוהה. שאלות אלה ניתנות, לפעמים, לפירוק למספר חלקים רצפיים, אשר ההתמודדות עם כל אחד מהם בנפרד פשוטה יותר מההתמודדות הכוללת. פירוק השאלה לסעיפים מתבצע תוך דירוג הביצוע ורמת הקושי. דירוג כזה עשוי להעניק לתלמיד המתקשה תחושה של יכולת, ולתרום לשיפור הדימוי העצמי. התלמיד העובד בדרך זו יחווה בתדירות גבוהה יותר חוויה של סיום מוצלח של פתירת שאלה, ומעבר לתחילתה של שאלה חדשה. יש להיזהר משימוש יתר בדרך זו של הקלה על התלמיד. האוריינות המתמטית של תלמיד באה לידי ביטוי ביכולתו להתמודד עם משימה כוללת, ולא רק עם שאלות נקודתיות, המבוססות על דרך שהותוותה לו מראש. שיטה זו נכונה רק אם היא נועדה לתת לתלמיד המתקשה 'קביים זמניים', עד לשלב בו יהיה מסוגל להתמודד באופן עצמאי עם בעיה כוללת. לכן השימוש בדרך זו צריך להתבצע במשורה, ורק תוך תכנון קפדני הנוגע לשלב בו כבר לא יקבל התלמיד עזרה מסוג זה.

כאמור בסעיף קודם, אין צורך לפתור את המשימה המלאה, ואין חובה שכל התלמידים יפתרו בדיוק אותם תרגילים. ניתן לנצל את העובדה שהתרגילים מדורגים תמיד מהקל אל הקשה, ובדרישה לרמות חשיבה עולות. תלמיד מתקשה ירוויח גם אם פתר רק את השאלות הראשונות (הקלות יותר) במשימה.

ניצול שינויי מערכת לקידום האוריינות המתמטית

משימות האוריינות המתמטית יכולות להילמד גם על ידי מורה ממלא מקום בכיתה לא מוכרת, באמצעות השארת משימה למורה מחליף בזמן היעדרות בלתי מתוכננת. מורה למתמטיקה עשוי למצוא

את עצמו משובץ באופן חד פעמי להוראה בכיתה שאיננה מוכרת לו, והוא יכול להפעיל את אחת ממשימות האוריינות המתמטית במסגרת השיעור החד פעמי. באופן זה מנוצל השיעור ללמידת מתמטיקה, מבלי לשבור את רצף ההוראה הרגיל בכיתה.

מצד שני, מורה למתמטיקה אשר נאלץ לבטל שיעור, יכול לנצל מילוי מקום של מורה אחר (גם מורה במקצוע שאיננו מתמטיקה) לטובת לימוד כיתתי של אחת ממשימות האוריינות המתמטית. באופן זה אין תלמידיו של אותו מורה מפסידים שיעור במתמטיקה, על אף היעדרותו של המורה.