

מבחן נבחרת צעירה א-2- פתרונות

שאלה 1

מר ישראלי בן 42 ובניו בני 12 שנים ו-16 שנים .
בעוד כמה שנים יהיה גיל האב שווה לסכום הגילים של בניו?

פתרון סופי

14

הסבר

עוד x שנים הם יהיו בני $16 + x$, $12 + x$, $42 + x$, ולכן אנחנו מחפשים פתרון למשוואה

$$42 + x = 12 + x + 16 + x$$

$$14 = x$$

ולכן הפתרון הוא 14.

שאלה 2

לכבוד יום הולדתו הביא אורי לכיתתו חטיפים. אם אורי יתן לכל ילד 4 חטיפים יישארו לו 20 חטיפים. אם הוא ייתן לכל ילד 6 חטיפים יחסרו לו 40 חטיפים .
כמה ילדים בכיתה?

פתרון סופי

30

הסבר

נסמן ב- x את מספר הילדים וב- S את מספר החטיפים. אז נתון ש-

$$4x = S - 20$$

$$6x = S + 40$$

ולכן אם נחסר משוואות נקבל $2x = 60$ ו- $x = 30$.

שאלה 3

מהירותה של מכונית גדולה פי 4 ממהירותו של רוכב אופניים. המכונית ורוכב האופניים יצאו באותו זמן מעיר A לעיר B במהירויות קבועות. המרחק בין שתי הערים הוא 200 ק"מ. המכונית הגיעה לעיר B ומיד נסעה בחזרה באותה מהירות.

באיזה מרחק מעיר A פגשה המכונית את רוכב האופניים בדרכה חזרה?

פתרון סופי

80 ק"מ.

הסבר

נסמן v_c את מהירות המכונית ו- v_r את מהירות הרוכב. נתון כי $v_c = 4v_r$. כשהם נפגשים, סכום המרחקים שהם עשו הוא בדיוק 400 ק"מ. נסמן ב- t את הזמן שהם נפגשו (אם זמן הפתיחה הוא 0). אזי

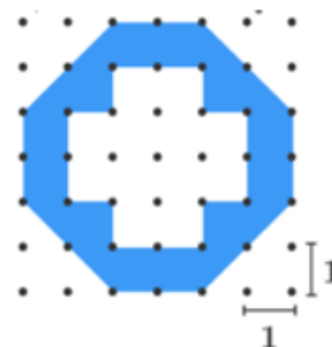
$$400 = t(v_c + v_r) = t \cdot 5v_r$$

$$80 = t \cdot v_r$$

ולכן הם ייפגשו במרחק 80 ק"מ מהעיר A.

שאלה 4

לפניכם ציור ובו נקודות עם מרווחים שווים. המרווח הוא בגודל 1 יחידה. מה השטח של הצורה הצבועה שלפניכם?



פתרון סופי

16.

הסבר

יש הרבה דרכים לחשב זאת. אנחנו נעשה זאת בדרך הבאה - באמצע יש סימן פלוס ששטחו 12 יחידות שטח. בפינות יש משולשים לבנים חסרים ששטחיהם 2. לכן $Blue = 12 + 4 \cdot 2 = 20$. זה השטח של ריבוע 6×6 שהוא 36 יחידות שטח. אזי $Blue = 36 - 12 - 8 = 16$.

שאלה 5

לשיעורי ריקודים באים 90 תלמידים : בנים ובנות. המורה חילק אותם לשלושים שלשות. בכל שלשה, כל אחד רוקד עם כל אחד פעם אחת, ותלמידים משלשות שונות לא רקדו זה עם זה. התברר, כי היו (בדיוק) 22 ריקודים של בן עם בן ו-38 ריקודים של בת עם בת.
כמה שלשות מעורבות היו, שבהן היו גם בנים וגם בנות?

פתרון סופי

15

הסבר

סך הכל יש 90 ריקודים (3 בכל שלישיה). 22 בן עם בן, 38 בת עם בת, ולכן 30 של בן עם בת. כל שלישיה שמכילה גם בנים וגם בנות, תתרום 2 לריקודים המעורבים. לכן יש 15 שלישיות מעורבות.

