

מבחן נבחרת צעירה א-1 - פתרונות

שאלה 1

בגנון יש 10 בנים ו-15 בנות. המשקל הממוצע של הבנים הוא 15 ק"ג, המשקל הממוצע של הבנות הוא 10 ק"ג.

מהו המשקל הממוצע של כל הילדים בגן?

פתרון סופי

12 ק"ג.

הסבר

סכום המשקלים הוא $10 \cdot 15 + 15 \cdot 10 = 300$ ולכן הממוצע הוא $12 = \frac{300}{25}$.

שאלה 2

בתוך מלבן חסומים 5 עיגולים שהרדיוס של כל אחד הוא 1.2 ס"מ.
מה השטח של החלק הצבוע באפור? עגלו לשלם הקרוב ביותר.



פתרון סופי

6

הסבר

הרדיוס של המעגלים הוא 1.2 ולכן גובה המלבן הוא 2.4 ורוחב המלבן 12. אזי שטח המלבן הוא $2.4 \times 12 = 28.8$ ושטחי העיגולים הוא $5 \cdot (1.2)^2 \pi \approx 22.62 = 5 \cdot 1.44 \cdot \pi$ ולכן ההפרש הוא קצת יותר מ-6, וזאת התשובה

שאלה 3

רוכב אופניים יצא במהירות של 18 קמ"ש בשעה 8:00 מעיר A לכיוון העיר B.

שעתיים לאחר מכן יצאה מכונית, גם היא מעיר A לעיר B. הן נפגשו בפעם הראשונה שעה לאחר יציאת המכונית.

המכונית הגיעה לעיר B שעתיים אחרי שיצאה לדרך, נשארה בעיר B במשך שעה ואז התחילה דרכה חזרה לעיר A באותה מהירות בה נסעה בדרך הלוך.

רוכב האופניים עצר בדרך, אחרי רכיבה של 72 ק"מ ונשאר באותו המקום למשך מספר שעות. המכונית ורוכב האופניים נפגשו בפעם השנייה כאשר הייתה המכונית בדרך חזרה.

באיזו שעה נפגשו בפעם השנייה? כתבו את התשובה בצורה 00:00

פתרון סופי

13 : 40

הסבר

בגלל שהמכונית והרוכב נפגשים פעם ראשונה בשעה 11 : 00, ניתן להסיק כי המכונית נוסעת במהירות של $54 = 18 \cdot 3$ קמ"ש. בגלל שהיא הגיעה ל-B תוך שעתיים, המרחק בין הערים הוא 108 ק"מ. לפי הנתון היא התחילה את נסיעתה חזרה ל-A בשעה 13 : 00, כי היא יצאה מ-A ב-10 : 00 ואמרו שיצאה חזרה אחרי 3 שעות. כמה זמן ייקח למכונית לעבור $108 - 72$ ק"מ? בדיוק $\frac{2}{3}$ שעה, שזה 40 דק'. לכן התשובה היא 13 : 40.

שאלה 4

אתמול נכחו בכיתה פי 7 תלמידים יותר מאשר חסרו. היום חסרו עוד שלושה תלמידים בנוסף לאלו שחסרו אתמול. מתברר היום שמספר התלמידים החסרים מהווה רבע ממספר התלמידים הנוכחים. כמה תלמידים יש בכיתה ביום שכולם נוכחים?

פתרון סופי

40

הסבר

נתון כי יש $8x$ ילדים בכיתה ו- x מהם חסרו ביום הראשון. ביום השני חסרו $x + 3$ ילדים ונתון ש- $\frac{x+3}{7x-3} = \frac{1}{4}$ ולכן $4x + 12 = 7x - 3$ ולכן $3x = 15$ ו- $x = 5$. אז יש סה"כ 40 ילדים בכיתה.

שאלה 5

השלימו את תרגיל הכפל הבא. כל ריבוע מייצג ספרה כלשהי (לאו דווקא אותה ספרה).

			1	2	6
		×		□	□
—	—	—	—	—	—
			□	□	□
+	□	□	□	□	
—	—	—	—	—	—
	1	□	2	□	6

הזינו את השורה האחרונה מלאה.

