

פתרון מורחב מבחן א1 – נבחרת ישראל הצעירה – תשפ"ב

1. תשובה: 26

נסמן את מספר התרנגולות ב-x ומספר הפרות ב-y. מתוך הנתון הראשון נוכל לדעת כי:

$$x+y=45$$

$$y=45-x$$

מתוך הנתון השני נוכל לדעת כי:

$$2x+4y=128$$

$$2x+4(45-x)=128$$

$$2x+180-4x=128$$

$$52=2x$$

$$x=26$$

2. תשובה: 400

כל אחד משני הריבועים שבאיור מורכב משני חצאי עיגולים וארבע "פינות מעוקלות". אם נספור את סך החלקים האפורים - נוכל לראות שהם מורכבים בדיוק משני חצאי עיגול וארבע "פינות מעוקלות", ולכן סכום שטחיהם שווה לשטח אחד הריבועים. כיוון שרדיוס המעגל הוא 10 יחידות, הרי שקוטרו הוא 20 יחידות וזהו גם אורך צלע הריבוע. לכן שטח הריבוע, שהוא כאמור שווה לשטח האפור, הוא $400=20 \times 20$.

3. תשובה: 1

גם אבי וגם בני אומרים שלא אכלו את העוגיות. רק אדם אחד יכול היה לאכול את העוגיות, ולכן לפחות אחד מהם דובר אמת, ולפי נתוני השאלה - בדיוק אחד מהם דובר אמת. לכן גם גדי וגם דני משקרים - ומכאן שבני וגדי לא אכלו את העוגיות. אם בני לא אכל את העוגיות - הרי שהוא דובר אמת. לכן אבי משקר באומרו שלא אכל את העוגיות: אבי אכל את העוגיות שבקופסה.

4. תשובה: 12

נסמן את מספר הסוכריות שגיא אכל בדרכו חזרה מבית הספר ב-x. מכאן שבבית הספר הוא אכל $3x$ סוכריות, ובדרכו לבית הספר אכל פי שלושה יותר מ- $3x$, כלומר $9x$. כמות הסוכריות שגיא אכל בסך הכל לאורך כל היום היא:

$$9x+3x+x=13x$$

כאשר x הוא מספר שלם של סוכריות. אם $x=2$, הרי שגיא אכל $26=2 \times 13$ סוכריות, בסתירה לנתון בשאלה שבשקית שלו היו רק 25 סוכריות בתחילת היום. לכן בהכרח $x=1$, כלומר, גיא אכל $13=1 \times 13$ סוכריות לאורך היום, ובסוף היום נשארו לו $12=25-13$ סוכריות.

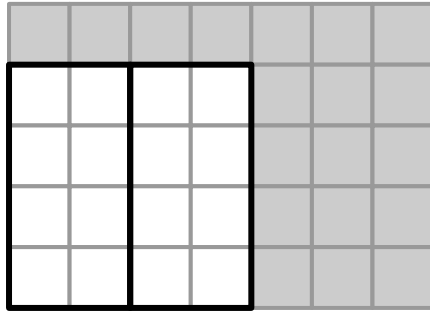
5. תשובה: 22

מהירותו של האצן הראשון היא $12=60/5$ הקפות בשעה, ומהירותו של האצן השני היא $10=60/6$ הקפות בשעה. האצנים רצים בכיוונים מנוגדים, ולכן המהירות היחסית שלהם היא $22=10+12$ הקפות בשעה, ומכאן שייפגשו 22 פעמים.

6. תשובה: 2

נתון כי סכום המספרים בשורה התחתונה הוא 7. הדרך היחידה ליצור את המספר 7 כסכום של שלושה מספרים טבעיים שונים היא $1+2+4=7$. לכן 1,2,4 הם המספרים שמופיעים בשורה התחתונה. בנוסף, אם נבדוק מהו סכום כל תשע הספרות מ-1 עד 9, נגלה שהוא 45. לכן, אם המספרים בשני הטורים הימני והשמאלי נסכמים ל- $32=14+18$, הרי שהטור האמצעי נסכם ל- $45-32=13$. נתון כי הספרה העליונה בטור זה היא 8, ולכן שתי הספרות הנותרות בטור נסכמות ל- $13-8=5$. שתי הדרכים היחידות להגיע לסכום של 5 בעזרת שתי ספרות הן $1+4$ או $2+3$. כיוון שאמרנו שגם 1 וגם 4 נמצאות בשורה התחתונה, לא ייתכן שהן הספרות שמסלימות את ה-5 החסר בטור האמצעי. לכן הספרות שמסלימות אותו הן 2 ו-3, ומבין אלו - רק 2 יכול להופיע בשורה התחתונה.