שאלה 6

על הלוח רשום מספר. בכל תור מותר לעשות אחד משני מהלכים–

- להחליף את המספר שרשום על הלוח במספר שגדול ממנו בסכום ספרותיו.
- לשנות את סדר הספרות של המספר.

לדוגמה, אם על הלוח יש את המספר 3 אז אין דרך לשנות את סדר ספרותיו והמהלך היחיד האפשרי הוא להחליף אותו במספר 6

(3 ועוד סכום הספרות שלו שהוא גם 3). לעומת זאת, אם על הלוח רשום 13, ניתן להחליף אותו במספר 31 או במספר 17.

אם על הלוח רשום המספר 1, אז מהו מספר המהלכים הקטן ביותר הנדרש לקבלת מספר גדול מ 120?

פתרון סופי

10

הסבר

נרשום כל פעם איזה מספרים חדשים יכולים להופיע בשלב הנתון:

1. 1

2. 2

3. 4

4. 8

5. 16

6. 61,23

7. 68,32,28

8. 82,86,37,38

9. 92,100,73,47,83,49

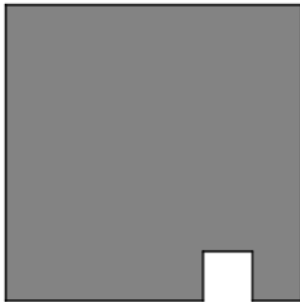
10. 103,101,83,58,74,94,62

11. ...301

אפשר לראות שבשלב ה-11 כבר מופיעים מספרים שגדולים מ-120 ולפני זה לא הופיעו כאלו. לכן צריכים 10 מהלכים כדי לעבור את 120.

שאלה 7

מריבוע גדול גזרו ריבוע קטן כפי שרואים בציור. היקף הצורה שהתקבלה גדול ב-10% מהיקף הריבוע המקורי.



בכמה אחוזים קטן שטחה של הצורה שהתקבלה משטח הריבוע המקורי?

הערה: הציור לא בפרופורציה הנכונה.

פתרון סופי

4%

הסבר

אם הריבוע הקטן מגודל $x \times x$ והגדול מגודל $y \times y$, אז הוספנו $2x$ להיקף של הגדול. כלומר $\frac{4y+2x}{4y} = 1.1$ ו- $\frac{x}{2y} = 0.1$. השטח של הצורה החדשה הוא $y^2 - x^2 = y^2 - (0.2y)^2 = y^2(1 - 0.04) = 0.96y^2$ כלומר שטח הצורה הוא 96% מהריבוע המקורי, והשטח קטן ב-4%.

שאלה 8

שחזרו תרגיל הכפל:

$$\begin{array}{r}
 \square \square \\
 \times \square \square \\
 \hline
 - \square \square 7 \\
 + \square \square \\
 \hline
 - \square \square \square \\
 \hline
 2 \square \square
 \end{array}$$

הזינו את השורה האחרונה בתרגיל.

פתרון סופי

247

הסבר

בגלל שספרת העשרות של שניהם היא לפחות 1 (אלו מספרים דו-ספרתיים), או שניהם 1 או שאחד מהם 1 והשני 2. איזה ספרות אחדות יכולות לתת 7 בתור ספרת אחדות של מכפלתן? 7, 1, 9, 3 הן היחידות. לכן אנחנו מסתכלים על האופציות

$$11 \times 17, 13 \times 19, 21 \times 17, 11 \times 27, 23 \times 19, 13 \times 29$$

קל לבדוק שחוץ מ- 13×19 ו- 11×27 כולן חורגות מהקטע 200 עד 299 (כלומר ספרת המאות של האחרים היא 1 או 3 ולא 2). איך מבדילים בין שני אלו? 11×27 לא מתאים בגלל השורה הראשונה של תרגיל החיבור, כי $100 < 1 \times 27, 11 \times 7$. לעומת זאת, $100 > 13 \times 9$ ואם נציב בשורה הראשונה 13 ובשנייה 19 נקבל

$$\begin{array}{r}
 1 \ 3 \\
 \times 1 \ 9 \\
 \hline
 - \\
 + 1 \ 1 \ 7 \\
 \hline
 - \\
 \hline
 2 \ 4 \ 7
 \end{array}$$

ולכן 247 היא התשובה.