פתרון סופי

10206

הסבר

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccc}
 & & 1 & 2 & 6 \\
 & \times & & 8 & 1 \\
 \hline
 & & 1 & 2 & 6 \\
 + & 1 & 0 & 0 & 8 \\
 \hline
 & 1 & 0 & 2 & 0 & 6
 \end{array}
 \end{array}$$

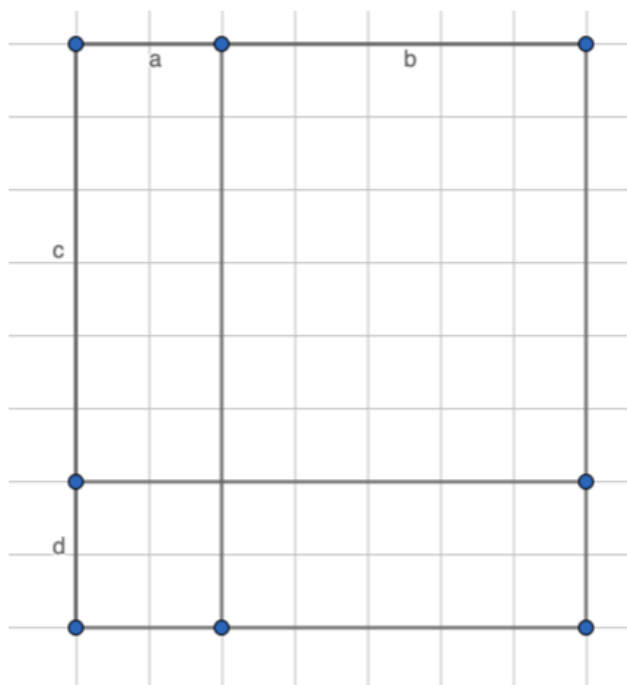
שאלה 6

על דף משבצות שבו כל משבצת מגודל 1×1 סנטימטר סימנו מלבן לפי קוי הרשת (בפרט, אורכי צלעותיו הם מספר שלם של סנטימטרים). לאחר מכן, חתכו את המלבן ל-4 מלבנים ע"י שני חיתוכים לפי קווי הרשת. גיא בדק ומצא שהמכפלה של שלושה שטחים מבין אלו של ארבעת המלבנים שהתקבלו יוצאת 30. מהו ההיקף של המלבן המקורי? מצאו את הפתרון הקטן ביותר.

פתרון סופי

26

הסבר



סימנו את החלוקה של הצלעות כך שצלע אחת נחתכה ל- a, b והשנייה ל- c, d . מכיוון שנתון שהכל לפי קוי המשבצות, a, b, c, d מספרים שלמים חיוביים. מכפלת השטחים של שלושה מהמלבנים חייבת להיות $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. מהריבוע היחיד שמחלק את 30 הוא 1, בוודאות $a = d = 1$. לכן נותר למצוא את b, c שמכפלתם 30 ותתן את המלבן עם ההיקף הקטן ביותר. ההיקף הוא $2(a + b + c + d) = 4 + 2b + 2d$ ולכן אנו מחפשים מתי $b + d$ מינימלי כאשר $bd = 30$ והם כולם שלמים. אפשר לעבור על כל האפשרויות ולראות שזה קורה כאשר $b, d = 5, 6$ ולכן ההיקף הוא $7 + 7 + 6 + 6 = 26$.

שאלה 7

לכל מספר שלם חיובי אפשר לחשב את הערך הבא: (סכום ספרותיו) $\times$ (מספר ספרותיו). לדוגמה, עבור 15, סכום ספרותיו הוא 6 ומספר ספרותיו 2 ולכן הערך שנקבל הוא 12. מצאו את המספר השלם החיובי הקטן ביותר עבורו הערך הזה יוצא 154.

פתרון סופי

1000399

הסבר

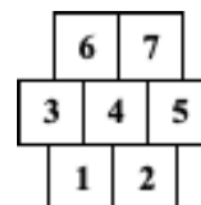
נשים לב כי $154 = 11 \cdot 14 = 11 \cdot 7 \cdot 2$, לכן אנחנו מחפשים מספר שמקיים אחד מהתנאים הבאים

- סכום ספרות 154, מספר ספרות 1.
- סכום ספרות 77, מספר ספרות 2.
- סכום ספרות 22, מספר ספרות 7.
- סכום ספרות 14, מספר ספרות 11.
- סכום ספרות 11, מספר ספרות 14.
- סכום ספרות 7, מספר ספרות 22.
- סכום ספרות 2, מספר ספרות 77.
- סכום ספרות 1, מספר ספרות 154.

סידרנו את האפשרויות לפי גודל המספר (יותר ספרות, מספר יותר גדול). אין מספר חד ספרתי שסכום ספרותיו 154, ואין מספר דו-ספרתי שסכום ספרותיו 77. לכן האופציה הקטנה ביותר האפשרית היא אופציה שלוש, שבה יש מספר 7 ספרתי שסכום ספרותיו 22. כלומר אנחנו חייבים לשים לפחות 1 בספרה השביעית, ואת שאר הסכום נמלא מהאחדות ושמאלה כדי למזער את המספר. לכן 1000399 הוא הקטן ביותר שמקיים זאת.

שאלה 8

מחילה מורכבת מ-7 חדרים ריבועיים ממוספרים (ראו ציור). בכל חדר נמצאת נסיכה או נמר או אף אחד. יש פחות חדרים עם נסיכות מאשר חדרים ריקים. בכל שלישית חדרים בה לכל שניים יש (חתיכת) קיר משותף, יש לפחות נמר אחד ולפחות נסיכה אחת (דוגמה לשלישית חדרים כזאת – 4, 6, 7).



