

פתרון מורחב מבחן 2 – נבחרת ישראל הצעירה – תשפ"ב

1. תשובה: 11

נסמן את ב- x את מחירו של תפוח אחד בשקלים, וב- y את מחירו של תפוז אחד. מתוך הנתונים על הקניות של אריק נוכל לקבל כי:

$$12x+5y=83$$

$$5y=83-12x$$

מתוך הנתון על הקניות של בני נוכל לדעת כי:

$$3x+10y=82$$

$$3x+2(83-12x)=82$$

$$3x+166-24x=82$$

$$84=21x$$

$$x=4$$

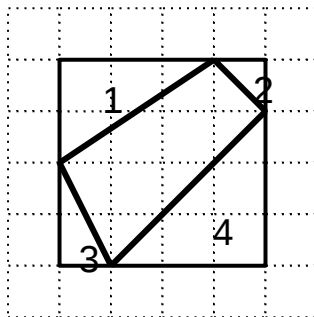
$$5y=83-12*4=83-48$$

$$5y=35$$

$$y=7$$

$$x+y=4+7=11$$

2. תשובה: 7



נצייר ריבוע מסביב לצורה. נקבל שהצורה מתקבלת מחיסור של ארבעה משולשים מתוך הריבוע הגדול, ששטחו $16=4 \times 4$. שטחי המשולשים הם:

$$S_1=2 \times 3 / 2 = 3$$

$$S_2=1 \times 1 / 2 = 0.5$$

$$S_3=1 \times 2 / 2 = 1$$

$$S_4=3 \times 3 / 2 = 4.5$$

ובסך הכל, נקבל ששטח הצורה הוא:

$$S=16-(3+0.5+1+4.5)=16-9=7$$

3. תשובה: 2

בכל מגירה יש 0 כדורים, כדור אחד או שני כדורים. כיוון שהמספרים לא תואמים את המגירות, הרי שבמגירה שמסומנת "0" יש כדור אחד או שניים. אם יש בה כדור אחד, אז הכדור השני נמצא באחת מהמגירות האחרות, אך שתי אלו מסומנות "1" ולכן לא יכולות להכיל כדור אחד. לכן במגירה המסומנת "0" יש שני כדורים.

4. תשובה: 1200

נסמן ב- x את מספר הנשים על האי, ומכאן שמספר הגברים שעל האי הוא $y=1900-x$. כיוון שמספר הנשים בתחרות שווה למספר הגברים, נוכל לדעת כי:

$$\frac{2}{3} * (1900-x) = \frac{3}{5} * x$$

$$10 * (1900-x) = 9x$$

$$19000-10x=9x$$

$$19x=19000$$

$$x=1000$$

כלומר, על האי יש 1000 נשים. מכאן שאם שלוש חמישיות מהן השתתפו בתחרות, אז מספר הרקדניות הוא 600, וזהו גם מספר הרקדנים הגברים. לכן מספר המשתתפים הכולל הוא $1200=600+600$.

5. תשובה: 28

מספר הצפופים שאורי ישמע הוא סכום מספרי הצפופים של כל שעון, פחות מספר הצפופים שנשמעו יחד. השעון הראשון מצפצף בסוף כל אחת מ-20 השניות, וביחד עם הצפצוף הראשון נקבל 21 פעמים. השעון השני מצפצף פעם בשנייה וחצי. 1.5 נכנס 13 פעמים ב-20, וביחד עם הצפצוף הראשון נקבל 14 צפופים. כעת נמצא את הצפופים הכפולים - אלו קורים פעם ב-3 שניות, כלומר 6 פעמים לאורך 20 שניות. וביחד עם הצפצוף הראשון, אלו שבעה צפופים כפולים. נסכם הכל יחד: $28=21+14-7$.

6. תשובה: 49

בשאלה מתוארות 5 קבוצות של תלמידים, כאשר כל תלמיד שקיבל כוכבים משתייך לאחת או יותר מהקבוצות האלו. תלמיד שקיבל מספר כלשהו של כוכבים משתייך לאותו מספר של קבוצות, ולכן מספר הכוכבים הכולל יהיה זהה לסכום גדלי כל הקבוצות: $49=20+17+8+3+1$.

7. תשובה: 15

באטמן מנקה בקצב של עשירית מערה בשעה, והקצב שלו יחד עם רובין הוא שישיית מערה בשעה. לכן הקצב של רובין לבד הוא ההפרש בין אלו:

$$1/6 - 1/10 = (10-6)/60 = 4/60 = 1/15$$

כלומר, רובין מנקה בקצב של $1/15$ מערות בשעה, או בקצב של מערה אחת ב-15 שעות.