7. תשובה: 19



על מנת שנוכל להרכיב ריבוע, נצטרך להויתר מספר ריבועי (1,4,9,16,25...) של משבצות. על מנת שנוכל ליצור את הריבוע הזה משני חלקים זהים, המספר הריבועי המבוקש חייב להיות זוגי. המספר הריבועי הזוגי הגדול ביותר שהוא עדיין קטן ממספר קוביות השוקולד בטבלה ($35=5 \times 7$) הוא 16, ונוכל ליצור אותו בדומה ליצור. לכן נוכל לאכול $19=35-16$ קוביות.

8. תשובה: 7

מהירות הסירה במורד הנהר היא $8=24/3$ קמ"ש, ומהירותה במעלה הנהר היא $6=24/4$ קמ"ש. המהירות במורד הנהר מורכבת מסכום של מהירות הסירה במים רגועים ומהירות זרימת הנהר, והמהירות במעלה הנהר מורכבת מההפרש בין מהירות הסירה במים רגועים לבין מהירות זרימת הנהר. מכיוון שכך, מהירות הזרימה במים רגועים תהיה הממוצע בין שתי המהירויות האלו, כלומר 7.

9. תשובה: 7

בתחילת המשחק דניאלה מעבירה את הקלף העליון לתחתית הערימה ושולפת קלף. כעת יש בערימה 12 קלפים, ובכל שלב דניאלה מעבירה אחד לתחתית ושולפת את השני. המשמעות היא שהיא תשלוף את הקלפים בערימה לסירוגין, אחד לא ואחד כן, ומכיוון ש-12 הוא מספר זוגי, הרי שהקלף שבתחתית הערימה (זה שהתחיל בראש הערימה) יישלף כשדניאלה תגיע אליו. 12 קלפים הם שישה זוגות, ובנוסף לקלף הראשון שנשלף מקודם, הקלף שלנו יהיה הקלף השביעי להישלף.

10. תשובה: 2

נפרק את 216 לגורמים ראשוניים. נקבל $216=2^3 \times 3^3$ - כלומר, כל מחלק שלו מורכב מכפולות של 2 ו-3. המחלק המשותף הגדול ביותר של N עם 216 הוא 4, ולכן N מתחלק ב-4, אך אינו מתחלק ב-3. ידוע גם ש- $1+N$ מתחלק ב-3. לכן $2+N$ שוב אינו מתחלק ב-3. בנוסף, אם N מתחלק ב-4, הרי שהוא זוגי, ולכן גם $2+N$ זוגי, אך אינו מתחלק ב-4 (אלא רק עם שארית של 2). לכן, אם $2+N$ מתחלק ב-2 ולא ב-4, ואינו מתחלק ב-3 כלל, הרי שהמחלק המשותף הגדול ביותר שלו עם 216 הוא 2.

11. תשובה: 1

כיוון ש- $S+S$ פעם נותן T ופעם R, הרי שבחיבור הראשון היתה תוצאה גדולה מ-9 והעברה של 1 לספרה הבאה. לכן $S+S < 9$, כלומר $S < 4$. מכאן שגם בחיבור השני יש העברה של 1 הלאה, מה שנותן $O+O+1=O$, או $0=1+O$ בספרת המאות. לכן בהכרח $9=O$. זה אומר ש-S יכול להיות רק 5,6,7 או 8. בדיקה של כל אחת מ-4 האפשרויות האלו מוכיחה מיד מה ערכן של שאר האותיות, ומתוך ארבע האפשרויות הללו - רק אחת עובדת ללא התנגשויות, והיא $S=7$. הצבה מהירה של שאר הספרות נותנת את התרגיל $71954+35977+35977=71954$, כלומר $1=P$.