הזינו מספר חדר בו שוכנת נסיכה.

פתרון

רק בחדר מספר 4.

הסבר

השלישיות היחידות של חדרים שכולם סמוכים זה לזה, כולן מכילות את 4. אם ב-4 אין נסיכה, אז בחדרים 1, 2, 3, 5, 6, 7 חייבות להיות לפחות 3 נסיכות, כי יש 6 שלישיות וכל חדר משתתף בבדיקת 2 מהן. מכיוון שיש 7 חדרים, ולפחות נמר אחד (אחרת בשלישיות אין נמרים בסתירה לנתון), יש לכל היותר 3 חדרים ריקים, וזה בסתירה לנתון שאמר שיש יותר חדרים ריקים מחדרים עם נסיכות. לכן ב-4 יש נסיכה. הטיעון ממקודם לגבי הנסיכות מבטיח כי יש לפחות 3 נמרים (כי אין נמר ב-4, אבל יש נמר בכל שלישיה). לכן יש לכל היותר 3 חדרים ריקים. אז אם הייתה אפילו נסיכה אחת נוספת לא היו יותר חדרים ריקים מחדרים עם נסיכות. לכן אין עוד נסיכות.

שאלה 9

מצולע נקרא קמור אם כל אחת מזוויתיו קטנה מ- 180° . אם סכום הזוויות הקהות של מצולע קמור

הוא 2020° כמה צלעות יש למצולע?

פתרון סופי

14

הסבר

אם לוקחים מצולע ומחלקים אותו למשולשים, קל להשתכנע שהוא מתחלק ל- $n-2$ משולשים אם היו לו n צלעות. לכן במצולע עם n צלעות יש סכום זוויות $(n-2) \cdot 180^\circ$. קל לבדוק שיש לכל היותר 4 זוויות שאינן קהות במצולע קמור – אם מסמנים ב- x את מספר הזוויות שאינן קהות אז $180^\circ = (n - \frac{x}{2})180^\circ \leq (n-x) \cdot 180 + x \cdot 90$ והאי-שוויון הראשון מגיע מכך שזווית אינה קהה היא עם לכל היותר 90 מעלות וכל הזוויות הקהות קטנות ממש מ- 180 (כלומר כל עוד המצולע עם לפחות 5 צלעות יש לכל היותר 3 זוויות שאינן קהות). לכן סכום הזוויות של המצולע הוא בין 2020 לבין $2290 = 2020 + 3 \cdot 90$. מכיוון שסכום הזוויות הוא כפולה של 180, ויש רק אחת כזאת בטווח הנתון, $2160 = 180 \cdot 12$, אנו מקבלים כי $n-2 = 12$ כלומר $n = 14$.

שאלה 10

חשבו את המספר הבא

$$\frac{4 \cdot 10^{2019} - 1}{4 \cdot \underbrace{3 \dots 3}_{2019 \text{ digits}} + 1}$$

הוא מספר שלם.

$$\underbrace{3 \dots 3}_{2019 \text{ digits}}$$

הוא המספר שמכיל 2019 ספרות שכולן 3.

כאשר

פתרון סופי

3

הסבר

המספר $10^{2019} - 1 = \underbrace{9 \dots 9}_{2019 \text{ digits}} = 3 \cdot (\underbrace{3 \dots 3}_{2019 \text{ digits}})$ אזי אפשר להחליף את $\underbrace{3 \dots 3}_{2019 \text{ digits}}$ ב- $\frac{10^{2019}-1}{3}$. נציב זאת בביטוי ונקבל

$$\frac{4 \cdot 10^{2019} - 1}{4 \cdot \left(\frac{10^{2019}-1}{3}\right) + 1} = \frac{3(4 \cdot 10^{2019} - 1)}{4 \cdot (10^{2019} - 1) + 3} = 3 \cdot \frac{4 \cdot 10^{2019} - 1}{4 \cdot 10^{2019} - 1} = 3$$

שאלה 11

על הלוח רשומים מספרים: 1, 2, ..., 2019. מבצעים 2018 פעולות. הפעולה ה- i ית היא להחליף שני מספרים a ,

להרשומים על הלוח במספר $\frac{ab}{n}$

מהו המספר שיישאר על הלוח בסוף?

דוגמה: במהלך הראשון אפשר להחליף את 5, 7 ב- $\frac{5 \cdot 7}{1} = 35$. לאחר מכן אפשר לקחת את 3 ו-1 ולהחליפם

ב $\frac{1 \cdot 3}{2} = 1\frac{1}{2}$ אחר כך אפשר לבחור את $1\frac{1}{2}, 35$ ולקבל $17\frac{1}{2}$ $\frac{1\frac{1}{2} \cdot 35}{3}$ וכן הלאה.