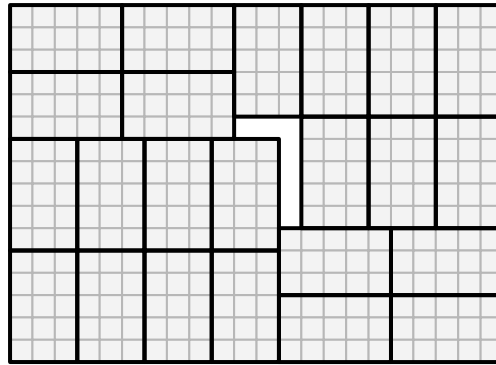
8. תשובה: 4

9	1	A
B	C	D
E	X	F

הסכום של שני תאים סמוכים הוא לכל היותר 11, ולכן המספרים היחידים שיכולים לבוא בסמיכות ל-9 הם 1 ו-2. מכאן שבתא B מופיעה הספרה 2. כעת נחשוב על מיקום הספרה 8. 8 יכול לבוא בסמיכות רק ל-1,2,3. כל תא סמוך לפחות לשני תאים אחרים, ולכן 8 חייב להיות סמוך ל-1 או 2 (או שניהם), כלומר, הוא נמצא ב-A, C או E. הוא לא יכול להיות ב-C כיוון שלתא זה יש שני שכנים נוספים (ובנוסף ל-1,2, הספרה 8 יכולה לבוא בסמיכות רק ל-3), ואם יהיה ב-E, הרי שבתא המסומן ב-X תוכל להיות רק הספרה 3, והיא אי-זוגית בניגוד לנתון. לכן 8 נמצא ב-A ובתא D מופיעה הספרה 3. התאים היחידים שנותרו ריקים הם C, E, F ו-X שלנו, והספרות שנותר לשבץ הן 4,5,6,7, ומבין אלו, רק 4 ו-6 הזוגיות יכולות להיות ב-X. התא X צמוד לכל שאר התאים שנותרו, ולכן המספר שישוּבץ שם יהיה סמוך לכל שאר הספרות, ובפרט ל-7. 6 לא יכול לבוא בסמיכות ל-7, ולכן הספרה היחידה שנותרה היא 4.

9. תשובה: 23

כל מלבן של 5×3 מורכב מ-15 משבצות, והלוח הגדול מורכב מ- $16 \times 22 = 352$ משבצות. לכן מספר המלבנים המקסימלי שיכול להיכנס הוא $23 = 352/15$ (עם שארית של 7). נראה כי אכן ניתן לסדר 23 מלבנים כאלו במלבן הגדול:



10. תשובה: 108

מובן ש-1 אינו מופיע במכפלה המקסימלית, כיוון שהוא אינו מגדיל את המכפלה ומוטב היה לחבר אותו לאחד מהמספרים האחרים. נוכיח שבמכפלה לא יכולים להופיע מספרים גדולים מ-4, כיוון שאם יש כאלו אז ניתן לפרק אותם עוד ולהגדיל את המכפלה: נניח בשלילה שכן מופיע מספר כזה. אזי ניתן לפרק אותו לסכום של 2 ועוד מספר x שגדול מ-2. המכפלה שלהם היא $2x$, שבהכרח גדול מ- $2+x$, ולכן עדיף לפרק את המספר הזה יותר. לכן במכפלה מופיעים רק 2, 3, 4. את 4 תמיד ניתן להחליף ב- 2×2 כיוון ש- $4 = 2 + 2$, ולכן אין צורך להשתמש בו. לכן המכפלה מורכבת רק מ-2 ו-3. אם הספרה 2 מופיעה במכפלה יותר מפעמיים, אזי ניתן לקחת 3 עותקים של 2 ולהחליף אותם ב-2 עותקים של 3 ובכך להגדיל את המכפלה ($3 \times 3 > 2 \times 2 \times 2$), ולכן 2 מופיעה לכל היותר פעמיים. הדרך היחידה ליצור את 13 כסכום של עותקים של 2 ו-3 ללא חזרה על 2 יותר מפעמיים היא $2+2+3+3+3=13$, ולכן המכפלה היא $108 = 3^3 \times 2^2$.

11. תשובה: 6

ניתן לראות כי בתרגיל הכפל שקיבלנו, S מוכפלת בכל פעם בספרה אחרת, וספרת היחידות של התוצאה לרוב יוצאת זהה לספרה שבה S הוכפל (ספרת היחידות של $S \times S$ היא S , ספרת היחידות של $S \times U$ היא U , ספרת היחידות של $S \times N$ היא N וספרת היחידות של $S \times I$ היא I). יש רק שתי ספרות שמקיימות זאת עבור הכפלה בכל כך הרבה ספרות שונות - הראשונה היא 1, שעובד כך עם כל ספרה. השנייה היא 6, שעובדת כך בהכפלה בכל ספרה זוגית ($0=0 \times 6$, $12=2 \times 6$, $24=4 \times 6$, $36=6 \times 6$, $48=8 \times 6$). כיוון שבהכפלה ב- M התכונה לא מתקיימת, הרי ש- S לא יכול להיות שווה ל-1 והוא בהכרח שווה ל-6.