שאלה 9

למרובע כלשהו יש צלע באורך 1 סנטימטר וצלע באורך 4 סנטימטרים. בנוסף, ציירו את אחד מאלכסוני המרובע וגילו שהוא מחלק את המרובע לשני משולשים שוויושוקיים, ושארך האלכסון הזה הוא 2 סנטימטרים.

מה היקפו של המרובע?

פתרון סופי

11 סנטימטרים.

הסבר

שתי הצלעות והאלכסון יכולים להיות באותו המשולש, או שהאלכסון משתתף במשולש אחד עם כל אחת מהן. משולש עם צלעות 1, 2, 4 אינו שווה שוקיים (האמת היא שהוא לא קיים לפי אי-שוויון המשולש, אבל לא צריך לדעת זאת כדי לפתור את החידה). לכן הצלעות מאורך 1 ו-4 נמצאות במשולשים שונים שחותך האלכסון. משולש עם אורכים 1, 1, 2 ו-2, 2, 4 הוא מנוון, ולכן כדי שיהיו שוויושוקיים צריך שיתקיים 1, 2, 2 ו-2, 4, 4. לכן המרובע מורכב מצלעות באורכים 1, 2, 4, 4 וסכום האורכים הללו (הלא הוא ההיקף) יוצא 11.

שאלה 10

שני אחים, גדול וקטן, מוכרים את עדר הכבשים שלהם. הם מכרו כל כבש במחיר ששווה למספר הכבשים שהיה בעדר המקורי.

לאחר מכן הם חילקו ביניהם את הכסף שקיבלו באופן הבא – תחילה לקח האח הגדול 10 שקלים מהכסף שקיבלו. לאחר מכן לקח האח הקטן 10 שקלים מהכסף שקיבלו. אחרי זה לקח שוב הגדול 10 שקלים מהכסף שקיבלו וכן הלאה.

לבסוף, הגיע תורו של האח הקטן, ונשארו פחות מ-10 שקלים בערימה. הוא לקח את הכסף שנותר. כדי להשוות את המצב ביניהם, נתן האח הגדול לאח הקטן עט שהיה לו בכיס.

כמה שווה העט שנתן האח הגדול לקטן אם בסוף הם השתוו, כלומר, אם סכום הכסף שקיבל הגדול פחות ערך העט שווה לסכום הכסף שקיבל הקטן ועוד ערך העט?

פתרון

2

הסבר

נסמן ב- p את מספר הכבשים שזה גם המחיר של הכבשים. לכן האחים קיבלו p^2 שקלים. הנתון אומר שהם חילקו את p^2 ביניהם עד שלא נשארו יותר עשיריות שלמות לחלק. העובדה שלא היה מספיק לעשירייה בתורו של האח הקטן, אומר שמספר העשיריות שהיה לחלק היה אי-זוגי, כלומר ספרת העשרות של p אי-זוגית. מצד שני, אם המחיר של העט הוא x , אז לאח הגדול היה בסוף 10 שקל יותר פחות מחיר העט x , ולאח הקטן היה את ספרת האחדות של p^2 ועוד x . לכן ספרת האחדות של p ועוד פעמיים x זה 10, וספרת האחדות של p היא זוגית. לאיזה מספרים בריבוע יש ספרת עשרות אי-זוגית וספרת אחדות זוגית? אם $p = 10y + t$ אז

$p^2 = 100y^2 + 20yt + t^2$ ולכן זה יקרה אם ורק אם t^2 יהיה מספר עם ספרת עשרות אי־זוגית וספרת אחדות זוגית. אפשר לבדוק לכל ספרה בין 0 ל-9 מה קורה (כי t זאת ספרת האחדות של p) ולראות שזה קורה רק כאשר $t = 4, 6$ ובמקרה זה ספרת האחדות יוצאת 6. $2x = 10 - 6 = 4$ ולכן $x = 2$.