פתרון סופי

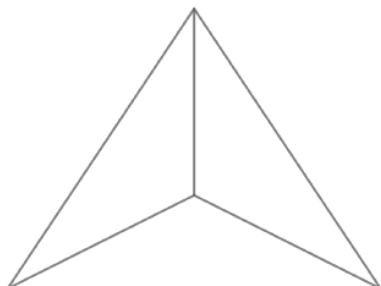
2019

הסבר

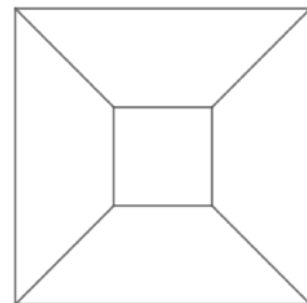
בסוף התהליך הכפלנו מצד אחד את כל המספרים שהיו רשומים על הלוח, ומצד שני חילקנו ב-1, 2, 3, ..., 2018. לכן המספר שיישאר בסוף הוא 2019.

שאלה 12

דינה ישבה אחר הצהריים וציירה לעצמה במחברת צורות. תחילה, היא ציירה שלוש נקודות וחיברה אותן בקווים ישרים כדי לקבל משולש. בתוכו היא ציירה נקודה, וחיברה את הנקודה וקדקדי המשולש בקווים ישרים. כשהיא סיימה לשרטט, מכל נקודה שהיא סימנה (כולל קדקדי המשולש) יצאו בדיוק 3 קטעים והיו רק משולשים בצורה, שלושה במספר.



לאחר מכן, היא החליטה לנסות לעשות את אותו הדבר עם מרובעים. היא התחילה מלצייר ריבוע באמצע הדף. בתוך הריבוע הוסיפה נקודות, חיברה אותן ביניהן ולקודקודי הריבוע כך שמכל נקודה יצאו בדיוק 3 קטעים והציור היה מורכב כולו ממרובעים, בסך הכל חמישה מרובעים פנימיים.



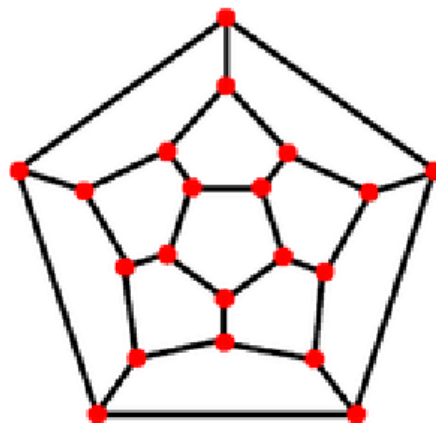
לבסוף היא עשתה את אותו הדבר עם מחומשים, כלומר, ציירה מחומש משוכלל, בתוכו סימנה נקודות, חיברה את חלקן בקווים ישרים ובסוף מכל נקודה יצאו 3 קטעים והיו בציור רק מחומשים. כמה מחומשים יצאו לה בציור? (איננו סופרים את המחומש המשוכלל החיצוני, רק הפנימיים, כפי שהיה במקרים הקודמים).
הערה: בציור של דינה, חיתוך של ישרים הוא נקודה, כלומר קטעים לא יכולים לעבור אחד מעל השני.

פתרון סופי

11

הסבר

קודם כל יש פתרון ב-11:



למה הפתרון הזה הוא מינימלי? מצד אחד אנחנו יודעים שכל צלע משתתפת בשני מחומשים חוץ מה-5 החיצוניות שמשתתפות רק ב-1. לכן אם מסמנים ב- f את מספר המחומשים וב- e את מספר הצלעות מקבלים כי $e = \frac{(f+1) \cdot 5}{2}$. כלומר e מתחלק ב-5. מצד שני כל קדקוד הוא מפגש של 3 צלעות וכל צלע משתתפת בשני קדקדים ולכן אם נסמן ב- v את מספר הקדקדים נקבל כי $e = \frac{3v}{2}$, כלומר e מתחלק ב-3. אם בודקים את שאר האילוצים שמקבלים מהתנאים הללו מגיעים למסקנה ש- $f+1$ מתחלק ב-6 וש- v מתחלק ב-10. אז הפתרון הקטן ביותר האפשרי שהאריזמטיקה מציעה הוא $f+1=6, e=15, v=10$. פתרון זה לא אפשרי, אלא רק לראות שזה נסביר כאן וקשורות ל"מאפיין אוילר" של גרפים מישוריים (הילדים לא צריכים להסביר למה זה לא אפשרי, אלא רק לראות שזה לא מצליח להם כשהם מנסים לצייר). הפתרון הבא $f+1=12, e=30, v=20$ אפשרי והוא מה שמצויר פה למעלה.