שאלה 11

על כל משבצת של קובייה של $2 \times 2 \times 2$ גר עכביש. סך הכל 24 עכבישים. כל עכביש דובר אמת בלבד או דובר שקר בלבד.

יום אחד כל אחד מהם הודיע: "יש לי שכן שקרן". שכנים הם עכבישים במשבצות עם צלע משותפת.

מהו המספר המירבי האפשרי של עכבישים דוברי שקר על הקובייה?



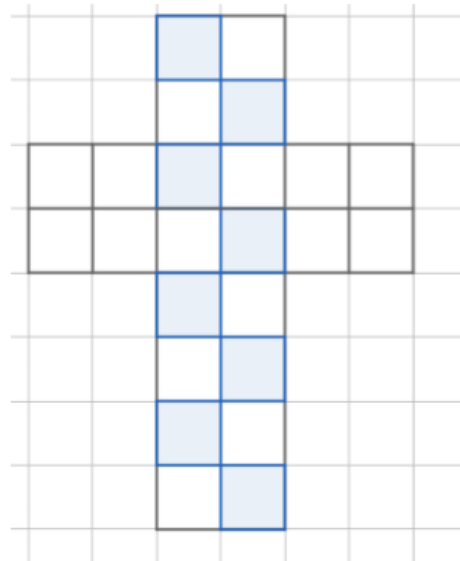
הסבר: בציוור הבא יש קובייה של $2 \times 2 \times 2$. לעכביש שנמצא על המשבצת האדומה הימנית העליונה יש 4 שכנים – אחד במשבצת הכחולה שמעליו, אחד בצהובה שמימינו, אחד באדומה שמתחתיו ואחד באדומה שמשמאלו.

פתרון סופי

8

הסבר

בגלל ששקרנים תמיד משקרים, סביב כל שקרן יש רק דוברי אמת. בכל פינה של קובייה יש שלושה עכבישים שכולם שכנים של כולם, לכן יש לכל היותר שקרן אחד בכל פינה. יש לקובייה 8 פינות ולכן יש לכל היותר 8 שקרנים. מצד שני, אפשר לסדר 8 שקרנים על הקובייה –



זוהי פרישה של הקובייה על המישור, והריבועים הכחולים זה איפה שגרים השקרנים.

שאלה 12

יאיר כפל את כל המספרים מ-1 עד 2019, החסיר מהתוצאה 1 ורשם את המספר שהתקבל על פס נייר ארוך. לאחר מכן, הוא החליף את אחת מהספרות של המספר ב-0 וקיבל מספר שמתחלק ב-13.

בני גילה לאחר מכן שהספרה שיאיר החליף היא אחת מ-10 הספרות הימניות של המספר – ספרת האחדות היא הימנית ביותר ומסומן מתחתיה 0, אחריה ספרת העשרות שהיא השנייה מימין ומסומן מתחתיה 1, לאחריה הספרה השלישית מימין היא המאות ומסומן מתחתיה 2 וכן הלאה.

סכמו את המיקומים של הספרות שיכול היה יאיר להחליף על פי התנאים בשאלה והזינו זאת בתשובה.

*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

פתרון סופי

$$1 + 7 = 8$$

הסבר

בגלל ש- $x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2019$ מתחלק ב- 10^{30} , כל הספרות האלו היו 0 לפני שחיסרו 1, ולכן הן כולן 9. בגלל ש- x מתחלק ב-13, ל- $x - 1$ יש שארית 12 בחלוקה ב-13. כעת, אפשר לבדוק מה שארית החלוקה ב-13 של $9 \cdot 10^k$ לכל k בין 0 ל-29 (זה בדיוק מסמל מה ישתנה אם נחליף 9 ב-0 במספר). התוצאה היא $9, 12, 3, 4, 1, 10, 9, 12, \dots$ ויש פה מחזור של 6. מכיוון שבמקום השני יש 12, אם נחליף את ספרת העשרות באפס המספר יתחלק ב-13, וכך יהיה נכון לכל ספרה שישית משם. כלומר ל-10 הספרות הראשונות, אפשר להחליף את ספרת העשרות המסומנת 1 והספרה של עשרות המיליונים שמסומנת ב-7. סכומן 8.